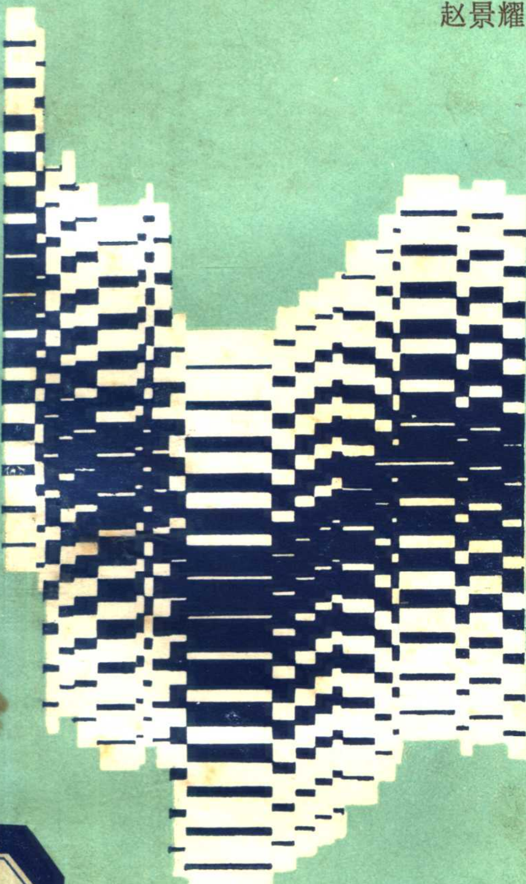
日本新高中数学研究丛书 4

映射与函数

〔日〕寺田文行 著

赵景耀 译



文化教育出版社

书号　7057·034
定价　0.46元

日本新高中数学研究丛书 4

映射与函数

[日] 寺田文行 著
赵景耀 译

文化教育出版社

内容提要

这套丛书，译自日本旺文社出版的新高中数学研究丛书，原书共分十五册，书中除有中学数学传统题材外，还包括了一些较新的内容。

本册主要内容有函数和图象、二次函数的图象、最大、最小，二次方程、二次不等式，分式函数、无理函数的图象、方程、不等式、平移和对称变换、映射、逆映射和反函数等。叙述比中学数学教材广泛、深入、易懂，可供中学数学教学研究人员、中学数学教师、中学学生在研究、教学或自学中参考。

日本新高中数学研究丛书 4

映 射 与 函 数

[日] 寺田文行 著

赵景耀 译

*

文化教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京市房山县印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 6.125 字数 120,000

1981 年 3 月第 1 版 1981 年 11 月第 1 次印刷

印数 1—6,000

书号 7057·034 定价 0.46 元

(限国内发行)

译 者 的 话

这套丛书，译自日本旺文社出版的新高中数学研究丛书，原书共分十五册，我们译出了其中的第二册至第十三册，本册是第四册．丛书包括了中学数学教材中一些较新的内容．

这套丛书的特点是比教材内容广泛深入、易懂．对基础知识作了系统整理、归纳概括、重视典型例题的解题方法、解题要点、思考方法的研究，可供我国中学数学教师和高中学生研究参考．

这套丛书是由我院教研部组织辽宁师范学院数学系、沈阳师范学院数学系、沈阳市教育学院数学系等单位合译的，最后由我院教研部刘春、钱永耀、刘占元同志负责审校工作．本册由沈阳师范学院赵景耀译出．

由于时间仓促以及译者和校者水平所限，缺点错误，恐难避免．希望读者提出宝贵意见．

辽宁教育学院

1980 年 8 月

前　言

映射的概念，是贯穿高中数学 I 的重要支柱之一．函数是从实数集合到实数集合的映射．平面上图形的移动(变换)可以理解为从平面上的点集到平面上的点集的映射．反之，通过函数图象或图形的移动(变换)，可以使映射的概念更易于理解．

本书是从把函数看作映射开始，首先，对二次函数及其应用，分式函数、无理函数的各种性质以及它们的图象，作了充分的解说．接着展望了图形的平移，对称移动等．最后，以一般的映射、逆映射和反函数做结束．

本书的目的在于使所述内容比教科书

更加广泛，更加深入，更加易懂．

因此，有些也接触到教科书所未涉及的内容．

本书的体例是以每节为单元，采取

解说→例题→发展题→练习

的形式．在每数节后给出一些习题，作为训练实际能力的资料．在这些问题中，收集了很多大学入学试题以及将来要研究的问题．

如果本书能使更多的人成为数学爱好者，则著者感到不胜欣慰．

最后，对在本书的编著上给予大力帮助的东海大学须田贞之先生表示谢忱．

著　　者

几 点 说 明

如前言所述，本书是一本独具风格的参考书．它既能使苦于学习数学的人容易理解，又能使擅长数学的人对数学更加爱好．为此，本书的结构编排如下．

主张划分细目

本书的各部分尽量划分细目，凡披阅所及均能一目了然；在解说时，既能配合教科书，又写得

比较广泛，比较深人，比较易懂．

在解说后的提要中，归纳出重要公式．因此，希望在理解解说的同时，必须记住这些公式．另外，用竖线把版面分成两部分，在左边列出重要项目，以便提高学习效率．在印有*的部分，是属于高中还没学到的内容或程度较高的内容．

例题→发展题→练习

本书的最大特点是，力求在理解解说的基础上，反复学习例题、发展题、练习题，使在不知不觉中增强解决问题的实际能力．虽然从例题到发展题依次提高难度，但在解法和要点指出了思考方法和解题要领，因此，希望读者要反复学习，使对这两种问题，达到几乎能够背诵的程度．总之，学习数学最重要的是

要逐步积累学习方法．

为此，建议读者要反复进行学习．如果前面的内容都能掌握，那么解练习题时就不会感到什么困难．反之，如果不大会解练习题，那就应该认为学习的还不够深刻．

习题

分 A, B 两部分. A 的程度相当于例题和发展题; B 中还包含稍难的问题. 因为在高考试题中, 这种程度的题目出的最多, 所以, 对于准备高考的读者, 这是不可缺少的问题.

虽然常说, 学数学背下来也没有用, 但那是指机械的背诵. 本书不提倡单纯的记忆. 对于数学, 在适当指导"怎样进行思考"之后, 应记忆应用范围较广泛的知识. 深切地希望本书的读者, 能真正理解数学, 从而获得广泛应用数学的实际本领.

目　录

重要词汇一览表

1. 函数和图象

映射与函数

当给出使集合$\boldsymbol{A}$的每一个元素，有而且只有集合$\boldsymbol{B}$的一个元素与它对应的规则时，则把这个对应规则叫做从$\boldsymbol{A}$到$\boldsymbol{B}$的**映射**．这时，也包括$\boldsymbol{A}$的不同元素对应$\boldsymbol{B}$的同一元素的情形．

特别是，当$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$都是实数集合时，则把从$\boldsymbol{A}$到$\boldsymbol{B}$的映射叫做**函数**，用字母f, g，F，φ等表示．

根据函数f，使$\boldsymbol{A}$的元素x对应$\boldsymbol{B}$的元素y这一事实，用

$$f: x \to y \quad 或 \quad y=f(x)$$

来表示，叫做y是x的函数或叫做x的函数$f(x)$等．

变域与值域

这时，$\boldsymbol{A}$叫做x的**变域**或函数$f(x)$的**定义域**，y的集合叫做f的**值域**．

$f(x)=2x+1$是使x有$2x+1$与之对应的函数．这个函数的定义域是全体实数，值域也是全体实数．

假如$g(x)=\dfrac{1}{x-1}$，则g是使x有$\dfrac{1}{x-1}$与之对应的函数．这个函数的定义域是除掉1的全体实数，值域是除掉0的全体实数．

还有，如果$\varphi(x)=\sqrt{x}+1$，则φ就是使x有$\sqrt{x}+1$与之对应的函数．这个函数的定义域是非负实数的全体，值域是不小于1的一切实数．

一般地，如果对x的变域加以限制，则值域也受到限制．

函数的图象

有函数f，设$y=f(x)$．在平面上取直角坐标系，我们把以$(x,f(x))$为坐标的所有点的集合叫做$y=f(x)$的**图象**．

这时，定义域是x轴上的某些点的集合，值域是y轴上的某些点的集合．

设函数$f(x)$的定义域是x轴上的连续的点集合，并且a是它的一点，如果当x趋近于a时，$f(x)$趋近于$f(a)$，就说这个函数在a**连续**．

在定义域的每个点都连续的函数的图象是连续的线．

函数与数表

象这样，函数可以用图象来表示．函数还可以用数表来表示．

例如，平方根表表示函数

$$f:x\to\sqrt{x},\quad 即\quad f(x)=\sqrt{x};$$

对数表表示函数

$$f:x\to\lg x,\quad 即\quad f(x)=\lg x.$$

函数的复合

存在定义域为A，值域为B的函数f；定义域为B，值域为C的函数g．

设

$$f: x \to y, \quad g: y \to z.$$

这时，使A的x有C的z与之对应的函数$z=g(f(x))$是确定的．这个函数叫做f和g的复合函数，用$g\circ f$来表示．

即

$$g\circ f: x \to z, g\circ f(x)=g(f(x)).$$

例如，当

$$f: x \to x-1, g: x \to x^2$$

时，由于

$$f: x \to x-1, g: x-1 \to (x-1)^2,$$

因此，

$$g\circ f: x \to (x-1)^2.$$

$$\therefore \quad g\circ f(x)=(x-1)^2.$$

又，顺便指出，由于

$$g: x \to x^2, f: x^2 \to x^2-1,$$

因此，

$$f\circ g: x \to x^2-1.$$

$$\therefore \quad f\circ g(x)=x^2-1.$$

这就是说，$g\circ f$与$f\circ g$是不同的函数．

提　　要

(1) 函数：使实数集合A的元素有实数集合B的元素与之对应的规则

$$f: x \to y, y=f(x) \qquad (x\in A, y\in B)$$

(2) 函数　$y=f(x)$的图象：点$(x, f(x))$的集合．

(3) 函数　$y=f(x), z=g(y)$的复合

$$g\circ f: x \to z, g\circ f(x)=g(f(x)).$$

例题 1. 设函数 $f(x)$ 是以 0 和一切自然数的集合为定义域.

已知 $f(0)=0$, 当 x 为自然数时, $f(x)$ 表示 x 除以 5 所得的余数.

(1) 求 $f(3)$, $f(7)$, 并作出这个函数的图象.

(2) 研究下列各命题是否正确?

(i) 对于任意自然数 x, $f(x+5)=f(x)$.

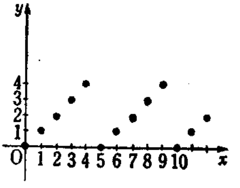
(ii) 对于任意自然数 x, y, $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

(iii) 对于任意自然数 x, $f(f(x))=f(x)$.

解法 注意当 $x=5m+n$(m, n 是 0 或自然数, $0\leqslant n<5$)时, $f(x)=n$, $f(x)$ 的值域是 $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

解 (1) $3=5\times 0+3$, $7=5\times 1+2$.

$\therefore\ f(3)=3, f(7)=2.$



(2) (i) 设 x 除以 5 所得商为 m, 余数为 n, 则

$$x=5m+n\ (m, n \text{ 是 0 或自然数}, 0\leqslant n<5).$$

从而, $x+5=5(m+1)+n$ ($m+1$ 是自然数).

$$\therefore\ f(x)=n, f(x+5)=n.$$

即 $f(x)=f(x+5)$.

命题正确.

(ii) 由于 $x+y$ 是自然数, 因此, $0\leqslant f(x+y)<5$. 虽然 $0\leqslant f(x)<5$, $0\leqslant f(y)<5$, 但是未必有 $f(x)+f(y)<5$. 例如 $x=3$, $y=7$ 时.

所以,命题不正确.

(iii) 设 $x=5m+n$, 则 $f(x)=n$.

由于 $n=0, 1, 2, 3, 4$, 因此,

$$f(n)=n.$$

$$\therefore \quad f(f(x))=f(n)=n.$$

所以, $f(f(x))=f(x)$.

命题正确.

发展题

设实数 $x(x\geqslant 0)$除以3的商的整数部分为 $f(x)$.

(1) 作 $y=f(x)$的图象.

(2) 作 $y=\dfrac{x}{3}-f(x)$的图象.

要点

(1)注意, 当$0\leqslant x<3$时, $f(x)=0$. 当$3\leqslant x<6$时, $f(x)=1$. 这样, x每增加3, $f(x)$增加1.

解 假定用3除 x 所得商的整数部分是 m, 则

$$3m\leqslant x<3(m+1).$$

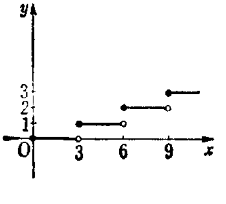
这时,

$$f(x)=m.$$

令 $m=0, 1, 2, \cdots$

当 $0\leqslant x<3$ 时,

$$f(x)=0.$$



当 $3\leqslant x<6$ 时，

$$f(x)=1.$$

当 $6\leqslant x<9$ 时，

$$f(x)=2.$$

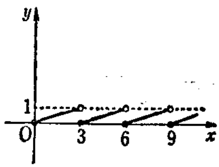
……………………………

因此，图象如上页图.

在(2)中，对于(1)的每一区间，把 $f(x)$ 用 x 的式子表示出来.

(2) 当 $3m\leqslant x<3m+1$ 时，

$$y=\frac{x}{3}-m.$$



这个方程表示斜率是 $\frac{1}{3}$ 的直线.

如果令 $x=3m$，则 $y=0$.

令 $m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$，可以得到上图.

练习 (答案153页)

1. 指出例题1和发展题中每个函数的定义域和值域.
2. 符号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 即如果 n 是整数，$n\leqslant x<n+1$，则 $[x]=n$. 试作出下列各函数的图象.

   (1) $y=[x]$. (2) $y=x-[x]$.

   〔注意〕 符号 $[x]$ 叫做**高斯符号**.

例题 2. 设对于一切实数定义的函数 $f(x)$ 满足下列的关系(i), (ii).

(i) $f(0)=0$, 如果 $x\neq0$, 则 $f(x)>0$.

(ii) $f(xy)=f(x)f(y)$.

证明下列关系(1)～(4), 并回答(5).

(1) $f(1)=1$. (2) $f(-1)=1$. (3) $f(-x)=f(x)$

(4) 对于某个 a, 如果 $f(a)>1$, 则 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)<1$.

(5) 试举出满足关系(i), (ii)的函数的实例.

解法 在求 $x=1$, -1 的 $f(x)$ 的值时, 把特定值 1, -1 等代入关系(ii)中的 x, y, 再用(i)的"若 $x\neq0$, 则 $f(x)>0$"即可求得.

解 (1) 在条件(ii)中, 如果令 $x=1$, $y=1$, 则

$$f(1)=f(1)f(1).$$

由于在条件(i)中, 当 $x\neq0$ 时 $f(x)>0$, 因此, $f(1)\neq0$. 所以, 如果用 $f(1)$ 除上式的两边, 则

$$1=f(1).$$

(2) 在条件(ii)中, 令 $x=-1$, $y=-1$, 则

$$f(1)=[f(-1)]^2,$$

$$\therefore\quad [f(-1)]^2=1.$$

根据条件(i), 由于 $f(-1)>0$, 因此,

$$f(-1)=1.$$

(3) 在条件(ii)中, 令 $y=-1$, 如果使用(2) 的结果, 则

$$f(-x)=f(x)f(-1)=f(x).$$

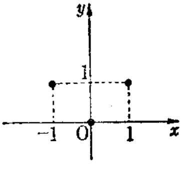
(4) 在条件(ii)中, 如果令 $x=a$, $y=\frac{1}{a}$, 则

$$f(1)=f(a)f\left(\frac{1}{a}\right).$$

$$\therefore\quad f(a)f\left(\frac{1}{a}\right)=1.$$

由于 $f(a)>1$, 因此,

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{f(a)}<1.$$



(5) 这个函数的图象关于 y 轴对称. 通过右图的三点. 联系(4), 可举例如下:

$$f(x)=x^2.$$

发展题

设 $f(x)$是以全体实数为定义域的函数, 并且对于任意实数 x, y 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$. 试证:

(1) $f(0)=0$. (2) $f(-x)=-f(x)$.

(3) 当 n 是任意整数时, $f(nx)=nf(x)$.

(4) 当 r 是任意有理数时, $f(rx)=rf(x)$.

要点

在给出的等式中, 设 x, y为0, 则得(1).

令$y=-x$, 则得(2).

令$y=x$, 当$n=2$时, 显然(3)成立.

解 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ ①

(1) 在①中, 令 $x=0$, $y=0$, 则

$$f(0)=2f(0).$$

$$\therefore\quad f(0)=0.$$

(2) 在①中, 令$y=-x$, 如果注意 $f(0)=0$, 则

$$0=f(x)+f(-x).$$

$$\therefore\quad f(-x)=-f(x).$$

(3) 在①中，如果令 $y=x$，则

$f(2x)=f(x)+f(x)=2f(x)$.

设 k 为正整数，则

$$f((k+1)x)=f(kx+x)$$
$$=f(kx)+f(x).$$

如果使 k 顺次取 2, 3, 4, …，则关于任意的正整数n，下面的等式显然成立：

$$f(nx)=nf(x).$$

当 n 是负整数时，如果令

$$n=-m,$$

则

$$f(nx)=f(-mx)$$
$$=f(m(-x)).$$

由于m是正整数，因此，

$$f(m(-x))=mf(-x).$$

$\therefore\ f(nx)=-mf(x)=nf(x).$

又，当 $n=0$时，由(1)知，等式成立。

(4) 如果令$r=\dfrac{n}{m}$(m, n 是整数)，则由(3)得

$$mf\left(\frac{n}{m}x\right)=f\left(m\times\frac{n}{m}x\right)$$
$$=f(nx)=nf(x).$$

$$\therefore\quad f\left(\frac{n}{m}x\right)=\frac{n}{m}f(x).$$

练习 （答案 153 页）

3. 对于 x, y 的所有实数值，函数 $f(x)$ 满足下列三个等式 (1)，(2)，(3)．当 n 是任意整数时，试求 $f(n)$．

(1) $f(x+y)=f(x)f(y)$．　　(2) $f(0)=1$．

(3) $f(1)=2$．

例题 3. 对于 $f_1(x)=x$，$f_2(x)=\dfrac{1}{x}$，$f_3(x)=1-x$，$f_4(x)=\dfrac{1}{1-x}$，$f_5(x)=1-\dfrac{1}{x}$，$f_6(x)=\dfrac{x}{x-1}$，$f_i \circ f_j = f_i(f_j(x))$ $(i, j=1, 2, \cdots, 6)$ 确定时，试证下列等式成立：

(1) $f_4=f_2 \circ f_3$．　　(2) $f_5=f_3 \circ f_2$．

(3) $f_6=f_3 \circ (f_2 \circ f_3)=(f_3 \circ f_2) \circ f_3$．

解法 关键是把 $f_2 \circ f_3$，$f_3 \circ f_2$ 等用 x 表示出来．

解 (1) $f_2 \circ f_3 = f_2(f_3(x))$

$$=\frac{1}{f_3(x)}=\frac{1}{1-x}.$$

$$\therefore \quad f_2 \circ f_3 = f_4.$$

(2) $f_3 \circ f_2 = f_3(f_2(x))$

$$=1-f_2(x)=1-\frac{1}{x}.$$

$$\therefore \quad f_3 \circ f_2 = f_5.$$

(3) 由(1)得

$$f_3 \circ (f_2 \circ f_3) = f_3 \circ f_4 = f_3(f_4(x))$$

$$=1-f_4(x)=1-\frac{1}{1-x}=\frac{-x}{1-x}.$$

由(2)得

$$(f_3\circ f_2)\circ f_3=f_5\circ f_3=f_5(f_3(x))$$
$$=1-\frac{1}{f_3(x)}=1-\frac{1}{1-x}=\frac{-x}{1-x}.$$

$\therefore\quad f_3\circ(f_2\circ f_3)=(f_3\circ f_2)\circ f_3=f_6.$

研究 就 i, j 的所有组求 $f_i\circ f_j$. 我们用写在 f_i 的右边、f_j的下边的字母来表示 $f_i\circ f_j$, 如右表. 作为练习, 试加以验证.

$f_i \backslash f_j$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3	f_6	f_5
f_3	f_3	f_5	f_1	f_6	f_2	f_4
f_4	f_4	f_6	f_2	f_5	f_1	f_3
f_5	f_5	f_3	f_6	f_1	f_4	f_2
f_6	f_6	f_4	f_5	f_2	f_3	f_1

发展题

关于实数 x 的一次式 $f(x)=Ax+B$ 和 $g(x)=Cx+D$, 用 P 表示命题: "复合函数 $f(g(x))$与 $g(f(x))$相等", 用 Q 表示命题: "$f(g(0))$与 $g(f(0))$相等".

(i) 试证Q是P的必要条件.

(ii) 试证Q是P的充分条件.

重点

在(i)中证明: 如果有P, 则有Q. 在(ii)中证明: 如果有Q, 则有P.

解 $f(g(x))=Ag(x)+B$
$$=A(Cx+D)+B$$
$$=ACx+(AD+B)\qquad ①$$
$$g(f(x))=Cf(x)+D$$
$$=C(Ax+B)+D$$
$$=ACx+(BC+D)\qquad ②$$

(i) 由于①和② 的 x 的系数相等, 因此,

如果 $f(g(x))\equiv g(f(x))$, 则
$$AD+B=BC+D.$$

$\therefore \quad f(g(0))=g(f(0)).$

所以，Q是P的必要条件.

(ii) 如果 $f(g(0))=g(f(0))$，则

$$AD+B=BC+D.$$

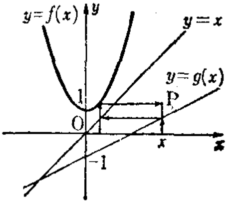
从而，由于①和②的右边恒相等，因此，

$$f(g(x))\equiv g(f(x)).$$

所以，Q是P的充分条件.

练习 （答案153页）

4. 设 $f(x)=x^2+1$，$y(x)=\frac{1}{2}x-1$. 右图指出了从这些函数的图象出发，作复合函数 $f(g(x))$ 的图象上任意一点的方法. 试说明理由，并利用此法作 $f(g(x))$ 的图象.



2. 二次函数的图象

二次函数

当 $f(x)$ 是 x 的二次式时，则把 $f(x)$ 叫做**二次函数**．如

$$y=x^2, \qquad y=2x^2,$$

$$y=-x^2, \qquad y=-\frac{1}{2}x^2$$

等，是简单的二次函数．关于这些函数的图象，在初中时已经学过．一般地，

$$\boldsymbol{y=ax^2(a\neq 0)} \qquad ①$$

的图象，是以原点为顶点，关于 y 轴对称，**如果 $a>0$，则为下凸的，如果 $a<0$，则为上凸**的抛物线．把对称轴叫做抛物线的**轴**．

当把这个曲线上的各点沿 x 轴方向平移 m，沿 y 轴方向平移 n，顶点移到点 (m, n) 时，我们来研究曲线将成为什么样函数的图象．

设经过上述平移，点 (x, y) 移到点 (x', y')，则

$$x'=x+m, \quad y'=y+n.$$

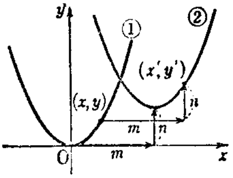
从而，

$$x=x'-m, \quad y=y'-n.$$

如果点 (x, y) 是①的图象上的点，则由于 x，y 满足 $y=ax^2$，因此，

$$y'-n=a(x'-m)^2.$$

$$\therefore\quad y'=a(x'-m)^2+n.$$



这个等式表明，(x', y') 满足

标准形

$$y=a(x-m)^2+n \qquad ②$$

因此，使曲线 $y=ax^2$ 沿 x 轴方向平移 m，沿 y 轴方向平移 n 所得到的曲线可用②来表示.

从而，当二次函数表成②的形式时，则它的图象是与①同形、同大、同向凸，对称轴是 $x=m$，顶点是 (m,n) 的抛物线.

一般式

二次函数的最一般式是

$$y=ax^2+bx+c(a\neq0) \qquad ③$$

它可以变形为②的形式：

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$$

$$=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right]+c$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$$

标准变形 $\therefore \quad y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}.$

将此式与②作比较,则由于

$$m=-\frac{b}{2a}, \qquad n=-\frac{b^2-4ac}{4a},$$

因此,③的图象是与①同形、同大、同向凸.

对称轴是 $x=-\dfrac{b}{2a}$,

顶点是 $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$

的抛物线.

二次函数的图象,由二次项决定凹凸方向、形状、大小,由其他各项决定位置.

提　　要

(1) $y=ax^2(a\neq 0)$.

是以原点为顶点,以 y 轴为轴的抛物线.

如果 $a>0$, 　则下凸;

如果 $a<0$, 　则上凸.

(2) $y=a(x-m)^2+n(a\neq 0)$.

是以点(m, n)为顶点,以直线 $x=m$ 为轴的抛物线.

(3) $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

是以点$\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$为顶点,以直线$x=-\dfrac{b}{2a}$为轴的抛物线.

例题 4. 试求下列抛物线的对称轴的方程和顶点的坐标.

(1) $y=x^2+4x+1$. (2) $y=-2(x+1)(x-3)$.

解法 将(1)化成标准形即可. 在(2)中, 由于容易得知曲线与 x 轴的交点坐标, 因此, 不必化成标准形.

解 (1) $y=x^2+4x+1=(x+2)^2-3$.

所以, 对称轴是 $x=-2$, 顶点是$(-2, -3)$.

(2) 令 $y=0$, 则 $x=-1, 3$.

所以, 曲线与 x 轴相交于两点: $(-1, 0)$, $(3, 0)$.

由于对称轴通过以这两点为端点的线段的中点, 因此,

$$x=\frac{-1+3}{2}, \quad 即 \quad x=1.$$

当 $x=1$ 时, $y=-2(1+1)(1-3)=8$. 所以, 顶点的坐标是$(1, 8)$.

发展题

平移抛物线 $y=2x^2$, 求通过两点$(1, 3)$, $(4, 9)$时的方程.

要点

所求曲线的方程可用

$y=2x^2+bx+c$

表示.

解 由于平移二次项不变, 因此, 所求的方程可写成如下的形式:

$$y=2x^2+bx+c.$$

当 $x=1$ 时, $y=3$; 当 $x=4$ 时, $y=9$.

$$\therefore \quad 2+b+c=3,$$
$$32+4b+c=9.$$

解这个方程组，得

$$b=-8,\ c=9.$$

所以，所求的方程是

$$y=2x^2-8x+9.$$

练习 （答案 153 页）

5. 试求以直线 $x=3$ 为对称轴，以点 $(3,-2)$ 为顶点，通过点 $(5,6)$ 的抛物线方程.

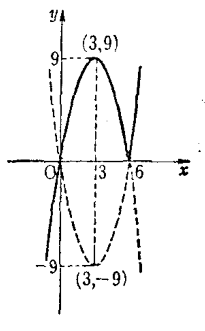
例题 5. 作下面函数的图象.

$$y=x|x-6|.$$

解法 注意下式:

$$|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0\text{ 时}),\\ -a & (a<0\text{ 时}).\end{cases}$$

把 $|x-6|$ 写成不含绝对值符号的式子.



解 当 $x\geqslant 6$ 时，$|x-6|=x-6$.

$\therefore\quad y=x(x-6)=(x-3)^2-9$ ①

当 $x<6$ 时，$|x-6|=-(x-6)$.

$\therefore\quad y=-x(x-6)$

$=-(x-3)^2+9$ ②

①是以点 $(3,-9)$ 为顶点、下凸的抛物线；②是以点 $(3,9)$ 为顶点、上凸的抛物线. 所给函数的图象是右图中用实线表示的曲线.

发展题

作下面函数的图象.

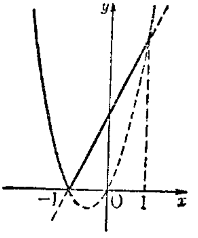
$$y=(x+1)^2+|x^2-1|.$$

要点

分$|x|\geqslant 1$和$|x|<1$的情况．写成不含绝对值符号的式子．

解　当$x\leqslant -1$, $x\geqslant 1$时，

$$y=(x+1)^2+x^2-1$$
$$=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}.$$



当$-1<x<1$时，

$$y=(x+1)^2-x^2+1$$
$$=2x+2.$$

因此，图象如上图中的实线部分．

练习　(答案 153 页)

6. 当$f(x)=x^2-2x-3$时，作下列函数的图象．

(1) $y=f(|x|)$.　　　(2) $y=\frac{1}{2}[f(x)+|f(x)|]$.

3. 二次函数的最大、最小

二次函数的最大、最小

二次函数 $y=a(x-m)^2+n$ 的图象，是以点(m, n)为顶点的抛物线，如果 $a>0$，则下凸，如果 $a<0$，则上凸．从而可知此函数

当 $a>0$ 时，在 $x=m$ 处取最小值 n；

当 $a<0$ 时，在 $x=m$ 处取最大值 n．

这个事实，根据$(x-m)^2\geqslant0$（$x=m$ 时取等号）也是很显然的．

当 $a>0$ 时，由于 $a(x-m)^2\geqslant0$，因此，

$$a(x-m)^2+n\geqslant n.$$

$$\therefore\quad y\geqslant n.$$

在 $x=m$ 时等号成立．对于其他 x，由于 $y>n$，因此，y 的最小值是 n．

当 $a<0$ 时，由于 $a(x-m)^2\leqslant0$，因此，

$$a(x-m)^2+n\leqslant n.$$

$$\therefore\quad y\leqslant n.$$

由于只在 $x=m$ 时等号成立，因此，n 是最大值．

又，当$|x|$无限增大时，$(x-m)^2$取正值，并随之无限增大，从而，可得如下结果．

当 $a>0$ 时，$a(x-m)^2$为正，并可以任意大，因此，y 也可以任意大，所以没有最大值．

当 $a<0$ 时，$a(x-m)^2$ 为负，由于它的绝对值可以任意大，因此，y 可以任意小，所以没有最小值.

用一般式给出的二次函数

当二次函数用

$$y=ax^2+bx+c \qquad ①$$

表示时，把它变形，得

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} \qquad ②$$

因此，这个二次函数

最小值

当 $a>0$ 时，在 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 处取最小值

$$-\frac{b^2-4ac}{4a},$$

没有最大值；

最大值

当 $a<0$ 时，在 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 处取最大值

$$-\frac{b^2-4ac}{4a},$$

没有最小值.

求二次函数①的最大值或最小值时，只要记住这时的 x 取 $-\dfrac{b}{2a}$ 即可. 但是，由于常常有遗忘的情况，因此，最好能够随时地由①推导出②.

如果记住了 $x=-\dfrac{b}{2a}$，则把它代入①，就可以如下面那样求出最大值或最小值.

$$y=a\cdot\frac{b^2}{4a^2}+b\left(-\frac{b}{2a}\right)+c$$
$$=-\frac{b^2}{4a}+c$$
$$=-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

［注意］ 如果利用在数学II中学习的微分法，则不仅对二次函数，就是对一般函数也能简单地求出函数值从增加到减少或从减少到增加时的点的坐标.

提　　要

(1) $y=ax^2+bx+c$

$$=\boldsymbol{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}}.$$

(2) 当 $\boldsymbol{a}>0$ 时，在 $\boldsymbol{x}=-\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}$ 处最小，最小值是

$$-\frac{\boldsymbol{b^2-4ac}}{\boldsymbol{4a}}.$$

(3) 当 $\boldsymbol{a}<0$ 时，在 $\boldsymbol{x}=-\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}$ 处最大，最大值是

$$-\frac{\boldsymbol{b^2-4ac}}{\boldsymbol{4a}}.$$

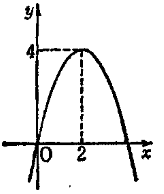
例题6. 求下列函数的最大值或最小值.

(1) $y=x(4-x)$.　　(2) $y=\frac{1}{2}x^2+2x-1$.

解法　最好化成标准形 $y=a(x-m)^2+n$. 但是，在(1)的情况下，图象与 x 轴相交于点 $x=0, 4$ 是很明显的. 只要注意到

对称轴通过这两点的中点，问题即可解决.

解 (1) 令 $y=0$，则 $x=0, 4$.



由于这个函数的图象与 x 轴交于两点 $(0,0)$，$(4,0)$，因此，对称轴是

$$x=\frac{0+4}{2}, \text{ 即 } x=2.$$

又由于 x^2 的系数为负，因此，图象为上凸的. 所以，这个函数在 $x=2$ 时取最大值

$$y=2(4-2)=4.$$

(2) $y=\frac{1}{2}x^2+2x-1$

$$=\frac{1}{2}(x^2+4x+4)-2-1$$

$$=\frac{1}{2}(x+2)^2-3\geqslant-3 \text{ (在 } x+2=0 \text{ 时等号成立).}$$

所以，这个函数在 $x=-2$ 时取最小值 -3.

发展题

当 $x+y-2z+1=0$，$x-y-3=0$ 时，试求二次函数 $\omega=x^2-3y-z-3$ 的最小值.

要点

根据前面给出的二式，用 x 表示 y，z. 则 ω 就成为 x 的二次函数.

解 $x+y-2z+1=0$ ①

$x-y\quad-3=0$ ②

两边相加，得

$$2x-2z-2=0.$$

$\therefore\quad z=x-1.$

又由②得 $y=x-3.$

因此，

$$\omega=x^2-3(x-3)-(x-1)-3$$
$$=x^2-4x+7$$
$$=(x-2)^2+3.$$

所以，当 $x=2$，$y=-1$，$z=1$ 时，ω 取最小值 3.

发展题

二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 满足下列条件，试确定 a，b，c 的值.

$$f(-1)=f(3)=0,\ \text{最小值是}-5.$$

要点

因为函数有最小值，所以，$a>0$. 又因为最小值是 -5，所以，

$$-\frac{b^2-4ac}{4a}=-5.$$

因为 $f(-1)=f(3)=0$，所以，可得两个方程.

解 因为 $f(-1)=f(3)=0$，所以，

$$a-b+c=0 \quad ①$$
$$9a+3b+c=0 \quad ②$$

由于最小值是 -5，因此，

$$a>0,\ -\frac{b^2-4ac}{4a}=-5.$$

$$\therefore\quad b^2-4ac=20a \quad ③$$

由①，②得

$$b=-2a,\ c=-3a \quad ④$$

代入③得

$$4a^2+12a^2=20a,$$
$$16a^2=20a.$$

由于 $a\neq0$，因此，

$$16a=20,\ \therefore\ a=\frac{5}{4}.$$

它满足 $a>0$ 的条件.

代入④得

$$b=-\frac{5}{2},\ c=-\frac{15}{4}.$$

研究　因为 $f(-1)=f(3)=0$，所以，$y=f(x)$的图象与 x 轴交于点 $x=-1$，3. 从而，函数可以表示为

$$f(x)=a(x+1)(x-3)\ (a>0).$$

所以，在 $x=\frac{-1+3}{2}=1$ 时取最小值.

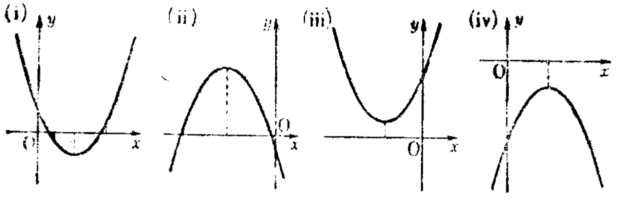
由最小值是 -5 的条件，得

$$f(1)=a(1+1)(1-3)$$
$$=-4a=-5.$$

由此确定 a. 从而确定 $f(x)$.

发展题

图(i)，(ii)，(iii)，(iv)是对 a, b, c 给出各种值时的二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象. 试指出在各种情况下，a，b，b^2-4ac 的正负如何.



要点

下凸 $\to a>0$，上凸 $\to a<0$。

图象的最高点或最低点是

$$\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right).$$

b^2-4ac 的正负，可以用图象与 x 轴相交或不相交来判断。

解 (i) 因为 $a>0$, $-\dfrac{b}{2a}>0$,

$-\dfrac{b^2-4ac}{4a}<0$. 所以，$a>0$, $b<0$, $b^2-4ac>0$.

(ii) 因为 $a<0$, $-\dfrac{b}{2a}<0$,

$$-\frac{b^2-4ac}{4a}>0,$$

所以，$a<0$, $b<0$, $b^2-4ac>0$.

同样地，

(iii) $a>0$, $b>0$, $b^2-4ac<0$.

(iv) $a<0$, $b>0$, $b^2-4ac<0$.

练习 （答案 154 页）

7. 试求下列函数的最大值或最小值.

(1) $y=(x+1)(x-4)$. (2) $y=1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{3}$.

8. x 的函数 $y=x^2+px+q$ 的图象通过点 $(-2,\ 5)$，函数的最小值是 -4. 试求 p, q.

例题 7. (1) x 的函数 $2x^2+3mx+2m$ 的最小值 y 是 m 的什么样的函数?

(2) 对于这个 m 的函数 y, m 取何值时最大? 求出这个最大值.

解法 把给出的二次函数化为标准形即可. 由于最小值是 m 的二次函数，并且 m^2 的系数为负，因此，有最大值.

解　(1) $2x^2+3mx+2m=2\left(x^2+\frac{3m}{2}x\right)+2m$

$$=2\left[x^2+\frac{3m}{2}x+\left(\frac{3m}{4}\right)^2\right]-2\left(\frac{3m}{4}\right)^2+2m$$

$$=2\left(x+\frac{3m}{4}\right)^2-\frac{1}{8}(9m^2-16m).$$

这个函数在 $x=-\frac{3m}{4}$ 时取最小值，最小值是

$$y=-\frac{1}{8}(9m^2-16m).$$

(2) $y=-\frac{9}{8}\left(m^2-\frac{16}{9}m\right)$

$$=-\frac{9}{8}\left[m^2-\frac{16}{9}m+\left(\frac{8}{9}\right)^2\right]+\frac{9}{8}\times\left(\frac{8}{9}\right)^2$$

$$=-\frac{9}{8}\left(m-\frac{8}{9}\right)^2+\frac{8}{9}\leqslant\frac{8}{9}.$$

(在 $m=\frac{8}{9}$ 时等号成立)

所以，当 $m=\frac{8}{9}$ 时，取最大值 $\frac{8}{9}$.

研究　在求 y 的最大值时，也可以根据满足 $9m^2-16m+8y=0$ 的实数 m 的存在条件，判别式 $\geqslant 0$，即

$$16^2-4\times9\times8y\geqslant0$$

来求出 y 的界限.

练习　(答案 154 页)

9. 填下面的 □.

a 取所有实数，当 $a=$□ 时，抛物线 $y=x^2+ax-a$ 的顶点的纵坐标为最大. 并且，抛物线的顶点在曲线 $y=$□ 上移动.

4. 在限定变域上的最大、最小

最大值、最小值

关于二次函数 $y=ax^2+bx+c$，当 x 取所有实数值时的最大值、最小值，在前节已经学过了.

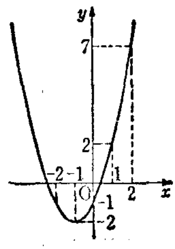
可是，当限定 x 的取值范围(变域)时，说法自然有所不同.

例如，考虑 $y=x^2+2x-1$. 由于它可以变形为

$$y=(x+1)^2-2,$$

因此，在 $x=-1$ 时取最小值 -2，而没有最大值.

在包含两端点的区间上的最大、最小



但是，如果设 x 的变域为 $0\leqslant x\leqslant 1$，则从右图可以看出，在 $x=0$ 时，函数值 $y=-1$ 是最小值，在 $x=1$ 时的函数值 $y=2$ 是最大值.

又，设变域为 $-2\leqslant x\leqslant 2$，由于 $x=-1$ 被包含在这个区间内，因此，在 $x=-1$ 时的值 $y=-2$ 仍是这个区间上的最小值，在区间的端点 $x=2$ 的值 $y=7$ 是最大值.

一般的二次函数在限定变域上的最

一般地，考虑 $y=ax^2+bx+c$ 在区间 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ 的值时，利用图象也较为方便.

大、最小

由于这个函数图象关于直线 $x=-\frac{b}{2a}$ 对称，因此，函数值的最大、最小如下.

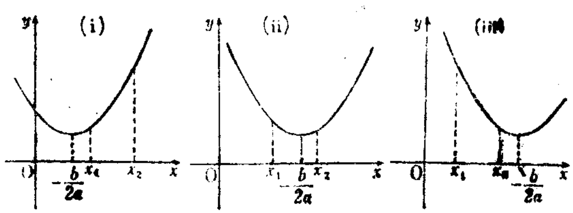
a>0的情形

当 $a>0$ 时，

(i) 如果 $-\frac{b}{2a}<x_1<x_2$，则在 $x=x_1$ 时最小，在 $x=x_2$ 时最大.

(ii) 如果 $x_1\leqslant-\frac{b}{2a}\leqslant x_2$，则在 $x=-\frac{b}{2a}$ 时最小，在距离 $-\frac{b}{2a}$ 较远的端点最大.

(iii) 如果 $x_1<x_2<-\frac{b}{2a}$，则在 $x=x_1$ 时最大，在 $x=x_2$ 时最小.



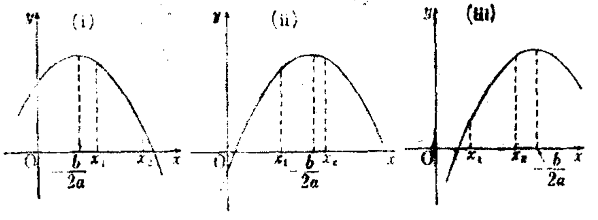
a<0的情形

当 $a<0$ 时，

(i) 如果 $-\frac{b}{2a}<x_1<x_2$，则在 $x=x_1$ 时最大，在 $x=x_2$ 时最小.

(ii) 如果 $x_1\leqslant-\frac{b}{2a}\leqslant x_2$，则在 $x=-\frac{b}{2a}$ 时最大，在距离 $-\frac{b}{2a}$ 较远的端点最小.

(iii) 如果 $x_1 < x_2 < -\dfrac{b}{2a}$，则在 $x=x_1$ 时最小，在 $x=x_2$ 时最大.



不包含端点的区间

如果 x 的变域为 $x_1 \leqslant x < x_2$ 或 $x_1 < x \leqslant x_2$ 或 $x_1 < x < x_2$ 时，由于出现不取端点值的情形，因此，在这些区间不一定有最大值、最小值.

提　　要

函数 $y=ax^2+bx+c$

(1) 当区间 $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ 不包含 $-\dfrac{b}{2a}$ 时，则在区间的端点取最大值、最小值.

(2) 当区间 $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ 包含 $-\dfrac{b}{2a}$ 时，则在这个点取最大值(或最小值)，在距离这个点较远的端点取最小值(或最大值).

例题 8. 试求 x 在括号内指定的范围变动时二次函数的最大值和最小值.

(1) $f(x)=x^2+4x \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$.

(2) $f(x)=2x^2-6x+5 \quad (0 \leqslant x \leqslant 2)$.

解法 化成标准形，讨论完全平方部分的取值范围即可．下面用这种方法解解看．

解 (1) $f(x)=(x+2)^2-4$.

由于 $-1\leqslant x\leqslant 1$, 因此, $1\leqslant x+2\leqslant 3$.

$$\therefore\quad 1\leqslant (x+2)^2\leqslant 9.$$

$$\therefore\quad -3\leqslant f(x)\leqslant 5.$$

当 $x=-1$ 时, $f(x)=-3$; 当 $x=1$ 时, $f(x)=5$.

所以, $f(x)$ 在 $x=-1$ 时取最小值 -3; 在 $x=1$ 时取最大值 5.

(2) $f(x)=2(x^2-3x)+5$

$$=2\left[x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]-2\left(\frac{3}{2}\right)^2+5$$

$$=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}.$$

由于 $0\leqslant x\leqslant 2$, 因此,

$$-\frac{3}{2}\leqslant x-\frac{3}{2}\leqslant\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad 0\leqslant\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\leqslant\frac{9}{4}.$$

$$\therefore\quad 0+\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 2\times\frac{9}{4}+\frac{1}{2}.$$

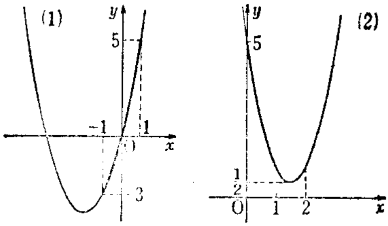
即 $\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 5.$

当 $x=\dfrac{3}{2}$ 时, $f(x)=\dfrac{1}{2}$; 当 $x=0$ 时, $f(x)=5$.

所以, $f(x)$ 在 $x=\dfrac{3}{2}$ 时取最小值 $\dfrac{1}{2}$; 在 $x=0$ 时取最大值 5.

研究　$y=f(x)$的图象如下图，指定范围的部分用粗线表示.

如果象(2)的情况那样，函数 $f(x)$ 取最小值的点在指定的范围内，则这个最小值就是在这个范围内的最小值，而在距离这个点较远的端点取最大值.



但是，如果象(1)的情况那样，当取最小值的点在指定范围之外时，则在距离这个点较近的端点取最小值，在距离这个点较远的端点取最大值.

发展题

y 是与 $x+1$ 的平方成比例的数以及与 x 成比例的数之和. 当 $x=1$ 时，$y=14$；当 $x=-2$ 时，$y=-1$. 试求当 x 在 $-5\leqslant x\leqslant 2$ 的范围取值时，y 的最大值和最小值.

要点

设$y=a(x+1)^2+bx$ (a, b为常数).

当$x=1$时，$y=14$；当$x=-2$时，$y=-1$. 由此即可确定a, b.

解　由题意，得

$$y=a(x+1)^2+bx.$$

当 $x=1$ 时，$y=14$.

$$\therefore\quad 4a+b=14 \qquad ①$$

当 $x=-2$ 时，$y=-1$.

$$\therefore\quad a-2b=-1 \qquad ②$$

由①，②得

$$a=3,\ b=2.$$

因此，

$$y=3(x+1)^2+2x=3x^2+8x+3$$

$$=3\left(x^2+\frac{8}{3}x\right)+3$$

$$=3\left(x+\frac{4}{3}\right)^2-\frac{7}{3}.$$

这个函数在 $x=-\frac{4}{3}$ 取最小值 $-\frac{7}{3}$，x 的取值范围是 $-5\leqslant x\leqslant 2$. 因此，y 在这个范围的最小值是 $-\frac{7}{3}$.

又，由于

$$-\frac{4}{3}-(-5)>2-\left(-\frac{4}{3}\right),$$

因此，y 在 $x=-5$ 时取最大值，最大值是

$$3\times(-5)^2+8\times(-5)+3=38.$$

发展题

设二次函数 $y=x^2-2ax$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 范围的最大值是 $M(a)$，最小值是 $m(a)$. 试作 $M(a)$, $m(a)$ 的图象.

要点

$y=x^2-2ax$ 在 $x=a$ 取最

解 令 $f(x)=x^2-2ax$

$$=(x-a)^2-a^2.$$

小值$-a^2$.

可分$a<0$,

$0\leqslant a<\frac{1}{2}$,

$a=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<a\leqslant 1$,

$1<a$的几种情形来讨论.

由于这个函数在$x=a$取最小值$-a^2$, 因此, 在$0\leqslant x\leqslant 1$的范围内来考虑, 则

当$a<0$时, $m(a)=f(0)=0$,

$$M(a)=f(1)=1-2a.$$

当$0\leqslant a<\frac{1}{2}$时, $m(a)=f(a)=-a^2$, $M(a)=f(1)=1-2a$.

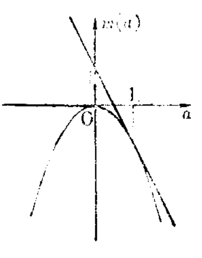
当$a=\frac{1}{2}$时, $m(a)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$, $M(a)=f(0)=f(1)=0$.

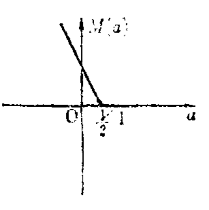
当$\frac{1}{2}<a\leqslant 1$时, $m(a)=f(a)=-a^2$, $M(a)=f(0)=0$.

当$1<a$时, $m(a)=f(1)=1-2a$,

$$M(a)=f(0)=0.$$

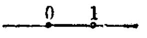
因此, $m(a)$, $M(a)$的图象如下图中的粗线所示.



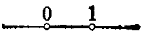


研究 用 x 轴上以点 0, 1 为端点的线段来表示 x 的范围: $0\leqslant x\leqslant 1$; 再用除掉这个线段的端点的部分来表示 $0<x<1$.

把上述范围表示为下图. $0\leqslant x\leqslant 1$ 叫做**闭区间**, $0<x<1$ 叫做**开区间**.



$0\leqq x\leqq 1$



$0<x<1$

一般地, 闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 用 $[a, b]$ 表示, 开区间 $a<x<b$ 用 $(a\ \ b)$ 表示. 包含一个端点而不包含另一个端点的区间, 也归入开区间. *

不仅二次函数, 对于所有图象是连续曲线的函数, 在闭区间一定能取得最大值和最小值. 但是, 在开区间则不一定如此.

例如, $y=2x^2$ 在开区间 $(0, 1)$ 有 $0<y<2$. 由于无论 y 怎样趋近于 0 和 2, 都不能取 0 和 2, 因此, 0 不是最小值, 2 不是最大值.

练习 (答案 154 页)

10. 对于下列二次函数, 试求在括号内指定的区间的最大值、最小值.

(1) $y=-2x^2+x+1 \qquad (0\leqslant x\leqslant 1)$.

(2) $y=\dfrac{1}{3}x^2+x \qquad (-1\leqslant x\leqslant 2)$.

11. 在同时满足 $x^2-5x+4\geqslant 0$, $x^2-7x+10\leqslant 0$ 的 x 的范围内, 求 $x^2-7x+10$ 的最大值和最小值.

12. 设函数 $y=x|x-a|\,(0\leqslant x\leqslant 1)$ 的最大值为 $f(a)$. 把 $f(a)$ 用 a 的式子表示出来.

> **例题 9.** 试求抛物线 $y=x^2$ 上与定点 $A(0, a)$ 距离最短的点的坐标.

---

* 译者注, 我国把 $a\leqslant x<b$ 与 $a<x\leqslant b$ 分别用 $[a, b)$、$(a, b]$ 表示, 统称半开半闭区间.

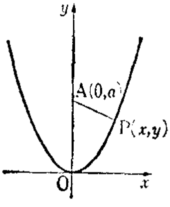
解法 $y=x^2$ 上的点 $P(x,y)$ 与定点 $A(0,a)$ 的距离 d 为

$$d=\sqrt{x^2+(y-a)^2}.$$

d^2 是 y 的二次函数.

解 设曲线上的任意点为 $P(x,y)$，令 $AP=d$，则

$$d^2=x^2+(y-a)^2.$$



由于 x, y 满足 $y=x^2$，因此，

$$d^2=y+y^2-2ay+a^2$$
$$=\left(y-\frac{2a-1}{2}\right)^2+\frac{4a-1}{4}.$$

对于曲线上的点 $P(x,y)$，由于 $y\geqslant 0$，因此，当 $\frac{2a-1}{2}\leqslant 0$ 时，d^2 在 $y=0$ 时取最小值；当 $\frac{2a-1}{2}>0$ 时，d^2 在 $y=\frac{2a-1}{2}$ 取最小值.

当 $y=0$ 时，$x=0$；当 $y=\frac{2a-1}{2}$ 时，$x=\pm\sqrt{\frac{2a-1}{2}}$.

因此，与 $A(0,a)$ 距离最短的点的坐标，当 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时为 $(0,0)$；当 $a>\frac{1}{2}$ 时为 $\left(\pm\sqrt{\frac{2a-1}{2}},\frac{2a-1}{2}\right)$.

发展题

关于抛物线 $y=x^2+2x\cos\theta+\sin^2\theta$，

(1) 当 θ 任意变化时，顶点画出什么样的曲线？

(2) 当 θ 任意变化时，求顶点与原点的距离 l 的最大值、最小值.

要点

把顶点坐标(x, y)用θ表示出来，然后消去θ，即可得到x, y间的函数关系。

解 (1) 把

$$y=x^2+2x\cos\theta+\sin^2\theta \qquad ①$$

变形，得

$$y=(x+\cos\theta)^2-\cos^2\theta+\sin^2\theta$$
$$=(x+\cos\theta)^2-(2\cos^2\theta-1).$$

设顶点的坐标为(x, y)，则

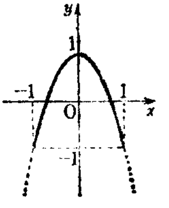
$$x=-\cos\theta,$$
$$y=-(2\cos^2\theta-1).$$

把第一式代入第二式，得

$$y=-2x^2+1 \qquad ②$$

由于$-1\leqslant\cos\theta\leqslant1$，因此，

$$-1\leqslant x\leqslant1.$$



所以，抛物线①的顶点轨迹为抛物线②在$-1\leqslant x\leqslant1$的部分，即右图的实线部分。

(2) 设原点与这个曲线上的点$P(x, y)$的距离为l，则

$$l^2=x^2+y^2.$$

由②解出x^2代入此式，则得

$$l^2=\frac{1-y}{2}+y^2=\left(y-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{16} \qquad ③$$

因为$-1\leqslant x\leqslant1$，所以，②的值域为$-1\leqslant y\leqslant1$.

在这个范围内，当 $y=-1$ 时，③取最大值 2；当 $y=\frac{1}{4}$ 时，③取最小值 $\frac{7}{16}$.

所以，l 的最大值是 $\sqrt{2}$，最小值是 $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

练习 （答案 155 页）

13. 在连接两点 $(0,6)$，$(4,3)$ 的线段上，求距离原点最近的点的坐标.

14. 在抛物线 $y=-x^2+a$ 上，求距离原点最近的点的坐标，再求出它们的距离.

习　题 （答案 166 页）

——A——

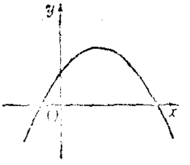
1. 作下列函数的图象，并指出它们的定义域和值域.

(1) $y=\dfrac{x}{|x|}$.　　(2) $y=\begin{cases}0 & (x=0\text{ 时}),\\ \dfrac{x^2}{|x|} & (x\neq 0\text{ 时}).\end{cases}$

2. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象通过三点 $(0,\ -1)$，$(2,\ -2)$，$(-2,\ -6)$. 试求这个二次函数.

3. 轴与 y 轴平行的抛物线通过两点 $(1,\ 1)$，$(4,\ 4)$，并且与 x 轴相切. 试求这个抛物线的方程.

4. 给出 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如右图. 试作下列函数图象的略图. 这个函数的图象与下列的函数图象有怎样的位置关系？



(1) $y=ax^2+bx$.　　(2) $y=ax^2+bx+\dfrac{b^2}{4a}$.

5. $y=ax^2+bx+c$ 的最大值为 $-3a$，其图象通过点 $(1,\ 4)$，$(-2,\ -2)$. 试求 a, b, c 的值.

6. (1) 作函数 $y=|x(x-a)|\ (0<a<1)$ 的图象.

(2) 试求 y 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 范围内的最大值.

7. 当 x 和 y 之间有 $x+2y=1$ 的关系时，试求下面(1)的最大值，(2)的最小值.

(1) $z=xy$　　(2) $z=x^2+y^2$

8. 已知二次函数 $f(x)=2x^2-23x-15$. 利用这个函数作下面的新函数 $g(x)$：

设 n 是整数时，对于满足 $n\leqslant x<n+1$ 的 x，有 $g(x)=f(n)$.

(1) 对于满足 $-2\leqslant x<2$ 的 x，作 $g(x)$ 的图象.

(2) 求 $g(x)$ 的最小值.

—B—

9. 当 a 值变化时，两个函数 $y=\frac{x}{|x|}$, $y=x^2+ax$ 的图象的交点的个数怎样变化？

10. 二次函数 $f(x)$ 满足条件:

$$f(x+1)-f(x)=2x,\ f(0)=1.$$

(1) 求 $f(x)$.

(2) 求 $f(x)$ 在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 的最大值和最小值.

11. 把 t 的函数 $f(t)=1-t^2$ 在 $x\leqslant t\leqslant x+1$ 的最大值和最小值看作是 x 的函数，令它们分别为 $M(x)$, $m(x)$, 再令 $l(x)=M(x)-m(x)$. 试把 $M(x)$, $m(x)$, $l(x)$ 用 x 表示出来，并作它们的图象.

12. $f(x)$, $g(x)$ 为 x 的二次函数,

$$f(x)+g(x)=x^2+8x-4.$$

又, $f(x)$ 在 $x=a$ 取最大值,

$$f(a)=g(a)=8,\ f(-a)=g(-a)=-8.$$

试求 a 的值和 $f(x)$, $g(x)$.

13. 试求 x 的函数 $f(x)=a\cos x-\sin^2 x$ 的最大值和最小值，把它们看作是 a 的函数，用图象表示出来.

14. 子弹在与水平线成 α 角的方向以初速 v 发射时，如果空气阻力忽略不计，则 t 秒后子弹的位置用下式表示:

$$x=vt\cos\alpha,\quad y=vt\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2.$$

其中，x 是水平距离，y 是高度.

试回答下列问(1)、问(2).

问(1). 子弹发射几秒后达到最高点？这时的高度是多少？

问(2). 从发弹地点到着弹地点的水平距离是多少？

5. 二次函数和二次方程

二次方程与二次函数的图象

解二次方程

$$ax^2+bx+c=0(a\neq 0),$$

就是求使二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的值为 0 的 x 的值. 为此，只要求出这个二次函数的图象与 x 轴交点的横坐标就行了.

二次方程有相异的实数解，是曲线与 x 轴交于两点的情形；有重解，是曲线与 x 轴相切的情形.

曲线与 x 轴无公共点的情形，就是有虚数解的情形.

判别式

可是，二次方程

$$ax^2+bx+c=0 \qquad ①$$

有怎样的解，可以用**判别式的符号来判定.**

这方面的知识，在本丛书的《方程与不等式》中已有详细的说明，这里略加说明.

二次方程的解

将方程①变形为

$$ax^2+bx=-c.$$

两边乘以 $4a$，再加 b^2，则得

$$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac,$$

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac.$$

如果 $b^2-4ac>0$, 则

$$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac},$$

$$2ax=-b\pm\sqrt{b^2-4ac},$$

$$\therefore\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

实数解

这就是说, ①有两个相异的**实数解(实根)**.

如果 $b^2-4ac=0$, 则

$$ax+b=0,\ \therefore\ x=-\frac{b}{2a}.$$

重解

把这种两个实数解重合的情形, 叫做**重解(重根)**.

如果 $b^2-4ac<0$, 则$\sqrt{b^2-4ac}$是虚数, 方程的解表示为

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

虚数解

这是与实数不同的复数. 把它叫做**虚数解(虚根)**.

按判别式分类

b^2-4ac 叫做二次方程的判别式, 通常用 D表示.

根据D的正负, 方程和图象有下列性质.

判别式	$ax^2+bx+c=0$的解	$y=ax^2+bx+c$的图象
$D>0$	相异的实数解	与 x 轴交于两点
$D=0$	重解	与 x 轴相切
$D<0$	虚数解	与 x 轴无公共点

抛物线和直线

利用图象解二次方程①时，可把①化为

$$ax^2=-bx-c \text{ 或 } x^2=-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a},$$

则抛物线 $y=ax^2$ 与直线 $y=-bx-c$，或抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}$ 的交点的横坐标就是所求的解.

如果 $D>0$，则抛物线与直线交于两点；如果 $D=0$，则抛物线与直线相切；如果 $D<0$，则无公共点.

提　　要

(1) 二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式为

$$D=b^2-4ac.$$

(2) $D>0 \Longleftrightarrow$ 相异二实数解 $\Longleftrightarrow$ 图象与 x 轴交于两点.

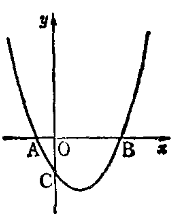
$D=0 \Longleftrightarrow$ 重解 $\Longleftrightarrow$ 图象与 x 轴相切.

$D<0 \Longleftrightarrow$ 虚数解 $\Longleftrightarrow$ 图象与 x 轴无公共点.

(3) 直线 $y=mx+k$ 与抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 相切的条件是

$$ax^2+bx+c=mx+k \text{ 的判别式}=0.$$

例题 10. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如右图.



(1) 判定 a, b, c 的符号.

(2) 判定 b^2-4ac 的符号.

(3) 求 AB 的长.

解法 由于图象与 x 轴交于两点，因此，二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有相异的二实数解.

注意，y 最小的点的 x 坐标为正和点 C 的 y 坐标为负.

解 (1) 由于图象的下凸，因此，$a>0$.

令 $x=0$，则 $y=c$. 这是点 C 的 y 坐标，由图形可见，$c<0$.

使 y 最小的点的 x 坐标是 $x=-\dfrac{b}{2a}$，由图可见，它为正，由于 $a>0$，因此，$b<0$.

(答) $a>0$, $b<0$, $c<0$.

(2) 由于图象与 x 轴交于两点，因此，$ax^2+bx+c=0$ 有相异的二实根. 所以，判别式为正，即

$$\mathbf{D}=b^2-4ac>0.$$

(答) $b^2-4ac>0$.

(3) 解 $ax^2+bx+c=0$，得

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

$$\therefore\quad AB=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{\sqrt{D}}{a}.$$

(答) $\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$.

研究 在(2)中，从 y 的最小值 $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ 为负也能得到 $b^2-4ac>0$. (⇨24 页发展题)

在(3)中，设两个解为 α, β，则

$$AB^2=(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta.$$

利用解和系数的关系

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a},$$

也能求出 AB 的长.

发展题

证明抛物线 $y=mx^2+3(m-4)x-9$ 与 x 轴交于两点，并求使这两点间的距离为最小的 m 值.

要点

二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有相异二实数解，即判别式为正.

其次，只要使两个解的差的绝对值的平方最小即可.

解 设

$$mx^2+3(m-4)x-9=0 \qquad ①$$

的判别式为 D，则

$$\begin{aligned}D&=9(m-4)^2-4\times m\times(-9)\\&=9(m^2-4m+16)\\&=9(m-2)^2+108.\end{aligned}$$

由于 $(m-2)^2\geqslant0$，因此，$D>0$.

所以，①有相异二实数解. 从而，给出的曲线与 x 轴交于两点.

设①的两个解为 α，β，两个交点间的距离为 d，则

$$d=|\alpha-\beta|.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad d^2&=(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\\&=\left[\frac{-3(m-4)}{m}\right]^2-4\left(\frac{-9}{m}\right)\\&=9\left(\frac{16}{m^2}-\frac{4}{m}+1\right)\end{aligned}$$

$$=9\left[\left(\frac{4}{m}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]$$

$$\geqslant 9\times\frac{3}{4}.$$

在$\frac{4}{m}-\frac{1}{2}=0$即$m=8$时，等号成立。这时，$d$取最小值$\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

练习 (答案155页)

15. 指出$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$具有下列性质的条件.

(1) 根据x值，y值既可为正，也可为负.

(2) 无论x取怎样的值，y总为负.

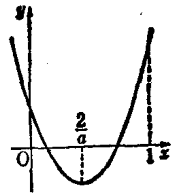
16. 证明，抛物线$y=x^2+ax+b$与x轴有公共点时，直线$y=m\left(x+\frac{a}{2}\right)$一定和这个曲线相交.

例题 11. 要使二次方程$ax^2-4x+(a-3)=0(a\neq0)$的两个解都在0和1之间(两端除外)，a应满足什么条件.

解法 令方程的左边为$f(x)$，借助$y=f(x)$的图象来考虑．当这个曲线与x轴交于0，1之间的两个点时，则y在这两个点的正中间取最小值或最大值，这个值一定与$f(0)$，$f(1)$异号．又，当这个曲线与x轴相切时，则一定有$f\left(\frac{2}{a}\right)=0$.

解 令$f(x)=ax^2-4x+(a-3)$，作出$y=f(x)$的图象.

由于这个函数在 $x=-\frac{-4}{2a}=\frac{2}{a}$ 取最小值或最大值，因此，图象与 x 轴交于 0, 1 间的两点或与 x 轴相切的条件是



$$0<\frac{2}{a}<1,$$

并且，$$f(0)>0,\ f(1)>0,\ f\left(\frac{2}{a}\right)\leqslant 0 \qquad ①$$

或 $$f(0)<0,\ f(1)<0,\ f\left(\frac{2}{a}\right)\geqslant 0 \qquad ②$$

由于 $0<\frac{2}{a}<1$，因此，$a>2$. 从而，图象下凸，所以，②不成立.

由①知，

$$a-3>0,\ 2a-7>0,\ -\frac{4}{a}+a-3\leqslant 0 \qquad ③$$

由③的第三式得

$$a^2-3a-4\leqslant 0,\ (a+1)(a-4)\leqslant 0.$$

$$\therefore\quad -1\leqslant a\leqslant 4.$$

由③的第一式、第二式得 $a>\frac{7}{2}$. 因此，取公共部分，得

$$\frac{7}{2}<a\leqslant 4.$$

发展题

试确定二次方程 $x^2-(m-1)x+m^2-5m+6=0$ 有正解时的 m 的范围.

要点

判别式>0.

设两个解为 α,β，则 $\alpha+\beta>0$，并且 $\alpha\beta>0$.

或者令左边为$f(x)$.

由于$f(0)>0$,

$$f\left(\frac{m-1}{2}\right)\leqslant 0,$$

$$\frac{m-1}{2}>0,$$

因此，可以导出m应满足的不等式.

关于二次不等式的解法，可参照 51 页.

解 设

$$f(x)=x^2-(m-1)x+m^2-5m+6,$$

则$y=f(x)$的图象是下凸的抛物线.

由于在 $x=\frac{m-1}{2}$取最小值，因此，这个图象与x轴的正半轴相交或相切的条件是

$$\frac{m-1}{2}>0, \text{并且 } f(0)>0,$$

$$f\left(\frac{m-1}{2}\right)\leqslant 0.$$

$$\therefore\quad m>1,\ m^2-5m+6>0 \qquad ①$$

$$\frac{(m-1)^2}{4}-\frac{(m-1)^2}{2}+m^2-5m+6\leqslant 0 \qquad ②$$

由②得

$$3m^2-18m+23\leqslant 0.$$

$$\therefore\quad \frac{9-2\sqrt{3}}{3}\leqslant m\leqslant\frac{9+2\sqrt{3}}{3} \qquad ③$$

由①的第二式得

$$m<2,\quad m>3 \qquad ④$$

取①的第一式与③，④的共同部分，得

$$\frac{9-2\sqrt{3}}{3}\leqslant m<2,$$

$$3<m\leqslant\frac{9+2\sqrt{3}}{3}.$$

练习 （答案 156 页）

17. 关于二次方程 $x^2-kx+(k+3)=0$，就下列不同情形求 k 的范围.

(1) 两个解都大于 -3.

(2) 两个解之间存在 2.

18. 试求当二次方程 $x^2+(4a+1)x+a^2=0$ 的两个解中只有一个解在 0 和 1 之间（包括 0 和 1）时，a 应取的实数值范围.

例题 12. (1) 求 $y=2x^2+px+3$ 的图象与 x 轴相切的条件.

(2) 求直线 $y=ax+b$ 与抛物线 $y=x^2$ 相切的条件.

解法 (1) 求出 $2x^2+px+3=0$ 有重解的条件就行了.

(2) 求 $x^2=ax+b$ 有重解的条件.

解 (1) $y=2x^2+px+3$ 与 x 轴的公共点的 x 坐标是

$$2x^2+px+3=0$$

的解. 图象与 x 轴相切的条件是这个方程有重解，即判别式等于 0.

$$\therefore\quad p^2-4\times2\times3=0.$$

$$\text{因此，}\ p=\pm2\sqrt{6}.$$

(2) $y=x^2$ 与 $y=ax+b$ 的公共点的 x 坐标是

$$x^2=ax+b,\ \text{即}\ x^2-ax-b=0$$

的解.

由于相切的条件是这个方程有重解，因此，

$$a^2+4b=0.$$

研究 由上面(2)的结果得$b=-\dfrac{a^2}{4}$. 从而，与抛物线$y=x^2$相切，斜率为a的直线方程为

$$y=ax-\frac{a^2}{4}.$$

发展题

设两条抛物线 $y=x^2+ax+b$, $y=x^2+cx+d(a\neq c)$的公切线的切点的 x 坐标分别为 p, q. 证明两条曲线交点的 x 坐标是 $\frac{p+q}{2}$.

要点

设公切线的方程为$y=mx+n$, 则

$$x^2+ax+b=mx+n$$

有重解p,

$$x^2+cx+d=mx+n$$

有重解q.

解 设公切线的方程为

$$y=mx+n,$$

则由于

$$x^2+ax+b=mx+n$$

有重解 p, 因此,

$$x^2+ax+b-(mx+n)=(x-p)^2.$$

从而,

$$x^2+ax+b=(x-p)^2+mx+n \quad ①$$

同理,

$$x^2+cx+d=(x-q)^2+mx+n \quad ②$$

两条曲线

$$y=x^2+ax+b,\quad y=x^2+cx+d$$

交点的 x 坐标是

$$x^2+ax+b=x^2+cx+d$$

的解.

由①, ②得

$$(x-p)^2=(x-q)^2.$$

$$\therefore\quad x^2-2px+p^2=x^2-2qx+q^2,$$

$$2(p-q)x=p^2-q^2.$$

由于 $p-q\neq0$, 因此,

$$x=\frac{p^2-q^2}{2(p-q)}$$

$$=\frac{p+q}{2}.$$

所以, 两条曲线在 x 坐标为 $\frac{p+q}{2}$ 的点相交.

练习 (答案 156 页)

19. 确定直线 $y=\frac{1}{2}x+a$ 与抛物线 $y=-x^2+4$ 相切时的 a 值.

20. 求函数 $y=|x^2-4|$ 的图象与直线 $x-2y+2a=0$ 的交点的个数. a 为实数.

21. 求通过原点向曲线 $y=2x^2-5x+2$ 所作切线的斜率.

22. 当两个二次函数

$$y=a+bx+2x^2 \qquad ①$$

$$y=p+qx-x^2 \qquad ②$$

之间存在下面的关系时, 求常数 a, b, p, q 的值.

(a) ①, ② 的图象在二直线 $x=-1, x=2$ 上相交.

(b) ①, ② 的图象与 y 轴的交点关于原点对称.

(c) ②的最大值与①的最小值之差是 $\frac{27}{4}$.

6. 二次函数和二次不等式

二次不等式

把二次不等式

$$ax^2+bx+c>0,$$

$$ax^2+bx+c<0$$

与二次函数

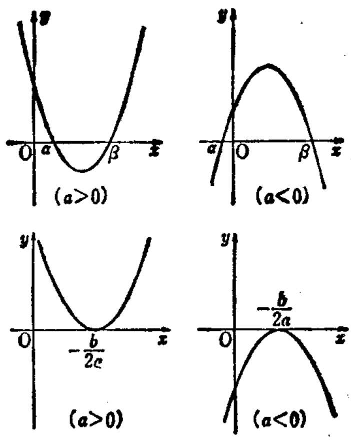
$$y=ax^2+bx+c(a\neq0) \qquad ①$$

的图象联系起来，是便于理解的.

判别式为正的情形

(1) 曲线①与 x 轴交于两个点时，即

$$ax^2+bx+c=0 \qquad ②$$



有两个相异实数解时，设它的解为 α, $\beta(\alpha<\beta)$. 由上图可知，

如果 $a>0$, 则当 $x<\alpha$, $x>\beta$ 时，

$$ax^2+bx+c>0;$$

当 $\alpha<x<\beta$ 时，

$$ax^2+bx+c<0.$$

如果 $a<0$，则当 $x<\alpha, x>\beta$ 时，

$$ax^2+bx+c<0;$$

当 $\alpha<x<\beta$ 时，

$$ax^2+bx+c>0.$$

判别式为0的情形

(2) 曲线①与 x 轴相切时，即②有重解时，它的解为 $x=-\dfrac{b}{2a}$.

如果 $a>0$，则总有

$$ax^2+bx+c\geqslant 0.$$

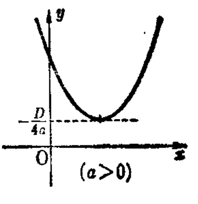
如果 $a<0$，则总有

$$ax^2+bx+c\leqslant 0.$$

$\left(\text{等号限于 } x=-\dfrac{b}{2a}\text{时成立.}\right)$

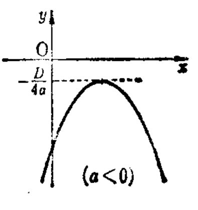
判别式为负的情形

(3) 当曲线①与 x 轴无公共点时，即②有虚数解时，$b^2-4ac<0$. 因此，



如果 $a>0$，则由于

$$-\frac{b^2-4ac}{4a}>0,$$



即①的最小值总为正，所以总有

$$ax^2+bx+c>0.$$

二次不等式的解

具有确定符号的条件

如果 $a<0$，则由于 $-\frac{b^2-4ac}{4a}<0$，即①的最大值总为负，所以总有度

$$ax^2+bx+c<0.$$

在(3)的情况下，叫做二次函数 $y=ax^2+bx+c$ **具有确定符号.**

根据(1)可得下面的定理.

定理　当二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有相异的实数解 $\alpha, \beta(\alpha<\beta)$ 时，则

$$ax^2+bx+c>0(a>0)$$

的解是

$$x<\alpha,\ x>\beta;$$

$$ax^2+bx+c<0(a>0)$$

的解是

$$\alpha<x<\beta.$$

又，根据(3)可得下面的定理.

定理　对于 x 的所有实数值，ax^2+bx+c $(a\neq0)$ 总为正的条件是 $a>0$，$b^2-4ac<0$；总为负的条件是 $a<0, b^2-4ac<0$.

提　　要

(1) $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 有实数解 $\alpha, \beta(\alpha<\beta)$ 时，

$$ax^2+bx+c>0 \Longleftrightarrow x<\alpha, x>\beta;$$

$$ax^2+bx+c<0 \Longleftrightarrow \alpha<x<\beta.$$

(2) $ax^2+bx+c(a\neq0)$ 总为正 $\Longleftrightarrow a>0, b^2-4ac<0$;

$ax^2+bx+c(a\neq0)$ 总为负 $\Longleftrightarrow a<0, b^2-4ac<0$.

例题 13. 已知二次函数 $f(x)=2x^2+11x+5$，求满足下列不等式的 x 的范围.

(1) $f(x)<0$. (2) $|f(x)|<5$.

解法 (1) 求满足 $f(x)=0$ 的 x 值. 如果存在两个实数解 α, $\beta(\alpha<\beta)$, 则 x 的范围为 $\alpha<x<\beta$.

(2) 分别解 $-5<f(x)$, $f(x)<5$, 取其公共部分. 或者求对应于 $y=f(x)$ 的图象被二直线 $y=5$, $y=-5$ 所夹部分的 x 的范围.

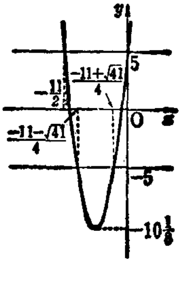
解 (1) 解 $2x^2+11x+5=0$, 得

$$x=\frac{-11\pm\sqrt{121-40}}{4}=\frac{-11\pm9}{4}=\begin{cases}-\frac{1}{2},\\-5.\end{cases}$$

由于 $f(x)$ 的最高次项的系数为正，因此，所给不等式的解是

$$-5<x<-\frac{1}{2}.$$

(2) $y=f(x)$ 的图象如右图，它与直线 $y=5$ 的交点的 x 坐标是



$2x^2+11x+5=5$, 即 $2x^2+11x=0$ 的解. 解之，得

$$x=-\frac{11}{2},\ 0.$$

与直线 $y=-5$ 的交点的 x 坐标是

$$2x^2+11x+5=-5,\ 即\ 2x^2+11x+10=0$$

的解. 解之，得

$$x=\frac{-11\pm\sqrt{121-80}}{4}=\frac{-11\pm\sqrt{41}}{4}.$$

所以，根据图象可得满足$-5<f(x)<5$的x值的范围是

$$-\frac{11}{2}<x<\frac{-11-\sqrt{41}}{4} \text{ 和 } \frac{-11+\sqrt{41}}{4}<x<0.$$

发展题

（1）解下面关于x的不等式.

$$(x-a)(x-a^2)<0.$$

（2）在$2<x<3$的范围内，当(1)中不等式成立时，试确定a值的范围.

要点

（1）因为所求的解在a和a^2之间，所以必须讨论a, a^2的大小.

（2）确定由（1）求得

解 （1） 解$(x-a)(x-a^2)=0$，得$x=a, a^2$.

由于$a^2-a=a(a-1)$，因此，有如下情形.

(i) 当$a<0$或$a>1$时，$a<a^2$.因此，给出的不等式的解是

$$a<x<a^2.$$

(ii) 当$0<a<1$时，$a^2<a$. 因此，给出的不等式的解是

$$a^2<x<a.$$

(iii) 当$a=1$时，$(x-a)(x-a^2)=(x-1)^2\geqslant0$. 因此，给出的不等式无解.

（2）在区间$2<x<3$内，(1)的

x 的范围能包含区间 $2<x<3$ 时的 a 值就行了.

不等式成立的充分必要条件是：使这个区间包含在由(1)解得的 x 的范围内.

在(i)的情况下，$a\leqslant 2$，且 $a^2\geqslant 3$.

由于 $a^2\geqslant 3$，因此，$a\leqslant -\sqrt{3}$，或 $a\geqslant\sqrt{3}$. 取与 $a\leqslant 2$ 的公共部分，

如果 $a<0$，则 $a\leqslant -\sqrt{3}$；

如果 $a>1$，则 $\sqrt{3}\leqslant a\leqslant 2$.

在(ii)的情况下，由于解存在于 $x<1$ 的范围内，因此，区间 $2<x<3$ 没被这个范围所包含.

所以，$a\leqslant -\sqrt{3}$，$\sqrt{3}\leqslant a\leqslant 2$.

练习 （答案 157 页）

23. 当变数 x 满足 $x^2+ax\leqslant -x(a<-1)$ 时，试确定 x^2+ax 的最小值为 $-\frac{1}{2}$ 时的 a 值.

例题 14. 设 a 是实数. 试证在两个二次式

$$x^2+ax+(1-a),\quad x^2+x+a^2$$

中，至少有一个对于 x 的实数值总为正.

解法 x^2 的系数为正的二次函数，总取正值的充分必要条件是判别式 <0. 利用 D_1，D_2 中至少有一个为负的充分条件 $D_1+D_2<0$（不是必要条件）即可.

解 令

$$y=x^2+ax+(1-a) \quad ①$$

$$y=x^2+x+a^2 \quad ②$$

的右边等于 0. 设所得两个二次方程的判别式分别为 D_1, D_2, 则

$$D_1=a^2-4(1-a),\ D_2=1-4a^2.$$

$$\therefore\ D_1+D_2=-3a^2+4a-3.$$

这是关于 a 的二次函数. 由于 a^2 的系数为负, 并且, 右边 $=0$ 的判别式

$$4^2-4(-3)(-3)=16-36<0.$$

因此, 对于 a 的所有实数值, 有

$$-3a^2+4a-3<0,$$

从而, $$D_1+D_2<0.$$

因为如果 $D_1\geqslant 0$, $D_2\geqslant 0$, 则这个不等式不成立, 所以, D_1, D_2 中至少有一个为负.

由于①, ②中 x^2 的系数都为正, 因此, 在两个函数中至少有一个总取正值.

发展题

设 l, m, n, l', m', n' 为实常数.

(1) 试证对于 x 的所有实数值, 下面的不等式成立.

$$(l^2+m^2+n^2)x^2+2(ll'+mm'+nn')x+(l'^2+m'^2+n'^2)\geqslant 0.$$

(2) 试证下面的不等式.

$$(l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2)\geqslant(ll'+mm'+nn')^2.$$

(许瓦尔兹不等式)

要点

(1)把左边化成实数的平方和.

(2)使(1)中的二次函数的最小值≥0的条件是:(判别式)≤0.

这个不等式叫做**许瓦尔兹不等式**.

这个不等式也可以通过把差化为平方和的形式来证明.

解 (1) 令

$$f(x)=(l^2+m^2+n^2)x^2+2(ll'+mm'+nn')x+(l'^2+m'^2+n'^2),$$

则

$$f(x)=(lx+l')^2+(mx+m')^2+(nx+n')^2.$$

由于这里的各项是实数的平方,因此,各项都为正或0.

$$\therefore\quad f(x)\geqslant 0.$$

等号是在 $lx+l'=0$, $mx+m'=0$, $nx+n'=0$ 同时成立时,即

$$\frac{l}{l'}=\frac{m}{m'}=\frac{n}{n'}$$

时成立.

(2) 由于可以认为 l, m, n 不能同时为0,因此,

$$l^2+m^2+n^2>0.$$

所以,$f(x)$有最小值,由(1)知,

(最小值)≥0.

因而,$y=f(x)$的图象与x轴相切或与x轴无公共点.

所以,$f(x)=0$ 的判别式 $D\leqslant 0$.

$$\frac{D}{4}=(ll'+mm'+nn')^2-(l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2)\leqslant 0.$$

$$\therefore \quad (l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2)$$
$$\geqslant (ll'+mm'+nn')^2.$$

这里的等号，限于(1)中的等号成立时成立.

练习 （答案 158 页）

24. 对于 x 的所有实数值，求使

$$k(x^2+1)\geqslant x^2-x+1$$

成立的最小 k 值.

25. 对于 $f(x)=x^2+(a-3)x+a$（a 是实数），回答下列各问.

(1) 对于 x 的所有实数值，求使 $f(x)>0$ 时 a 值的范围.

(2) 对于 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 的所有 x，求使 $f(x)>0$ 时 a 值的范围.

例题 15. 证明，当 $f(x)=ax+b$ 时，则

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

当 $g(x)=x^2+ax+b$ 时，则

$$g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}.$$

在这里，x_1，x_2 为实数.

又，后者在等号成立时，试判断 x_1 和 x_2 的关系.

解法 计算两边进行比较. 注意把 $g(x)$ 化成 $g(x)=x^2+f(x)$，作起来就很简单.

解 由于 $f(x)=ax+b$，因此，

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{a(x_1+x_2)}{2}+b=\frac{ax_1+b}{2}+\frac{ax_2+b}{2}.$$

$$\therefore \quad f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

$$g(x)=x^2+ax+b=x^2+f(x).$$

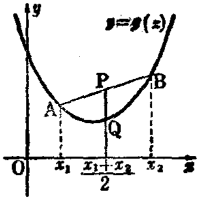
$$g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}$$

$$=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}-\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

$$=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}=-\frac{(x_1-x_2)^2}{4}\leqslant 0.$$

$$\therefore\quad g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}.$$

（当 $x_1=x_2$ 时等号成立）



研究　设 $y=g(x)$ 的图象上 x 坐标为 x_1,x_2 的点分别为 A,B. 则线段 AB 中点 P 的坐标为

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}\right).$$

在图象上与这个点有相同 x 坐标的点 Q 的坐标是

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right).$$

发展题

对于函数 $f(x)=x^2+ax+b$, 当 p,q 满足 $p+q=1$ 时，证明不等式

$$pf(x)+qf(y)\geqslant f(px+qy)$$

对于 x 和 y 的任何值都成立的充分必要条件是 $0\leqslant p\leqslant 1$.

要点

将 $A=pf(x)+qf(y)-f(px+qy)$ 作适当的变形，求 $A\geqslant 0$ 的条件

解　由于 $p+q=1$, 因此，

$$pf(x)+qf(y)-f(px+qy)$$

$$=px^2+qy^2-(px+qy)^2$$

$$=p(1-p)x^2+q(1-q)y^2-2pqxy$$

$$=pq(x-y)^2.$$

在这里，如果

$$pf(x)+qf(y)\geqslant f(px+qy) \qquad ①$$

对于任意的 x, y 都成立，则

$$pq(x-y)^2\geqslant 0 \qquad ②$$

由于 $x\neq y$ 时也成立，因此，$pq\geqslant 0$，即

$p(1-p)\geqslant 0$，$\therefore\ p(p-1)\leqslant 0$.

所以，$\qquad 0\leqslant p\leqslant 1 \qquad ③$

反之，如果③成立，则 $pq\geqslant 0$.

从而，②成立，因此，①成立.

所以，①成立的充分必要条件是③.

研究 设 $y=f(x)$图象上的两点为$A(x_1, f(x_1))$，$B(x_2, f(x_2))$. 如果设线段 AB 内分成 $q:p(p+q=1)$的点为 P，则 P 的坐标是

$$(px_1+qx_2, pf(x_1)+qf(x_2)).$$

如果设在曲线上与P点具有相同 x 坐标的点为Q，则 Q 的坐标是

$$(px_1+qx_2, f(px_1+qx_2)).$$

练习 （答案 158 页）

26. 当抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $y=mx+n$ 交于 A, B 两点时，试证，如果 $a>0$，则抛物线的弧 AB 在弦 AB 的下方；如果 $a<0$，则抛物线的弧 AB 在弦 AB 的上方.

7. 不等式和区域

一次不等式表示的区域

以满足一次不等式

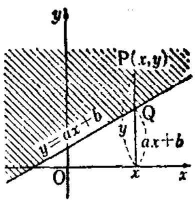
$$y>ax+b \qquad ①$$

的 x, y 为坐标的点 $P(x, y)$，在直线

$$y=ax+b \qquad ②$$

的**上方**.

这是因为，在②上与P具有相同 x 坐标的点Q的 y 坐标是 $ax+b$，由①知，P 的 y 坐标比 $ax+b$ 大. 因此，



P 的 y 坐标>Q 的 y 坐标.

从而，P 在Q的上方.

同样，以满足

$$y<ax+b \qquad ③$$

的 x, y 为坐标的点 $P(x, y)$，在直线②的**下方**.

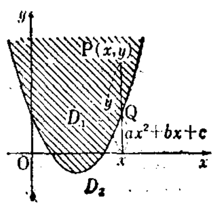
二次不等式表示的区域

同样的情况对于二次不等式也成立. 即以满足

$$y>ax^2+bx+c \qquad ④$$

的 x，y 为坐标的点 $P(x, y)$，在抛物线

$$y=ax^2+bx+c \qquad ⑤$$



的上方；满足

$$y<ax^2+bx+c \qquad ⑥$$

的点 $P(x, y)$ 在⑤的下方.

集合与区域

如果用点的集合的观点来考虑，则

满足⑤的点 $P(x, y)$ 的集合 $\{P(x, y) | y=ax^2+bx+c\}$ 形成⑤的图象：抛物线.

满足④的点 $P(x, y)$ 的集合 $\{P(x, y) | y>ax^2+bx+c\}$ 形成⑤的上方的区域 $\boldsymbol{D}_1$.

满足⑥的点 $P(x, y)$ 的集合 $\{P(x, y) | y<ax^2+bx+c\}$ 形成抛物线⑤的下方的区域 $\boldsymbol{D}_2$.

D_1 叫做不等式④的**区域**，D_2 叫做不等式⑥的**区域**.

这些区域不包含边界线⑤上的点，而

$$y \geqslant ax^2+bx+c,$$
$$y \leqslant ax^2+bx+c$$

分别表示包含 $\boldsymbol{D}_1$, $\boldsymbol{D}_2$ 的边界线的区域.

连结两个区域的线段

用线段连结 $\boldsymbol{D}_1$ 的点 $A(x_1, y_1)$ 和 $\boldsymbol{D}_2$ 的点 $B(x_2, y_2)$ 时，则线段 AB 上的点 P 的坐标 (x, y) 可用变数 t 的一次函数来表示. 即

$$x=tx_2+(1-t)x_1,\ y=ty_2+(1-t)y_1 \qquad ⑦$$

从而，$y-ax^2-bx-c$ 可用 t 的连续函数(实际上是二次函数)来表示. 设这个函数为 $f(t)$，则

$$f(0)=y_1-ax_1^2-bx_1-c>0,$$

$$f(1)=y_2-ax_2^2-bx_2-c<0.$$

当点P在AB上从A移动到B时，t从0变化到1，$f(t)$从$f(0)>0$连续地变化到$f(1)<0$.

因此，在属于区间$0<t<1$的一点t_0，有$f(t_0)=0$. 在对应于t_0的点(x, y)，有下式成立.

$$y-ax^2-bx+c=0.$$

即在这一点，AB和曲线⑤相交.

[注意] 据此，从直观上沿着从区域D_1的点到区域D_2的点的线段移动时，必然经过边界线这一明显事实，得到了证明.

设$\dfrac{AP}{AB}=t$时，则P可以把AB内分为$t:(1-t)$. 从而可以导出内分线段AB成$m:n$的点的坐标为

内分点

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \qquad y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}.$$

提　　要

(1) $y>ax^2+bx+c(a\neq0)$

表示抛物线$y=ax^2+bx+c$上方的区域.

(2) $y<ax^2+bx+c(a\neq0)$

表示抛物线$y=ax^2+bx+c$下方的区域.

例题 16. 试求下面命题成立时a的范围.

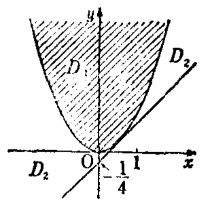
如果$y>x^2$，则$y>x+a$.

解法 如果用集合来考虑，那么，要使这个命题成立，只要证明下式成立即可.

$$\{P(x,y)\mid y>x^2\}\subset\{Q(x,y)\mid y>x+a\}.$$

而要证明该式成立，只要证明抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=x+a$ 相切或在直线的上方即可.

解 $y>x^2$ 所表示的区域是抛物线 $y=x^2$ 的上方 D_1，$y>x+a$ 所表示的区域是直线 $y=x+a$ 的上方 D_2. 因此，命题成立的充分必要条件是



$$D_1\subset D_2.$$

因此，抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=x+a$ 必须相切或抛物线在直线的上方.

由于 $x^2\geqslant x+a$，即 $x^2-x-a\geqslant 0$ 总成立的条件是(判别式)$\leqslant 0$，因此，

$$1-4(-a)\leqslant 0.$$

故所求 a 的范围是

$$a\leqslant -\frac{1}{4}.$$

发展题

设函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 满足条件：

$$x\geqslant 0\text{ 时}，\quad f(x)\geqslant 0.$$

求 a,b 的关系，并用图象表示点(a,b)的存在范围.

要点

当$x\geqslant 0$时，$f(x)\geqslant 0$

解 如果 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant 0$ 成立，则当 $x\geqslant 0$ 时，有

与当$x\geqslant 0$时，$x^2+ax+b\geqslant 0$等价.

令$y=x^2+ax+b$. 求在$x\geqslant 0$范围的最小值.

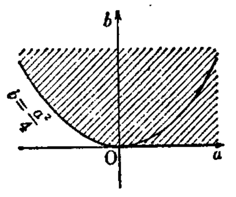
$$x^2+ax+b\geqslant 0 \qquad ①$$

在 $x\geqslant 0$ 的范围来考虑

$$x^2+ax+b=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+b-\frac{a^2}{4}.$$

如果$a\geqslant 0$，则在$x=0$取最小值b.

如果$a<0$，则在$x=-\frac{a}{2}$取最小值$b-\frac{a^2}{4}$.



因此，①成立的条件是

$$a\geqslant 0,\quad b\geqslant 0$$

或 $$a<0, b-\frac{a^2}{4}\geqslant 0.$$

满足这样条件的点(a, b)的范围，是上图中的斜线部分(包含边界).

发展题

抛物线$y=x^2+(a-1)x+a^2$(a为常数)与连结两点P(3, 5)，Q(−2, 4)的线段在两端点以外的唯一点相交，求a的取值范围.

要点

抛物线与线段PQ只相交于一点的条件是，P，Q分别位于由这个抛物线所划分的两个区域.

这只需要

$y-x^2-(a-1)x-a^2$ 在点P的值和在点Q的值异号即可.

解 抛物线与线段PQ只交于一点的条件是，$y-x^2-(a-1)x-a^2$ 在点P的值

$$5-9-3(a-1)-a^2$$

$$=-a^2-3a-1 \quad ①$$

与在点Q的值

$$4-4+2(a-1)-a^2$$

$$=-a^2+2a-2 \quad ②$$

的符号相异.

由于②的右边=0的判别式 $2^2-4(-1)(-2)$ 为负，因此，②的符号一定，总为负.

所以，①一定为正.

由于 $-a^2-3a-1>0$，因此，

$$a^2+3a+1<0.$$

解 $a^2+3a+1=0$，得

$$a=\frac{-3\pm\sqrt{9-4}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

$$\therefore \quad \frac{-3-\sqrt{5}}{2}<a<\frac{-3+\sqrt{5}}{2}.$$

发展题

当 m 为正数时，求直线 $y=mx+m^2$ 通过的范围.

要点

如果问题中的直线

解 直线 $y=mx+m^2(m>0)$ ① 通过点 (x_1, y_1) 的条件是，存在

通过点(x_1, y_1),则关于某一正数 m, $y_1=mx_1+m^2$ 应该成立.

由此可导出关于x_1, y_1 的条件.

满足 $y_1=mx_1+m^2$ 的正数 m.

也就是关于 m 的二次方程

$$m^2+x_1m-y_1=0 \qquad ②$$

有正解.

首先,由具有实数解的条件知,

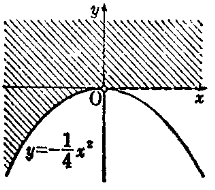
$x_1^2+4y_1\geqslant 0$, 即 $y_1\geqslant -\frac{1}{4}x_1^2$.

设两个解为α, β, 则它们都$\leqslant 0$的条件是

$$\alpha+\beta\leqslant 0, \alpha\beta\geqslant 0.$$

$$\therefore \quad -x_1\leqslant 0, -y_1\geqslant 0,$$

即 $x_1\geqslant 0$, $y_1\leqslant 0$.



所以,要使② 具有正解,点(x_1, y_1)的存在范围是从区域$y\geqslant -\frac{1}{4}x^2$ 中减去$x\geqslant 0$且$y\leqslant 0$部分的剩余部分,即上图的斜线部分.

其中,在边界上包含实线部分,而不包含点线部分和原点.

研究 实际上,$y=mx+m^2$ 是抛物线 $y=-\frac{1}{4}x^2$ 的一条斜率等于m时的切线. 当m为正时,则这条切线所通过的范围就

是上面所求的区域.

练习 (答案159页)

27. a是任意变动的实数，求抛物线 $y=x^2+2ax+a^2$ 通过的范围.

28. 已知抛物线 $y=x^2$. 当其顶点沿抛物线 $y=2x^2$ 运动的同时，它本身作平行移动时，求该抛物线没有通过的区域.

例题17. (1) 把同时满足下列两个不等式的点(x,y)的存在范围用斜线表示出来.

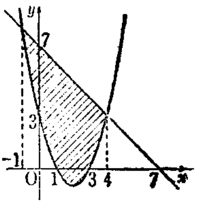
$$y\geqslant x^2-4x+3,\quad x+y\leqslant 7.$$

(2) 点(x,y)在(1)的范围变动时，求 $2x-y$ 的最大值和最小值.

解法 (1) 第一个不等式表示抛物线 $y=x^2-4x+3$ 及其上方的区域. 由 $y\leqslant -x+7$ 容易看出，第二个不等式表示直线 $y=-x+7$ 及其下方的区域.

(2) 由于 $x^2-4x+3\leqslant y\leqslant -x+7$, 因此，$2x-y$ 的值的范围可用x表示. x的范围可由(1)的抛物线和直线的交点来确定.

解 (1)所求范围是由抛物线 $y=x^2-4x+3$ 与直线 $y=-x+7$围成的区域(包含边界).



(2) 在(1)的抛物线与直线的交点，由于

$$x^2-4x+3=-x+7,$$

因此，

$$x^2-3x-4=0\quad\therefore\quad x=-1,4.$$

当(x,y)在(1)的区域变动时，x的范围是$-1\leqslant x\leqslant 4$.

$$x^2-4x+3\leqslant y\leqslant -x+7$$

因此，　　$2x-y\leqslant 2x-(x^2-4x+3)$.

∴　　$2x-y\leqslant -x^2+6x-3$.

（在 $y=x^2-4x-3$ 时等号成立.）

因为 $-x^2+6x-3=-(x-3)^2+6$ 在区间 $-1\leqslant x\leqslant 4$ 上，当 $x=3$ 时取最大值 6，所以，

$2x-y\leqslant 6$.（在 $x=3$, $y=3^2-4\times 3+3=0$ 时，等号成立.）

又，　　$2x-y\geqslant 2x-(-x+7)=3x-7$.

（在 $y=-x+7$ 时，等号成立.）

因为 $3x-7$ 在区间 $-1\leqslant x\leqslant 4$ 上，当 $x=-1$ 时取最小值 -10，所以，

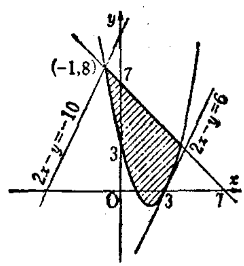
$$2x-y\geqslant -10.$$

（在 $x=-1$, $y=-(-1)+7=8$ 时，等号成立.）

故 $2x-y$ 在点(3, 0)取最大值 6，在点（-1, 8）取最小值 -10.

研究　令　　$2x-y=k$　　①

则①表示斜率为 2 的直线束．当它与(1)的区域有公共点时，k 表示 $2x-y$ 在这个公共点的值.



在①所表示的直线束中，与区域D有公共点的直线，被夹在通过点(-1, 8)的直线与切于抛物线 $y=x^2-4x+3$ 的直线之间.

很明显，当直线通过点(-1, 8)时，$k=-10$．当直线与抛物线相切时，$k=6$．由此可知，$2x-y=k$ 的最大值是 6，最小

值是-10.

发展题

把满足$y\leqslant -2x^2+3x+2$和$y\geqslant x^2-4$的点(x, y)的范围用图表示出来. 当点(x, y)在这个范围变动时，求$3x+y$的最大值和最小值.

要点

(x, y)的范围是两条抛物线

$y=x^2-4$,

$y=-2x^2+3x+2$

所围成的部分.

求交点的x坐标，找出x的变动范围.

把$3x+y$的值的上限和下限用x的函数表示出来.

或者考虑直线束

$3x+y=k$.

在与题中的区域有公共点的直线中，求出k的最大值和最小值即可.

k最小的直线通过点$(-1, -3)$，k最大的直线在$\left(\frac{3}{2}, 2\right)$与边界线相切.

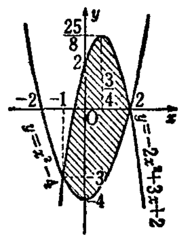
解　(x, y)的范围在$y=x^2-4$的上方和$y=-2x^2+3x+2$的下方，也就是下图的斜线部分(包含边界).

在这个范围，

$$x^2-4\leqslant -2x^2+3x+2.$$

$$\therefore\quad (x+1)(x-2)\leqslant 0.$$

因此，　$-1\leqslant x\leqslant 2$.



当(x, y)在上图的斜线部分时，

$$3x+y\geqslant x^2+3x-4.$$

由于

$$x^2+3x-4=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$$

在区间$-1\leqslant x\leqslant 2$上，当$x=-1$时

得最小值 -6. 因此,

$$3x+y\geqslant -6.$$

在 $x=-1, y=-3$ 时等号成立.

又,

$$3x+y\leqslant 3x+(-2x^2+3x+2)$$
$$=-2x^2+6x+2.$$

由于

$$-2x^2+6x+2=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{13}{2}$$

在区间 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 上, 当 $x=\frac{3}{2}$ 时得最大值 $\frac{13}{2}$, 因此,

$$3x+y\leqslant\frac{13}{2}.$$

在 $y=-2x^2+3x+2$ 上 $x=\frac{3}{2}$ 的点, 等号成立.

所以, 在 (x, y) 所满足的区域内, $3x+y$ 在点 $(-1, -3)$ 取最小值 -6, 在点 $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ 取最大值 $\frac{13}{2}$.

研究 设 AB 为坐标平面上的定线段. 当点 (x, y) 在线段 AB 上移动时, 则关于 x, y 的一次函数 $mx+ny$ 在 AB 的一端取最大值, 在另一端取最小值.

如果设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则在 AB 上的任意点的坐

标为

$$x=tx_2+(1-t)x_1,$$

$$y=ty_2+(1-t)y_1. \qquad (0\leqslant t\leqslant 1)$$

则 $mx+ny$ 是关于 t 的一次函数。

由此可以证明，关于闭区域(包含周界)上点(x, y)的一次函数，只有在周界上的点能够取得最大值和最小值.

练习 (答案 159 页)

29. 试将满足三个不等式 $y\leqslant -x^2+10x-16$，$y\geqslant x$，$2x+y\geqslant 10$ 的点(x, y)的存在范围(区域)，用斜线表示出来。

30. 当点(x, y)在上题的区域上变动时，求 $f(x, y)=2x+3y+1$ 的最大值和最小值。

习　　题(答案 169 页)

—A—

15. 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$. 试证，当 $af(0)<0$ 时，$f(x)=0$ 有不同的实数解，其中一个为正一个为负.

16. $y=f(x)$ 是关于 x 的二次函数，且 $f(-1)=6$, $f(0)=-1$, $f(1)=-4$. 求该函数在 x 轴截得线段的长.

17. 证明，二次函数 $y=ax^2+(2a+7)x+4$ 的图象与 x 轴交于不同的两点.

18. 通过点 $A(-1,0)$ 的直线 $y=m(x+1)$，与过点 $T(2,0)$ 和 x 轴相切的抛物线 $y=(x-2)^2$ 交于两点 P, Q. 求 m 的值.

19. 抛物线 $y=ax^2+(1-a)x-2a$ 通过与常数 a 无关的二定点. 求这二定点的坐标.

20. 证明，当抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过两点 $(0,-1)$, $(3,2)$ 时，抛物线 $y=ax^2+bx+c-(x-1)$ 与 x 轴交于不同的两点.

21. $y=ax^2+b$ 的图象通过点 $(1,2)$，并且与直线 $y=2x$ 相切，试确定 a, b.

22. 设 a, b 为实数，证明下列命题.

    (i) 对于任意的实数 x，总有
    $$2x^2+2(a+b)x+(a^2+b^2)\geqslant 0.$$
    (ii)
    $$\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

23. 对于 $P: x^2-4x+3<0$, $Q: x^2-2x-3<0$, $R: x^2+x<0$, 把下列命题中一定成立的，一定不成立的，不一定成立的，分别用 ○, ×, △ 记入 □ 中.

    (i) $P\rightarrow Q$□.　　(ii) $Q\rightarrow P$□.

    (iii) $P\rightarrow R$□.　　(iv) $R\rightarrow Q$□.

—B—

24 设抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=m(x+2)$ 的交点为P, Q. 求 OP 和 OQ 互相垂直时的 m 值. 在这里, O 是坐标原点.

25. 已知二次方程 $x^2+px+q+1=0$, 试回答下列各问.

(1) 试用 p, q 的关系式表示上述方程在 0, 1 之间有相异实数解的条件.

(2) 以同时满足(1)中 p, q 关系式的 p, q 为坐标, 试用图来表示点 (p, q) 的存在范围.

26. 已知抛物线 $y=-2x^2+4\sqrt{3}kx+3k^2$ (k 是不为 0 的常数). 设它的顶点为 A, 与 y 轴的交点为 B, 与 x 轴的交点为 C, D. 证明 $\triangle ACD$ 与 $\triangle BCD$ 的面积之比为一定值.

27. 抛物线 $y=(x-p)^2+q$ 的顶点在抛物线 $y=ax^2$ $(a\neq 0)$ 上, 如果前一个抛物线与直线 $y=1-x$ 相切, 那么 a 值的范围如何?

28. 从原点向抛物线 $y=x^2+px+q$……①引两条切线直交, 试回答下列问题.

(1) 求 p, q 的关系式.

(2) 求抛物线①的顶点轨迹.

29. 试求满足 $y>x^2+ax+b$ 的 (x, y) 也总满足 $y>x$ 和 $y>-2x$ 的 a, b 的条件. 把点 (a, b) 的存在范围用图表示出来.

30. 关于 x 的方程 $|x^2+ax+b|=2$ 有三个相异的实数解. 试回答下列各问, 其中 a, b 为实数.

(1) 求实数 a, b 的关系式.

(2) 画出(1)中关系的图象.

(3) 求当 $a=4$ 时的三个实数解.

8. 分式函数的图象

分式函数 $y=\frac{a}{x}$

用关于变数 x 的分式表示的函数，叫做**分式函数**. 由于分母为 0 时分式没有意义，因此，定义分式函数只限于分母不为 0 的变数.

分式函数最简单的情形，就是反比例函数. 即当 y 与 x 成反比例时，则 x，y 的关系被表示为

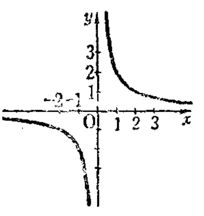
$$y=\frac{a}{x}(a\text{ 是常数}).$$

$a>0$ 时的图象

现在考虑 $a=2$ 的情形，即

$$y=\frac{2}{x} \qquad ①$$

这个函数对于 $x=0$ 以外的所有实数都有定义. 我们对于每个 x 值，求出对应的 $\frac{2}{x}$ 的值，画出它的图象如右图.



在①中，设 $x=x_1$ 时 y 值为 y_1，则由于 $y_1=\frac{2}{x_1}$，因此，当 $x=-x_1$ 时，

$$y=\frac{2}{-x_1}=-\frac{2}{x_1}=-y_1.$$

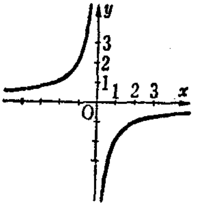
这表明，如果点(x_1, y_1)是图象上的点，则$(-x_1, -y_1)$也是图象上的点.

所以，①的图象关于原点对称.

$a<0$时的图象

同样可以作出

$$y=\frac{-2}{x} \qquad ②$$



的图象如右图.

这个曲线也关于原点对称.

无论在①中或在②中，随着$|x|$的增大，$|y|$逐渐减小；随着$|y|$的增大，$|x|$逐渐减小.

因此，曲线上的点越远离原点，则越无限地靠近x轴或y轴.

渐近线

象这样，当曲线上的点越远离原点，越无限地靠近一条定直线时，则把这条直线叫做曲线的渐近线。

对于①，② 的图象，x轴和y轴都是它们的渐近线，这里的渐近线，包含直交的意义，因此，把这些曲线叫做直角双曲线.

直角双曲线

一般地，$y=\frac{a}{x}$(a是常数)的图象，是以x轴和y轴为渐近线的直角双曲线.

如果$a>0$，则曲线在第 I、第 III 象限；

如果$a<0$，则曲线在第 II、第 IV 象限.

曲线关于原点对称.

图象的平移

与二次函数的情况一样，这个曲线沿x轴

方向和 y 轴方向分别平移 m 和 n, 可用

$$y-n=\frac{a}{x-m}, \quad \text{或} \quad y=\frac{a}{x-m}+n \qquad ③$$

来表示. 在平移中, 由直线 $y=0$(x 轴)移成直线 $y=n$, 直线 $x=0$(y 轴)移成直线 $x=m$, 因此, ③表示以 $x=m$, $y=n$ 为渐近线的直角双曲线.

提　　要

(1) $y=\frac{a}{x}$的图象: 是以坐标轴为渐近线的直角双曲线.

如果 $a>0$, 则在第 I、第 III 象限; 如果 $a<0$, 则在第 II、第 IV 象限.

(2) $y=\frac{a}{x-m}+n$ 的图象: 是把(1)的图象沿 x 轴方向和 y 轴方向分别平移 m 和 n, 以直线 $x=m$, $y=n$ 为渐近线.

例题 18. 在下面的(　　)中填入适当的数.

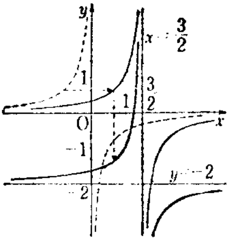
函数 $y=\frac{-4x+5}{2x-3}$的图象, 是由 $y=\frac{(\quad)}{2x}$的图象沿 x 轴方向平移(　　), 沿 y 轴方向平移(　　)而得到的.

解法　由于 $-4x+5$ 除以 $2x-3$ 所得商为 -2, 余数为 -1, 因此, 原式可变形为

$$y=-2+\frac{-1}{2x-3}=\frac{-1}{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}-2.$$

它表示把$y=\frac{-1}{2x}$的图象沿x轴方向平移$\frac{3}{2}$，沿y轴方向平移-2.

解 填入(　　)中的数顺次为$-1, \frac{3}{2}, -2$.



研究 这个函数的图象是右图中以二直线$x=\frac{3}{2}$, $y=-2$为渐近线的直角双曲线.

发展题

平移$y=\frac{1}{x}$的图象，使它通过两点$(1, 2)$, $(-3, 1)$. 问应怎样平移？

要点

把$y=\frac{1}{x}$的图象沿x轴方向平移m，沿y轴方向平移n，令其通过$(1, 2)$, $(-3, 1)$便可确定m, n.

通过点$(1, 2)$.

通过点$(-1, 3)$.

解 把$y=\frac{1}{x}$的图象沿x轴方向平移m，沿y轴方向平移n，可用

$$y=\frac{1}{x-m}+n \qquad ①$$

来表示. 要使①的图象通过两点$(1, 2)$, $(-3, 1)$，必须有当$x=1$时，$y=2$,

$$\therefore \quad 2=\frac{1}{1-m}+n \qquad ②$$

当$x=-3$时，$y=1$,

就m, n解之.

$$\therefore \quad 1=\frac{1}{-3-m}+n \qquad ③$$

②, ③去分母，整理得

$$mn-2m-n+1=0 \qquad ②'$$

$$mn-m+3n-4=0 \qquad ③'$$

两边相减得

$$-m-4n+5=0,$$

$$m=-4n+5 \qquad ④$$

代入 ②′ 整理得

$$4n^2-12n+9=0,$$

$$(2n-3)^2=0.$$

$$\therefore \quad n=\frac{3}{2}.$$

代入④得

$$m=-6+5=-1.$$

所以，把$y=\frac{1}{x}$的图象沿 x 轴方向平移 -1，沿 y 轴方向平移$\frac{3}{2}$即可.

练习 (答案 160 页)

31. 在下列函数的图象中，指出哪些图象通过平移能够重合？

(1) $y=\frac{1}{x-4}$.　　(2) $y=\frac{x}{2(x+1)}$.

(3) $y=\frac{x-3}{x-2}$.　　(4) $y=\frac{x-1}{x}$.

(5) $y=\frac{2x+3}{x+1}$.　　(6) $y=\frac{2x}{2x+1}$.

32. 当 $|x|\leqslant 1$ 时，求 $y=\frac{2x+1}{2x-1}$的取值范围.

9. 分式函数和二次方程

二次分式函数

关于变数 x，分母是一次式，分子是二次式的有理函数，例如

$$y=\frac{2x^2+1}{x}$$

可变形为

$$y=2x+\frac{1}{x} \tag{①}$$

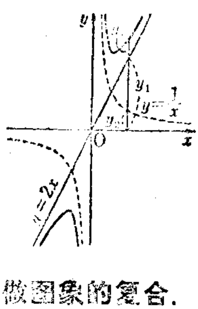
现在考虑两个函数

$$y=2x,\quad y=\frac{1}{x} \tag{②}$$

它们的图象是通过原点斜率为 2 的直线和以 x 轴、y 轴为渐近线的直角双曲线.

图象的复合

设②中的第一式的值为 y_1，第二式的值为 y_2 时，则根据图象上每个点的横坐标 x 所作 y_1，y_2 的和，便可得到①的图象.



象这样来作新图象，叫做图象的复合.

渐近线

随着 x 取正值并且趋近于 0 时，$2x$ 趋近于 0，$\frac{1}{x}$ 为正并且无限增大，因此，①的值无限增大.

还有，当 x 取负值并且趋近于 0 时，$2x$ 趋近于 0，$\frac{1}{x}$ 为负，其绝对值无限增大，所以，①的值为负，并且其绝对值无限增大。

所以，很明显，①的图象以 y 轴为渐近线。

另一方面，由于随着 $|x|$ 的增大时，$\frac{1}{x}$ 趋近于 0，因此，①无限地接近②的第一式。所以，①的图象仍以直线 $y=2x$ 为渐近线。

把①变形，可得关于 x, y 的二次方程

$$2x^2-xy+1=0 \qquad ③$$

二次曲线

一般地，用关于 x, y 的二次方程所表示的曲线(用这个方程所定义的 x 的函数 y 的图象)是所谓**二次曲线**。如圆，椭圆，双曲线，抛物线，都是二次曲线。

③是二次曲线中的双曲线，它的渐近线是 y 轴和直线 $y=2x$。

与平行于 x 轴的直线的交点

其次，我们来研究与 x 轴平行的直线 $y=k$ 和①即和③的交点。

把 $y=k$ 代入③得

$$2x^2-kx+1=0 \qquad ④$$

这个方程的判别式是 k^2-8，从而，(i) 当 $k^2>8$ 时，由于④有相异的实数解，因此，直线 $y=k$ 和①相交于两点。(ii) 当 $k^2=8$ 时，由于④有重解，因此，直线 $y=k$ 与①相切。

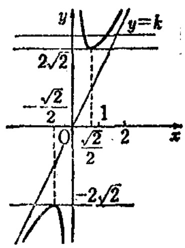
(iii) 当 $k^2<8$ 时，由于④有虚数解，因此，直线 $y=k$ 与①无公共点.

特别是，当 $k^2=8$ 时，$k=\pm 2\sqrt{2}$. 如果 $k=2\sqrt{2}$，则④的解是 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$；如果 $k=-2\sqrt{2}$，则④的解是 $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因此，

最大值、最小值

直线 $y=2\sqrt{2}$ 与①在第Ⅰ象限切于点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}\right)$，从而，$2\sqrt{2}$ 是 y 在 $x>0$ 时的最小值.

直线 $y=-2\sqrt{2}$ 与①在第Ⅲ象限切于点 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -2\sqrt{2}\right)$，从而，$-2\sqrt{2}$ 是 y 在 $x<0$ 时的最大值.



提　　要

(1) $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+d} \iff y=ax+m+\dfrac{n}{x+d}$

是以 $x=-d$ 和 $y=ax+m$ 为渐近线的双曲线.

(2) $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+d} \iff ax^2+(b-y)x+(c-dy)=0$

利用判别式确定 y 的范围.

例题 19. 证明，实数 x 的函数

$$y=\frac{2x^2-1}{x}$$

能取所有实数值，并作出这个函数的图象.

解法 设 k 为任意的实数，只要证明满足 $\frac{2x^2-1}{x}=k$ 的实数 x 存在即可. 作函数的图象时，可将原式化为 $y=2x-\frac{1}{x}$.

解 设 k 为任意的实数. 令

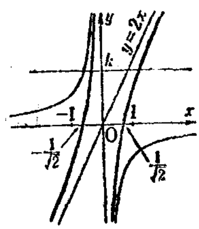
$$\frac{2x^2-1}{x}=k$$

则
$$2x^2-kx-1=0 \qquad ①$$

这个方程的判别式

$$D=k^2+8>0.$$

所以，①有相异的二实数解 α, β. 从而，所给函数在两点 $x=\alpha, x=\beta$ 取 k 值.



其次，把原式变形为 $y=2x-\frac{1}{x}$，令

$$y=2x, \quad y=-\frac{1}{x}.$$

如果复合这两个函数的图象，则可得如右图所示的，以 y 轴和直线 $y=2x$ 为渐近线的双曲线.

发展题

求实数 x 的函数

$$y=\frac{2}{x-1}+2x-1$$

的取值范围，并作出它的图象.

要点

当 k 为任意实数时，能否得 $y=k$？即满足

$$k=\frac{2}{x-1}+2x-1$$

的实数 x 是否存在？或者研究使上式存在时 k 的条件是什么.

解 对于实数 k，满足

$$k=\frac{2}{x-1}+2x-1 \qquad ①$$

的实数 x 存在的条件是，方程

$$k(x-1)=2+(2x-1)(x-1)$$

有不等于 1 的实数解.

对这个方程进行整理得

$$2x^2-(k+3)x+(k+3)=0 \qquad ②$$

方程②有实数解的条件是

$$(k+3)^2-8(k+3)\geqslant 0,$$

$$(k-5)(k+3)\geqslant 0.$$

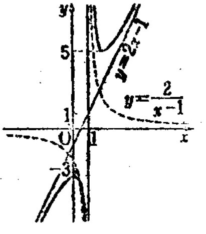
$$\therefore\quad k\geqslant 5 \text{ 或 } k\leqslant -3.$$

这时，只要把 $x=1$ 代入②就可以确定，②的实数解不等于 1.

所以，所给函数的取值范围是

$y\geqslant 5$ 或 $y\leqslant -3$.

图象如右图.



研究 也可以象下面那样利用算术平均值与几何平均值之间的关系来作.

当 a, b 为正时，则 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（在 $a=b$ 时等号成立）.

当 $x>1$ 时，$x-1>0$，因此，

$$\frac{2}{x-1}+2(x-1)\geqslant 2\sqrt{\frac{2}{x-1}\cdot 2(x-1)}=4.$$

$$\therefore\quad y=\frac{2}{x-1}+2x-1=\frac{2}{x-1}+2(x-1)+1\geqslant 5.$$

在$\frac{2}{x-1}=2(x-1)$时等号成立. 这时, $(x-1)^2=1$,

$$\therefore\qquad x=2.$$

同样, 当 $x<1$ 时, 利用一下导出的下式即可:

$$\frac{2}{x-1}+2(x-1)\leqslant -4.$$

练习 （答案 160 页）

33. 当 $a>0, b>0$ 时, 求函数 $y=ax+\frac{b}{x}(x>0)$ 的最大值或最小值.

例题 20. 点(x,y)在曲线 $y=3x-1+\frac{p}{x}(x>0)$上变动时, $x+y$ 的最小值是 2, 其中 p 是正的常数. 求 p 值, 并画出这个曲线的略图.

解法 因为 y 是 x 的函数, 所以, $x+y$ 也是 x 的函数. 再由 $x+y$ 的最小值是 2 的条件来求 p.

解 因为 x, y 满足

$$y=3x-1+\frac{p}{x}(x>0) \qquad ①$$

所以,

$$z=x+y=4x-1+\frac{p}{x}.$$

由于 $x>0, p>0$, 因此,

$$\frac{1}{2}\left(4x+\frac{p}{x}\right)\geqslant\sqrt{4x\cdot\frac{p}{x}}=2\sqrt{p}.$$

在 $4x=\frac{p}{x}$时等号成立．这时，$x^2=\frac{p}{4}$，从而，$x=\frac{\sqrt{p}}{2}$.

$$\therefore\quad z\geqslant 4\sqrt{p}-1\ (\text{等号在 } x=\frac{\sqrt{p}}{2}\text{时成立}).$$

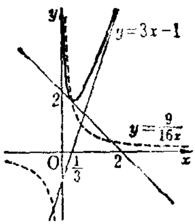
因此，z 的最小值是 $4\sqrt{p}-1$．根据题意，有

$$4\sqrt{p}-1=2,$$

$$\sqrt{p}=\frac{3}{4},\quad \therefore\quad p=\frac{9}{16}.\ (\text{答})$$

这时，①就是

$$y=3x-1+\frac{9}{16x}.$$



这个函数的图象，可根据

$$y=3x-1,\quad y=\frac{9}{16x}$$

的复合来作，如右图.

发展题

设 P 是曲线 $y=x+\frac{a}{x}$($x>0$，a 是非 0 常数）上的动点．当原点 O 与 P 的距离的最小值为 1 时，求 a 的值.

要点

由于在 $a>0$ 与 $a<0$ 的情况下，曲线的形状不同，因此，应分别考虑.

设 $P(x, y)$，则

$\overline{OP}^2=x^2+y^2$

$=x^2+\left(x+\frac{a}{x}\right)^2$

解　设曲线上动点 P 的坐标为 (x, y)，则

$$\overline{OP}^2=x^2+y^2,\quad y=x+\frac{a}{x}.$$

$$\therefore\quad \overline{OP}^2=x^2+x^2+\frac{a^2}{x^2}+2a$$

$$=2x^2+\frac{a^2}{x^2}+2a.$$

$=2x^2+\frac{a^2}{x^2}+2a.$

对于二正数$2x^2,\frac{a^2}{x^2}$，可以应用

算术平均值 ≥ 几何平均值的关系.

$$2x^2+\frac{a^2}{x^2}\geqslant 2\sqrt{2x^2\cdot\frac{a^2}{x^2}}$$

$$=2\sqrt{2}\,|a|.$$

$$\therefore\quad \overline{OP}^2\geqslant 2(\sqrt{2}\,|a|+a).$$

在$2x^2=\frac{a^2}{x^2}$，即$x^2=\frac{|a|}{\sqrt{2}}$时，等号成立.

所以，$\overline{OP}^2$的最小值是$2(\sqrt{2}\,|a|+a)$.

由于$\overline{OP}$的最小值$=1$，因此，

$$2(\sqrt{2}\,|a|+a)=1.$$

当$a>0$时，$2(\sqrt{2}+1)a=1$.

$$\therefore\quad a=\frac{1}{2(\sqrt{2}+1)}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

当$a<0$时，$2(-\sqrt{2}+1)a=1$.

$$\therefore\quad a=\frac{1}{2(-\sqrt{2}+1)}=-\frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

练习 （答案160页）

34. 设P是曲线$y=\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{x}\ (x>0)$上的动点．当原点$O$到$P$的距离最小时，求

(1) P的坐标.

(2) $\angle xOP$的大小.

10. 分式函数值的范围*

分母、分子是二次的分式函数

对于一般的分式函数，研究函数值的变化及最大值、最小值等，必须借助于微分法.

可是，在分母、分子至多是二次整式的情况，分式函数的取值范围，可以利用二次方程的判别式来求得.

分母是一次、分子是二次以下的情形，在前节已经学过了，现在来研究分母、分子都是二次的情况的例子：

$$y=\frac{x^2+ax+b}{x^2+px+q}(a\neq p) \qquad ①$$

如果这个函数能够取值k，则一定存在满足

$$k=\frac{x^2+ax+b}{x^2+px+q} \qquad ②$$

的实数值 x.

$p^2<4q$的情形

在 $p^2-4q<0$ 的情形，由于总有 $x^2+px+q>0$，因此，②与

$$k(x^2+px+q)=x^2+ax+b$$

即 $$(k-1)x^2+(kp-a)x+(kq-b)=0 \qquad ③$$

等价.

当 $k\neq1$ 时，满足③的实数值的存在条件是

$$(kp-a)^2-4(k-1)(kq-b)\geqslant 0,$$

即 $(p^2-4q)k^2-2(ap-2q-2b)k+(a^2-4b)\geqslant 0$ ④

考虑二次函数

$$f(x)=(p^2-4q)x^2-2(ap-2q-2b)x+(a^2-4b).$$

由于 x^2 的系数为负，因此，图象为上凸，并且，

$$f(1)=p^2-2ap+a^2=(p-a)^2>0$$

（由于 $a\neq p$）.

所以，二次方程 $f(x)=0$ 有比 1 小的解和比 1 大的解.

如果设这两个解为 $\alpha, \beta(\alpha<\beta)$，则满足④的 k 值范围为

$$\alpha\leqslant k\leqslant\beta(k\neq 1).$$

即对于这个范围的 k，③有实数解.

又，当 $k=1$ 时，由于 $kp-a=p-a\neq 0$，因此，③有实数解.

所以，在 $p^2-4q<0$ 的情况下，①在有限范围

$$\alpha\leqslant k\leqslant\beta(\text{包括 } k=1)$$

上取值. 从而得知，①取最小值 α，最大值 β.

函数值的范围

直线 $y=k$ 与图象交点的个数

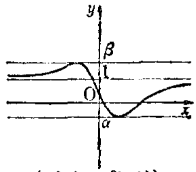
当 $\alpha<k<\beta(k\neq 1)$时，$f(k)>0$.

从而，由于③有相异的二实数解，因此，直线 $y=k$ 与曲线①交于两点.

当 $k=\alpha$ 或 $k=\beta$ 时，$f(k)=0$. 从而，由于③有重解，因此，直线 $y=\alpha$，$y=\beta$ 与曲线①相切.

又，当 $k=1$ 时，由于③只有一个实数解，因此，直线 $y=1$ 与曲线①只交于一点．把③变形，得

$$y=\frac{1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}}{1+\frac{p}{x}+\frac{q}{x^2}}.$$



$(p^2<4q, a^2>4b)$

显然，当 $|x|$ 无限增大时，y 趋近于 1.

由以上的讨论可知，在 $p^2-4q<0$ 的情形下，图象如上图．

$p^2\geqslant 4q$ 的情形

在 $p^2-4q\geqslant 0$ 的情形，①的分母存在为 0 的情况，图象在这个点不连续．

因为④对于所有的实数 k 成立，或对于 $k\leqslant\alpha$，$k\geqslant\beta(\alpha<\beta)$ 的范围成立，所以，y 可以取所有的实数值，或取 $y\leqslant\alpha$，$y\geqslant\beta(\alpha<\beta)$ 范围的值．

提　　要

$y=\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+px+q}(a\neq p)$ 的取值范围，

当 $p^2<4q$ 时，则 $\alpha\leqslant y\leqslant\beta$.

当 $p^2\geqslant 4q$ 时，则 $y\leqslant\alpha$，$y\geqslant\beta$ 或所有实数值．

例题 21. 指出分式函数

$$y=\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x+3}$$

的值的范围．如果存在最大值或最小值，试求之．

解法 由于分母的二次函数的判别式为负，因此，函数值的存在范围是有限的．根据直线 $y=k$ 与函数的图象有公共点的条件，可以确定 k 的范围．

解 假定 y 能取 k 值，则

$$k(x^2-2x+3)=x^2+2x-3,$$

即
$$(k-1)x^2-2(k+1)x+3(k+1)=0 \qquad ①$$

有实数解．

因此，当 $k-1\neq0$ 时，

$$(k+1)^2-(k-1)\cdot3(k+1)\geqslant0,$$

$$-2k^2+2k+4\geqslant0,$$

$$k^2-k-2\leqslant0.$$

$$\therefore\quad -1\leqslant k<1,\ 1<k\leqslant2 \qquad ②$$

当 $k-1=0$ 时，则 $k=1$.

所以，所给函数的取值范围是

$$-1\leqslant k\leqslant2.$$

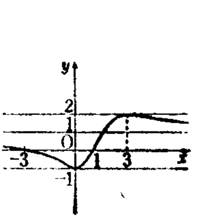
当 $k=-1$ 时，由①得，$-2x^2=0$，$\therefore\quad x=0$.

当 $k=2$ 时，由①得，$x^2-6x+9=0$，$\therefore\quad x=3$.

所以，所给函数在 $x=0$ 取最小值 -1，在 $x=3$ 取最大值 2.

研究 当 $k=1$ 时，由①得，$-4x+6=0$，

$\therefore\quad x=\dfrac{3}{2}$.



又，如果令 $x^2+2x-3=0$，则 $x=1$，-3．在这里，由于 $y=0$，因此，所给函数的图象如右图．

曲线在某一部分为下凸(例如在 $x=0$ 附近), 在某一部分为上凸(例如 $x=3$ 附近). 弯曲的方向发生变化的点, 叫做拐点. 拐点的 x 坐标约为 -0.9, 1.2, 4.2.

关于这样点的详细讨论, 必须借助于《数学 III》的知识.

发展题

当变数 x 取所有实数值时, 回答下列各问.

(1) $f(x)=\dfrac{x^2+2mx+1}{x^2+1}$ 的值与 $1+|m|$ 哪个大?

(2) 在比 $1-|m|$ 大的常数中, 是否存在比 $f(x)$ 值小的数?

要点

由于 $x^2+1>0$, 因此, $f(x)$ 的取值范围是有限的.

求出它的限界可知,

$$1-|m|\leqslant f(x)\leqslant 1+|m|.$$

在(1)中, 讨论 $1+|m|$ 与 $f(x)$ 的差也可以.

解 (1) 令 $g(x)=1+|m|-f(x)$, 则

$$g(x)=\frac{|m|x^2-2mx+|m|}{x^2+1}$$

$$=\frac{|m|(x\mp 1)^2}{x^2+1}$$

($m\geqslant 0$ 时取 $-$, $m<0$ 时取 $+$).

由于 $|m|\geqslant 0$, $(x\pm 1)^2\geqslant 0$, $x^2+1>0$, 因此,

$$g(x)\geqslant 0.$$

$$\therefore\quad 1+|m|\geqslant f(x)$$

(在 $x=-1$ 或 1 时等号成立).

(2) 令 $h(x)=f(x)-(1-|m|)$, 则

$$h(x)=\frac{|m|(x\pm1)^2}{x^2+1}\geqslant0.$$

$$\therefore\quad f(x)\geqslant1-|m|$$

（在 $x=-1$ 或 1 时等号成立）.

因为 $f(x)$ 是连续函数，最小值是 $1-|m|$，所以，设当大于 $1-|m|$ 的常数为 c 时，则必存在 $f(x)<c$ 的情形.

即当 $c>1-|m|$ 时，不存在 $c<f(x)$ 的常数 c.

例题 22. 讨论下面函数的图象与直线 $y=k$ 交点的个数，并作出图象的略图.

$$y=\frac{2x}{x^2-1}.$$

解法 讨论 $y=k$ 时方程 $\frac{2x}{x^2-1}=k$ 的实数解的个数. 在作略图时，可以把函数化成 $y=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$.

解 $$y=\frac{2x}{x^2-1}\qquad ①$$

令 $y=k$，则

$$\frac{2x}{x^2-1}=k\qquad ②$$

$$kx^2-2x-k=0\qquad ③$$

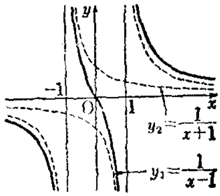
当 $k=0$ 时，由于②的解只有 $x=0$，因此，直线 $y=0$ 与①

的图象只交于一点(原点).

当 $k\neq 0$ 时，由于③的判别式 $4+4k^2>0$. 因此，③有相异二实数解. 因为当 $x=\pm 1$ 时，③的左边 $\neq 0$，所以，③的两个实数解既不是 1，也不是 -1. 因此，③的解就是②的解.

所以，直线 $y=k$ 与①的图象交于两点.

其次，把①变形为



$$y=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}.$$

如果复合

$$y_1=\frac{1}{x-1},\qquad y_2=\frac{1}{x+1}$$

的图象，则可得如图的曲线. 这就是所求的图象.

[注意] 当 $x^2-1=0$ 时，则 $x=\pm 1$. 对此，由于①的分母为 0，因此，函数值无定义. 当 x 趋近于这些值时，由于 y 为正或负，其绝对值无限增大，因此，直线 $x=1$，$x=-1$ 是渐近线 .

发展题

讨论下面函数的值的范围.

$$y=\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x-3}.$$

要点

注意

$$y=1+\frac{4}{(x+1)(x-3)},$$

可以考察函数

解 (1) 令 $y=k$，则

$$k=\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x-3} \qquad ①$$

去分母得

$(k-1)x^2-2(k-1)x$

$$y=\frac{1}{(x+1)(x-3)}$$

值的变化.

或者令$y=k$,根据满足

$$\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x-3}=k$$

的实数x的存在条件来确定k的范围.

$$-(3k+1)=0 \qquad ②$$

当$k=1$时,由于这个方程无意义,因此,所给函数不能取$y=1$的值.

当$k\neq 1$时,②有实数解的条件是

$$(k-1)^2+(k-1)(3k+1)\geqslant 0.$$

整理后除以4,得

$$k(k-1)\geqslant 0 \quad (k\neq 1).$$

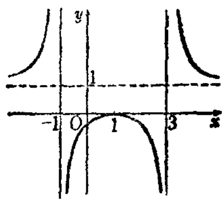
$$\therefore \quad k\leqslant 0 \text{ 或 } k>1.$$

即所给函数的值的范围是

$$y\leqslant 0 \quad 和 \quad y>1.$$

研究 由于题中的函数可化为

$$y=1+\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+1},$$



因此,这个函数的图象,可把复合

$$y=\frac{1}{x-3},\ y=-\frac{1}{x+1}$$

的图象所得到的曲线,再沿y轴方向平移1,便可得到.

练习 (答案161页)

35. 讨论下面函数值的范围,并作出图象的略图.

$$y=\frac{2}{x^2-1}.$$

习　　题（答案 172 页）

——A——

31. 把直角双曲线 $y=-\frac{2}{x}$ 按下面条件作平移，求所得曲线的方程.

(1) 沿 y 轴方向平移 $+3$.

(2) 沿 x 轴方向平移 -2.

(3) 沿 x 轴方向平移 $+2$，沿 y 轴方向平移 -1.

32. 下列方程表示什么曲线？

(1) $xy+x=3$.　　　　(2) $(x-1)(y+1)=1$.

33. 讨论下列函数的取值范围，作出图象.

(1) $y=\frac{1}{1+|x|}$.　　　　(2) $y=\frac{1}{1+x^2}$.

34. 利用图象解下面的不等式.

$$\frac{x}{x-2}\leqslant x+1.$$

35. 当 $y=\frac{(x-2)(x-5)}{x-1}$ 时，y 的取值范围是 $y\leqslant\square$ 和 $y\geqslant\square$. 又，$y>0$ 时的 x 值的范围是 $x>5$ 和 $\square<x<\square$.

36. 函数 $\frac{x+1}{x^2+3}$ 在 $0\leqslant x\leqslant 2$ 的范围，取最大值 $\square$，最小值 $\square$.

37. 证明，当 $f(x)=\frac{1}{x}$ 时，对于任意的正实数 a，b 和 $0<t<1$ 的实数 t，下式成立.

$$tf(a)+(1-t)f(b)\geqslant f(ta+(1-t)b).$$

——B——

38. 设 $f(x)=\frac{4x-2}{5-x}(x\neq 5)$.

(1) 作出 $y=f(x)-x$ 的图象.

(2) 求 $f(x)-x$ 的取值范围.

(3) 求使 $f(x)>x$ 的 x 的范围.

39. 函数 $y=\dfrac{bx^2+c}{x+a}$ 的图象满足下列条件 ①, ②.

① 图象通过原点.　　　　② 渐近线是 $x=1$, $y=x+1$.

由此,

(1) 求 a, b, c 的值.

(2) 作出图象的略图.

(3) 求 y 的极值.

40. 对于函数 $y=\dfrac{x^2+2x+5}{x^2+4x+5}$,

(1) 证明, 如果 $x>0$, 则 $y<1$; 如果 $x<0$, 则 $y>1$.

(2) 求 y 的最大值, 最小值.

41. 对 x 取任意实数值. 求使不等式

$$-1<\frac{2ax-b}{2x^2-8x+9}<1$$

成立的正整数 a, b.

11. 无理函数的图象

无理函数

用关于变数的无理式表示的函数，叫做**无理函数**. 例如，

$$y=\sqrt{x}，\ y=\frac{1}{\sqrt{-x}},$$

$$y=-\sqrt{4-x^2}，\ y=\sqrt[3]{x^2}$$

等，都是无理函数.

$y=\sqrt{x}$的图象

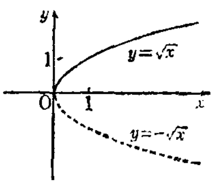
现在，研究最简单的无理函数

$$y=\sqrt{x} \qquad ①$$

首先，因为这个函数的值在实数范围内存在的条件是$x\geqslant 0$，所以，①的定义域是$x\geqslant 0$.

其次，因为$\sqrt{x}\geqslant 0$，所以，①的值域是$y\geqslant 0$.

对于属于定义域的x的各个值，求出对应的$\sqrt{x}$的值，便可得到如右图的图象.



$y=-\sqrt{x}$的图象

下面，观察

$$y=-\sqrt{x} \qquad ②$$

则可知它的定义域与①相同，是$x\geqslant 0$，而值域是$y\leqslant 0$. 对于同一个x值，①的值和②的值只是符号不同.

所以，②的图象如上图的点线，它与①的图

象关于 x 轴对称.

无论把①平方还是把②平方，都能得到

$y^2=x$ ③

反之，由③能推出①和②.

$y^2=x$ 的图象

由于③表示 x 是 y 的二次函数，因此，它的图象显然是以原点为顶点、以 x 轴为对称轴，左凸的抛物线.

从而，①的图象是抛物线③的 $y\geqslant 0$ 部分；②的图象是抛物线③的 $y\leqslant 0$ 部分.

无理函数 $y=\sqrt{ax}$

一般地，如果 $a>0$，则 $y=\sqrt{ax}$ 的定义域是 $x\geqslant 0$；如果 $a<0$，则 $y=\sqrt{ax}$ 的定义域是 $x\leqslant 0$.

$$\left.\begin{array}{l} y=\sqrt{ax} \\ y=-\sqrt{ax} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow y^2=ax.$$

由于 $y^2=ax$ 即 $x=\dfrac{1}{a}y^2$ 的图象是以原点为顶点，以 x 轴为轴的抛物线，因此，

$y=\sqrt{ax}$ 的图象，是这个抛物线的 $y\geqslant 0$ 部分；

$y=-\sqrt{ax}$ 的图象，是这个抛物线的 $y\leqslant 0$ 部分.

与二次函数、分式函数的情形一样，

将 $y=\sqrt{ax}$ 的图象沿 x 轴方向平移 m，沿 y 轴方向平移 n，可用

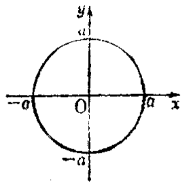
$$y=\sqrt{a(x-m)}+n$$

来表示.

无理函数
$y=\sqrt{a^2-x^2}$

下面来研究无理函数

$y=\sqrt{a^2-x^2}\quad(a>0)$



因为满足 $a^2-x^2\geqslant0$ 的 x 的范围是 $-a\leqslant x\leqslant a$，所以，这个函数的定义域是 $-a\leqslant x\leqslant a$，值域是 $0\leqslant y\leqslant a$.

$$\left.\begin{aligned}y&=\sqrt{a^2-x^2}\\y&=-\sqrt{a^2-x^2}\end{aligned}\right\}\Longleftrightarrow y^2=a^2-x^2$$

$$\Longleftrightarrow x^2+y^2=a^2.$$

由于 $x^2+y^2=a^2$ 表示以原点为中心，半径为 a 的圆，因此，

$y=\sqrt{a^2-x^2}$ 的图象是这个圆的 $y\geqslant0$ 部分；

$y=-\sqrt{a^2-x^2}$ 的图象是这个圆的 $y\leqslant0$ 部分.

提　要

(1) $y=\sqrt{ax}$ 的图象	是抛物线 $y^2=ax$ 的 $y\geqslant0$ 部分.
(2) $y=-\sqrt{ax}$ 的图象	是抛物线 $y^2=ax$ 的 $y\leqslant0$ 部分.
(3) $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 的图象	是圆 $x^2+y^2=a^2$ 的 $y\geqslant0$ 部分.
(4) $y=-\sqrt{a^2-x^2}$ 的图象	是圆 $x^2+y^2=a^2$ 的 $y\leqslant0$ 部分.

例题 23. 讨论下列函数的图象.

(1) $y=\sqrt{-x}$. (2) $y=\sqrt{2x-4}$.

解法　首先明确定义域,在这个范围内使 x 取种种的值,计算出对应的 y 值.

解　(1) 要使$\sqrt{-x}$为实数，必须

$$-x\geqslant 0,\quad \therefore\ x\leqslant 0.$$

对应于这个范围的 x 值,计算出 y 值,则有

x	0	-0.25	-0.5	-1	-2	-3	-4	-5	……
y	0	0.5	0.707	1	1.414	1.732	2	2.236	……

由此,可得下面的图(1).

(2) 要使$\sqrt{2x-4}$为实数,必须

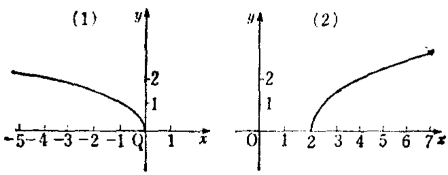
$$2x-4\geqslant 0,\quad \therefore\ x\geqslant 2.$$

对应于这个范围的 x 值,计算出 y 值,则有

x	2	2.2	2.5	3	3.5	4	5	6	7	……
$2x-4$	0	0.4	1	2	3	4	6	8	10	……
y	0	0.632	1	1.414	1.732	2	2.449	2.828	3.162	……

由此,可得下面的图(2).

[注意] (1) 的图象与$y=\sqrt{x}$的图象关于 y 轴对称. 由于(2)能变形为$y=\sqrt{2(x-2)}$，因此，它的图象可由$y=\sqrt{2x}$



的图象沿 x 轴方向平移 2 而得到.

发展题

作下列函数的图象.

(1) $y=-\sqrt{2-x}$. (2) $y=-x+\sqrt{x}$.

要点

(1)抓住与

$y=\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{x}$

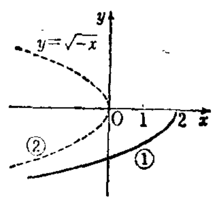
等的基本图象的位置关系来作图象.

(2)作 $y_1=-x$, $y_2=\sqrt{x}$ 的图象，把它们复合即可。

解 (1) 由 $-(x-2)\geqslant 0$ 知,

$$y=-\sqrt{-(x-2)} \quad ①$$

的定义域是 $x\leqslant 2$.



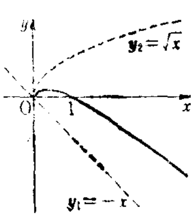
①的图象可由

$$y=-\sqrt{-x} \quad ②$$

的图象沿 x 轴方向平移 2 而得，②的图象是 $y=\sqrt{-x}$ 的图象关于 x 轴对称的图形.因此,所求图象如上图.

(2) 令 $y_1=-x$, $y_2=\sqrt{x}$, 则 $y=y_1+y_2$.

所以，复合 y_1 的图象和 y_2 的图象，得到如右图的曲线.



研究 在 $y=-x+\sqrt{x}$ 中，如果令 $y=k$，则有

$$(k+x)^2=x,$$

$$x^2+(2k-1)x+k^2=0.$$

求满足这个方程的实数 x 存在的条件，则得

$$(2k-1)^2-4k^2\geqslant 0,\ \therefore\ k\leqslant\frac{1}{4}.$$

$$当\ k=\frac{1}{4}时，\ x=\frac{1}{4}.$$

所以，函数 $y=-x+\sqrt{x}$ 在 $x=\dfrac{1}{4}$ 取最大值 $\dfrac{1}{4}$.

练习 （答案 161 页）

36. 作下面函数的图象.

(1) $y=\sqrt{x+2}+1$. (2) $y=2\sqrt{1-x}$.

(3) $y=1-\sqrt{2x}$.

37. 作出用下列方程所表示的曲线.

(1) $y=x-\sqrt{x}$. (2) $(x-y)^2=4x$.

例题 24. 作下列函数的图象.

(1) $y=\sqrt{x(2-x)}$.

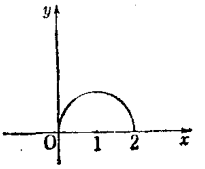
(2) $y=-\sqrt{2+x-x^2}$.

解法 明确定义域，遵循根号规则．对于(1)，注意 $y\geqslant 0$；对于(2)，注意 $y\leqslant 0$．在确定图象的形状时，把函数式的两边平方即可确定.

解 (1) 由于 $x(2-x)\geqslant 0$，因此，$x(x-2)\leqslant 0$，所以，定义域为 $0\leqslant x\leqslant 2$.

$$x(2-x)=1-(1-2x+x^2)=1-(x-1)^2$$

$$\therefore \quad y=\sqrt{1-(x-1)^2}.$$



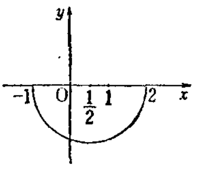
这个函数的图象，就是把 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的图象沿 x 轴方向平移 1. 也就是以点(1, 0)为圆心，半径为 1 的圆在 x 轴的上方部分(包含两端点).

(2)由于 $2+x-x^2\geqslant 0$, 因此, $(x-2)(x+1)\leqslant 0$, 所以, 定义域为 $-1\leqslant x\leqslant 2$.

$$2+x-x^2=\frac{9}{4}-\left(\frac{1}{4}-x+x^2\right)=\frac{9}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2.$$

$$\therefore \ y=-\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}.$$

$y=-\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-x^2}$ 的图象, 是以原点为圆心, 半径为 $\frac{3}{2}$ 的圆在 x 轴的下方部分(包含两端点). 所给函数的图象，就是把这个图象沿 x 轴方向平移 $\frac{1}{2}$. 图象如右图.



研究 对于(1), 把两边平方, 变形为 $(x-1)^2+y^2=1$. 它表示以点(1, 0)为圆心, 半径为 1 的圆.

发展题

求函数 $y=5-\sqrt{3+2x-x^2}$ 的最大值和最小值.

要点

这个函数的定义域是由

$3+2x-x^2\geqslant 0$

确定的闭区间. 由于函数

解 $y=5-\sqrt{3+2x-x^2}$ 的定义域为, 由 $3+2x-x^2\geqslant 0$ 得

$$x^2-2x-3\leqslant 0,$$

$$(x+1)(x-3)\leqslant 0.$$

在这个区间连续，因此，有最大值，最小值.

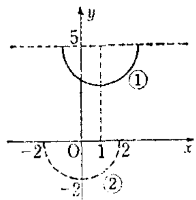
可作出图象来考虑.

$\therefore\quad -1\leqslant x\leqslant 3.$

$$3+2x-x^2=4-(1-2x+x^2)$$

$$=4-(x-1)^2.$$

$$\therefore y=-\sqrt{4-(x-1)^2}+5 \quad ①$$



由于这个函数的图象就是把

$$y=-\sqrt{4-x^2} \quad ②$$

的图象沿 x 轴方向平移 1，沿 y 轴方向平移 5，因此，图象如右图的半圆.

所以，所给函数①在 $x=-1$，3 取最大值 5，在 $x=1$ 取最小值 $5-2=3$.

（答）最大值是 5，最小值是 3.

练习　（答案 161 页）

38. (1)作出下列各函数的图象.

① $y=1-x$.　　　② $y=\dfrac{1}{1-x}$.

③ $y=\sqrt{1-x^2}$.　　　④ $y=\sqrt{1+x^2}$.

(2) 利用(1)的图象，判定下面四个数 A, B, C, D 的大小顺序.

$$A=1-a,\quad B=\frac{1}{1-a},\quad C=\sqrt{1-a^2},$$

$$D=\sqrt{1+a^2}.\qquad 其中,\quad 0<a<1.$$

39. 作出下列函数的图象.

(1) $y=\sqrt{x^2+x+1}$.　　　(2) $y=2-\sqrt{x^2-4}$.

例题 25. 求下面函数的最大值，最小值.

$$y=\sqrt{(x+1)(2-x)}.$$

解法 作出图象，可以直观地得到解决. 在这个过程中，需要对根号内的式子作适当的变形，然后，注意二次函数的最大值、最小值问题即可.

解 因为 $(x+1)(2-x)\geqslant 0$，即$(x+1)(x-2)\leqslant 0$，所以，函数的定义域是

$$-1\leqslant x\leqslant 2 \quad ①$$

$$(x+1)(2-x)=-x^2+x+2$$

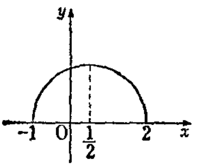
$$=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4} \quad ②$$

在①的范围，当 $x=-1$, $x=2$ 时，②取最小值0，在$x=\frac{1}{2}$取最大值$\frac{9}{4}$.

所以，y 的最大值是$\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}\left(当x=\frac{1}{2}时\right)$，最小值是0（当$x=-1, 2$ 时）.

研究 由②知，y可变形为

$$y=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}.$$



这个函数的图象，是以点$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$为圆心，半径为$\frac{3}{2}$的圆在$y\geqslant 0$ 的部分. 如果照此考虑，其解自明.

发展题

作出下面函数的图象的略图．求它的最大值，最小值．

$$y=\sqrt{2+x}+\sqrt{1-x}.$$

要点

首先，要明确函数的定义域．

函数的图象，可根据

$y_1=\sqrt{2+x}$，

$y_2=\sqrt{1-x}$

的图象复合而得．

比较明显，在定义域的端点取最小值，但还应该证明．

可以就 y^2 来考虑最大值．

$\sqrt{(2+x)(1-x)}$ 的最大值，可象例题那样来求．也可以利用算术平均值与几何平均值的关系

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$$

来求．

解 令 $y_1=\sqrt{2+x}$ ①

$y_2=\sqrt{1-x}$ ②

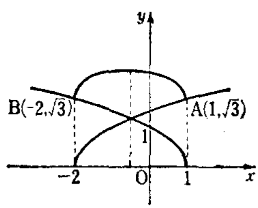
则它们的定义域分别是

$$x\geqslant-2,\ x\leqslant1.$$

所以，$y=y_1+y_2$ ③

的定义域是 $-2\leqslant x\leqslant1$．

由于①，②的图象是如下图所示的抛物线的弧，因此，把它们复合起来即可得到所给函数的图象．



这个图象就是以①，②图象上的点 $A(1,\sqrt{3})$，$B(-2,\sqrt{3})$ 为端点，如图所示的曲线．

在区间 $-2<x<1$ 内，由于

曲线①的点在直线

$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$ 的上方，

曲线② 的点在直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$

的上方.

因此,

$$y_1>\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2),\quad y_2>-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1).$$

从而,

$$y=y_1+y_2>\sqrt{3}.$$

所以, y 在 $x=1$, -2 取最小值 $\sqrt{3}$.

其次,

$$y^2=3+2\sqrt{(2+x)(1-x)}.$$

$$(2+x)(1-x)=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$

在 $x=-\frac{1}{2}$ 取最大值 $\frac{9}{4}$.

所以, y 在 $x=-\frac{1}{2}$ 取最大值

$$\sqrt{3+2\times\frac{3}{2}}=\sqrt{6}.$$

练习 (答案 162 页)

40. 求下面函数的最大值.

$$y=\sqrt{x^2+5}+\sqrt{9-x^2}.$$

12. 无理方程和无理不等式*

无理方程

现在，研究无理方程．例如，在解

$$\sqrt{x+3}=x+1 \qquad ①$$

时，把两边平方导出整式方程

$$x+3=(x+1)^2 \qquad ②$$

（现在是二次方程），解这个方程就可以了．

如果存在 x 值，使①成立，则②也成立．可是，②中的所有解，不一定都是①的解．这是因为，把

$$-\sqrt{x+3}=x+1 \qquad ③$$

的两边平方，也能得到②．因此，在②的解中，除①的解外，也包含③的解．

但是，如果③无解时，则①的解是②的解，②的解也是①的解．

同解的意义

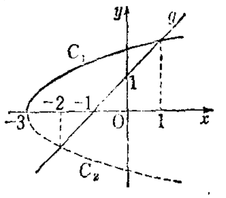
这时，称①和②为同解．

在无理方程中，由于在这里对虚数解不作讨论，因此，在理解这部分内容时，利用图象比较方便．

用图象说明

令 $y=\sqrt{x+3}$ 的图象为 C_1，$y=-\sqrt{x+3}$ 的图象为 C_2，直线 $y=x+1$ 为 g，则①的解就是 g 与 C_1 的交点的 x 坐标，③的解就是 g 与 C_2 的交点的 x 坐标．

可是，②的解对应曲线 $y^2=x+3$ 与直线 $y=x+1$ 的交点．必须注意，$y^2=x+3$ 是由 C_1 和 C_2 合起来的曲线．



实际地来解②，则

$$x^2+x-2=0,$$

$$(x+2)(x-1)=0,\quad \therefore\quad x=-2,1.$$

由于 $x=1$ 是 g 与 C_1 交点的 x 坐标，因此，是①的解．但是，由于 $x=-2$ 是 g 与 C_2 交点的 x 坐标，因此，不是①的解．

不等式的一个性质

对于不等式，下面的命题成立：

当 $0\leqslant A<B$ 时，则 $A^2<B^2$．

但是，很明显，当 $A\geqslant 0$ 时，下面的命题不一定成立：

当 $A^2<B^2$ 时，则 $A<B$．

无理不等式

在解无理不等式中，当把两边平方时，必须注意上述性质．

例如，解不等式

$$\sqrt{x+3}<x+1 \tag{④}$$

首先注意，由于 $x+3\geqslant 0$，因此，左边的定义域是 $x\geqslant -3$．

当 x 在这个范围时，$\sqrt{x+3}\geqslant 0$．于是，把④的两边平方，得

$$x+3<(x+1)^2 \tag{⑤}$$

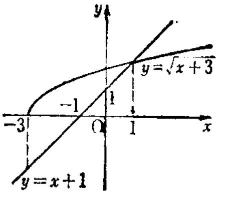
整理得

$$(x+2)(x-1)>0.$$

$\therefore\quad x<-2, x>1$ ⑥

但是，由于$\sqrt{x+3}\geqslant0$，因此，在④中必有$x+1>0$.

所以，由⑥可知，④的解是$x>1$.



图象的应用

在这里必须注意的是，不要根据条件$x\geqslant-3$和⑥，而误认为④的解是$-3\leqslant x<-2$，$x>1$.

如果利用图象，则立刻会明白这是错误的．因为满足④的x的范围是$y=\sqrt{x+3}$的图象，在$y=x+1$的图象的下方部分，也就是$x>1$部分.

其次，根据这个图象可知，

$$\sqrt{x+3}>x+1$$

的解是$-3\leqslant x<1$.

例题 26. 解下面的方程.

$$x+\sqrt{x+1}=5.$$

又，指出用图象解这个方程的方法(画出略图)，并说明，在按前面的式子的解法中，对所得解要作讨论的必要性.

解法 将x移到右边后，两边平方．在所得解中，取$5-x>0$的解．利用图象解，就是求$y=\sqrt{x+1}$的图象和$y=5-x$的

图象的交点的 x 坐标.

解 将所给方程化为

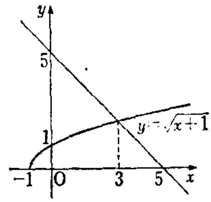
$$\sqrt{x+1}=-x+5 \quad ①$$

两边平方，则

$$x+1=x^2-10x+25 \quad ②$$

$$x^2-11x+24=0$$

$$(x-3)(x-8)=0. \quad \therefore \quad x=3,8.$$



由于①的左边$\geqslant 0$，因此，$-x+5\geqslant 0$. 所以舍去 $x=8$，所求解为 $x=3$. 下面，作出

$$y=\sqrt{x+1}, \quad y=-x+5$$

的图象，得出如右图的抛物线的弧和直线，其交点的 x 坐标为 $x=3$.

②的解，给出了曲线 $y^2=x+1$ 与直线 $y=-x+5$ 的交点的 x 坐标. 在交点中，既包含$y=\sqrt{x+1}$与直线 $y=-x+5$ 的交点，又包含$y=-\sqrt{x+1}$与直线 $y=-x+5$ 的交点. 这表明，在②的解中，除了①的解外，也许包含多余的解. 所以，对所得解有讨论的必要.

发展题

解下面的无理方程.

$$\sqrt{2x+4}=x+a.$$

要点

考察$y=\sqrt{2x+4}$ 的图象与$y=x+a$的图象的交

解 令 $y=\sqrt{2x+4} \quad ①$

$$y=x+a \quad ②$$

作出每个函数的图象.

点.

前者是以点$(-2, 0)$为端点的抛物线弧.

分别求出直线$y=x+a$通过这点时和与曲线相切时的a.

①的图象是抛物线

$$y^2=2x+4 \qquad ③$$

在x轴上方的部分(包含端点)，它与②的图象的公共点的x坐标是

$$(x+a)^2=2x+4$$

即 $x^2+2(a-1)x$

$$+(a^2-4)=0 \qquad ④$$

的解.

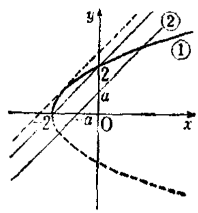
④有实数解的条件是

$(a-1)^2-(a^2-4)\geqslant 0.$

因此，$-2a\geqslant -5.$

$$\therefore \quad a\leqslant \frac{5}{2}.$$

当②的图象通过①的图象的端点$(-2, 0)$时，$a=2$.



因为所给方程的解是①，②交点的x坐标，所以，由图象可知，

i) 当$a<2$时，所给方程的解是④的解中较大者.

$$\therefore \quad x=-(a-1)$$

$$+\sqrt{(a-1)^2-(a^2-4)}$$

$$=1-a+\sqrt{5-2a}.$$

ii) 当 $2\leqslant a<\frac{5}{2}$时，所给方程的解是④的两个解.

$$\therefore\quad x=1-a\pm\sqrt{5-2a}.$$

iii) 当 $a=\frac{5}{2}$时，$x=1-a$

$$=-\frac{3}{2}.$$

iv) 当 $a>\frac{5}{2}$时，无解.

练习 （答案 162 页）

41. 作出 $y=\sqrt{|1-x|}$ 的图象，并利用这个图象说明，为使方程

$$ax=\sqrt{|1-x|}$$

有三个相异的实数解，a 应在什么范围？

例题 27. 解下面的不等式.

$$\sqrt{x+1}>\frac{1}{1-x}.$$

解法 令 $y_1=\sqrt{x+1}$，$y_2=\frac{1}{1-x}$，作出每个函数的图象. 考察 x 在怎样的范围时，y_1 的图象在 y_2 的图象的上方即可.

解 令

$$y_1=\sqrt{x+1} \qquad ①$$

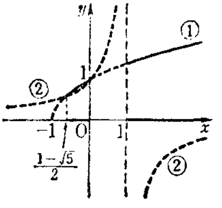
$$y_2=\frac{1}{1-x} \qquad ②$$

由于① 的图象，就是把 $y=\sqrt{x}$ 的图象沿 x 轴方向平移

-1 而得的曲线；②的图象.就是把 $y=-\frac{1}{x}$ 的图象沿 x 轴方向平移 1 而得的曲线. 因此，①，②的图象如下图.

所以.在 $x>1$ 的范围，$y_1>y_2$.

从而，所给的不等式成立.



当 $x<1$ 时，①，②交点的 x 坐标满足

$$\sqrt{x+1}=\frac{1}{1-x}.$$

两边平方，去分母，整理得

$$x(x^2-x-1)=0.$$

$$\therefore\quad x=0,\quad x=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

因为 $x<1$，所以，$x=0$，$x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}(<0)$.

故在 $y_1>y_2$ 的范围，所给不等式的解是

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}<x<0\quad 和\quad x>1.$$

发展题

作出函数 $y=|2x-1|$ 和 $y=\sqrt{2x+1}$ 的图象，再解下面的不等式.

$$|2x-1|\leqslant\sqrt{2x+1}.$$

要点

当 $x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$|2x-1|=-(2x-1)$；当 $x\geqslant\frac{1}{2}$

解 $y=|2x-1|$ ①

$y=\sqrt{2x+1}$ ②

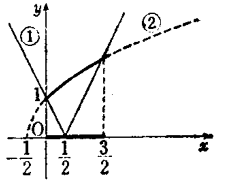
因为

时，$|2x-1|=2x-1$.

求出 $y=|2x-1|$ 的图象和 $y=\sqrt{2x+1}$ 的图象交点的 x 坐标.

$$|2x-1|=\begin{cases}2x-1 & \left(x\geqslant\frac{1}{2}\text{时}\right),\\ -2x+1 & \left(x\leqslant\frac{1}{2}\text{时}\right).\end{cases}$$

所以，①的图象如右图的折线.



又，②的图象是以点$\left(-\frac{1}{2},0\right)$为顶点，以 x 轴为轴的抛物线在 x 轴的上方部分(包含端点).

为了求①，②交点的 x 坐标，可令

$$|2x-1|=\sqrt{2x+1}.$$

两边平方，得

$$4x^2-4x+1=2x+1,$$

$$x(2x-3)=0.$$

$$\therefore\quad x=0,\frac{3}{2}.$$

参照图象，可知所给不等式的解为

$$0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}.$$

练习 (答案 162 页)

42. 利用图象解下列方程.

(1) $7\sqrt{25-x^2}=x+25$. (2) $\sqrt{1-x^2}=|2x-1|$.

43. 求满足下面不等式的 x 的范围.

$$\sqrt{a^2-x^2}>2x+a\quad(a\neq0).$$

习　　题 （答案 176 页）

——A——

42. 作出下列方程所表示的曲线.

(1) $x=\sqrt{y+1}$.　　　　(2) $x+1=\sqrt{15+2y-y^2}$.

43. 求下列函数的最大值、最小值.

$$y=x-\sqrt{1-x^2}.$$

44. 当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，求下面函数的最大值、最小值.

$$y=4x-3\sqrt{1-x^2}.$$

45. 求方程 $\sqrt{x-3}=ax+1$ 有两个相异实数解的条件.

46. 解下列不等式.

(1) $\sqrt{3-x}>x-2$.

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}>\dfrac{2}{2x+1}$.

47. 设 $\triangle ABC$ 两边 AB, AC 的长分别为 3cm, 4cm. 用图象表示，随着 BC 长 $x$cm 的变化，从 A 到 BC 的中线长 $y$cm 如何变化.

——B——

48. 当 $0\leqslant y\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{4}$ 时，$\sqrt{\dfrac{1}{4}-x+y}$ 和 $\dfrac{1}{2}$ 哪个大？

49. 作出函数 $y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ 的图象.

50. 作出方程 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ $(a>0)$ 所表示的函数的图象.

然后，把直线 $y=-x+k$ 与这个图象的交点个数，按 k 值进行分类.

51. 把下面两个图象画在同一坐标系中，求这两个图象共有两点时 k 的范围.

$$y=\sqrt{x+2},\qquad y=x+|x-k|.$$

52. 作出 $y=x^2-x-2$ 和 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 的图象. 然后, 利用图象判定方程 $x^2-x-2=\sqrt{a^2-x^2}$ 的实数解的个数.

53. (1) 作出 $y=\sqrt{-x(x+4)}$ 的图象.

(2) 作出 $y=-|x+2|+1$ 的图象.

(3) 为了使满足 $\sqrt{-x(x+4)}-|x-2|+1=k$ 的实数 x 存在, k 为怎样的实数才是充分且必要的?

(4) 对于(3), 求 $k=0$ 时的实数 x.

54. 求二曲线 $y=\sqrt{2x-a}$, $x=\sqrt{2y-a}$ 相交时 a 的范围. 其次, 求交点的坐标.

55. 关于 x 的方程 $\sqrt{ax+b}=x+1$,

(1) 要使方程有相异二实数解, 以 (a, b) 为坐标的点应在什么范围?

(2) 要使方程至少有一个实数解, 以 (a, b) 为坐标的点应在什么范围?

把它们用图表示出来.

56. 设 s 为一实数, 已知

$$x+\sqrt{sx+y}=1.$$

试求关于 x 的函数 y 的最小值 t. 其次, 把 t 看作 s 的函数, 作出它的图象.

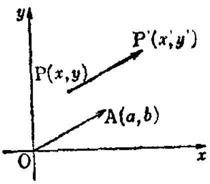
13. 平移和对称变换

点的变换

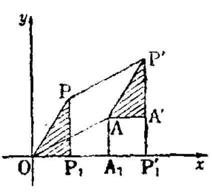
在坐标平面上，使点 $P(x, y)$ 按着一定的规则，移到同一平面上的点 $P'(x', y')$，叫做坐标平面上的变换．把 P 移到 P'，也可以说是有 P' 对应 P．使 P 与它本身相对应，也认为是一种变换，把它叫做**恒等变换**．

平移

使点 $P(x, y)$ 按一定的方向和一定的距离，移到点 $P'(x', y')$ 的变换，叫做**平移**．移动的方向和大小，用带箭头的线段来表示．这样的线段，实际上就是所说的向量，这在其他册中学习．



现在，把平移的方向和大小，用以原点为起点的向量 $\overrightarrow{OA}$ 来表示，设 A 的坐标为 (a, b)．



在这个移动下，如果任意的点 $P(x, y)$ 移到点 $P'(x', y')$，由于

$PP' \parallel OA$，$PP' = OA$，

因此，四边形 $OAP'P$ 是平行四边形．

$\therefore\ OP \parallel AP'$，$OP = AP'$．

从 A, P, P' 向 x 轴作垂线 $AA_1, PP_1, P'P'_1$，

从 A 向 $P'P_1'$ 引垂线 AA'，
则

$$\triangle OP_1P\equiv\triangle AA'P'.$$

再考虑到线段的方向，则
$OP_1=AA'$，$P_1P=A'P'$，

又，$AA'=A_1P_1'$，$P_1'A'=A_1A$.

$$\therefore\quad OP_1'=OA_1+A_1P_1'=OA_1+OP_1 \qquad ①$$

$$P_1'P'=P_1'A'+A'P'=A_1A+P_1P \qquad ②$$

把 $OA_1=a$, $A_1A=b$; $OP_1=x$, $P_1P=y$;
$OP_1'=x'$，$P_1'P'=y'$ 代入①，②，得

变换式

$$x'=x+a,\quad y'=y+b.$$

我们把这个平移记作
$\boldsymbol{T}$: $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\longrightarrow(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{b})$.

特别是，$\boldsymbol{T}_1$: $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\longrightarrow(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a},\boldsymbol{y})$
表示沿 x 轴方向移动 a 的平移.

$\boldsymbol{T}_2$: $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\longrightarrow(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{b})$
表示沿 y 轴方向移动 b 的平移.

平移的复合

对 (x,y) 作变换 T_1，再继续作变换 T_2，则

$$(x,y)\xrightarrow{T_1}(x+a,y)\xrightarrow{T_2}(x+a,y+b).$$

这就相当于

$$\boldsymbol{T}:(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\longrightarrow(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{b}).$$

与函数的复合一样，这个变换可表示为

$$\boldsymbol{T}_2\cdot\boldsymbol{T}_1=\boldsymbol{T}.$$

同样，由于

$$(x, y) \xrightarrow{T_2} (x, y+b) \xrightarrow{T_1} (x+a, y+b),$$

因此,

$$T_1 \cdot T_2 = T.$$

图象的平移

设函数 $y=f(x)$的图象为 C, 对于 C 上的各点作平移 T, 设所得图形为 C'.

由于

$$x'=x+a, \quad y'=y+b,$$

因此,

$$x=x'-a, \quad y=y'-b.$$

由于 x, y 满足 $y=f(x)$, 因此,

$$y'-b=f(x'-a).$$

$$\therefore \quad y'=f(x'-a)+b \qquad ③$$

因为 C' 上的所有点(x', y')满足③, 所以, C' 是

$$y=f(x-a)+b$$

的图象.

对于二次函数 $y=ax^2$ 的图象, 作沿 x 轴方向移动 m, 沿 y 轴方向移动 n 的平移 T: $(x, y) \longrightarrow (x+m, y+n)$后, 所得曲线可用

$$y=a(x-m)^2+n$$

来表示, 这已经在 14 页学过了.

关于点的对称变换

下面, 我们研究对称变换.

当连结点 $P(x, y)$和点 $P'(x', y')$的线段的中点为定点 $A(a, b)$时, 则说 P 和 P' 关于 A 对称(或点对称), 把 P 移到 P' 的变换, 叫做关

于 A 的**对称变换**(**或对称移动**).

由于连结两点(x, y)，(x', y')的线段的中点为

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right),$$

而它是关于图形与坐标的基本公式. 因此，设

$$\frac{x+x'}{2}=a, \frac{y+y'}{2}=b,$$

则

变换式

$$x'=2a-x, y'=2b-y.$$

所以,关于定点(a, b)的对称变换是

$$\boldsymbol{S}:(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \longrightarrow (\boldsymbol{2a}-\boldsymbol{x}, \boldsymbol{2b}-\boldsymbol{y}).$$

特别是,设关于原点的对称变换为 S_0, 则

$$\boldsymbol{S}_0:(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \longrightarrow (-\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{y}).$$

关于直线的对称变换

连结点 $P(x, y)$和点 $P'(x', y')$的线段 PP' 垂直于定直线 g, 当 PP' 的中点在 g 上时, 则说 P 和 P' 关于 g **对称**(或**线对称**), 把 P 移到 P' 的变换, 叫做关于 g 的**对称变换**(**对称移动**).

如果 $P(x, y)$，$P'(x', y')$关于定直线 $x=a$ 对称, 则由于PP' 平行 x 轴, 因此, $y=y'$. 又由于 PP' 的中点在直线 $x=a$ 上, 因此,

$$\frac{x+x'}{2}=a, \qquad \therefore \quad x'=2a-x.$$

所以, 关于定直线 $x=a$ 的对称变换 R 是

变换式

$$\boldsymbol{R}:(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \longrightarrow (\boldsymbol{2a}-\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

特别是, 关于 y 轴的对称变换 R. 用

$$R_0: (x, y) \longrightarrow (-x, y)$$

来表示.

同样,关于定直线 $y=b$ 的对称变换 R' 是

$$R': (x, y) \longrightarrow (x, 2b-y).$$

关于 x 轴的对称变换 R_0', 用

$$R_0': (x, y) \longrightarrow (x, -y)$$

来表示.

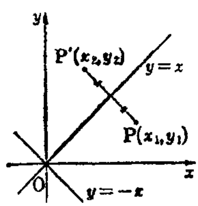
关于直线 $y=x$ 的对称变换

如果 $P(x_1, y_1)$, $P'(x_2, y_2)$ 关于定直线 $l: y=x$ 对称,则 PP' 垂直于 l, 从而, 平行于直线 $y=-x$. 因此,它的斜率等于 -1.

$$\therefore \quad \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-1.$$

因而, $x_1+y_1=x_2+y_2$ ④

又, 由于线段 PP' 的中点在直线 $y=x$ 上,因此,



$$\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{x_1+x_2}{2}.$$

从而,

$$x_1-y_1=-x_2+y_2 \qquad ⑤$$

把④, ⑤的两边分别相加, 相减, 则得

$$2x_1=2y_2, \quad 2y_1=2x_2$$

$$\therefore \quad x_2=y_1, \quad y_2=x_1.$$

所以, 关于直线 $y=x$ 的对称变换 F 可用

变换式

$$F: (x, y) \longrightarrow (y, x)$$

来表示.

提　　要

(1) 用 $\overrightarrow{OA}=(a,b)$ 表示的平移

$$T:(x,y)\longrightarrow(x+a,y+b).$$

(2) 关于定点 $A(a,b)$ 的对称变换

$$S:(x,y)\longrightarrow(2a-x,2b-y).$$

(3) 关于定直线 $x=a$ 的对称变换

$$R:(x,y)\longrightarrow(2a-x,y).$$

(4) 关于定直线 $y=b$ 的对称变换

$$R':(x,y)\longrightarrow(x,2b-y).$$

(5) 关于定直线 $y=x$ 的对称变换

$$F:(x,y)\longrightarrow(y,x).$$

例题 28. 设把原点(0, 0)移到点(a,b)的平移用记号$[a,b]$来表示. 作平移$[a,b]$后, 再作平移$[c,d]$, 其结果是一个平移. 试用上面的记号把它表示出来.

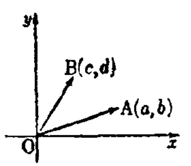
解法 $[a,b]$表示变换$(x,y)\longrightarrow(x+a,y+b)$. 根据$[c,d]$来研究$(x+a,y+b)$怎样变换.

解 由于平移$[a,b]$的方向和大小, 可以用连结原点 O 和点 $A(a,b)$ 的有向线段 $\overrightarrow{OA}$ 来表示, 因此,

$$[a,b]:(x,y)\longrightarrow(x+a,y+b)$$

同样,

$$[c,d]:(x,y)\longrightarrow(x+c,y+d).$$



从而,

$$[c,d]:(x+a,y+b)\longrightarrow(x+a+c,y+b+d).$$

因此，对$[a,b]$继续作$[c,d]$，如果把结果用$[c,d]\circ[a,b]$来表示，则

$$[c,d]\circ[a,b]:(x,y)\longrightarrow(x+(a+c),y+(b+d)).$$

这是把原点移到点$(a+c,b+d)$的平移。

$$\therefore\quad [c,d]\circ[a,b]=[a+c,b+d].$$

研究 设$A(a,b)$，$B(c,d)$，$C(a+c,b+d)$，则关于向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，有

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}.$$

这个结果表明，$[a,b]$，$[c,d]$分别与向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$对应，它们的复合$[c,d]\circ[a,b]$与$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$的和对应。

发展题

在坐标平面上，把关于x轴，y轴的对称变换，分别用R，R'来表示，关于直线$y=x$的对称变换用F来表示。证明，连续作这些变换的结果，则有下面的等式成立。

(1) $F\circ R=R'\circ F$. (2) $F\circ R'\circ F=R$.

要点

注意R: $(x,y)\to(x,-y)$，R': $(x,y)\to(-x,y)$等，根据复合变换，分析(x,y)移到怎样的点。

解 (1) 由于R，R'分别是关于x轴，y轴的对称变换，因此，

$$R:(x,y)\longrightarrow(x,-y) \qquad ①$$

$$R':(x,y)\longrightarrow(-x,y) \qquad ②$$

又，由于F是关于$y=x$的对称变换，因此，

$$F:(x,y)\longrightarrow(y,x) \qquad ③$$

因此，

$$(x, y) \xrightarrow{R} (x, -y) \xrightarrow{F} (-y, x).$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{R}: (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \longrightarrow (-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}).$$

又,

$$(x, y) \xrightarrow{F} (y, x) \xrightarrow{R'} (-y, x).$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{R}' \circ \boldsymbol{F}: (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \longrightarrow (-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}).$$

因此, $\boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}' \circ \boldsymbol{F}$.

(2) 由于

$$\boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{R}' \circ \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F} \circ (\boldsymbol{R}' \circ \boldsymbol{F}),$$

$$(x, y) \xrightarrow{R' \circ F} (-y, x) \xrightarrow{F} (x, -y).$$

因此

$$\boldsymbol{F} \circ (\boldsymbol{R}' \circ \boldsymbol{F}): (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \longrightarrow (\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{y}).$$

所以, $\boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{R}' \circ \boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}$.

研究 由于平移,对称变换等,都是从坐标平面到坐标平面的映射,因此,如果象上面那样使用关于映射的记法,则可以简化叙述. 关于这些记法,希望参照后面映射的项目(134 页).

练习 (答案 163 页)

44. 设关于直线 $x=a, x=b$ 的对称变换分别是 R_a, R_b. 证明 $\boldsymbol{R}_b \circ \boldsymbol{R}_a$ 是沿 x 轴方向的平移.

45. 设关于 $y=x$ 的对称变换为 $\boldsymbol{F}$, 关于 y 轴的对称变换为 $\boldsymbol{R}$. 证明 $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{F}$ 是以原点为中心的 90° 的旋转.

46. 设把原点移到点 (a, b) 的平移为 $\boldsymbol{T}$, 其逆平移为 T^{-1}. 当关于原点的对称变换为 $\boldsymbol{S}$ 时, 证明下面等式成立.

$$\boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}^{-1}.$$

例题 29. 对于抛物线 $y=-x^2+2x$ 作某个平移 T 后，得抛物线 $y=-x^2+8x-19$. 问 T 是怎样的平移？

解法 利用平移 $(x,y)\longrightarrow(x+a,y+b)$，可将 $y=f(x)$ 的图象移成 $y=f(x-a)+b$ 的图象.

解 设平移为 T：$(x,y)\longrightarrow(x+a,y+b)$，根据平移 T，抛物线 $y=-x^2+2x$ 可化成

$$y-b=-(x-a)^2+2(x-a).$$

$$\therefore\quad y=-x^2+2(a+1)x-a^2-2a+b.$$

由于这个抛物线可化为抛物线

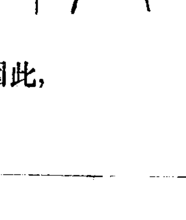
$$y=-x^2+8x-19.$$

因此,

$$2(a+1)=8,$$
$$-a^2-2a+b=-19.$$

解之，得 $a=3,\ b=-4$.

$$\therefore\quad T:(x,y)\longrightarrow(x+3,y-4).$$



另解 把 $y=-x^2+2x$ 变形为

$$y=-(x-1)^2+1.$$

同样，把 $y=-x^2+8x-19$ 变形为

$$y=-(x-4)^2-3.$$

根据 T，顶点 $(1,1)$ 移到顶点 $(4,-3)$. 因此，

$$T:(x,y)\longrightarrow(x+3,y-4).$$

发展题

填下面的[ ].

与曲线 $y=3x^2$ 关于原点对称的图形的方程是[　　]，关于直线 $y=x$ 对称的图形的方程是[　　].

要点

根据关于原点的对称变换

$(x, y)\to(-x, -y)$

和关于直线 $y=x$ 的对称变换

$(x, y)\to(y, x)$,

弄清移动后的点的坐标间的关系.

解　设关于原点的对称变换为

$$(x, y)\longrightarrow(x', y'),$$

则 $x'=-x, y'=-y$.

从而,

$$x=-x', y=-y'.$$

当 $y=3x^2$ 时, 则

$$-y'=3(-x')^2, \therefore y'=-3x'^2.$$

因此, 由点 (x', y') 所画出的图形的方程为

$$y=-3x^2.$$

又设关于直线 $y=x$ 的对称变换为

$$(x, y)\longrightarrow(x', y'),$$

则 $x'=y, y'=x$.

从而,

$$x=y', y=x'.$$

当 $y=3x^2$ 时, 则

$$x'=3y'^2. \quad \therefore \quad y'=\pm\sqrt{\frac{x'}{3}}.$$

因此, 由 (x', y') 所画出的图形的方程为

$$x=3y^2 \quad 或 \quad y=\pm\sqrt{\frac{x}{3}}.$$

发展题

试证曲线 $y=-x^2+6x+1$ 关于某点 A 与曲线 $y=x^2$ 对称.

要点

在关于点 A 的对称变换下，顶点移到顶点. 从而，连结两条曲线顶点所得线段的中点就是 A.

解 $y=-x^2+6x+1$

$$=-(x-3)^2+10$$

的顶点坐标是(3, 10). 设这点为 P, 原点为 O. 这时，在关于 OP 中点 $\left(\frac{3}{2}, 5\right)$ 的对称变换下，设 $(x, y)\to(x', y')$，则

$$x'=3-x,\ y'=10-y.$$

当 (x, y) 满足 $y=x^2$ 时，则

$$10-y'=(3-x')^2.$$

$$\therefore\quad y'=-x'^2+6x'+1.$$

因此，曲线 $y=-x^2+6x+1$ 关于点 $\left(\frac{3}{2}, 5\right)$ 与曲线 $y=x^2$ 对称.

练习 (答案 164 页)

47. 填写下文中的 □.

关于点(1, 0) 与抛物线 $y=-3(x-3)^2-3$ 对称的抛物线是 $y=\square x^2+\square x+\square$.

例题 30. 作出函数 $y=\dfrac{2x^2-1}{x-1}$ 的图象，并证明这个图象是由平移函数 $y=2x+\dfrac{1}{x}$ 的图象得到的.

解法 如果把所给函数变形为

$$y=2x+2+\frac{1}{x-1},$$

则它的图象可由 $y=2x+2$ 和 $y=\frac{1}{x-1}$ 的图象复合而得.

又,所给函数式,可变形为 $y-4=2(x-1)+\frac{1}{x-1}$.

解 所给函数就是

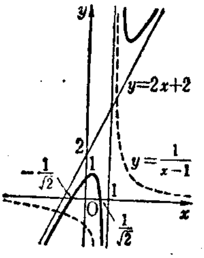
$$y=2x+2+\frac{1}{x-1}.$$

因此,它的图象可由 $y=2x+2$ 和 $y=\frac{1}{x-1}$ 的图象复合得出.

即所求图象是以二直线

$$x=1,\quad y=2x+2$$

为渐近线的双曲线.



其次,由于所给函数可表示为

$$y-4=2(x-1)+\frac{1}{x-1}.$$

因此,它的图象就是把 $y=2x+\frac{1}{x}$ 的图象沿 x 轴方向平移 1,沿 y 轴方向平移 4 所得的曲线.

发展题

试证下面函数的图象关于某点对称.

$$y=\frac{x}{2}-\frac{2}{x-2}.$$

要点

如果能证明关于适当的点(a,b)作对称变换，能得到原来的曲线即可.

关于(a, b)的对称变换，可用

$x'=2a-x,$

$y'=2b-y$

表示.

解 当x,y满足

$$y=\frac{x}{2}-\frac{2}{x-2} \qquad ①$$

时，则

$2(x-2)y=x(x-2)-4,$

$x^2-2xy-2x+4y-4=0 \qquad ②$

设在关于点(a, b)的对称变换下，$(x,y)\longrightarrow(x',y')$，则

$x'=2a-x, y'=2b-y.$

从而，

$x=2a-x', y=2b-y'.$

把上式代入②，得

$$(2a-x')^2-2(2a-x')(2b-y')-2(2a-x')+4(2b-y')-4=0,$$

$$x'^2-2x'y'+(-4a+4b+2)x'+(4a-4)y'+4a^2-8ab-4a+8b-4=0.$$

与②比较得

$$\begin{cases}-4a+4b+2=-2,\\ 4a \qquad -4=0.\end{cases}$$

解之，得$a=2, b=1$.

这时

$4a^2-8ab-4a+8b-4=-4.$

因此，x',y'满足

$$x'^2-2x'y'-2x'+4y'-4=0.$$

这表明，点(x', y')也在②上，从而在①上。

所以，曲线①关于点$(2, 1)$对称。

练习 （答案164页）

48. 试证，$y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{x}$的图象关于原点对称。其次，利用这个结论证明$y=\dfrac{x^2-2x-4}{2(x-2)}$的图象成点对称。

14. 映射

映射

映射这个概念，已经在第 1 页出现，这里再复习一下.

当给出使集合 M 的每一个元素，有集合 N 的唯一的元素与它对应的规则时，则把这个对应规则叫做从 M 到 N 的**映射**.

与函数的情形一样，可以用 f, g, F 等字母来表示映射. 我们把从 M 到 N 的映射 f，记作

$f: M \longrightarrow N$ 或 $M \xrightarrow{f} N$.

把根据 f 使 M 的元素 a 对应 N 的元素 b，记作

$$f: a \longrightarrow b \quad 或 \quad b = f(a).$$

这时，把 M 叫做 f 的**定义域**，把 $f(a)$ 叫做 a 的**象**，把 $f(a)$ 的全集叫做 f 的**值域**.

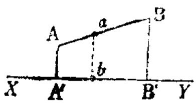
一般地，值域是 N 的子集合，但当值域与 N 相同时，就把 f 叫做从 M 到 N **上的映射**. 当 M 的不同元素对应 N 的不同元素时，就说映射是**一对一的**.

映射的实例

对映射这个概念，如果按通俗的影像去理解它，那么想一想线段的正射影就明白了.

设 M 为线段 AB 上的点的全集，N 为与 AB 在同一平面上的直线 XY 上的点的全集.

设线段 AB 到直线 XY 的正射影为 $A'B'$. 如果使 AB 上的各点 a 都对应它的正射影 b, 就得到从 M 到 N 的一个映射.



在这种情况下, "映射 f"就是"正射影"; "$b=f(a)$"就表示"b 是 a 的正射影".

当 AB 不垂直于 XY 时,则 f 是从 M 到 $A'B'$ 上的一对一的映射. 但是, 当 AB 垂直于 XY 时, 象仅仅是一个点, 映射不是一对一的.

其他的例

正如定义所述, 对于任意的集合, 都可以考虑映射.

例如, 设 M 表示 1973 年 6 月的日期, N 表示日、月、火、水、木、金、土七个曜日. 如果使 M 的各个元素, 按着"日期对应该天的曜日"的规则与 N 的元素对应, 则有

1	2	3	4	5	6	7	8	9	……	29	30
金	土	日	月	火	水	木	金	土		金	土.

这是从日期到七曜的映射. 这个映射可以用 f 来表示.

进一步说, 如果使土曜日对应兰, 日曜日对应红, 其他曜日对应黑, 则可得到从七曜到由兰、红、黑所构成的色集合的映射. 如果用 g 表示这个映射, 则根据

f: 日期 ⟶ 七曜,

g: 七曜 ⟶ 兰红黑的色集合,

可使各日期对应兰红黑中的一种颜色. 从而可确定从日期到由兰、红、黑所构成的色集合的映射. 这个映射叫做使 f 复合 g 的映射(或简单地叫做 f 和 g 的复合映射), 用 $g\circ f$ 来表示. 例如,

映射的复合

由 $f(1)=$金, $g($金$)=$黑, 得 $g\circ f(1)=$黑,

由 $f(2)=$土, $g($土$)=$兰, 得 $g\circ f(2)=$兰,

由 $f(3)=$日, $g($日$)=$红, 得 $g\circ f(3)=$红.

函数是从实数到实数的映射, 当

$$y=f(x),\ z=g(y)$$

时, 则复合函数 $g\circ f(x)=g(f(x))$就是映射 f 和映射 g 的复合映射.

又, 坐标平面上的平移, 对称变换等, 都是从坐标平面到坐标平面的映射. 它们的复合, 不外乎是映射的复合.

提　　要

(1) 映射　$f: M \longrightarrow N$　　使 M 的每一个元素有 N 的唯一元素与它对应的规则.

当 $f: a \longrightarrow b$ 时, 记作 $b=f(a)$.

(2) 复合映射　　当 $f: L \longrightarrow M$, $g: M \longrightarrow N$,

$b=f(a)$, $c=g(b)$时, 则

$g\circ f: L \longrightarrow M$, $g\circ f(a)=g(f(a))=c$.

例题 31. 设 M: $\{a, b, c, d\}$, N: $\{1, 2, 3\}$. 求

(1) 从 M 到 N 的映射有多少种.

(2) 从 M 到 N 上的映射有多少种.

解法 (1) 与 M 的一个元素相对应的 N 的元素，可以是 1, 2, 3 中的任何一个. (2) 由于值域必须是 N 的全体, 因此, M 的某两个元素可以映射到 N 的同一个元素.

解 (1) 设 $f: M \longrightarrow N$, 则 $f(a)$ 可以是 1, 2, 3 中的任何一个. 对于 $f(b)$, $f(c)$, $f(d)$ 也都如此. 因此，映射 f 的总数是

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81(\text{种}). \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

(2) 设 f 是从 M 到 N 上的映射，则 f 的值域是 N: $\{1, 2, 3\}$. 就 M 的两个元素映射到 1, 另两个元素映射到 2 和 3 的情况来考虑时, 则由于映射到 1 的元素可以是任意的两个, 因此, 共有 6 种情况; 由于映射到 2, 3 的元素是剩下两个中的任何一个, 因此, 有 2 种情况. 所以, 共有

$$6 \times 2 = 12(\text{种})$$

情况.

因为使 M 的两个元素映射到 2, 另两个元素映射到 1 和 3 的情况, 以及使 M 的两个元素映射到 3, 另两个映射到 1 和 2 的情况也都一样. 所以, 所求映射的总数是

$$12 \times 3 = 36(\text{种}). \qquad (\text{答})$$

研究 根据 $f: M \longrightarrow N$, 如果把与 M 的各元素相对应的 N 的元素写在 a, b, c, d 的下面, 则有

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}$$

等. 如果借用排列、组合的想法, 则

(1) 就是从 1, 2, 3 中允许重复地取 4 个数字的排列的种数:

$${}_3\Pi_4 = 3^4.$$

(2) 就是由两个相同数字, 另两个为不同数字所构成的排列的种数:

$$\frac{4!}{2!\times1!\times1!}\times3=\frac{4\times3\times2\times1}{2\times1}\times3=36.$$

发展题

设由 n 个元素构成集合 M: $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 和由两个元素构成集合 N: $\{0, 1\}$.

(1) 从 M 到 N 的映射有多少个?

(2) 试证 M 的子集合, 包括空集合和 M 自身在内, 其个数恰好等于(1)的映射的个数.

要点

(1) 与例题完全相同.

(2) 考虑对于 M 的任意子集合, 属于它的元素对应 1, 不属于它的元素对应 0 的映射.

解 (1) 因为对于 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中的每一个元素, 或对应 0 或对应 1, 所以, 映射的总数是 2^n 个.

(2) 设 M 的任意子集合为 A, M 的任意元素为 x.

如果 $x\in A$, 则 $f(x)=1$.

如果 $x\notin A$, 则 $f(x)=0$.

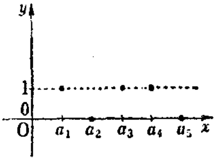
于是, 对 A 来说, 它对应一个映射

$$f:M\longrightarrow N.$$

反之，对于从 M 到 N 的一个映射来说，它对应 M 的一个子集合.

所以，M 的子集合的个数，恰好等于映射 $M\longrightarrow N$ 的总数 2^n 个.

研究 设 $M:\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$，在 x 轴上取 M，在 y 轴上取 N，作出 f 的图象，则与子集合 $\{a_1, a_3, a_4\}$ 对应的映射的图象如右图.



练习 （答案 164 页）

49. 当给出映射 $f:M\to N$ 时，对于 M 的子集合 A，属于 A 的元素的象的全集叫做 A 的象，用 $f(A)$ 表示. 当 A, B 是 M 的子集合时，

(1) 证明 $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

(2) 有 $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$ 不成立的情况，试举一例.

例题 32. 当从坐标平面到坐标平面的映射 $P(x, y)\longrightarrow Q(u, v)$ 是用

$$u=2x-y,\quad v=3x+2y$$

给出时，在 (x, y) 平面上，以四点 $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ 为顶点的正方形映射成怎样的图形？

解法 当点 P 在 $(0, 0)$ 到 $(1,0)$ 的边上移动时，$y=0\ (0\leqslant x\leqslant 1)$. 由此可以确定 u, v 间的函数关系，也能了解 Q 的变化.

也可以予先求出顶点 $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ 的象.

解 设原点为 O, $A(1, 0)$, $B(1, 1)$, $C(0, 1)$. 这些点的象分别是 $O(0, 0)$, $A'(2, 3)$, $B'(1, 5)$, $C'(-1, 2)$.

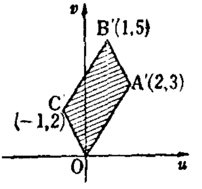
由 $u=2x-y$, $v=3x+2y$,

得 $x=\dfrac{2u+v}{7}$, $y=\dfrac{-3u+2v}{7}$.

当 $y\geqslant 0$ 时,

$$-3u+2v\geqslant 0.$$

$$\therefore\quad v\geqslant \frac{3}{2}u \quad (\text{在 } y=0 \text{ 时等号成立}).$$



所以, 在这个映射下, 边 OA 映射成线段 OA', OA 的上方映射成 OA' 的上方.

同样, 边 AB 映射成线段 $A'B'$, AB的左侧映射成 $A'B'$的下方;

边 BC 映射成线段 $B'C'$, BC 的下方映射成 $B'C'$ 的下方;

边 CO 映射成线段 $C'O$, CO 的右侧映射成 $C'O$ 的上方.

因此, 正方形 $OABC$ 映射成如图的平行四边形 $OA'B'C'$.

发展题

当点$(x,\ y)$在以原点为圆心, 半径为 a 的圆的内部移动时, 试把点$(x+y, xy)$的移动范围用图表示出来.

要点

限定x, y在$x^2+y^2<a^2$内.

由此可以确定(u, v)的范围. 但有必要考察是否经过这个范围的所有部分.

解 $u=x+y$, $v=xy$ ①

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$$
$$=u^2-2v.$$

由于点(x, y)在以原点为圆心, 半径为 a 的圆的内部, 因此,

$$x^2+y^2<a^2.$$

$$\therefore \quad u^2-2v<a^2,$$

$$v>\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{2}a^2 \qquad ②$$

当给出 u, v 时，满足①的 x, y 是二次方程

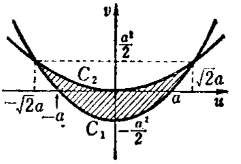
$$z^2-uz+v=0 \qquad ③$$

的解. 由于 x, y 是实数，因此，判别式$\geqslant 0$.

$$\therefore \quad u^2-4v\geqslant 0.$$

从而，

$$v\leqslant\frac{1}{4}u^2 \qquad ④$$



由②，④得 (u, v) 的移动范围是夹在曲线 C_1: $v=\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{2}a^2$ 和曲线 C_2: $v=\frac{1}{4}u^2$ 之间的如上图的斜线部分. 其边界包含 C_2 上的 $-\sqrt{2}a<x<\sqrt{2}a$ 范围的点，而不包含 C_1 上的点.

研究 在这个问题中，关于圆 $x^2+y^2=a^2$ 内的直线 $y=x$ 对称的两点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，可以映射到 (u, v) 平面的同一个点，

直线 $y=x$ 上的点，可以映射到 C_2 上。

练习 (答案164页)

50. 坐标平面上的变换 $P(x, y)\to P'(x', y')$ 用

$$x'=ax+by, \qquad y'=cx+dy \quad (a, b, c, d \text{ 是常数})$$

给出.

(1) 当从原点 O 到 P, P' 的距离相等时，问 $a. b. c. d$ 之间存在怎样的关系?

(2) 在(1)的情况下，讨论点 $Q(a, c)$, $R(b, d)$ 的位置关系.

15. 逆映射和反函数

逆映射

当 f 是从 M 到 N 上的一对一映射时，则对于 N 的每一个元素 b，M 有唯一的元素 a，使 $f(a)=b$. 这样就可以得到从 N 到 M 上的映射. 这个映射叫做 f 的逆映射，用 f^{-1} 来表示.

由于

$$\text{如果 } f: a\longrightarrow b, \text{则 } f^{-1}: b\longrightarrow a,$$

因此，$f^{-1}\circ f: a\longrightarrow a$, $f\circ f^{-1}: b\longrightarrow b$.

即复合映射 $f^{-1}\circ f$ 是使 M 的各元素成自身对应的映射；$f\circ f^{-1}$ 是使 N 的各元素成自身对应的映射.

复合映射的逆映射

设 f 是从 L 到 M 上的一对一映射，g 是从 M 到 N 上的一对一映射. 如果

$$f: a\longrightarrow b,\quad g: b\longrightarrow c,$$

则

$$g\circ f: a\longrightarrow c.$$

由此，确定了从 L 到 N 上的一对一映射.

又由于 f, g 分别存在逆映射 f^{-1}, g^{-1}:

$$f^{-1}: b\longrightarrow a,\quad g^{-1}: c\longrightarrow b.$$

因此，

$$f^{-1}\circ g^{-1}: c\longrightarrow a.$$

由于这个映射就是 $g\circ f: a\longrightarrow c$ 的逆映射，

因此,

$$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}.$$

反函数

其次,作为映射的具体例子,我们考虑函数 $y=f(x)$. 设这个函数的定义域为M, 值域为N. 由于 f 是从M到 N 上的映射, 因此, 如果这个映射是一对一的, 则就可以确定逆映射 f^{-1}.

由于 $f\circ f^{-1}$ 是使 N 的各元素成自身对应的映射,因此,当 x 是 N 的任意元素时,

$f\circ f^{-1}$: $x\longrightarrow x$,

即 $f(f^{-1}(x))=x$.

因而,如果令 $y=f^{-1}(x)$,则 $f(y)=x$.

函数 $y=f^{-1}(x)$叫做 $y=f(x)$的**反函数**.

$y=x^2$ 的反函数

函数 $y=x^2$ 的定义域M是实数的全集, 值域 N 是非负实数的全集.

当把这个函数看作是从M 到 N 的映射时, 由于M的两个元素 a, $-a$ 对应 N 的同一个元素 a^2,因此,映射不是一对一的.

但是,如果设M是非负实数的全集时,则映射就成为一对一的. 从而, 确定逆映射 f^{-1}: $N\longrightarrow M$.

设N的任意元素为 x, 如果令 $y=f^{-1}(x)$, 则 $f(y)=x$,即 $y^2=x$. 由于 $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, 因此,

$$y=\sqrt{x}.$$

这是 $y=x^2(x\geqslant 0)$的反函数.

反函数的图象

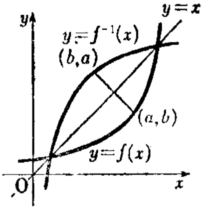
现在回过头来考虑函数 $y=f(x)$ 的图象.

设该图象上的任意点为 (a, b), 则

$$b=f(a).$$

从而, $\quad a=f^{-1}(b)$.

因此, 反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象上的任意点 $(b, f^{-1}(b))$ 可表示为 (b, a).



在关于直线 $y=x$ 的对称变换下, 由于 $(a, b) \longrightarrow (b, a)$, 因此, $y=f(x)$ 的图象上的点 (a, b) 变换成 $y=f^{-1}(x)$ 的图象上的点 (b, a).

所以, $y=f(x)$ 的图象与它的反函数的图象, 关于直线 $y=x$ 对称.

提　　要

(1) 逆映射　　当 $f: M \longrightarrow N$ 是到上的映射, 并且是一对一时, 则 $f^{-1}: N \longrightarrow M$.

如果 $f: a \longrightarrow b$, 则 $f^{-1}: b \longrightarrow a$.

(2) 反函数　　$y=f(x) \Longleftrightarrow x=f^{-1}(y)$.

$y=f^{-1}(x) \Longleftrightarrow x=f(y)$.

(3) 反函数的图象　　函数 $y=f(x)$ 的图象与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

例题 33. 关于 x 的函数 $y=\frac{2x+1}{x+a}$，当 $a\neq\frac{1}{2}$时，解答下列问题.

(1) 求这个函数的反函数.

(2) 当所给函数的图象与它的反函数的图象相同时，求 a 的值，并作出图象的略图.

解法 就 y 解$\frac{2y+1}{y+a}=x$，所得函数就是反函数.

解 (1) $y=\frac{2x+1}{x+a}$ ①

将 x, y 对调，得

$$x=\frac{2y+1}{y+a}, \quad \therefore \quad xy+ax=2y+1$$

因此，所求的反函数是

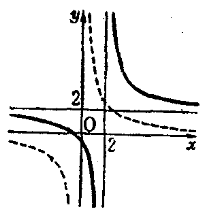
$$y=\frac{-ax+1}{x-2} \qquad ②$$

(2) ②与①相同的条件是

$a=-2$.

这时，

$$y=\frac{2x+1}{x-2}=\frac{5}{x-2}+2.$$



所以，把 $y=\frac{5}{x}$的图象沿 x 轴方向平移 2，沿 y 轴方向平移 2，便可得到所求的图象.

发展题

设 $f(x)=\dfrac{x-2}{3x+4}$, $g(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0)$.

对于所有的 x, 当 $f(g(x))=x$ 时, $g(x)=\square$.

要点

实际计算

$$f(g(x))=\frac{g(x)-2}{3g(x)+4},$$

确定使它等于 x 时的 a, b, c, d就可以了. 但是, 由于 $f(g(x))=x$, 因此, $g(x)=f^{-1}(x)$. 注意这个事实, 就可以简单地作出来.

解 由于 $y=f(x)$ 是从定义域到值域的一对一映射, 因此, 可以定义反函数 $f^{-1}(x)$.

把 $y=\dfrac{x-2}{3x+4}$中的 x, y 对调, 可得

$$x=\frac{y-2}{3y+4},$$

即 $3xy+4x=y-2$,

$$(3x-1)y=-4x-2,$$

$$y=\frac{-4x-2}{3x-1}.$$

$$\therefore\quad f^{-1}(x)=\frac{-4x-2}{3x-1}.$$

由于对于所有的 x, $f(g(x))=x$, 因此,

$$g(x)=f^{-1}(x).$$

$$\therefore\quad g(x)=\frac{-4x-2}{3x-1}$$

$$\left(\text{或}\frac{4x+2}{-3x+1}\right).$$

练习 (答案 165 页)

51. 下面的 □, 应是什么数?

已知六个函数

$$f_1(x)=x,\quad f_2(x)=\frac{1}{x},\quad f_3(x)=1-x,$$

$$f_4(x)=\frac{1}{1-x},\quad f_5(x)=\frac{x}{x-1},\quad f_6(x)=\frac{x-1}{x}.$$

这时,

$f_3(x)$ 的反函数是 $f_a(x)$, $a=\square$.

$f_4(x)$ 的反函数是 $f_b(x)$, $b=\square$.

$f_5(x)$ 的反函数是 $f_c(x)$, $c=\square$.

例题 34. 求下面函数的反函数.

$$y=x+\sqrt{1+x^2}.$$

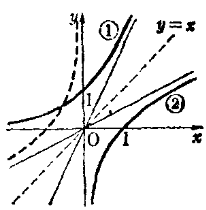
解法 对$y=x+\sqrt{1+x^2}$, 就 x 解之, 如果 $x=x_1$, x_2 时的 y 值为 y_1, y_2, 当 $x_1<x_2$ 时, $y_1<y_2$. 因此, 由 y 能唯一地确定 x.

解 对$y=x+\sqrt{1+x^2}$ ①

由于 $\sqrt{1+x^2}>|x|$, 因此,

$$x+\sqrt{1+x^2}>x+|x|\geq 0.$$

$$\therefore\quad y>0.$$



把已知等式变形为

$$y-x=\sqrt{1+x^2}.$$

两边平方, 得

$$y^2-2xy+x^2=1+x^2.$$

$$\therefore\quad 2xy=y^2-1,$$

$$x=\frac{y^2-1}{2y}\quad (y>0).$$

所以，所求的反函数为

$$y=\frac{x^2-1}{2x}\quad(x>0) \tag{②}$$

研究 由于 $y=x+\sqrt{1+x^2}$，因此，

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{x^2-(1+x^2)}=-x+\sqrt{1+x^2}.$$

$$\therefore\quad y-\frac{1}{y}=2x.$$

从而，它能解得

$$x=\frac{1}{2}\left(y-\frac{1}{y}\right).$$

$y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$的图象是以 y 轴和直线$y=\frac{1}{2}x$ 为渐近线的双曲线（与例题 19 相类似），反函数②的图象是它的 $x>0$ 的部分. 因为 ① 的图象与这个曲线关于直线 $y=x$ 对称，所以，也是双曲线.

发展题

当 $y=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})(x\geqslant 0)$时，把$y+\sqrt{y^2-1}$用 a 和 x 的最简式表示出来. 其次，求这个函数的反函数，其中 $a>1$.

要点

计算 y^2-1，然后化成含有 a^x, a^{-x} 的完全平方式.

解 $y=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$ ①

把两边平方，得

$$y^2=\frac{1}{4}(a^{2x}+2+a^{-2x}).$$

$$\therefore \quad y^2-1=\frac{1}{4}(a^{2x}-2+a^{-2x})$$

$$=\frac{1}{4}(a^x-a^{-x})^2.$$

由于$a>1, x\geqslant 0$,因此,$a^x\geqslant a^{-x}$.

从而,

$$a^x-a^{-x}\geqslant 0.$$

$$\therefore \quad \sqrt{y^2-1}=\frac{1}{2}|a^x-a^{-x}|$$

$$=\frac{1}{2}(a^x-a^{-x}) \qquad ②$$

把①,②的两边分别相加,得

$$y+\sqrt{y^2-1}=a^x.$$

就x解之,得

$$x=\log_a(y+\sqrt{y^2-1}).$$

于是,所求的反函数为

$$y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1}).$$

练习 （答案165页）

52. $y=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})\cdots\cdots(\mathrm{A})$,其中$a>0, a\neq 1$.

(1) 当(A)式表示的图象与直线$y=b$相交时,求其交点的坐标.其中,$b>0$.

(2) 对于(A)式,求$x=\frac{1}{2}\log_a(17+12\sqrt{2})$时的$y$值.

习　题 (答案182页)

A

57. 对于 $y=x^2$ 的图象，作关于直线 $x=1$ 的对称变换，再关于直线 $y=-2$ 继续作对称变换，所得曲线可用怎样的式子表示？

58. 设坐标平面上的变换为 f, g，下列 (1)，(2) 叙述的内容是否正确？如果正确，试述其理由；如果不正确，试举出反例.

    (1) 当 f, g 是不同的平移时，对于所有的点 P，$f\circ g(P)$ 与 $g\circ f(P)$ 是相同的.

    (2) 当 f, g 是不同的点的对称变换时，对于所有的点 P，$f\circ g(P)$ 与 $g\circ f(P)$ 是相同的.

59. 设关于直线 $y=x$ 的对称变换为 F，关于直线 $y=-x$ 的对称变换为 F' 时，证明 $F\circ F'$，$F'\circ F$ 是关于原点的对称变换.

60. 设函数 $f(x)$ 存在反函数 $g(x)$. 对于任意的二数 x_1, x_2，证明：如果 $f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$ 成立，则 $g(x_1x_2)=g(x_1)+g(x_2)$ 成立.

B

61. 设 $f(x)=ax+b, g(x)=px+q$，其中 a, b, p, q 为常数，$a\neq 0$，$p\neq 0$. 这时，求使下式成立的函数 $h(x)$ 和 $k(x)$.

    (1) $g\circ h=f$;　　　　(2) $k\circ f=g$.

62. 设 $f(x)=\dfrac{(x^2-x+1)^3}{x^2(x-1)^2}$. 试证，当 $g_1(x)=1-x$，$g_2(x)=\dfrac{1}{x}$，$g_3(x)=1-\dfrac{1}{x}$，$g_4(x)=\dfrac{1}{1-x}$，$g_5(x)=\dfrac{x}{x-1}$ 时，则 $f\circ g_k=f$ $(k=1, 2, 3, 4, 5)$.

63. $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 的反函数仍是 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$，求 a, b, c, d 之间的关系. 其

中 a, b, c, d 是常数，$bc-ad\neq0$.

64. 当 $x\geqslant-\frac{1}{2}$时，求函数 $y=x^2+x+a$ 与它的反函数的图象交于两点的条件.

65. (X, Y)与(x, y)存在如下的关系：

$$X=\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{y}{\sqrt{2}},\quad Y=\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}.$$

(1) 当点(x, y)在以$(0, 0)$，$(1, 0)$，$(0, 1)$，$(1, 1)$为顶点的正方形A的内部和周界上移动时，点(X, Y)在怎样的图形B上移动？试在(x, y)平面上画出图来.

(2) 求 $A\cap B$ 的面积.

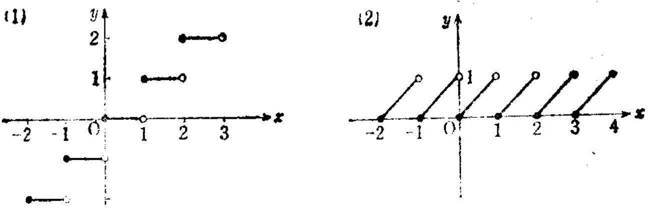
练习题答案

1. 例题 1 的函数：定义域是 0 和正整数，值域是$\{0,1,2,3,4\}$.

发展题的 $f(x)$：定义域是 $x\geqslant 0$ 的全体实数，值域是 0 和正整数.

$$y=\frac{x}{3}-f(x)\text{：定义域是 } x\geqslant 0\text{，值域是 } 0\leqslant y<1.$$

2.



3. 在(1)中，令 $y=x$，则 $f(2x)=[f(x)]^2$. $\therefore$ $f(2)=[f(1)]^2=2^2$.

令 $y=kx$，则 $f[(k+1)x]=f(kx)f(x)$.

$\therefore$ $f(k+1)=f(k)f(1)=2f(k)$.

令 k 顺次为 2, 3, 4, …，则关于任意的正整数 n，有 $f(n)=2^n$.

在(1)中，令 $y=-x$，则 $f(0)=f(x)f(-x)$.

$\therefore$ $f(-n)=\dfrac{1}{2^n}=2^{-n}$.

4. 设从 x 轴上的点 A(x)引 y 轴的平行线与直线 $y=g(x)$ 的交点为 B；从 B 引 x 轴的平行线与直线 $y=x$ 的交点为 C；从 C 引 y 轴的平行线与曲线 $y=f(x)$的交点为 D；从 D 引 x 轴的平行线与直线 AB 的交点为 P.

由 B$(x, g(x))$，C$(g(x),\ g(x))$，D$(g(x),\ f(g(x)))$得知，P$(x,\ f\circ g(x))$.

5. 这个抛物线总可表示为 $y=a(x-3)^2-2$. 当 $x=5$ 时，$y=6$. 因此，$6=4a-2$. $\therefore$ $a=2$. 故 $y=2(x-3)^2-2$.

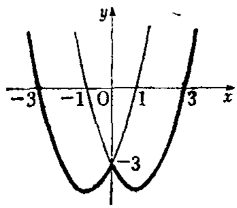
6. (1) 当 $x\geqslant 0$ 时，$|x|=x$.

$\therefore$ $y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$.

当 $x<0$ 时，$|x|=-x$.

$\therefore\quad y=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$.

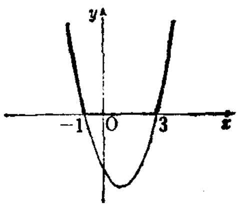
图象如右图(粗线).



(2) 解 $x^2-2x-3=0$，得 $x=3$，-1. 当 $x\leqslant-1$, $x\geqslant3$时，$f(x)\geqslant0$，$|f(x)|=f(x)$. $\therefore\quad y=f(x)$.

当 $-1<x<3$ 时，$f(x)<0$，$|f(x)|=-f(x)$. $\therefore\quad y=0$.

图象如右图(粗线).



7. (1) 在 $x=\dfrac{3}{2}$取最小值$-\dfrac{25}{4}$.

(2) 在 $x=\dfrac{3}{4}$取最大值$\dfrac{19}{16}$.

8. 从 $4-2p+q=5$，$-\dfrac{p^2-4q}{4}=-4$ 中消去 q，得

$$p^2-8p-20=0. \qquad \therefore\quad p=10,\ -2.$$

当 $p=10$ 时，$q=21$；当 $p=-2$ 时，$q=-3$.

9. 顶点的坐标是 $x=-\dfrac{a}{2}$，$y=-\dfrac{a^2+4a}{4}$.

当 $a=-2$ 时，$y=-\dfrac{1}{4}(a+2)^2+1$ 最大. 顶点在

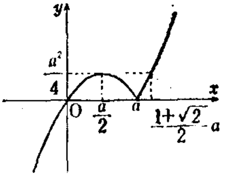
$y=-\dfrac{1}{4}[(-2x)^2-8x]$即 $y=-x^2+2x$ 上移动.

10. (1) 由于 $x=-\dfrac{1}{2(-2)}=\dfrac{1}{4}$是在指定的区间内，因此，在 $x=\dfrac{1}{4}$ 有最大值$\dfrac{9}{8}$，在距离$x=\dfrac{1}{4}$较远的区间的端点 $x=1$，取最小值 0.

(2) 在距离 $x=-\dfrac{3}{2}$ 较近的端点 -1，有最小值 $-\dfrac{2}{3}$，在另一端点，有最大值$\dfrac{10}{3}$.

11. x的范围是 $4\leqslant x\leqslant5$. 在 $x=4$ 有最小值 -2，在 $x=5$ 有最大值 0.

12. 当 $a\leqslant 0$ 时，在 $x=1$ 取最大值，因此，$f(a)=1-a$. 当 $a>0$ 时，$y=x|x-a|$ 的图象如下图．因此，如果 $1\leqslant\frac{a}{2}$，则在 $x=1$ 取最大值；如果 $\frac{a}{2}<1\leqslant\frac{1+\sqrt{2}}{2}a$，则在 $x=\frac{a}{2}$ 取最大值；如果 $\frac{1+\sqrt{2}}{2}a<1$，则在 $x=1$ 取最大值.



所以，当 $a\geqslant 2$ 时，$f(a)=a-1$；

当 $2(\sqrt{2}-1)\leqslant a<2$ 时，$f(a)=\frac{a^2}{4}$；

当 $a<2(\sqrt{2}-1)$ 时，$f(a)=1-a$.

13. 线段的方程是 $y=-\frac{3}{4}x+6\ (0\leqslant x\leqslant 4)$．设所求的点为 $P(x,\ y)$，从原点到这个点的距离为 d，则

$$d^2=x^2+y^2=x^2+\left(-\frac{3}{4}x+6\right)^2=\frac{25}{16}\left(x-\frac{72}{25}\right)^2+\frac{576}{25}.$$

$\because\ x=\frac{72}{25}$ 在 $0\leqslant x\leqslant 4$ 的范围，$\therefore\ d^2$ 在 $x=\frac{72}{25}$ 取最小值．这时，$y=\frac{96}{25}$. 故所求的点为 $\left(\frac{72}{25},\ \frac{96}{25}\right)$.

14. 设所求的点为 $P(x,y)$，从原点到它的距离为 d，则

$$x^2=a-y,\quad y\leqslant a,$$

$$d^2=x^2+y^2=y^2-y+a=\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+a-\frac{1}{4}\ (y\leqslant a).$$

因此，当 $a>\frac{1}{2}$ 时，d^2 在 $y=\frac{1}{2}$ 有最小值 $a-\frac{1}{4}$；当 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，d^2 在 $y=a$ 有最小值 a^2. 所以，当 $a>\frac{1}{2}$ 时，所求的点是 $\left(\pm\sqrt{a-\frac{1}{2}},\ \frac{1}{2}\right)$，距离是 $\sqrt{a-\frac{1}{4}}$；当 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，所求的点是 $(0,a)$，距离是 $|a|$.

15. (1) $a>0$，且 $-\frac{b^2-4ac}{4a}<0$，或 $a<0$，且 $-\frac{b^2-4ac}{4a}>0$.

$\therefore\ b^2-4ac>0$.

(2) $a<0$, 且 $-\frac{b^2-4ac}{4a}<0$. ∴ $a<0$, 且 $b^2-4ac<0$.

16. 考虑方程 $x^2+ax+b=m\left(x+\frac{a}{2}\right)$, 这时

$$x^2+(a-m)x+\left(b-\frac{ma}{2}\right)=0.$$

判别式 $D=(a-m)^2-4b+2ma=a^2-4b+m^2$.

根据假定, 由于 $x^2+ax+b=0$ 有实数解, 因此,

$$a^2-4b\geqslant 0. \quad \therefore \quad D\geqslant 0.$$

因为, 上面的方程有实数解, 所以抛物线与直线有公共点.

17. (1) 根据实数解的条件 $k^2-4(k+3)\geqslant 0$, 则

$(x-6)(k+2)\geqslant 0$. ∴ $k\geqslant 6$, $k\leqslant -2$.

由于 $y=x^2-kx+(k+3)$ 的顶点的 x 坐标 >-3, 因此,

$\frac{k}{2}>-3$. 在 $x=-3$, $y>0$. ∴ $k>-3$.

由以上的条件得 $-3<k\leqslant -2$ 或 $k\geqslant 6$.

(2) 在 $x=2$, $y<0$. ∴ $4-2k+k+3<0$. 因此, $k>7$.

〔另解〕 当两个解为 α, β 时, (1)中, 在 $D\geqslant 0$ 的情况下,

$(\alpha+3)+(\beta+3)>0$, $(\alpha+3)(\beta+3)>0$. ∴ $\alpha+\beta+6>0$,

$\alpha\beta+3(\alpha+\beta)+9>0$. 因此, $k+6>0$, $k+3+3k+9>0$.

在(2)中, $(\alpha-2)(\beta-2)<0$, ∴ $\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4<0$.

因此, $k+3-2k+4<0$.

18. 令左边为 $f(x)$ 时, $f(0)=a^2\geqslant 0$.

当 $a=0$ 时, $f(x)=x^2+x=0$ 的解是 $x=0$, -1. 只有一个解 0 在区间[0, 1]上.

当 $a\neq 0$ 时, $f(0)>0$. 因此, 条件是 $f(1)<0$ 或 $f(1)=0$ 且

$-\frac{4a+1}{2}>1$. 所以, $-2-\sqrt{2}\leqslant a<-2+\sqrt{2}$.

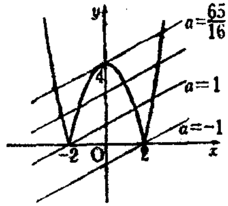
(答) $a=0$ 或 $-2-\sqrt{2}\leqslant a<-2+\sqrt{2}$.

19. 令 $-x^2+4=\frac{1}{2}x+a$, 则 $2x^2+x+2(a-4)=0$. 这个方程有重解

的条件是 $1-16(a-4)=0$.

$$\therefore \quad a=\frac{65}{16}\text{(答)}.$$

20. $x-2y+2a=0$ 即 $y=\frac{1}{2}x+a$ 与 $y=-x^2+4$ 相切时，由上面问题得



$a=\frac{65}{16}$.

当直线通过点 $(-2,\ 0)$时，$-2+2a=0$,

$\therefore\quad a=1$; 当通过点 $(2,0)$时，$2+2a=0$,

$\therefore\quad a=-1$.

(答) 当 $a<-1$ 时，交点的个数为 0，当 $a=-1$ 时为 1，当 $-1<a<1$ 时为 2, 当 $a=1$ 时为 3, 当 $1<a<\frac{65}{16}$ 时为 4, 当 $a=\frac{65}{16}$时为 3, 当 $a>\frac{65}{16}$时为 2.

21. 设切线为 $y=mx$. 由于 $2x^2-5x+2=mx$ 有重解，因此，$(5+m)^2-16=0$. $\therefore\quad 5+m=\pm4$. 故 $m=-1,\ -9$(答).

22. (a) 由于 $a+bx+2x^2=p+qx-x^2$ 有两个解 $x=-1,2$, 因此，

$a-b-p+q=-3,\quad a+2b-p-2q=-12$.

(b) 令 $x=0$，由①得 $y=a$. 由②得 $y=p$. $\therefore\quad a=-p$.

(c) 由于$\frac{q^2+4p}{4}+\frac{b^2-8a}{8}=\frac{27}{4}$，因此，$8a-b^2-8p-2q^2=-54$.

由(a)的二式知, $a-p=-6$. 再由(b)知, $a=-3,\ p=3$.

因此, 由(a), (c)得 $b-q=-3,\quad b^2+2q^2=6$.

$\therefore\quad b=-2,\quad q=1$.

(答) $a=-3,\quad b=-2,\quad p=3,\quad q=1$.

23. $x^2+(a+1)\ x\leqslant0\quad(a<-1)$. $x^2+(a+1)x=0$ 的解是 $x=0,\ -a-1$. $\because\quad -a-1>0$, $\therefore$ 不等式的解是 $0\leqslant x\leqslant-a-1$. 在区间 $[0,\ a-1]$上，$f(x)=x^2+ax=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}$的最小值:

(i) 当$-\frac{a}{2}<0$ 时, 是 $f(0)=0$;

(ii) 当$0\leqslant -\frac{a}{2}\leqslant -a-1$时，是$f\left(-\frac{a}{2}\right)=-\frac{a^2}{4}$;

(iii) 当 $-a-1<-\frac{a}{2}$时，是$f(-a-1)=a+1$.

如果$-\frac{a^2}{4}=-\frac{1}{2}$成立，则$a=-\sqrt{2}$. 它不满足 $0\leqslant -\frac{a}{2}\leqslant -a-1$.

如果$a+1=-\frac{1}{2}$成立，则 $a=-\frac{3}{2}$. 由于它满足$-a-1<-\frac{a}{2}$，因此是所求的值.（答）$a=-\frac{3}{2}$.

24. 对于x的所有实数值，$(k-1)x^2+x+(k-1)\geqslant 0$成立的条件是$k-1\neq 0$. 左边的二次函数有最小值，这个最小值$\geqslant 0$，即$k-1>0$，$-\frac{1-4(k-1)^2}{4(k-1)}\geqslant 0$. $\therefore$ $k\geqslant\frac{3}{2}$. 满足不等式的最小k值是$\frac{3}{2}$（答）.

25. (1) 解$(a-3)^2-4a<0$，即解$a^2-10a+9<0$，得 $1<a<9$.

(2) 可分$-\frac{a-3}{2}<-1$，$-1\leqslant -\frac{a-3}{2}\leqslant 2$，$2<-\frac{a-3}{2}$三种情况，即(i) $a>5$，(ii) $5\geqslant a\geqslant -1$，(iii) $-1>a$三种情况来考虑

$$f(x)=\left(x+\frac{a-3}{2}\right)^2-\frac{a^2-10a+9}{4},$$

于是，在区间$[-1,2]$的最小值：

当(i)时，是$f(-1)=4>0$. 所以，在这个区间上，$f(x)>0$.

当(ii)时，$f\left(-\frac{a-3}{2}\right)=-\frac{a^2-10a+9}{4}$这个值$>0$. 这时$1<a<9$，所以，当$1<a\leqslant 5$时，在区间$[-1,2]$上，总有$f(x)>0$.

当(iii)时，是$f(2)=3a-2$. 现在，由于$a<-1$，因此，$f(2)<0$，即在区间$[-1,2]$的某点，$f(x)>0$不成立.

根据(i)，(ii)的结果，得$a>1$（答）.

26. A，B的x坐标是$ax^2+bx+c-(mx+n)=0$的两个解. 设这两个解为$\alpha,\beta(\alpha<\beta)$时，则$ax^2+bx+c-(mx+n)=a(x-\alpha)(x-\beta)$，令$y_1=ax^2+bx+c$，$y_2=mx^2+n$，则 $y_1-y_2=a(x-\alpha)(x-\beta)$. 当

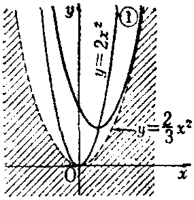
$\alpha<x<\beta$ 时, $(x-\alpha)(x-\beta)<0$. 因此,

当 $a>0$ 时, $y_1-y_2<0$ 从而, $y_1<y_2$, 曲线上的弧 AB 上的点在弦AB 上的点的下方.

当 $a<0$ 时, $y_1-y_2>0$. 从而, $y_1>y_2$, 曲线上的弧 AB 上的点在弦 AB 的上方.

27. 设抛物线 $y=x^2+2ax+a^2$ 所通过的点的坐标为 (x_1, y_1), 则存在满足 $a^2+2ax_1+x_1^2-y_1=0$ 的实数 a. $\therefore$ $(2x_1)^2-4(x_1^2-y_1)\geqslant 0$. 因此, $y_1\geqslant 0$. 所求的范围是 x 轴和它上方的半平面.

28. 平移 $y=x^2$, 把它的顶点移到 $y=2x^2$ 上的点 (m, n), 得方程为

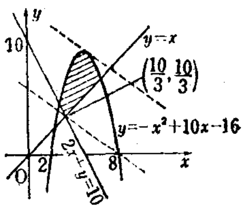


$$y=(x-m)^2+n \quad (n=2m^2).$$

$$\therefore \quad y=x^2-2mx+3m^2 \qquad ①$$

设①通过的点为 (x_1, y_1), 由于存在满足 $3m^2-2mx_1+x_1^2-y_1=0$ 的实数 m,

因此, $(2x_1)^2-12(x_1^2-y_1)\geqslant 0$. $\therefore$ $y_1\geqslant\dfrac{2}{3}x_1^2$. 因而, ①不通过的区域是 $y<\dfrac{2}{3}x^2$, 即抛物线 $y=\dfrac{2}{3}x^2$ 的下方.



29. $y=-(x-5)^2+9$ 的下方, 直线 $y=x$ 的上方, 直线 $y=-2x+10$ 的上方的公共部分(右图, 包含周界).

30. 二直线 $y=x$, $y=-2x+10$ 的交点为 $\left(\dfrac{10}{3}, \dfrac{10}{3}\right)$. 当直线 $2x+3y+1=k$ 通过这个点时, $k=2\times\dfrac{10}{3}+3\times\dfrac{10}{3}+1=\dfrac{53}{3}$. 当 $2x+3y+1=k$ 与 $y=-x^2+10x-16$ 相切时, $-x^2+10x-16=\dfrac{-2x+k-1}{3}$. 由于 $3x^2-32x+(k+47)=0$ 有重解, 因此, $32^2-12(k+47)=0$.

$\therefore \quad k=\dfrac{115}{3}$.

当(x, y) 在前一个问题的区域移动时，$\dfrac{53}{3}\leqslant 2x+3y+1\leqslant\dfrac{115}{3}$.

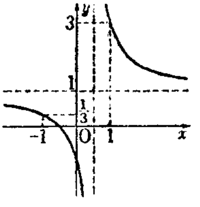
所以，最大值是$\dfrac{115}{3}$，最小值是$\dfrac{53}{3}$(答).

31. (1)，(5)(根据平移，则无论哪一个，都能重合于 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象.)

(3)，(4)(无论哪一个，都能重合于 $y=-\dfrac{1}{x}$的图象.)

(2)，(6)(无论哪一个，都能重合于 $y=-\dfrac{1}{2x}$的图象.)

32. $y=\dfrac{2}{2x-1}+1=\dfrac{1}{x-\frac{1}{2}}+1$ 的图象，是以直线 $x=\dfrac{1}{2}$，$y=1$ 为渐近线的直角双曲线(如右图).



当 $x=-1$ 时，$y=\dfrac{1}{3}$；当 $x=1$ 时，$y=3$.

因此，在$|x|\leqslant 1$的范围，$y\leqslant\dfrac{1}{3}$或 $y\geqslant 3$.

33. 由于$ax>0$，$\dfrac{b}{x}>0$，因此，$ax+\dfrac{b}{x}\geqslant 2\sqrt{ax\cdot\dfrac{b}{x}}=2\sqrt{ab}\left(\text{在}ax=\dfrac{b}{x}\text{时，等号成立}\right)$. 由 $ax=\dfrac{b}{x}$得 $x^2=\dfrac{b}{a}$. 又 $x>0$，$\therefore\quad x=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$. 因此，$y$在$x=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$取最小值 $2\sqrt{ab}$. 当 x 趋近于 0 时，由于$\dfrac{b}{x}$ 无限增大，因此，y 没有最大值.

34. (1) 设P(x, y)，则

$$\overline{\mathrm{OP}}^2=x^2+y^2=x^2+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{x}\right)^2$$

$$=\frac{4x^2}{3}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\geqslant 2\sqrt{\frac{4x^2}{3}\cdot\frac{1}{x^2}}+\frac{2}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}.$$

由$\dfrac{4x^2}{3}=\dfrac{1}{x^2}$得 $x^4=\dfrac{3}{4}$. $\therefore\quad x=\sqrt[4]{\dfrac{3}{4}}=\dfrac{\sqrt[4]{12}}{2}$. $\therefore\ y=\dfrac{3}{\sqrt[4]{12}}=\dfrac{\sqrt[4]{108}}{2}$.

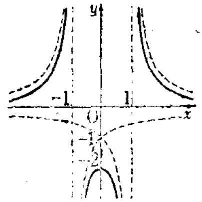
这时，$\overline{OP}^2$ 取最小值 $2\sqrt{3}$．P 的坐标是$\left(\dfrac{\sqrt[4]{12}}{2},\ \dfrac{\sqrt[4]{108}}{2}\right)$．

(2) 令 $\angle xOP=\theta$，则 $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{y}{x}=\dfrac{\sqrt[4]{108}}{\sqrt[4]{12}}=\sqrt{3}$，由于 P 在第Ⅰ象限，因此，$\theta=60^\circ$．

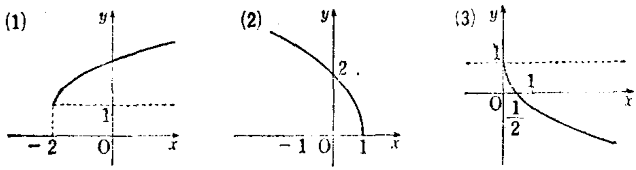
35. 令 $y=k(k\neq 0)$，则 $kx^2-(k+2)=0$．要使满足该式的实数 x 存在，就需要$\dfrac{k+2}{k}\geqslant 0$．

$\therefore\quad k\leqslant -2,\ k>0$．

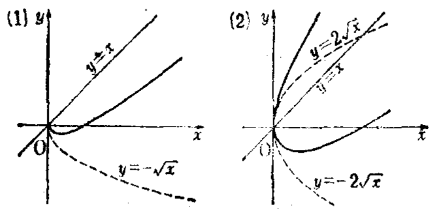
注意 $y=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$，就可得出右图．



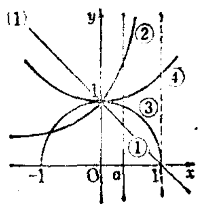
36.



37.



38.



(2) 比较直线 $x=a$ 与(1)的图象的交点的 y 坐标，则

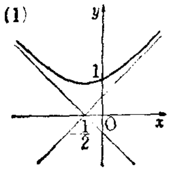
$A<C<D<B$．

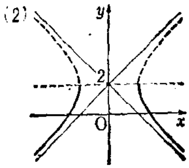
39. (1) 直角双曲线

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-y^2=-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

的 $y\geqslant 0$ 部分．

(2) 直角双曲线 $x^2-(y-2)^2=4$ 的 $y\leqslant 2$ 部分．





40. $y^2=x^2+5+2\sqrt{x^2+5}\sqrt{9-x^2}+9-x^2$

$=14+2\sqrt{(x^2+5)(9-x^2)}\leqslant 14+(x^2+5)(9-x^2)=28.$

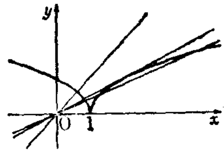
在 $x^2+5=9-x^2$ 时，等号成立.

这时，$x^2=2$. ∴ $x=\pm\sqrt{2}$. 因此，y 在 $x=\pm\sqrt{2}$ 取最大值 $\sqrt{28}=2\sqrt{7}$.

41. 当 $x\leqslant 1$ 时，$y=\sqrt{1-x}=\sqrt{-(x-1)}$；当 $x\geqslant 1$ 时，$y=\sqrt{x-1}$. 因此，图象如右图. 当 $y=ax$ 与图象的 $x\geqslant 1$ 部分相切时，

$$ax=\sqrt{x-1}.$$

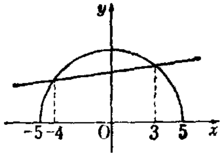
由于 $a^2x^2-x+1=0$ 有重解，因此，$1-4a^2=0$. ∴ $a=\frac{1}{2}$. 因而，当



$0<a<\frac{1}{2}$ 时，$y=ax$ 的图象与 $y=\sqrt{|1-x|}$ 的图象有 3 个交点.

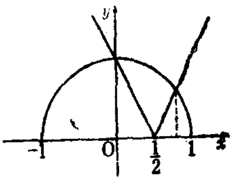
(答) $0<a<\frac{1}{2}$.

42. (1) $\sqrt{25-x^2}=\frac{1}{7}x+\frac{25}{7}$. 作出 $y=\sqrt{25-x^2}$, $y=\frac{1}{7}x+\frac{25}{7}$ 的图象，读出交点的 x 坐标. 又，把已知方程两边平方，$49(25-x^2)=x^2+50x+625$, 因此，$50x^2+50x-12\times 50=0$, $x^2+x-12=0$. ∴ $x=3$, -4.



(2) 令 $y_1=\sqrt{1-x^2}$, $y_2=|2x-1|$, 则当 $x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$y_2=-2x+1$；当

$x \geqslant \frac{1}{2}$时，$y_2 = 2x - 1$. 图象如右图.



把已知方程两边平方，

$$1 - x^2 = 4x^2 - 4x + 1,$$

$$5x^2 - 4x = 0.$$

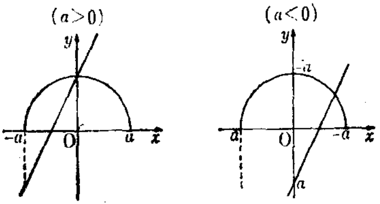
∴ $x = 0$, $\frac{4}{5}$. 参考图象可知，这些就是所求的解.

43. 把$\sqrt{a^2 - x^2} = 2x + a$的两边平方，

$$5x^2 + 4ax = 0. \quad \therefore \quad x = 0, \quad x = -\frac{4a}{5}.$$

$$y_1 = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y_2 = 2x + a$$

的交点的 x 坐标，当 $a > 0$ 时为 0；当 $a < 0$ 时为 $-\frac{4a}{5}$.



因此，当 $a > 0$ 时，所给不等式的解为 $-a \leqslant x < 0$；当 $a < 0$ 时，所给不等式的解为 $a \leqslant x < -\frac{4a}{5}$.

44. 设 $R_a: (x, y) \to (x', y')$，$R_b: (x', y') \to (x'', y'')$，则 $x' = 2a - x$，$y' = y$；$x'' = 2b - x'$，$y'' = y'$. ∴ $x'' = x + 2(a + b)$，$y'' = y$. 因此，$R_b \circ R_a: (x, y) \to (x'', y'')$是沿 x 轴方向移动 $2(a+b)$ 的平移.

45. 设 $F: (x, y) \to (x', y')$，$R: (x', y') \to (x'', y'')$，则 $x' = y$，$y' = x$；$x'' = -x'$，$y'' = y'$. ∴ $x'' = -y$，$y'' = x$. 设 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，则 $x'' = -r\sin\theta = r\cos(\theta + 90°)$，$y'' = r\cos\theta = r\sin(\theta + 90°)$. 所以，$R \circ F$ 是以原点为中心、作 $90°$ 的旋转.

46. 由于 $S: (x, y) \to (-x, -y)$，$T: (x, y) \to (x + a, y + b)$，因此，$T \circ S$：$(x, y) \to (-x + a, -y + b)$. 从而，$S \circ T \circ S$：$(x, y) \to (-(-x + a),$

$-(-y+b))=(x-a,\ y-b)$. $\therefore\quad S\cdot T\cdot S=T^{-1}$.

47. 在关于点(1, 0)的对称变换下，如果设$(x, y)\to(x', y')$，则$x'=2-x$，$y'=-y$. 从而，$x=2-x'$，$y=-y'$. 由于x，y满足$y=-3(x-3)^2-3$，因此，$-y'=-3\ (2-x'-3)^2-3$. $\therefore\quad y'=3x'^2+6x'+6$. 所以，与已知曲线对称的曲线是$y=3x^2+6x+6$.

48. 设关于原点与(x, y)对称的点为(x', y')，则$x=-x'$，$y=-y'$. 当(x, y)满足$y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{x}$时，$-y'=-\dfrac{x'}{2}+\dfrac{2}{x'}$. $\therefore\quad y'=\dfrac{x'}{2}-\dfrac{2}{x'}$.

所以，点(x', y')也在同一曲线上.

因为 $y=\dfrac{x^2-2x-4}{2(x-2)}=\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{x-2}{2}-\dfrac{2}{x-2}+1$ 的图象是由 $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{x}$的图象沿$x$轴方向平移2，沿$y$轴方向平移1所得，所以，关于点(2, 1)对称.

49. (1) 设$x\in A\cup B$，则$x\in A$或$x\in B$. 如果$x\in A$，则$f(x)\in f(A)$；如果$x\in B$，则$f(x)\in f(B)$.

$\therefore\quad f(x)\in f(A)\cup f(B)$，因此，$f(A\cup B)\subset f(A)\cup f(B)$. 其次，如果$x\in A$，则$x\in A\cup B$，从而，$f(x)\in f(A\cup B)$. $\therefore\quad f(A)\subset f(A\cup B)$. 同样，$f(B)\subset f(A\cup B)$. $\therefore\quad f(A)\cup f(B)\subset f(A\cup B)$.

由上面的两种情况得知，$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

(2) 与(1)的情形一样，可以简单地证明$f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$. 但是，不限于$f(A)\cap f(B)\subset f(A\cap B)$. 例如，设$M$为自然数的集合，$f$是使奇数→1、偶数→0的映射. 如果设$A:\{1, 2\}$，$B:\{1, 4\}$，则$f(A):\{0, 1\}$，$f(B):\{0, 1\}$. 从而，$f(A)\cap f(B):\{0, 1\}$. 可是，由于$A\cap B:\{1\}$，因此，$f(A\cap B):\{1\}$. 所以，$f(A)\cap f(B)\subset f(A\cap B)$不成立.

50. (1) $\mathrm{OP}^2=x^2+y^2$，$\mathrm{OP}'^2=x'^2+y'^2=(a^2+c^2)x^2+2\ (ab+cd)xy+(b^2+d^2)y^2$. $\mathrm{OP}^2=\mathrm{OP}'^2$成立的条件是$a^2+c^2=1$，$b^2+d^2=1$，$ab+cd=0$.

(2)由(1)的条件得知，$\mathrm{OQ}=1$，$\mathrm{OR}=1$，$\mathrm{OQ}\perp\mathrm{OR}$.

51. $y=1-x$ 的反函数为 $x=1-y$，从而 $y=1-x=f_3(x)$． ∴ $a=3$.

$y=\frac{1}{1-x}$的反函数为 $x=\frac{1}{1-y}$从而 $1-y=\frac{1}{x}$． 因此，$y=1-\frac{1}{x}$

$=\frac{x-1}{x}=f_6(x)$． ∴ $b=6$.

$y=\frac{x}{x-1}$的反函数为 $x=\frac{y}{y-1}$从而 $xy-x=y$． 因此， $y=\frac{x}{x-1}$

$=f_5(x)$． ∴ $c=5$.

52. (1) 令 $y=b$，则 $a^x+a^{-x}=2b$． ∴ $a^{2x}+2+a^{-2x}=4b^2$， $a^{2x}-2+a^{-2x}=(a^x-a^{-x})^2=4(b^2-1)$． 因此，当 $b\geqslant1$ 时，

$a^x-a^{-x}=\pm2\sqrt{b^2-1}$． ∴ $a^x=b\pm\sqrt{b^2-1}$.

交点仅在 $b\geqslant1$ 时存在，它的坐标是$(\log_a(b\pm\sqrt{b^2-1}),b)$．

(2) $\sqrt{17+12\sqrt{2}}=\sqrt{9+2\sqrt{9\times8}+8}=\sqrt{(3+2\sqrt{2})^2}$

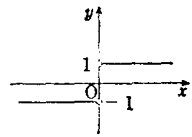
$=3+2\sqrt{2}$.

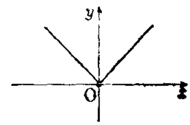
$x=\frac{1}{2}\log_a(17+12\sqrt{2})=\log_a(3+2\sqrt{2})=\log_a(3+\sqrt{3^2-1})$．

由(1)得知，这时，$y=3$.

习 题 答 案

1. (1) 当 $x>0$ 时, $y=1$; 当 $x<0$ 时, $y=-1$. 图象如右图. 定义域是除 0 以外的实数, 值域是 $\{1, -1\}$. (2) 当 $x=0$ 时, $y=0$; 当 $x>0$ 时, $y=x$; 当 $x<0$ 时, $y=-x$. 图象如右图. 定义域是全体实数, 值域是非负实数.





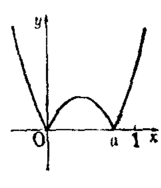
2. 由于 $-1=c$, $-2=4a+2b+c$, $-6=4a-2b+c$, 因此, $a=-\frac{3}{4}$, $b=1$, $c=-1$. $\therefore\quad y=-\frac{3}{4}x^2+x-1$.

3. 设所求方程为 $y=a(x-m)^2$.
由于 $1=a(1-m)^2$, $4=a(4-m)^2$, 因此,
$4(1-m)^2=(4-m)^2$. $\therefore\quad m=\pm2$. 当 $m=2$ 时, $a=1$;
当 $m=-2$ 时, $a=\frac{1}{9}$. $\therefore\quad y=(x-2)^2$, $y=\frac{1}{9}(x+2)^2$.

4. 是把已知曲线沿 y 轴方向平移得到的. (1) 通过原点. (2)与 x 轴相切(图象略).

5. 由于已知函数有最大值, 因此, $a<0$.
$-\frac{b^2-4ac}{4a}=-3a$, $4=a+b+c$, $-2=4a-2b+c$. 由第二式、第三式知, $b=a+2$, $c=-2a+2$, 代入第一式得 $3a^2+4a-4=0$. 由于 $a<0$, 因此, $a=-2$. $\therefore\quad b=0, c=6$.

6. (1) 右图.



(2) 因为在 $x=\frac{a}{2}$的值 $\frac{a^2}{4}$和在$x=1$的值 $1-a$ 中, 较大的一个是最大值, 所以, 当 $0<a\leqslant2(\sqrt{2}-1)$时, 最大值是

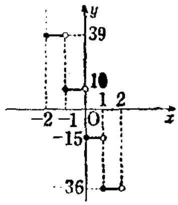
$1-a$; 当 $2(\sqrt{2}-1)\leqslant a<1$ 时, 最大值是$\frac{a^2}{4}$.

7. $x=-2y+1$.

(1) $z=-2y^2+y=-2\left(y-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}$. 在 $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{4}$, 取最大值$\frac{1}{8}$.

(2) $z=5y^2-4y+1=5\left(y-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5}$. 在 $x=\frac{1}{5}$, $y=\frac{2}{5}$, 取最小值$\frac{1}{5}$.

8. 因为 $f(x)$ 在 $x=\frac{23}{4}=5\frac{3}{4}$ 取最小值, 所以在区间 $-2\leqslant x<2$ 是减函数.



$f(-2)=39$, $f(-1)=10$, $f(0)=-15$, $f(1)=-36$.

因此, $y=g(x)$的图象如右图.

(2) 最小值是 -36.

9. 当 $x<0$ 时, $\frac{x}{|x|}=-1$; 当 $x>0$ 时, $\frac{x}{|x|}=1$, $y=\frac{x}{|x|}$ 的图象就是习题1(1)的图象. 当 $a<2$ 时, 交点的个数为 1; 当 $a=2$ 时, 交点的个数为 2; 当 $a>2$ 时, 交点的个数为 3. (画出图象来检查.)

10. (1) 令 $f(x)=ax^2+bx+c$, 则 $f(x+1)-f(x)=2ax+a+b=2x$. 因此, $a=1$, $b=-1$. 又 $f(0)=1$, 因此, $c=1$. $\therefore$ $f(x)=x^2-x+1$.

(2) 因为 $f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$, 所以, 在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 有最大值 $f(-1)=3$, 最小值 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$.

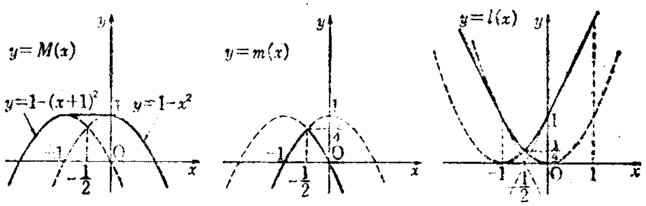
11. $M(x)$: 当 $x\leqslant -1$ 时, $x+1\leqslant 0$, 因此,

$$M(x)=f(x+1)=1-(x+1)^2;$$

当 $-1<x\leqslant 0$ 时，$M(x)=f(0)=1$；当 $0<x$ 时，$M(x)=f(x)=1-x^2$.

$m(x)$：当 $x\leqslant -\frac{1}{2}$ 时，$m(x)=f(x)=1-x^2$；当 $-\frac{1}{2}<x$ 时，$m(x)=f(x+1)=1-(x+1)^2$.

$l(x)$：当 $x\leqslant -1$ 时，$l(x)=-2x-1$；当 $-1<x\leqslant -\frac{1}{2}$ 时，$l(x)=x^2$；当 $-\frac{1}{2}<x\leqslant 0$ 时，$l(x)=(x+1)^2$；当 $0<x$ 时，$l(x)=2x+1$.



12. $f(x)=a(x-\alpha)^2+8\quad (a<0)$，$f(-\alpha)=4a\alpha^2+8=-8$.

∴ $a\alpha^2=-4$. 由于 $f(\alpha)+g(\alpha)=\alpha^2+8\alpha-4=16$,

$f(-\alpha)+g(-\alpha)=\alpha^2-8\alpha-4=-16$, 因此，$16\alpha=32$.

∴ $\alpha=2$. 因而，$a=-1$，$f(x)=-(x-2)^2+8=-x^2+4x+4$,

$g(x)=x^2+8x-4-f(x)=2x^2+4x-8$.

13. $f(x)=a\cos x-(1-\cos^2 x)=\left(\cos x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(1+\frac{a^2}{4}\right)$，$-1\leqslant\cos x\leqslant 1$. 最小值用 $m(a)$ 表示，最大值用 $M(a)$ 表示.

$m(a)$：当 $-1\leqslant-\frac{a}{2}\leqslant 1$，即 $-2\leqslant a\leqslant 2$ 时，$m(a)=-\left(1+\frac{a^2}{4}\right)$；

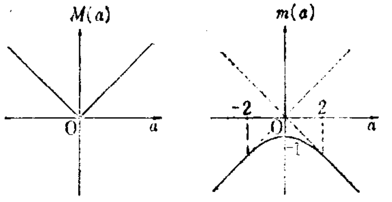
当 $-\frac{a}{2}<-1$，即 $a>2$ 时，$m(a)=\left(-1+\frac{a}{2}\right)^2-\left(1+\frac{a^2}{4}\right)=-a$；

当 $1<-\frac{a}{2}$，即 $a<-2$ 时，$m(a)=\left(1+\frac{a}{2}\right)^2-\left(1+\frac{a^2}{4}\right)=a$.

$M(a)$：当 $-\frac{a}{2}\leqslant 0$，即 $a\geqslant 0$ 时，$M(a)=\left(1+\frac{a}{2}\right)^2-\left(1+\frac{a^2}{4}\right)$

$=a$; 当 $-\dfrac{a}{2}>0$, 即 $a<0$ 时, $M(a)=\left(-1+\dfrac{a}{2}\right)^2-\left(1+\dfrac{a^2}{4}\right)$

$=-a$.



14. (1) 当 $t=\dfrac{v\sin\alpha}{g}$时, $y=vt\sin\alpha-\dfrac{1}{2}gt^2=-\dfrac{g}{2}\left(t-\dfrac{v\sin\alpha}{g}\right)^2$

$+\dfrac{v^2\sin^2\alpha}{2g}(t\geqslant 0)$最大. (答)$\dfrac{v\sin\alpha}{g}$秒后, 高度是$\dfrac{v^2\sin^2\alpha}{2g}$.

(2) 令 $y=0$, 则 $vt\sin\alpha-\dfrac{1}{2}gt^2=0$. 与 0 不同的解是 $t=\dfrac{2v\sin\alpha}{g}$.

这时, $x=v\cos\alpha\cdot\dfrac{2v\sin\alpha}{g}=\dfrac{v^2\sin2\alpha}{g}$. (答)$\dfrac{v^2\sin2\alpha}{g}$.

15. 由 $af(0)<0$, 得 $ac<0$. $\therefore$ $b^2-4ac>0$. 因此, $f(x)=0$ 有两个不同的实数解. 设二解为 α,β, 则$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}=\dfrac{ac}{a^2}<0$. 所以, α,β 中一个为正, 另一个为负.

16. 令 $f(x)=ax^2+bx+c$, 则 $a-b+c=6$, $c=-1$, $a+b+c=-4$. $\therefore$ $a=2$, $b=-5$, $c=-1$. 解方程 $f(x)=2x^2-5x-1=0$, 得 $x=\dfrac{5\pm\sqrt{25+8}}{4}=\dfrac{5\pm\sqrt{33}}{4}$. 求二解的差, 得 $\dfrac{\sqrt{33}}{2}$.

17. $ax^2+(2a+7)x+4=0$ 的判别式为

$$(2a+7)^2-16a=4a^2+12a+49=4\left(a+\frac{3}{2}\right)^2+40>0.$$

所以, 问题中的二次函数与 x 轴交于不同的两点.

18. $(x-2)^2=m(x+1)$ 即 $x^2-(4+m)x+(4-m)=0$ 有相异二实数解, $\therefore$ $(4+m)^2-4(4-m)>0$, $m^2+12m>0$, 所以, $m<-12$, 0<m>0.

19. 抛物线的方程为 $y-x=a(x^2-x-2)\cdots$①. 解 $y-x=0$, $x^2-x-2=0$, 得 $x=2$, $y=2$; $x=-1$, $y=-1$. 这些解与 a 无关, 都满足①. 所以, ①通过两定点 $(2,2)$, $(-1,-1)$.

20. 因为 $y=ax^2+bx+c$ 通过 $(0,-1)$, $(3,2)$, 所以, $c=-1$, $9a+3b+c=2$. $\therefore\quad b=1-3a$. 令 $f(x)=ax^2+bx+c-(x-1)=0$, 则 $ax^2-3ax=0$. 由于 $a\neq0$, 因此, $x=0,3$. 所以, $y=f(x)$ 与 x 轴交于两点 $(0,0)$, $(3,0)$.

〔另解〕 $y=x-1$ 与 $y=ax^2+bx+c$ 一样, 通过两点 $(0,-1)$, $(3,2)$. 所以, $ax^2+bx+c-(x-1)=0$ 有两个解 $x=0$, $x=3$.

21. 因为 $y=ax^2+b\cdots$① 通过 $(1,2)$, 所以, $a+b=2$. 直线 $y=2x$ 与①的公共点的 x 坐标满足 $ax^2+b=2x$ 即 $ax^2-2x+(2-a)=0$. 由相切的条件 $4-4a(2-a)=0$, 得 $a^2-2a+1=0$. $\therefore\quad a=1$, 从而, $b=1$.

22. (1) $2x^2+2(a+b)x+(a^2+b^2)=(x+a)^2+(x+b)^2\geqslant0$ (在 $x=-a=-b$ 时, 等号成立).

(2) 由于(1)的二次函数总 $\geqslant0$, 因此, 最小值为

$$-\frac{4(a+b)^2-8(a^2+b^2)}{4\times2}\geqslant0.$$

$\therefore\quad 8(a^2+b^2)\geqslant4(a+b)^2$. $\therefore\quad \dfrac{a^2+b^2}{2}\geqslant\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$.

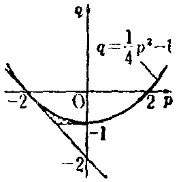
〔注意〕 如果仅仅是(2)的证明, 则由 $\dfrac{a^2+b^2}{2}-\dfrac{a^2+2ab+b^2}{4}=\dfrac{1}{4}(a^2-2ab+b^2)\geqslant0$, 立即得出结果.

23. 不等式 P, Q, R 的解是, P: $1<x<3$; Q: $-1<x<3$; R: $-1<x<0$. (i) 因为 $P\subset Q$, 所以, $P\to Q$ 为○. (ii) 因为 Q 既包含属于 P 的点, 又包含不属于 P 的点, 所以, $Q\to P$ 为△. (iii) 因为 P 的点不包含在 R 中, 所以, $P\to R$ 为×. (iv) 因为 $R\subset Q$, 所以, $R\to Q$ 为○.

24. P, Q 的 x 坐标是 $x^2=m(x+2)$ 即 $x^2-mx-2m=0$ 的解. 这个方程有相异实数解的条件是 $m^2+8m>0$. 从而, $m<-8$ 或 $m>0\cdots$

①. 设两个解为 x_1, x_2，则对应的 y 值为 $y_1=m(x_1+2)$，$y_2=m(x_2+2)$. OP⊥OQ 的条件是 $\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=-1$. ∴ $m^2(x_1+2)(x_2+2)=-x_1x_2$. 代入 $x_1+x_2=m, x_1x_2=-2m$，得 $m^2(-2m+2m+4)=2m$. 由于 $m\neq 0$，因此，$m=\frac{1}{2}$. 因为 m 值在①的范围内，故为所求的值.

25. (1) 用 $f(x)$ 表示已知方程的左边. 由于这个函数在 $x=-\frac{p}{2}$ 取最小值，因此，所求的条件是 $0<-\frac{p}{2}<1$, $f(0)>0$, $f(1)>0$, $f\left(-\frac{p}{2}\right)<0$. ∴ $-2<p<0$, $q+1>0$. $1+p+q+1>0$, $\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{2}+q+1<0$，即 $-2<p<0$, $q>-1$, $-p-2<q<\frac{1}{4}p^2-1$.



(2) 右图的斜线部分，不包含边界.

26. $A(\sqrt{3}k,\ 9k^2)$，$B(0,\ 3k^2)$. 因为 A 的 y 坐标 >0，所以，$-2x^2+4\sqrt{3}kx+3k^2=0$ 有相异二实数解. 设两个解为 $\alpha, \beta(\alpha<\beta)$，则 CD $=\beta-\alpha$. $\frac{\triangle ACD}{\triangle BCD}=\frac{9k^2(\beta-\alpha)}{3k^2(\beta-\alpha)}=3$.

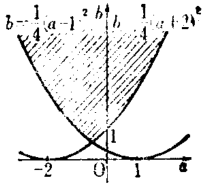
27. $y=(x-p)^2+q\cdots$①，$y=1-x\cdots$②.
$(x-p)^2+q=1-x$，整理得 $x^2-(2p-1)x+p^2+q-1=0$. ①，②相切的条件是 $(2p-1)^2-4(p^2+q-1)=0$ 即 $4p+4q=5\cdots$③. 因为①的顶点 (p, q) 在 $y=ax^2$ 上，所以，$q=ap^2\cdots$④. 由③，④得 $4ap^2+4p-5=0$. 由于存在满足这个方程的实数 p，因此，$16+80a\geqslant 0$. ∴ $a\geqslant-\frac{1}{5}(a\neq 0)$.

28. (1) 通过原点的直线 $y=mx$ 与①相切的条件是 $x^2+px+q=mx$ 有重解，即 $(p-m)^2-4q=0$. ∴ $m^2-2pm+p^2-4q=0$. 设两个解为 m_1, m_2. 则垂直的条件是 $m_1m_2=-1$. ∴ $p^2-4q=-1$.

(2) ①的顶点 $x=-\frac{p}{2}$, $y=-\frac{p^2-4q}{4}$. 由(1)，得所求的轨迹为

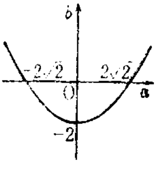
$y=\frac{1}{4}$.

29. 设 $y>x^2+ax+b$ 表示的区域为 D, $y>x$, $y>-2x$ 表示的区域分别为 D_1, D_2. 则 $D\subset D_1$, 且 $D\subset D_2$. 从而，总有 $x^2+ax+b\geqslant x$，且 $x^2+ax+b\geqslant -2x$, 即 $x^2+(a-1)x+b\geqslant 0$, $x^2+(a+2)x+b\geqslant 0$.



∴ $(a-1)^2-4b\leqslant 0$, $(a+2)^2-4b\leqslant 0$. (a, b) 的范围是上图的斜线部分，包含边界.

30. (1) $x^2+ax+b=0$ 必有相异二实数解，设它们为 α, $\beta(\alpha<\beta)$, 则在 $\alpha<x<\beta$ 的范围内，$|x^2+ax+b|=-(x^2+ax+b)$. 所求的条件是 $y=-(x^2+ax+b)$ 与 $y=2$ 相切. 由 $-(x^2+ax+b)=2$ 即 $x^2+ax+(b+2)=0$ 有重解的条件为 $a^2-4(b+2)=0$.



(2) $b=\frac{1}{4}a^2-2$. 图象如右图.

(3) 当 $a=4$ 时, $b=2$.

由 $x^2+4x+2=2$, 得 $x^2+4x=0$. ∴ $x=0, -4$.

由 $-(x^2+4x+2)=2$, 得 $x^2+4x+4=0$. ∴ $x=-2$.

31. (1) $y=-\frac{2}{x}+3$. (2) $y=-\frac{2}{x+2}$.

(3) $y=-\frac{2}{x-2}-1=-\frac{x}{x-2}$.

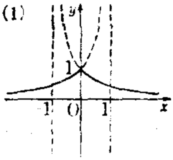
32. (1) $y=\frac{-x+3}{x}=\frac{3}{x}-1$. 这是把直角双曲线 $y=\frac{3}{x}$ 沿 y 轴方向平移 -1 所得的曲线.

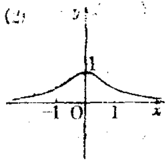
(2) $y+1=\frac{1}{x-1}$, $y=\frac{1}{x-1}-1$. 这是把直角双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 沿 x 轴方向平移 1, 沿 y 轴方向平移 -1 所得的曲线.

33. (1) 由 $|x|\geqslant 0$ 得 $0<y\leqslant 1$.

当 $x\geqslant 0$ 时，$y=\dfrac{1}{1+x}$；

当 $x\leqslant 0$ 时，$y=\dfrac{1}{1-x}$.





图象如右图.

(2) 由 $x^2\geqslant 0$ 得 $0<y\leqslant 1$. 计算出 x 的各个值相应的 y 值，就得到上图.

〔注意〕 (2)的图象有拐点. 在求它的位置时，要用微分法，实际上，$x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

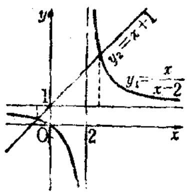
34. 令 $y_1=\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{2}{x-2}+1$，$y_2=x+1$，作出图象. 交点的 x 坐标就是

$\dfrac{x}{x-2}=x+1$ 的解. 去分母整理得

$x^2-2x-2=0$.

$\therefore\quad x=1\pm\sqrt{3}$.

当 $y_1\leqslant y_2$ 时，x 的范围是 $1-\sqrt{3}\leqslant x<2$，$x\geqslant 1+\sqrt{3}$.

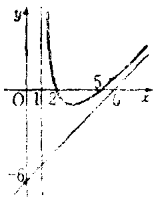


35. 令 $y=k$，则 $x^2-7x+10=kx-k$. 由 $x^2-(k+7)x+(k+10)=0$ 有实数解的条件 $(k+7)^2-4(k+10)\geqslant 0$ 得 $k^2+10k+9\geqslant 0$.

$\therefore\quad k\leqslant -9$，$k\geqslant -1$.

y 的取值范围为 $y\leqslant -9$，$y\geqslant -1$.

$y=x-6+\dfrac{4}{x-1}$ 的图象，是以直线 $x=1$，$y=x-6$ 为渐近线的双曲线(右图)，与 x 轴的交点在 $x=2, 5$.



所以，$y>0$ 时，x 的范围为 $1<x<2$，$x>5$.

36. 令 $\dfrac{x+1}{x^2+3}=k$，则 $kx^2-x+(3k-1)=0$. 如果 $k\neq 0$，则由满足这个方程的实数 x 存在的条件得知，$1-4k(3k-1)\geqslant 0$，$12k^2-4k-1\leqslant$

0. $\therefore\ -\dfrac{1}{6}\leqslant k\leqslant\dfrac{1}{2}$. 在 $x=-1$ 时，$k=0$. 又当 $k=-\dfrac{1}{6}$ 时，$x=-3$；当 $k=\dfrac{1}{2}$ 时，$x=1$. 函数是连续的，在 $x=1$ 取最大值 $\dfrac{1}{2}$，在 $x=-3$ 取最小值 $-\dfrac{1}{6}$，当 $x=0$ 时，函数值为 $\dfrac{1}{3}$，当 $x=2$ 时，函数值为 $\dfrac{3}{7}$.

在区间 $0\leqslant x\leqslant 2$ 上，$\dfrac{x+1}{x^2+3}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{-x(x-3)}{3(x^2+3)}\geqslant 0$.

$\therefore\ \dfrac{x+1}{x^2+3}\geqslant\dfrac{1}{3}$. 所以，在 $x=0$ 有最小值 $\dfrac{1}{3}$，在 $x=1$ 有最大值 $\dfrac{1}{2}$.

37. $tf(a)+(1-t)f(b)-f(ta+(1-t)b)$

$=\dfrac{t}{a}+\dfrac{1-t}{b}-\dfrac{1}{ta+(1-t)b}$

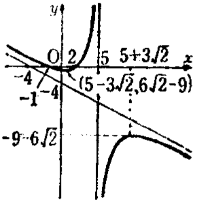
$=\dfrac{t^2ab+(1-t)tb^2+(1-t)ta^2+(1-t)^2ab-ab}{ab[ta+(1-t)b]}$

$=\dfrac{t(1-t)(a-b)^2}{ab[ta+(1-t)b]}$.

a, b 为正，$0<t<1$. 从而，由于 $0<1-t<1$，因此，这个式子的值 $\geqslant 0$. $\therefore\ tf(a)+(1-t)f(b)\geqslant f(ta+(1-t)b)$.（在 $a=b$ 时，等号成立.）

38. (1) $y=f(x)-x=-x-4-\dfrac{18}{x-5}$.

图象如右图.



(2) 令 $y=f(x)-x=\dfrac{4x-2}{5-x}-x=k$，

则 $x^2+(k-1)x-(5k+2)=0$.

满足这个方程的实数 x 存在的条件是

$(k-1)^2+4(5k+2)\geqslant 0$，$k^2+18k+9\geqslant 0$.

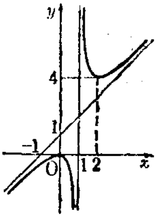
$\therefore\ k\geqslant -9+6\sqrt{2}$，$k\leqslant -9-6\sqrt{2}$.

所以，y 取值的范围为 $y\geqslant -9+6\sqrt{2}$、$y\leqslant -9-6\sqrt{2}$. (3) 令 $\dfrac{4x-2}{5-x}-x=0$，则 $x^2-x-2=0$. $\therefore\ x=-1, 2$. 因为 $y=f(x)-x$

在这个点与 x 轴相交，所以，$y>0$ 时，x 的范围为 $x<-1, 2<x<5$.

39. (1) 由于当 $x=0$ 时 $y=0$，因此，$c=0$. 从而，

$$y=\frac{bx^2}{x+a}=bx-ab+\frac{a^2b}{x+a}.$$



渐近线为 $y=bx-ab$ 和 $x+a=0$.

因此，由条件②得 $b=1, -ab=1$.

$\therefore\quad a=-1,\ b=1,\ c=0.$

(2) 右图. (3) 令 $\frac{x^2}{x-1}=k$，则 $x^2-kx+k=0$.

由有实数解的条件 $k^2-4k\geqslant 0$，得 $k\leqslant 0,\ k\geqslant 4$.

当 $k=0$ 时，$x=0$(重解)；当 $k=4$ 时，$x=2$(重解).

所以，在 $x=0$ 有极大值 0，在 $x=2$ 有极小值 4.

40. (1) $x^2+4x+5=(x+2)^2+1>0$. 因此，由 $y-1=\frac{-2x}{x^2+4x+5}$ 知，

当 $x>0$ 时，$y-1<0$，$\therefore\ y<1$；当 $x<0$ 时，$y-1>0$，$\therefore\ y>1$.

(2) 令 $y=k$，则 $x^2+2x+5=k(x^2+4x+5)$. $\therefore\ (1-k)x^2+2(1-2k)x+5(1-k)=0$. 满足这个方程的实数 x 存在的条件是 $k=1$，或者当 $k\neq 1$ 时，是 $(1-2k)^2-5(1-k)^2\geqslant 0$，整理得 $k^2-6k+4\leqslant 0$. $\therefore\ 3-\sqrt{5}\leqslant k\leqslant 3+\sqrt{5}$.

所以，y 取最大值 $3+\sqrt{5}$，最小值 $3-\sqrt{5}$.

41. 由于 $2x^2-8x+9=2(x-2)^2+1>0$，因此，已知的分式有最大值、最小值.

令 $\frac{2ax-b}{2x^2-8x+9}=k$，则 $2kx^2-(8k+2a)x+(9k+b)=0$. 由满足这个方程的实数 x 存在的条件知，$(4k+a)^2-2k(9k+b)\geqslant 0$，整理得 $2k^2-(8a-2b)k-a^2\leqslant 0$.

设使左边为 0 的 k 值为 $\alpha,\beta(\alpha<\beta)$，则 $\alpha\leqslant k\leqslant\beta$.

因为这就是已知分式函数的取值范围，所以，问题中不等式成立的条件是 $-1<\alpha<\beta<1$. $\therefore\ |\alpha|<1, |\beta|<1$. 由 $\alpha\beta=-\frac{a^2}{2}$

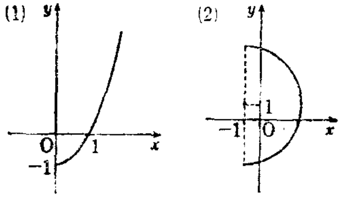
得，$\frac{a^2}{2}<1$. ∴ $a^2<2$. 由于 a 为正整数，因此，$a=1$.

α,β 异号，$\alpha+\beta=4a-b$，∴ $|4a-b|=|\alpha+\beta|<1$.

由于 $4a-b$ 是整数，因此，$4a-b=0$. ∴ $b=4a=4$.

42. (1) 抛物线 $y=x^2-1$ 的 $x\geqslant 0$ 部分.

(2) $(x+1)^2=16-(y-1)^2$ 即 $(x+1)^2+(y-1)^2=16$ 是以 $(-1,1)$ 为圆心，半径为 4 的圆. 图象是这个圆的 $x\geqslant -1$ 部分.



43. 定义域为 $-1\leqslant x\leqslant 1$. 正如作出图象后所表明的那样，在 $x=1$ 取最大值 1.

令 $y=k$. 由于 $(x-k)^2=1-x^2$，因此，$2x^2-2kx+(k^2-1)=0$. 由这个方程有实数解的条件 $k^2-2(k^2-1)\geqslant 0$ 得，$k^2\leqslant 2$.

$$\therefore\quad -\sqrt{2}\leqslant k\leqslant\sqrt{2}.$$

所以，y 的最小值为 $-\sqrt{2}$.

（答）最大值为 1，最小值为 $-\sqrt{2}$.

44. 由于定义域为 $-1\leqslant x\leqslant 1$，因此，正如作出图象后所表明的那样，在 $x=1$ 取最大值 4.

令 $y=k$. 由于 $(4x-k)^2=9(1-x^2)$，因此，$25x^2-8kx+(k^2-9)=0$. 由这个方程有实数解的条件 $(4k)^2-25(k^2-9)\geqslant 0$ 得，$k^2\leqslant 25$. ∴ $-5\leqslant k\leqslant 5$. 故 y 的最小值为 -5.

（答）最大值为 4，最小值为 -5.

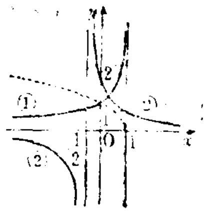
45. 把已知方程的两边平方，得 $x-3=a^2x^2+2ax+1$，因此，

$a^2x^2+(2a-1)x+4=0$.

由于这个方程有相异的实数解的条件是 $(2a-1)^2-16a^2>0$ $(a\neq 0)$，因此，$12a^2+4a-1<0$. ∴ $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{6}(a\neq 0)$.

$y=\sqrt{x-3}$ 的图象，是以(3，0)为顶点，x 轴为轴的抛物线在 x 轴的上方的部分(包含端点)．因为 $y=ax+1$ 是通过点(0，1)的直线，所以，它们的图象相交于两点的条件是 $a>0$．因此，$0<a<\frac{1}{6}$ (答)．

46. (1) $y_1=\sqrt{3-x}$，$y_2=x-2$ 的图象的交点的 x 坐标是 $\sqrt{3-x}=x-2$ 的解．解 $x^2-3x+1=0$，得 $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$．使 y_1 存在，且 $y_1>y_2$ 的范围是 $x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.



(2) $y_1=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ …①，$y_2=\frac{2}{2x+1}$ …② 的图象如上图．（点线是 $y=\sqrt{1-x}$）交点在 $x>0$ 的范围．它的 x 坐标为，

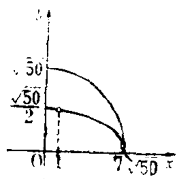
$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=\frac{2}{2x+1}$，或 $(2x+1)^2=4(1-x)$，即 $4x^2+8x-3=0$ 的正解 $x=\frac{-2+\sqrt{7}}{2}$.

已知不等式的解为 $x<-\frac{1}{2}$，$\frac{-2+\sqrt{7}}{2}<x<1$.

47. 设BC的中点为M，由 $AB^2+AC^2=2AM^2+2BM^2$（巴卜斯定理）得 $9+16=2y^2+2\left(\frac{x}{2}\right)^2$．∴ $y=\frac{\sqrt{50-x^2}}{2}$.

但是，因为 $AB-AC<BC<AB+AC$，所以，$1<x<7$.

图象如右图中的椭圆弧．



48. 令 $z=\frac{1}{2}-\left(\sqrt{\frac{1}{4}-x}+y\right)$．由于 $y\leq x$，因此，$z\geq\frac{1}{2}-x-\sqrt{\frac{1}{4}-x}$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}-x\right)^2-\left(\frac{1}{4}-x\right)}{\frac{1}{2}-x+\sqrt{\frac{1}{4}-x}}=\frac{x^2}{\frac{1}{2}-x+\sqrt{\frac{1}{4}-x}}$$

由 $x\leq\frac{1}{4}$ 得知，分母 >0，

$\therefore\ z\geqslant 0$. 因此，$\sqrt{\frac{1}{4}-x}+y\leqslant\frac{1}{2}$.

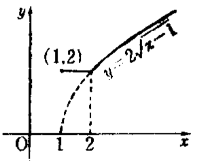
49. $\sqrt{x\pm 2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1\pm 2\sqrt{x-1}+1}=\sqrt{(\sqrt{x-1}\pm 1)^2}$

$=|\sqrt{x-1}\pm 1|$. 当 $x-1\geqslant 1$ 即 $x\geqslant 2$ 时，

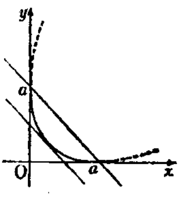
$y=\sqrt{x-1}+1+(\sqrt{x-1}-1)=2\sqrt{x-1}$.

当 $0\leqslant x-1<1$ 即 $1\leqslant x<2$ 时，$y=\sqrt{x-1}+1+(-\sqrt{x-1}+1)=2$.

在 $x-1<0$ 即 $x<1$ 的范围，不能定义函数值，所以，图象如图.



50. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}\cdots$①. 因为 $x\geqslant 0, y\geqslant 0, \sqrt{x}\geqslant 0$, $\sqrt{y}\geqslant 0$, 所以，$0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant a$. 这时，由①得，$y=(-\sqrt{x}+\sqrt{a})^2=x+a-2\sqrt{ax}$. 图象是由 $y=x+a$ 的图象和 $y=-2\sqrt{ax}$ 的图象复合而得下图的曲线. 在点$(a,0)$与 x 轴相切，在点$(0,a)$与 y 轴相切(把坐标轴旋转 45° 或把图形旋转 45°，便知它是抛物线).



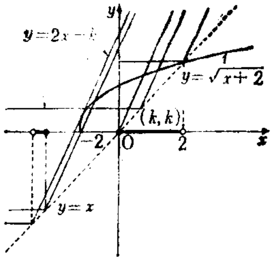
这条曲线与直线 $y=-x+k$ 的交点的 x 坐标满足

$$-x+k=x+a-2\sqrt{ax}\ \text{即}\ 2\sqrt{ax}=2x+a-k.$$

把两边平方，整理得 $4x^2-4kx+(a-k)^2=0$. 根据有实数解的条件$(2k)^2-4(a-k)^2\geqslant 0$ 得知，$k\geqslant\frac{a}{2}$. 因此，交点的个数当 $k<\frac{a}{2}$时，为 0；当 $k=\frac{a}{2}$ 时，为 1；当 $\frac{a}{2}<k\leqslant a$ 时，为 2；当 $a<k$ 时，为 0.

51. 当 $x\geqslant k$ 时，$x+|x-k|=2x-k$；当 $x<k$ 时，$x+|x-k|=k$. 因此，图象如下页图.

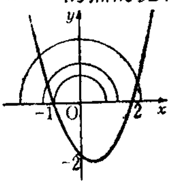
点(k,k)在直线 $y=x$ 上，这条直线与曲线 $y=\sqrt{x+2}$ 的交点是$(2,2)$. 又，当 $y=2x-k$ 与 $y=\sqrt{x+2}$ 相切时以及通过$(-2,0)$



时，k 值为 $-\dfrac{33}{8}$ 和 -4.

所以，$-\dfrac{33}{8}<k\leqslant-4$，$0\leqslant k<2$（答）.

52. $y=x^2-x-2$ 的图象，是与 x 轴交于 $x=-1$，$x=2$ 的点的抛物线如右图. 因为 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 的图象是以原点为圆心，半径为 a 的半圆，所以，交点的个数，即已知方程的实数解的个数，当 $|a|<1$ 时为 0，当 $1\leqslant|a|<2$ 时为 1，当 $|a|\geqslant2$ 时为 2.



53. (1) $y=\sqrt{4-(x+2)^2}$. 图象是以点 $(-2,0)$ 为圆心，半径为 2 的圆的 $y\geqslant0$ 部分.

(2) $y=-x-1\ (x\geqslant-2)$，$y=x+3\ (x<-2)$. 图象是以点 $(-2,1)$ 为顶点的折线.

(3) 令 $y=\sqrt{-x(x+4)}-|x+2|+1\cdots$①，则在 $-4\leqslant x\leqslant0$ 的范围，

$$[\sqrt{-x(x+4)}-|x+2|]^2$$

$$=-x^2-4x+x^2+4x+4-2|x+2|\sqrt{-x(x+4)}\leqslant4.$$

$\therefore\quad -2\leqslant\sqrt{-x(x+4)}-|x+2|\leqslant2.$

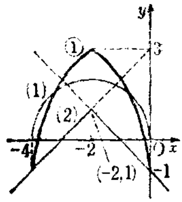
所以，$-1\leqslant y\leqslant3$ ②

在②的范围，函数①的图象，是由(1)，(2)的图象复合而得的两个椭圆弧所构成. 因此，直线 $y=k$ 与这个图象相交的条件是 $-1\leqslant k\leqslant3$.

(4) 当 $k=0$ 时，$\sqrt{-x(x+4)}=|x+2|-1$.

$\therefore \quad -x^2-4x=x^2+4x+4-2|x+2|+1.$

当 $x\geqslant -2$ 时, $2x^2+6x+1=0$.



$\therefore \quad x=\dfrac{-3+\sqrt{7}}{2}.$

当 $x<-2$ 时, $2x^2+10x+9=0$.

$\therefore \quad x=\dfrac{-5-\sqrt{7}}{2}.$

54. $y=\sqrt{2x-a}\cdots$①, $x=\sqrt{2y-a}\cdots$②.

①的定义域为 $x\geqslant\dfrac{a}{2}$, 图象在 $y\geqslant 0$ 的范围. ② 的图象与①的图象关于直线 $y=x$ 对称.

当两曲线相交时, 由于交点在直线 $y=x$ 上, 因此,

$$x=\sqrt{2x-a}\cdots③$$

有实数解. 反之, 这个实数解, 给出了交点的 x 坐标. 把③的两边平方, 得 $x^2-2x+a=0$. 这个方程有实数解的条件是 $1-a\geqslant 0$.

$\therefore \quad a\leqslant 1$. 这时, $x=1\pm\sqrt{1-a}$.

如果 $x=1+\sqrt{1-a}$, 则

$$\sqrt{2x-a}=\sqrt{2+2\sqrt{1-a}-a}=\sqrt{1+2\sqrt{1-a}+1-a}=1+\sqrt{1-a}.$$

如果 $x=1-\sqrt{1-a}$, 则

$$\sqrt{2x-a}=\sqrt{2-2\sqrt{1-a}-a}=\sqrt{1-2\sqrt{1-a}+1-a}$$

$$=\begin{cases}1-\sqrt{1-a} & (\text{当 } 0\leqslant a\leqslant 1 \text{ 时}),\\ -(1-\sqrt{1-a}) & (\text{当 } a<0 \text{ 时}).\end{cases}$$

所以, 当 $0\leqslant a\leqslant 1$ 时, 两个解 $x=1\pm\sqrt{1-a}$ 都满足③. 从而, ①, ②交于两点, 交点为 $(1\pm\sqrt{1-a}, 1\pm\sqrt{1-a})$ (同取+或同取−).

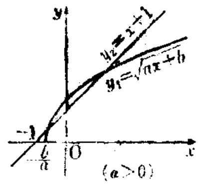
当 $a<0$ 时, 由于仅仅 $x=1+\sqrt{1-a}$ 满足③, 因此, ①, ②交于一点, 交点为 $(1+\sqrt{1-a}, 1+\sqrt{1-a})$.

55. 令 $y_1=\sqrt{ax+b}$, $y_2=x+1$, 作出它们的图象.

(1) 所求的条件是，y_1、y_2 的图象交于不同的两点．这就是 $a>0$，$-1\leqslant-\frac{b}{a}$，即 $a>0$，$b\leqslant a$．并且，$(\sqrt{ax+b})^2=(x+1)^2$ 有相异的实数解．由于这个方程就是

$$x^2+(2-a)x+(1-b)=0,$$

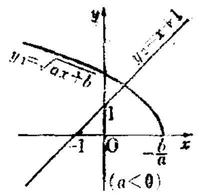
因此，判别式 $=(2-a)^2-4(1-b)>0$．



$$\therefore\quad b>-\frac{1}{4}a^2+a.$$

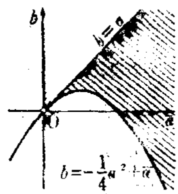
故，$(a,\ b)$的范围如右下图(边界包括直线部分，不包括原点和曲线部分)．

(2) 当 $a=0$ 时，如果 $b\geqslant 0$，则方程有一个实数解．



又，当 $a>0$，$b=-\frac{1}{4}a^2+a$ 时，由于 y_1，y_2 的图象相切，因此，方程有一个实数解．

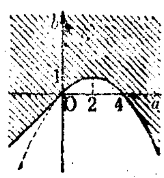
此外，y_1、y_2 的图象仅在 $a>0$ 且 $-\frac{b}{a}<-1$ 的情况下和 $a<0$ 且 $-\frac{b}{a}\geqslant-1$ 的情况下，相交于一点．



综合以上，方程有一个实数解的条件是

$$a\leqslant 0,\ b\geqslant a \text{ 及 } a>0,\ b=-\frac{1}{4}a^2+a.$$

要使方程至少有一个实数解，(a,b)的范围是，在上述范围的基础上，增添(1)的范围，如右图



(包括边界的斜线部分)．

56. 由于 $1-x=\sqrt{sx+y}\geqslant 0$，因此，

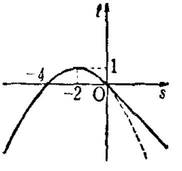
$$x\leqslant 1,\quad sx+y=(1-x)^2,$$

$\therefore\quad y=x^2-(s+2)x+1=\left(x-\frac{s+2}{2}\right)^2-\left(\frac{s+2}{2}\right)^2+1$

$$=\left(x-\frac{s+2}{2}\right)^2-\frac{s^2+4s}{4}.$$

因此，当$\frac{s+2}{2}<1$时，y在$x=\frac{s+2}{2}$取最小值$-\frac{s^2+4s}{4}$；当$\frac{s+2}{2}\geqslant 1$时，y在$x=1$取最小值$-s$.

所以，当$s<0$时，$t=-\frac{1}{4}s^2-s=-\frac{1}{4}(s+2)^2+1$；当$s\geqslant 0$时，$t=-s$. 图象如右图.



57. 由 $\begin{cases}x'=2-x\\y'=y,\end{cases}$ $\begin{cases}x''=-4-x'\\y''=y'\end{cases}$

得 $\begin{cases}x''=x-6\\y''=y.\end{cases}$ 从而，$\begin{cases}x=x''+6\\y=y''.\end{cases}$

因为$y=x^2$，所以，$y''=(x''+6)^2$. 故所求的方程为$y=(x+6)^2$.

58. (1) 设$f:(x,y)\to(x+a,\ y+b)$，$g:(x,y)\to(x+c,y+d)$，则$f\circ g:(x,y)\to(x+c+a,y+d+b)$，$g\circ f:(x,\ y)\to(x+a+c,\ y+b+d)$.
$\therefore\quad f\circ g=g\circ f$.

(2) $f:(x,y)\to(2a-x,2b-y)$，$g:(x,y)\to(2c-x,\ 2d-y)$，$f\circ g:(x,y)\to(2a-2c+x,2b-2d+y)$

$g\circ f:(x,y)\to(2c-2a+x,2d-2b+y)$，因$(a,b)$、$(c,\ d)$为不同点，所以$a-c=c-a$、$b-d=d-b$不能同时成立. $\therefore\quad f\circ g\neq g\circ f$.

59. 关于$y=x$的对称变换为F：$(x,\ y)\to(y,\ x)$. 在关于$y=-x$的对称变换中，如果$(x,y)\to(x',y')$，则$\frac{y'-y}{x'-x}=1$，$\frac{y+y'}{2}=-\frac{x'+x}{2}$.

$\therefore\quad x'-y'=x-y$、$x'+y'=-x-y$. 因此，$x'=-y$，$y'=-x$. 即$F'$：$(x,\ y)\to(-y,\ -x)$，$\therefore\quad F\circ F'$：$(x,y)\to(-x,\ -y)$，$F'\circ F$：$(x,y)\to(-x,-y)$.

60. 由$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$，得

$$f(g(x_1)+g(x_2))=f(g(x_1))f(g(x_2)).$$

由于 $g(x)$是$f(x)$的反函数；因此，$f(g(x_1))=x_1$, $f(g(x_2))=x_2$.

$\therefore\quad f(g(x_1)+g(x_2))=x_1x_2.$

故 $\quad g(x_1)+g(x_2)=f^{-1}(x_1x_2)=g(x_1x_2).$

61. h, k 一定为一次式.

(1) 令 $h(x)=cx+d$, 则 $g\circ h(x)=ph(x)+q=pcx+(pd+q)=f(x)$.

$\therefore\quad pc=a$. $pd+q=b$. 因此, $c=\dfrac{a}{p}, d=\dfrac{b-q}{p}$, $h(x)=\dfrac{a}{p}x+\dfrac{b-q}{p}$.

(2) 令 $k(x)=rx+s$, 则 $k\circ f(x)=rf(x)+s=rax+(rb+s)=g(x)$.

$\therefore\quad ra=p$, $rb+s=q$. 因此, $r=\dfrac{p}{a}$, $s=\dfrac{aq-bp}{a}$, $k(x)=\dfrac{p}{a}x+\dfrac{aq-bp}{a}$.

62. $f\circ g_1(x)=\dfrac{[(1-x)^2-(1-x)+1]^3}{(1-x)^2(1-x-1)^2}=\dfrac{(x^2-x+1)^3}{(1-x)^2x^2}=f(x).$

$$f\circ g_2(x)=\frac{\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+1\right)^3}{\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x}-1\right)^2}=\frac{\frac{1}{x^6}(1-x+x^2)^3}{\frac{1}{x^4}(1-x)^2}=\frac{(x^2-x+1)^3}{x^2(x-1)^2}$$

$$=f(x).$$

因为 $g_3(x)=g_1\circ g_2(x)$, 所以, $f\circ g_3(x)=f\circ g_1\circ g_2(x)=f\circ g_2(x)=f(x)$.

因为 $g_4(x)=g_2\circ g_1(x)$,所以, $f\circ g_4(x)=f\circ g_2\circ g_1(x)=f\circ g_1(x)=f(x)$.

因为 $g_5(x)=g_1\circ g_4(x)$, 所以, $f\circ g_5(x)=f\circ g_1\circ g_4(x)=f\circ g_4(x)=f(x)$.

63. $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$的反函数是$f^{-1}(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$,

$$f^{-1}\circ f(x)=\frac{af(x)+b}{cf(x)+d}=\frac{a(ax+b)+b(cx+d)}{c(ax+b)+d(cx+d)}$$

$$=\frac{(a^2+bc)x+(a+d)b}{(a+d)cx+(bc+d^2)}.$$

由于$f^{-1}\circ f(x)=x$, 因此, $(a+d)b=0$, $(a+d)c=0$, $\dfrac{a^2+bc}{bc+d^2}=1$. 由第一、第二式得 $a+d=0$ 或 $b=0$, 且 $c=0$. 由第三式得 $a^2-d^2=0$. 因此, $a+d=0$ 或 $b=0$, $c=0$, $a-d=0$.

$\therefore\quad y=\dfrac{ax+b}{cx-a}(a^2+bc\neq0)$或 $y=x$.

64. 由于 $y=x^2+x+a=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{4a-1}{4}$在 $x\geqslant-\dfrac{1}{2}$ 的范围是增加的, 因此, 存在反函数. 由于反函数的图象和原函数的图象关于直线$y=x$对称, 因此, 二图象交于两点时的交点在直线 $y=x$ 上. 从两式消去 y, 得 $x=x^2+x+a$. 所以, 交点的 x 坐标满足 $x^2+a=0$. 这个方程的解, 在实数范围内满足 $x\geqslant-\dfrac{1}{2}$的条件是 $a<0$ 且

$\pm\sqrt{-a}\geqslant-\dfrac{1}{2}$. $\therefore\quad -\dfrac{1}{4}\leqslant a<0$.

65. (1) 由 $x-y=\sqrt{2}X$, $x+y=\sqrt{2}Y$ 得 $x=\dfrac{X+Y}{\sqrt{2}}$, $y=\dfrac{-X+Y}{\sqrt{2}}$. 当(x,y)在正方形 A 的内部和周界上移动时, 由于 $0\leqslant y\leqslant1$, $0\leqslant x\leqslant1$, 因此, $0\leqslant-X+Y\leqslant\sqrt{2}$, $0\leqslant X+Y\leqslant\sqrt{2}$ $\quad\therefore\quad X\leqslant Y\leqslant X+\sqrt{2}$, $-X\leqslant Y\leqslant-X+\sqrt{2}$.

所以, (X,Y)在由直线$Y=X$, $Y=X+\sqrt{\ }\ \ Y=-X$, $Y=-X+\sqrt{2}$围成的图形的内部和边界上移动. 因此, 当设 A 为下图 OPQR 时, B 就是把 A 旋转 45° 而得的正方形 OP′Q′R′.

(2) 设 QR, P′Q′ 的交点为 M, 则 △OP′Q′ 和 △Q′RM 的直角等腰三角形, OP′=P′Q′=1, Q′R=RM=$\sqrt{2}-1$. 所以 $A\cap B$的

面积为$\frac{1}{2}\times 1^2-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^2=\sqrt{2}-1.$