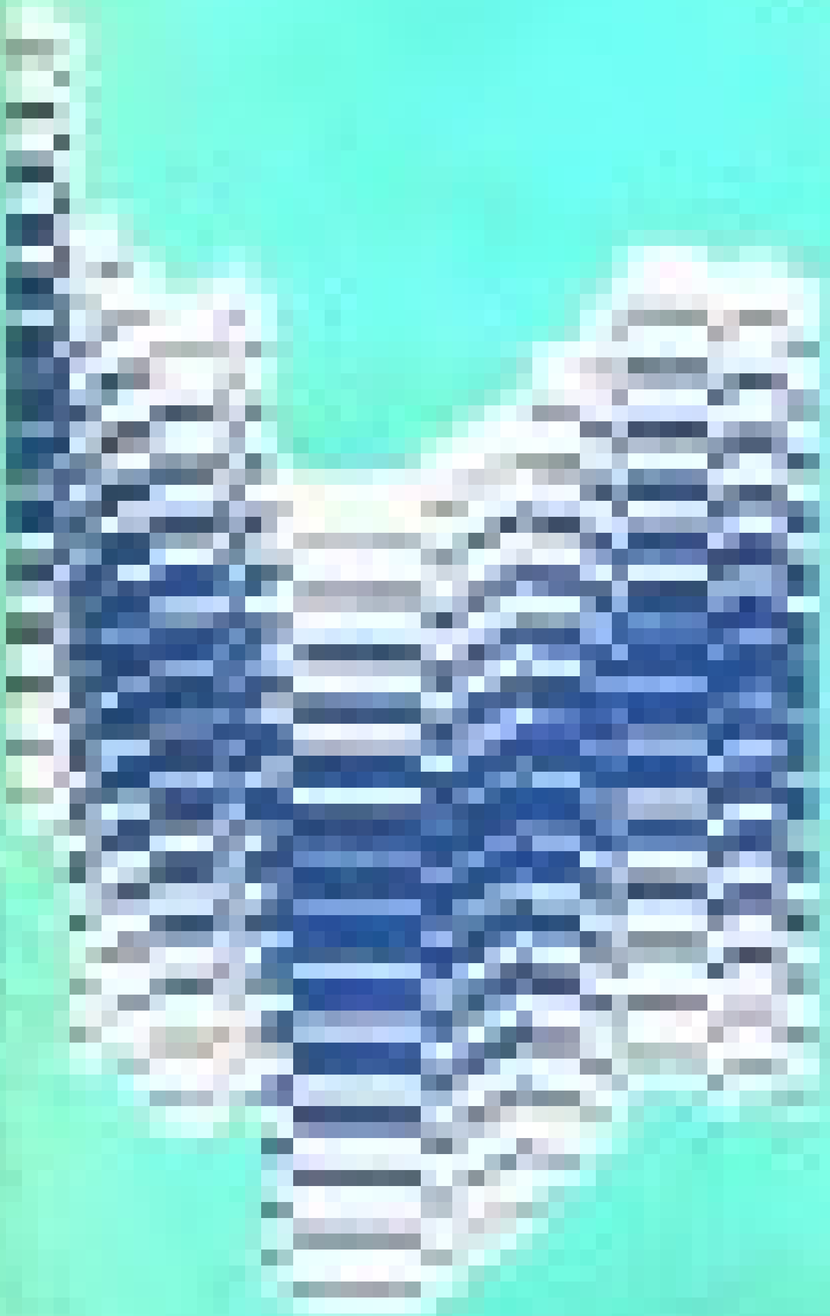
日本新高中数学研究丛书 15

线性规划与运筹学

[日] 竹之内脩 著
尚文斗 译

人民教育出版社

线性规划与运筹学



人民教育出版社

日本新高中数学研究丛书 15

线性规划与运筹学

[日] 竹之内脩 著

尚 文 斗 译

内容提要

这套丛书，译自日本旺文社出版的《新高中数学研究丛书》，原书共分十五册，书中除中学数学传统题材外，还包括一些较新的内容。

本册是第十五册，主要内容有：不等式和区域，含有多数的直线方程，在区域内一次式的最大、最小，线性规划，单纯形法，线性规划的应用，资料的整理，正态分布，需求量的分布，库存量的确定，订货量的确定方法，期望值与概率，报童卖报问题，典型试验，需求与库存变动的模型，内容比中学数学教材广泛、深入而易懂，可供中学数学教师和教学研究人员，中等专业学校教师和学生、各类企业的管理和统计人员及广大工程技术人员在科研生产、教学或自学中参考。

(京)新登字113号

日本新高中数学研究丛书 15

线性规划与运筹学

〔日〕竹之内脩 著

尚文斗 译

*

人民教育出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

北京市东光印刷厂印装

*

开本787×1092 1/32 印张5.5 字数115,000

1992年7月第1版 1992年7月第1次印刷

印数 1—990

ISBN 7-107-10919-7

G·2661 定价1.90元

译者的话

这套丛书，译自日本旺文社出版的《新高中数学研究丛书》.原书共分十五册，我们译出了其中的第二册至第十五册.本册是第十五册. 丛书包括了中学数学和中等专业数学教材中一些较新的内容.

这套丛书的特点是比教材的内容更广泛，深入而易懂.书中对基础知识做了系统的整理、归纳和概括，尤其重视典型例题的解题方法、解题要点、思考方法的研究. 可供我国中学数学教师和中等专业学校数学教师和学生，以及广大科技人员参考.

这套丛书是由我院教研部组织辽宁师范学院数学系，沈阳师范学院数学系，沈阳市教育学院数学系等单位合译的.本册由沈阳机电学院尚文斗译出，由我院教研部钱永耀、刘占元负责审校工作.

由于时间仓促以及译者、校者水平有限，缺点错误，恐难避免 希望读者提出宝贵意见.

辽宁教育学院

1980 年

目　录

前　言

常常从高中学生中听到“不了解为什么要学习数学”.

实际上，一切科学的基础都与数学有密切的联系. 但是要想了解这一点，必须有一定的学习能力，正因为如此才有些学生对数学产生了疑问.

无论从哪方面说，当前的数学，大都应用于自然科学. 但是人们还没有养成对日常生活发生的种种问题应用数学方法加以解决的习惯.

运筹学这门学问，就是把社会上发生的种种问题，采用数学的方法加以解决，或为其解决提出目标.

不过，对所谓运筹学，并不需要重新学习，只要应用高中所学到的数学对社会上所发生的问题加以解决，从而也就学习了运筹学.

在本书中，线性规划问题是应用高中所学的不等式和一项式进行讲解，而库存问题则是用概率、统计的方法讲解的.

在内容中，所列各项都是按

讲解→例题→发展题→练习

从基础到应用，力求使读者达到完全掌握.

读过本书，如能对周围的种种问题，应用数学加以解决，则笔者深感欣慰.

著　者

1974年9月

几点说明

本书力求成为一本独具风格的参考书，它既能使苦于学习数学的人容易理解，又能使擅长数学的人对数学更加爱好．为此，全书的结构编排如下：

主张划分细目

各部分尽量划分细目，凡披阅所及均能一目了然；在解说时，既能配合教科书，又写得

比较广泛，比较深入，比较易懂.

另外，用竖线把版面分成两栏，左边列出重要项目，以便提高学习效率.

例题→发展题→练习

本书的最大特点是，力求在理解解说的基础上，**反复学习例题、发展题、练习题，使在不知不觉中增强解决问题的实际能力**．虽然从例题到发展题依次提高难度，但解法和要点指出了思考方法和解题要领，对于例题、发展题，希望读者不要先看答案，而力求靠自己所具有的数学能力求解，只有实在做不出来时，才看答案．总之，学习数学最重要的是

要用逐步积累的方法学习.

为此，反复学习才有实效．如果例题，发展题都能掌握，那么解练习题时就不会感到什么困难，反之，如果不大会解练习题，那就应该认为学习的还不够深刻.

练习题

分为 A、B 两部分，A的程度相当于例题和发展题； B中还包含着稍难的题目．本书提倡适当地指导数学是“这样进行思考的”，然后才要求“广泛应用”．相信得到本书的读者，能够真正理解数学，从而获得广泛应用数学的实际本领．

重要词汇一览表

1. 不等式和区域

不等式的基本性质

不等式的变形，用其下列基本性质．〔**不等式的基本性质**〕

(1) 任意数 C，

$$A>B \Longleftrightarrow A+C>B+C$$

(2) $C>0$，

$$A>B \Longleftrightarrow AC>BC,$$

$$\frac{A}{C}>\frac{B}{C}$$

(3) $C<0$，

$$A>B \Longleftrightarrow AC<BC,$$

$$\frac{A}{C}<\frac{B}{C}$$

一元一次不等式

一元一次不等式 $ax\leqslant b$

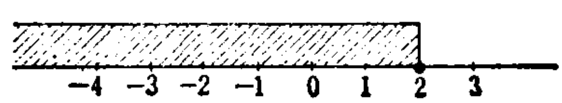
当 $a>0$ 时，为 $\left\{x \middle| x\leqslant\frac{b}{a}\right\}$

当 $a<0$ 时，为 $\left\{x \middle| x\geqslant\frac{b}{a}\right\}$

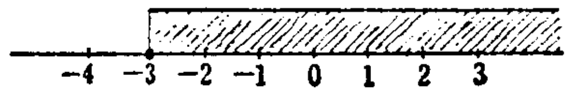
解不等式

求不等式解的集合，叫做**解不等式**．

例 ① $3x\leqslant 6$ 解的集合为 $\{x|x\leqslant 2\}$



② $-2x\leqslant 6$ 解的集合为 $\{x\,|\,x\geqslant -3\}$



一元一次不等式组

对一元一次不等式组

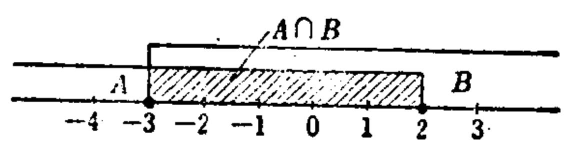
$$\begin{cases} a_1x<b_1 & ① \\ a_2x<b_2 & ② \end{cases}$$

其解的集合是①式解的集合 A 和②式解的集合 B 的交集 $A\cap B$.

例　不等式组

$$\begin{cases} 3x\leqslant 6 \\ -2x\leqslant 6 \end{cases}$$

其解的集合,可用下图的阴影表示:



二元一次不等式

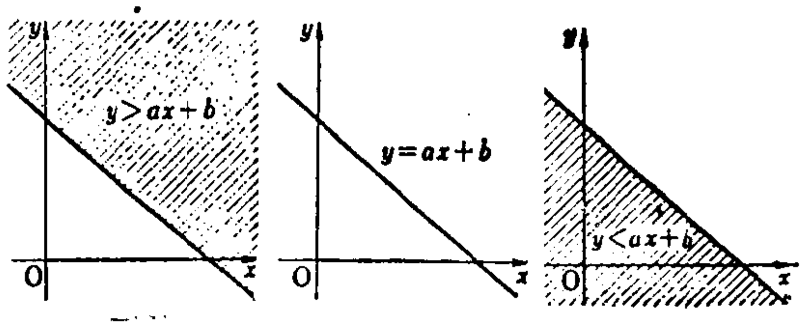
对不等式 $ax+by<c$(其中 a、b 均不为 0),叫做关于变数 x, y 的二元一次不等式.

对 $ax+by<c$, 其解的集合是在坐标平面上,由直线 $ax+by=c$, 将平面分成半平面的一侧点的集合. 特别地,

$y>ax+b$,其解的集合在直线 $y=ax+b$ 的上方部分.

$y=ax+b$,其解的集合在直线 $y=ax+b$ 上.

$y<ax+b$，其解的集合在直线 $y=ax+b$ 的下方部分.

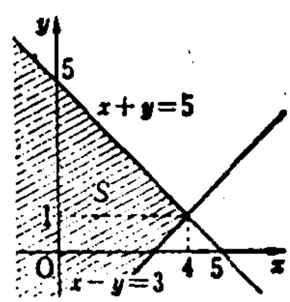


二元一次不等式组

对二元一次不等式组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y\leqslant c_1 & ① \\ a_2x+b_2y\leqslant c_2 & ② \end{cases}$$

其解的集合是①式解的集合 A 和②式解的集合 B 的交集 $A\cap B$.



例 $\begin{cases} x+y\leqslant 5 \\ x-y\leqslant 3 \end{cases}$

其解的集合 S，是右图的阴影部分.

区　域

凸区域

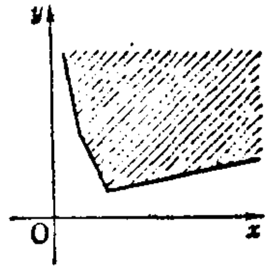
顶点

在坐标平面上，用图形表示不等式的解的集合，叫做**区域**，连结属于区域内的任意二点的线段上的点，如果都包括在该区域内，则这个区域叫做**凸区域**. 其次，由几条线段或半直线围成的区域，周界中二条直线的交点，叫做区域的**顶点**.

二元一次不等式组的区域

二元一次不等式组所表示的区域，是由几条线段围成的凸区域. 其中，也有

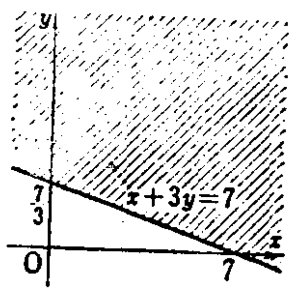
如下图所表示的有一侧是开着的区域.



例题 1. 试确定下列不等式组所表示的区域是凸区域.

(1) $\begin{cases} x+3y\geqslant 7 & ① \\ 3x-2y\leqslant 10 & ② \\ x+2y\leqslant 14 & ③ \\ 4x-\ \ y\geqslant 2 & ④ \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x+2y\geqslant 8 & ① \\ x+3y\geqslant 5 & ② \\ x\geqslant 0 & ③ \\ y\geqslant 0 & ④ \end{cases}$

提示 (1) 满足不等式①: $x+3y\geqslant 7$ 的区域是以直线 $x+3y=7$ 为边界线,如右图所示不包含原点一侧的半平面.



边界直线的方程为 $x+3y=7$,即将不等式①的不等号换成等号. 其次,在斜线的区域外,任意一点都不在直线 $x+3y=7$ 上,例如,将原点坐标(0,0)代入不等式①,可以看出

$$0+3\times 0\geqslant 7,\text{即}\ 0\geqslant 7$$

显然,在这种情形下,坐标原点不满足不等式①,所以不等式①所表示的区域,是以直线 $x+3y=7$ 为边界线,不包含原点一侧的半平面.

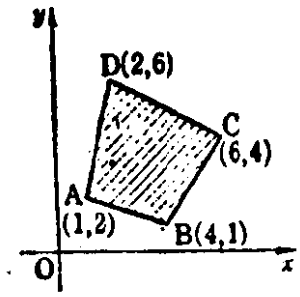
不等式②,③,④的区域也同样可以求出.

不等式组的区域,就是所求这些区域的交集.

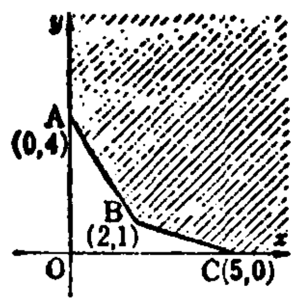
（2）用与(1)完全相同的方法，可以确定所求的区域。

解

(1)



(2)



由图形(1)(2)可以看出都是凸区域.

发 展 题

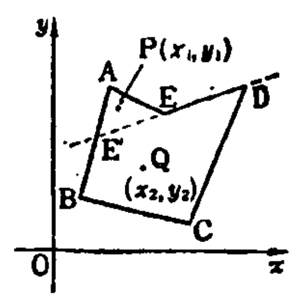
试说明二元一次不等式组的区域不能是凹多边形.

要点

不等式组的区域是凸区域，一般可用图形表示.

如果二元一次不等式组的区域是凹多边形，则导致矛盾.

解 由反证法证明.



设区域如右图所示的凹多边形 $ABCDE$. 因为线段 DE 是边界线，所以直线 DE 就是不等式组中一个不等式的边界线.

设这个边界线用不等式 $ax+by\leqslant c$ 表示. 因为凹多边形被直线 DE 分成二部分，如果在 $\triangle AEE'$，四边形 $E'BCD$ 中分别取一点 $P(x_1y_1)$，$Q(x_2y_2)$，将 P,Q 代入一次式 $ax+by$，则点 P，Q 不在直线 DE $ax+by=c$ 上，而在直线 DE 的两侧，这时必有

$$(1)\quad \begin{array}{l} ax_1+by_1>c \\ ax_2+by_2<c \end{array}$$

或(2) $\begin{array}{l} ax_1+by_1<c \\ ax_2+by_2>c \end{array}$

成立.

如果(1)成立，则点P的坐标不满足不等式 $ax+by<c$.

如果(2)成立，则点Q的坐标不满足不等式 $ax+by<c$.

这与区域内的点都是不等式解的集合相矛盾. 所以二元一次不等式组的区域不是凹多边形.

练习 (答案见 129 页)

1. 试用图形表示下列不等式组的区域.

(1) $\begin{cases} 5x-y\geqslant 4 \\ -3x+5y\geqslant 2 \\ x+2y\leqslant 14 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} -x+3y\leqslant 9 \\ 4x+3y\leqslant 24 \\ x\geqslant 0,\ \ y\geqslant 0 \end{cases}$

2. 求练习 1 . 中不等式组的区域的顶点坐标。

2. 含有参数的直线方程

$y=ax+b$的图象

二元一次方程 $y=ax+b$ 的图象是直线.

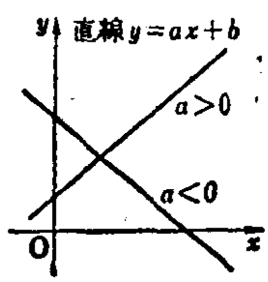
直线 $y=ax+b$ 的方向由 a 确定，位置由 b确定. a 叫做直线的**斜率**，b 叫做**截距**（在 y轴上的截距）.

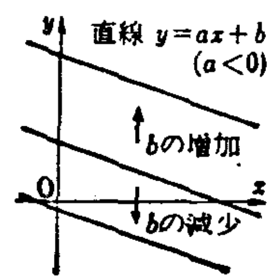
斜率

截距

关于直线 $y=ax+b$

当 $a>0$ 时，是右边向上的直线.





当 $a<0$ 时，是右边向下的直线.

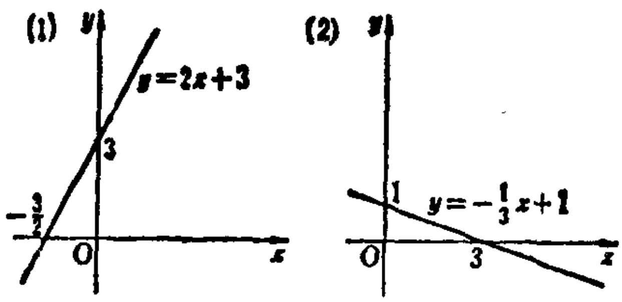
直线的平行移动

随着 b 值的增加，直线 $y=ax+b$ 在 y 轴向正的方向平行移动. 随着 b 值的减少，直线 $y=ax+b$ 在 y 轴向负的方向平行移动.

例 直线(1) $y=2x+3$

$$(2)\ y=-\frac{1}{3}x+1$$

的图象，分别如下图所示.



$ax+by=c$ 的图象

二元一次方程 $ax+by=c$ 的图象是直线.

(i) $a\neq0, b\neq0$ 时，直线 $y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$ 的斜率为$-\frac{a}{b}$，截距为$\frac{c}{b}$

(ii) $a\neq0, b\neq0$ 时，直线 $x=\frac{c}{a}$与 y 轴平行，x 的坐标为$\frac{c}{a}$

(iii) $a=0, b\neq0$ 时，直线 $y=\frac{c}{b}$与x轴平行，y 的坐标为$\frac{c}{b}$

含有参数的直线

含有参数的直线

将 $ax+by=k$($a\neq0, b\neq0$, k 为参数) 变形，得

$$y=-\frac{a}{b}x+\frac{k}{b}$$

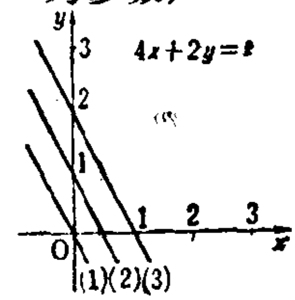
直线的斜率为$-\frac{a}{b}$，截距为$\frac{k}{b}$. 由参数k值的变化，直线沿 y 轴作上下平行移动.

例 设 $4x+2y=t$，t 为参数，

(1) $t=0$

(2) $t=2$

(3) $t=4$



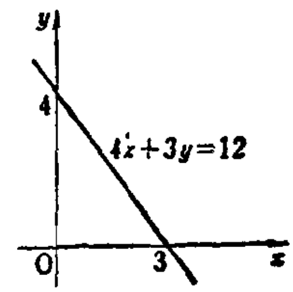
时的图象如右图所示.

一次式 $ax+by$ 的值

一次式 $ax+by$ 的值当 $x=x_1, y=y_1$ 时，一次式的值为 ax_1+by_1.

是由直线 $ax+by=k$ 上点的坐标 x, y 来确定一次式的值 k.

例 (1) 当 $x=2, y=3$ 时，一次式 $4x+3y$ 的值为



$4\times2+3\times3=17$

(2) 一次式 $4x+3y$ 的值为 12 时，解的集合就是直线 $4x+3y=12$ 上点的坐标的集合.

例题 2. 设一次式 $4x-3y$，回答下列问题.

(1) $x=2, y=3$ 时，求一次式的值.

(2) 试用图象表示，满足 $4x-3y=12$ 的解的集合，即 $\{(x,y)\mid 4x-3y=12\}$

(3) 设 $4x-3y=k$. 当 $k=0,2,4,6$ 时，画出解的集合 $\{(x,y)\mid 4x-3y=k\}$ 的图象. 当 k 值逐渐增大，问图象如何移动.

提示 (1) 将 $x=2, y=3$ 代入一次式 $4x-3y$ 即可.

(2) 与 x 轴，y 轴分别相交于点$(3,0)$，$(0,-4)$的直线，就是 $4x-3y=12$ 的图象.

(3) $k=0$ 时，$4x-3y=0$，即 $y=\frac{4}{3}x$ ①

$k=2$ 时，$4x-3y=2$，即 $y=\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}$ ②

$k=4$ 时，$4x-3y=4$，即 $y=\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}$ ③

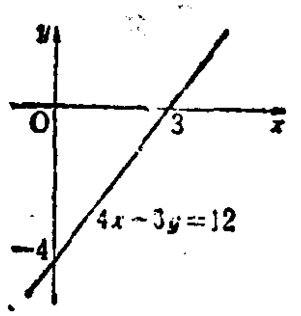
$k=6$ 时，$4x-3y=6$，即 $y=\frac{4}{3}x-2$ ④

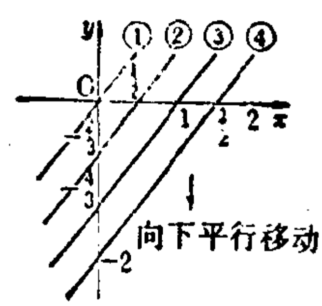
由①，②，③，④各式，可以看出，斜率相同，k 值越大，截距越小.

解 (1) $4\times2-3\times3=-1$

(2) 图象为左下图:

(3) 图象为右下图，随着 k 值的增加，直线向 y 轴负的方向平行移动.





发展题

设区域 $D=\{(x,y)\,|\,2\leqslant x\leqslant5, 3\leqslant y\leqslant6\}$，就直线$4x+3y=k$，回答下列各问题.

(1) 在区域D内的点，求用图象表示满足 $4x+3y=28$ 的

点的集合.

(2) 直线 $4x+3y=k$ 与区域 D 相切时,求 k 值.

(3) 使直线 $4x+3y=k$ 通过区域 D,求 k 值的范围.

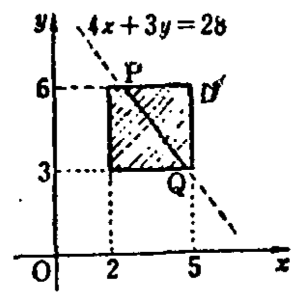
要点

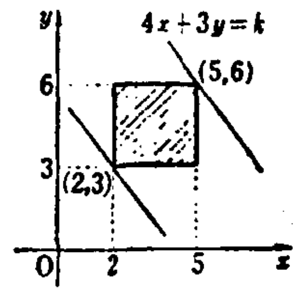
(1)限制变数 x, y 时的图象.

解 (1) 直线 $4x+3y=28$, 将区域 D 割开的线段 PQ, 就是所求点的集合的图象.

(2)由图象可知,直线与区域 D 相切的点.

(2) 直线 $4x+3y=k$ 与区域 D 相切,如右下图,通过点(5,6)和点(2,3).





直线 $4x+3y=k$ 通过点(5,6),由 $x=5, y=6$,

得 $k=4\times5+3\times6=38$

直线 $4x+3y=k$ 通过点(2,3),由 $x=2, y=3$,

得 $k=4\times2+3\times3=17$

(3)由变数 xy 的限制的条件可以判别出一次式 $ax+by$ 的值.

(3) 由图得知, k 值大于 38 或小于 17 时, 直线 $4x+3y=k$ 与区域 D 不相交. 直线 $4x+3y=k$ 通过区域内时, k 的值在 $17\leqslant k\leqslant38$ 内.

练习 (答案见 129 页)

3. 就一次式 $2x+3y$，回答下列各问题.

(1) $x=3, y=5$ 时，问一次式的值是多少.

(2) 用图象表示满足 $2x+3y=6$ 解的集合.

(3) 直线 $2x+3y=k$，当 k 值由 0，2，4，6 增大时，问直线如何移动.

(4) 直线 $2x+3y=k$ 通过区域 $\{(x,y)|3\leqslant x\leqslant 5, 2\leqslant y\leqslant 6\}$，求 k 值的范围.

3. 在区域内一次式的最大和最小

一次式的最大和最小

如果对变数 x, y 的值不加以限制，则一次式 $ax+by$ 可以取任意大或任意小的值. 如果对变数 x, y 的值加以限制，则一次式 $ax+by$ 就不能任意取值.

例 一次式 $2x+3y$ 的值 k

如果对变数 x, y 的值不加以限制，

当 $x\to\infty, y\to\infty$时，则 $k\to\infty$.

当 $x\to-\infty, y\to-\infty$时，则 $k\to-\infty$.

如果对变数 x, y 的值加以限制，限定 $\{(x,y)|2\leqslant x\leqslant 8, y=3\}$，则 k 的取值只能在 $13\leqslant k\leqslant 25$ 范围内.

约束条件

对于变数 x, y 取值的范围起限定作用的，叫做约束条件.

在线性规划法中，变数 x, y 的约束条件，就是研究给出含有 x, y 的一次不等式或在特殊情况下的一次方程. 从而可知**约束条件的区域是凸区域**.

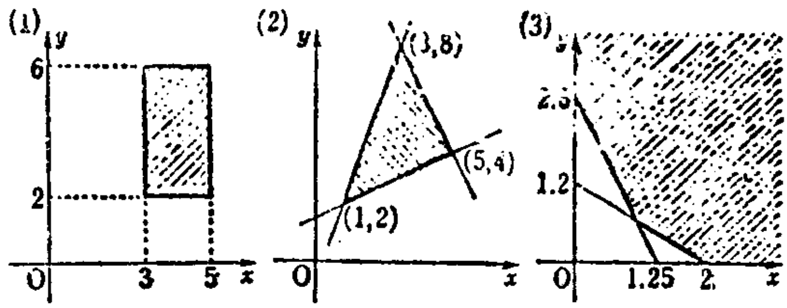
例 设变数 x, y 的约束条件为

(1) $\begin{cases}3\leqslant x\leqslant 5\\2\leqslant y\leqslant 6\end{cases}$

(2) $\begin{cases}2x+y\leqslant 14\\3x-y\geqslant 1\\-x+2y\geqslant 3\end{cases}$

(3) $\begin{cases}4x+2y\geqslant 5\\3x+5y\geqslant 6\\x\geqslant 0,y\geqslant 0\end{cases}$

这时，约束条件的区域，分别如下图所示.



从变数 x，y 的约束条件为基础，分析某一次式 $ax+by$ 的最大值和最小值时，则把这个一次式叫做**目标函数**.

目标函数

对一次式 $ax+by$ 的值为 k，则一次式解的集合就是坐标平面上的直线.

与区域内的点相对应的一次式的值

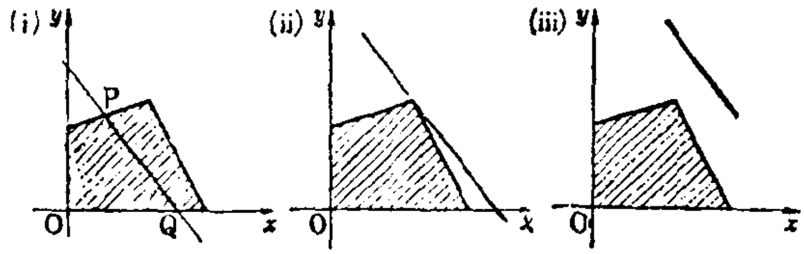
对区域内的点，一次式 $ax+by$ 的取值有下列三种可能.

(i) 直线 $ax+by=k$ 与区域相交，对于相交线段 PQ 上的点 (x,y)，一次式的值为 k（左下图）.

(ii) 直线 $ax+by=k$ 与区域相切时，只有在切点 (x,y)，一次式的值为 k（中下图）.

(iii) 直线 $ax+by=k$ 与区域不相交时，

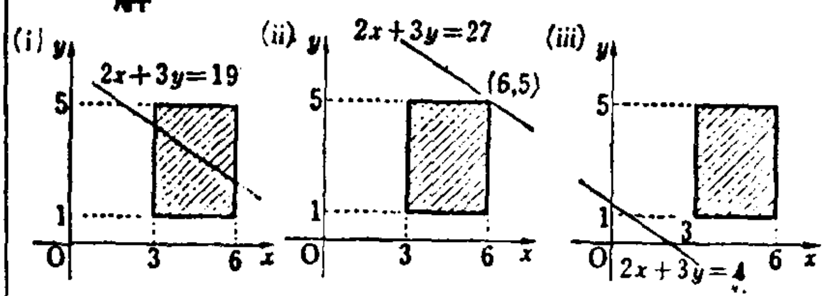
对于区域内任何一点，一次式的值不能等于k（右下图）.



例 对于区域$\{(x,y)\mid 3\leqslant x\leqslant 6,\ 1\leqslant y\leqslant 5\}$，一次式$2x+3y$取下列的值，问点$(x,y)$是否在区域内存在？

(i) 19　　(ii) 27　　(iii) 4

解



从上图可见，对于(i)，(ii)点(x,y)存在，对于(iii)点(x,y)不存在.

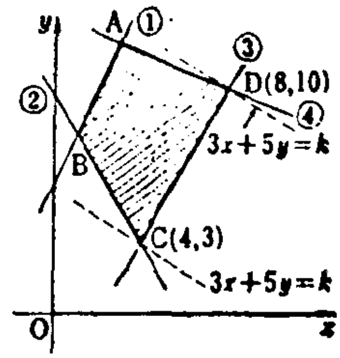
使一次式的值最大与最小的点.

如果在区域内的点，存在使一次式的值最大、最小的点，则可以从区域内的顶点中找到.

例题 3. 在下列不等式组的区域内，求使一次式$3x+5y$的值最大和最小时点的坐标及最大值和最小值.

$$\begin{cases}-2x+\ y\leqslant 6 & ①\\ 5x+3y\geqslant 29 & ②\\ 7x-4y\leqslant 16 & ③\\ 2x+5y\leqslant 66 & ④\end{cases}$$

提示　不等式组的区域如右图所示．直线 $3x+5y=k$，根据 k 值沿 y 轴平行移动．



一次式 $3x+5y$ 最大和最小由图得知，直线$3x+5y=k$分别通过 D,C.

点 D，C 的坐标就是下列二个方程组的解．

$$\begin{cases}2x+5y=66\\7x-4y=16\end{cases}\qquad\begin{cases}5x+3y=29\\7x-4y=16\end{cases}$$

解　对一次式 $3x+5y$ 最大的点为 $D(8,10)$，最大值为 74，最小的点为 $C(4,3)$，最小值为 27.

发展题

对二元一次不等式组区域内的点的坐标，如果一次式 $ax+by$ 存在最大或最小值的点，试证明该点必定是区域的顶点或周界线段上的点.

要点

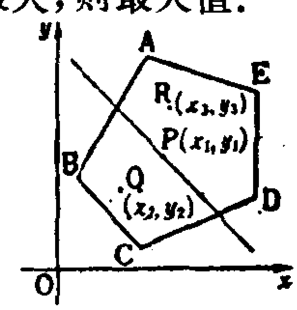
一般地，使一次式$ax+by$的值最大或最小的点是区域的顶点或周界.

由$ax+by=k$，将区域分成两部分.

解　不等式组所围成的区域如右图所示凸多边形 ABCDE.

设在图中区域内的点 $P(x_1,y_1)$ 使一次式 $ax+by$ 的值最大，则最大值：

$k_1=ax_1+by_1\cdots$①



因为点P通过直线①，所以直线 $ax+by=k_1$ 是通过区域内的点，这时，由图形得知，直线 $ax+by$

$=k_1$ 将凸多边形 ABCDE 分成两部分.

今取直线 $ax+by=k_1$ 两侧的点 Q (x_2, y_2) 与 $R(x_3, y_3)$，因为点 Q、R不在直线上，所以将 Q，R 坐标代入直线 $ax+by=k_1$，得

$$(1)\ \begin{cases} ax_2+by_2>k_1 \\ ax_3+by_3<k_1 \end{cases}$$

$$或(2)\ \begin{cases} ax_2+by_2<k_1 \\ ax_3+by_3>k_1 \end{cases}$$

如果(1)式成立，则 $ax_2+by_2>k_1$，通过点 Q的一次式的值 $k_2=ax_2+by_2$ 大于 k_1. 同理，如果(2) 式成立，则$ax_3+by_3>k_1$，通过点 R的一次式的值 $k_3=ax_3+by_3$ 大于 k_1.

这与区域内任意点与原设点 P 为最大值相矛盾. 所以在区域内的点，如果存在最大值的点，则必在区域的周界上或顶点. 最小值也同样可以证明.

练习 (答案见 130 页)

4. 设点在区域 $3x+y\geqslant10, 2x-y\leqslant5, x+2y\leqslant15$ 内，一次式为 $3x-2y$，问是否存在取下列各值的点. 如果存在，则将该点用图形表示.

   (1) 5　　(2) -11　　(3) 9

5. 在下列不等式组所围成的区域内的点，求使一次式 $x+y$ 为最大或最小时点的坐标及最大值和最小值.

$$\begin{cases} -x+3y\leqslant9 \\ 2x+y\leqslant10 \\ x\geqslant0,\ y\geqslant0 \end{cases}$$

4. 线性规划

线性规划法

设约束条件给定为一次方程式或一次不等式组，讨论一次式 $ax+by$ 的值（叫做目标函数）为最大或最小的问题叫做**线性规划法**(Linear Programming: 简记 LP).

解法1

<**图解法**>

约束条件→凸区域 D

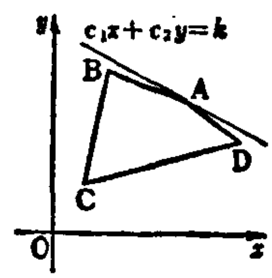
目标函数→含有参数的直线 $c_1x+c_2y=k$ 找出平行直线 $c_1x+c_2y=k$，并与区域 D 相切的点.

如果切点存在，则切点的坐标就是使目标函数的值最大或最小.

解法2

<**只用图形来判断有困难时**>

仅从图形难以看出切点的坐标时，可求目标函数的斜率或凸区域 D 的周界线段的斜率，然后比较斜率之间的大小关系.



例　在图中，设线段 AB 的斜率为 m_1，线段 AD 的斜率为 m_2，目标函数的斜率为 $-\frac{c_1}{c_2}$，如果 $m_2<-\frac{c_1}{c_2}<m_1$，则目标函数在A点

与区域相切.

解法 3　**退化时**

目标函数的直线与区域周界线段重合(叫做退化)时，则该线段上任意点都可使目标函数的值最大或最小.

解法 4　**变数能取整数时**

将变数看作实数，与上边问题同样，找出最靠近最佳解的整数.

例题 4.

约束条件 $\begin{cases} 4x+y\geqslant 10 & ① \\ -x+4y\geqslant 6 & ② \\ 3x-y\leqslant 15 & ③ \\ 2x+3y\leqslant 32 & ④ \\ -2x+3y\leqslant 16 & ⑤ \end{cases}$

目标函数　$w=x+4y$　⑥

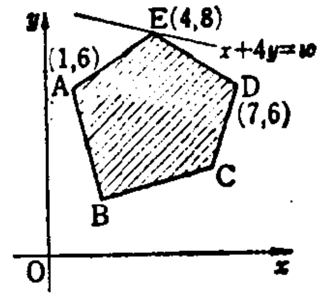
求使 w 最大时 x,y 的值.

提示　关于线性规划问题，主要就是对(1)不等式和区域，(2)含有参数的直线，(3)在区域内求一次式的最大值或最小值问题，进行综合研究.

为了求最合适的解，首先，由约束条件作出区域的图形，在图形上找出与目标函数的直线 $w=x+4y$ 相切的点的坐标，即可使 w 的值最大.

解　由约束条件所决定的区域 D，是下图五边形 ABCDE 的内部及周界. 因此随着 w 值的增减，将目标函数的直线 $w=x$

$+4y$ 作上下平行移动.



由图得知；在通过区域D的直线⑥中，要使 w 的值为最大，可取直线⑥通过区域的顶点，或周界的线段，而不取通过区域内部的点.

直线⑥与区域 D从上边相切的点，由图形可见是顶点 E，所求顶点E的坐标，就是直线 DE：$2x+3y=32$ 和直线 EA：$-2x+3y=16$ 的交点.

解下列不等式组

$$\begin{cases}2x+3y=32\\-2x+3y=16\end{cases}$$

可得顶点E的坐标为(4,8)，因此，当 $x=4$，$y=8$ 时，w 的最大值为 $4+4\times8=36$

例题 5.

约束条件 $\begin{cases}2x+5y\geqslant15 & ①\\ x+5y\geqslant10 & ②\\ x\geqslant0\quad y\geqslant0 & ③\end{cases}$

目标函数 $w=7x+25y$ ④

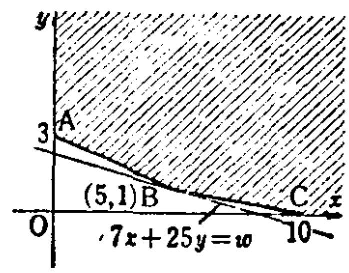
求使 w 最小时 x,y 的值及 w 的最小值.

提示 为了求最合适的解，首先由约束条件确定区域的图形，在图形上，找出从区域下方与目标函数的直线 $7x+25y=w$ 相切的点.

如果仅从图形难以看出切点，可求目标函数直线的斜率

与区域周界线段的斜率，取其中最大的即可.

解 由约束条件所确定的区域 D，如下图所画阴影的区域内部及周界. 于是，直线 $7x+25y=w$……⑤随着 w 值的增减作上下平行移动.



由图得知，在通过区域 D 的直线⑤中，使 w 最小时，直线⑤下方趋近于区域 D，仅通过区域 D 的顶点或边界的线段，而不通过区域的内部.

仅从图形难以判断切点时，还可利用直线AB 直线 BC和直线⑤的斜率来判断.

直线⑤的斜率(−0,28)和边界的两条直线

AB：$2x+5y=15$……①′(AB的斜率 −0.4)

BC：$x+5y=10$……②′(AC的斜率为 −0.2)

各斜率之间的关系为

$$-0.4<-0.28<-0.2$$

所以直线⑤通过①′和②′的交点 $B(5,1)$时，w 的值最小. 于是，w 最小时 x，y 的值对应这个顶点，即当 $x=5, y=1$ 时，w 的最小值为 $7\times5+25\times1=60$

发展题

[约束条件] $\begin{cases}3x+7y\geqslant31 & ①\\ x+y\leqslant25 & ②\\ -3x+5y\leqslant17 & ③\end{cases}$

[目标函数] $w=-3x+5y$ ④

求 w 最大时 x,y 的值和 w 的最大值.

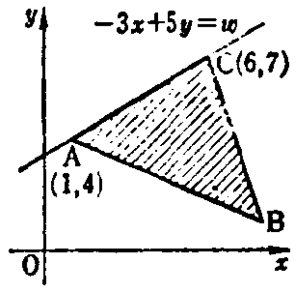
要点

根据约束条件，将区域用图形表示.

区域 D 上的线段与目标函数的直线重合时，叫做退化.

解 由约束条件确定区域 D，如右图阴影部分所构成三角形 ABC 的内部及周界. 然后，随着 w 值的增减将直线

$$-3x+5y=w \qquad ④'$$



作上下平行移动. 从图中得知，通过区域 D 的直线④′，使 w 最大时直线④′由上方趋近于区域 D，仅当区域 D 的顶点或边界的线段，而不通过区域 D 的内部. 图中，直线④′从上面趋近于区域 D 时，可见直线④′与线段AC重合. 也就是说在线段AC上点的坐标，就是 w 的最大值. 因此，w 最大时 x,y 的值在线段AC上，w 的最大值为17.

练习（答案见131页）

6.

［约束条件］ $\begin{cases} x+y\geqslant 6 \\ x-3y\leqslant 2 \\ 2x+y\leqslant 18 \\ -x+2y\leqslant 6 \end{cases}$

［目标函数］ $w=x-4y$.

求 w 最大时 x,y 的值和最小时 x,y 的值.

5. 单纯形法

单纯形法 (*simplexmethod*)

关于线性规划的问题，通常变数的个数较多. 这时，仍与前面同样，在坐标平面上作图是不可能的. 因此，为了研究用一般的方法解线性规划的问题而有如下的单纯形法.

根据图解法，就是由约束条件组成区域的顶点上，求得目标函数的最大值或最小值. 单纯形法也是以图解法为基础，将区域的一个顶点坐标代入目标函数，然后寻找比这个目标函数值更大的目标函数值所在的点；如此反复进行运算，直到得出最合适的解为止.

松弛变数

由不等式

$$ax+by\leqslant c \qquad ①$$

组成新的等式

$$s=c-(ax+by) \qquad ②'$$

这时 s (>0)表示 c 与$(ax+by)$的差. 将②′变形，得

$$ax+by+s=c \qquad ②$$

在②式中，$s\geqslant 0$与不等式①相同. 像这样，为了将不等式用等式表示而引入非负的变数叫做松弛变数.

单纯形法，实际上就是反复制表，并求得

单纯形表
(simplextableau)

问题的解.

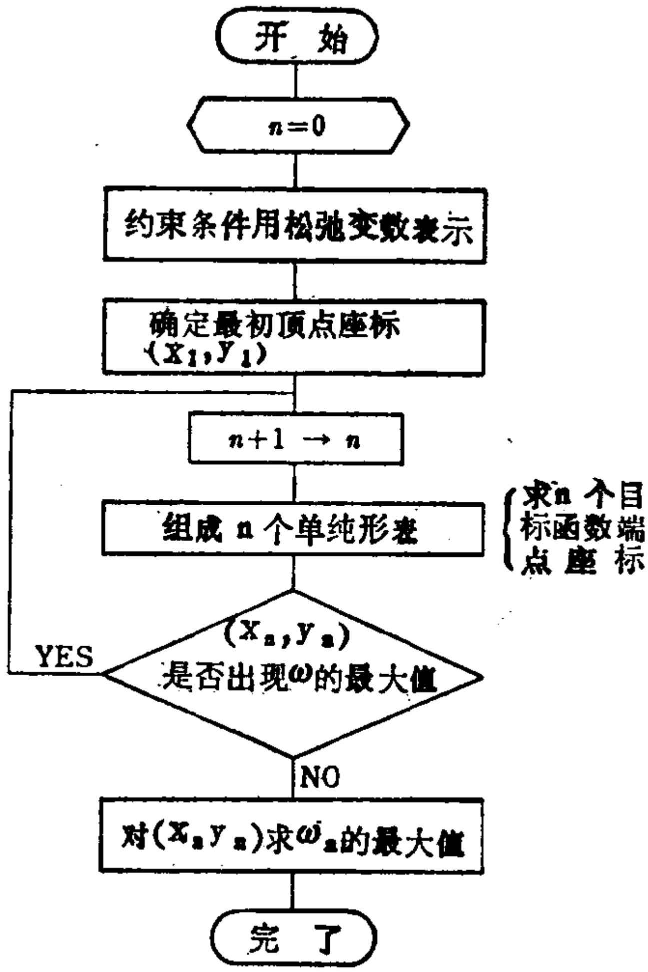
这时，将这个表叫做单纯形表.

单纯形表解法的程序，按下面程序框图进行.

制表的详细说明，可见例题 6 的发展题重要的是要对例题 6 的代数解法有深刻的理解. 表的制作是由机械地排列约束条件或目标函数的系数开始的.

单纯形表作法举例

例 约束条件



$$\begin{cases} x+y\leqslant 13 & ① \\ -x+y\leqslant 2 & ② \end{cases}$$

目标函数

$$w=4x+5y \qquad ③$$

求 w 最大时 x, y 的值和 w 的最大值.

解 引进松弛变数 s_1, s_2，作出单纯形表如下: 在表 3 中当 $x=$

5.5, $y=7.5$ 时 w 取最大值 59.5.

$$\begin{cases} 1\cdot x+1\cdot y+1\cdot s_1=13 & ①' \\ -1\cdot x+1\cdot y+1\cdot s_2=2 & ②' \end{cases} \Longrightarrow$$

$$4\cdot x+5\cdot y+0\cdot s_1+0\cdot s_2=w \quad ③'$$

			4	5	0	0	
			x	y	s_1	s_2	
s_1	0	13	1	1	1	0	13
s_2	0	2	−1	$\boxed{1}$	0	1	$\boxed{2}$
			0	0	0	0	
	w	0	4	$\boxed{5}$	0	0	

（表 1）

			4	5	0	0	
			x	y	s_1	s_2	
s_1	0	11	$\boxed{2}$	0	1	−1	$\boxed{5.5}$
y	5	2	−1	1	0	1	−2
			−5	5	0	5	
	w	10	$\boxed{9}$	0	0	−5	

（表 2）

译者注

本例题的详细计算过程如下:

程序1:

由①′②′③′的系数列表,表 1 第二列是目标函数中 s_1, s_2 的系数 0,0,第三列是 x, y 对应顶点的值 13,2.

下数第二行的数,是由第二列与 x, y, $s_1 s_2$ 对应各列乘积之和. 即

$$0\times1+0\times(-1)=0, 0\times1+0\times1=0,$$

$$0\times1+0\times0=0, 0\times0+0\times1=0.$$

下数第一行二(上数第一行)一(下数第二行),即

$$4=4-0, 5=5-0, 0=0-0, 0=0-0.$$

如果下数第一行都是正数,选取该行中最大的正数 5, 并

用 5 所在的列去除第三列，即

$$\frac{13}{1}=13 \qquad \frac{2}{1}=2.$$

所得的值 13，2 记入右数第一列.

在 13，和 2 中选取最小的正数 2，以 2 所在的行与 5 所在的列的交点 1 为鞍点记作 $\boxed{1}$.

程序2:

从表 1 制作表2. 为使鞍点所列对应 s_1, s_2, w 行的交点数为零，利用高斯消去法进行迭代，即鞍点所在的行分别乘以 (-1) 加到第三行，乘以 (-5) 加到下数第一行，记入表2.

程序3:

表 2 右数第一列 y 是由表 1 s_2 转换的. 第二列 5 是由表 1第一行的 5 转换的. 第五行是由第二列与 x, y，s_1，s_2 对应各列乘积之和，即

$$0\times2+5\times(-1)=-5, 0\times0+5\times1=5,$$

$$0\times1+5\times0=0. \qquad 0\times(-1)+5\times1=5.$$

表 2 下数第一行＝(上数第一行)－(下数第二行)，即

$$9=4-(-5), 0=5-5,$$

$$0=0-0, -5=0-5.$$

选表 2 下数第一行中最大正数 $\boxed{9}$，以 9 所在列分别除以第三列，即

$$\frac{11}{2}=5.5, \qquad \frac{2}{-1}=-2.$$

所得的数记入右数第一列.

选右数第一列中最小的正数 5.5 所在行与 $\boxed{9}$ 所在列的交点 2 为鞍点,记作 $\boxed{2}$. 用 $\boxed{2}$ 除以该行记入表 2′.

			4	5	0	0	
			x	y	s_1	s_2	
s_1	0	5.5	①	0	0.5	−0.5	
y	5	2	−1	1	0	1	
			−5	5	0	5	
	w	w	$\boxed{9}$	0	0	−5	

(表 2′)

程序四:

根据表 2′ 制作表 3. 将表 2′ 中①所在的列与 y 行的交点 −1 化为 0,利用高斯消去法,①所在行乘以 1 加到(−1)所在行,得表3. 表 3 的第五行是由

$$4\times1+5\times0=4, 4\times0+5\times1=5,$$

$$4\times0.5+5\times0.5=4.5.$$

$$4\times(-0.5)+5\times0.5=0.5.$$

w 行是由第一行减去第五行,即

$$4-4=0, 5-5=0, 0-4.5=-4.5,$$

$$0-0.5=-0.5.$$

			4	5	0	0	
			x	y	s_1	s_2	
x	4	5.5	1	0	0.5	−0.5	
y	5	7.5	0	1	0.5	0.5	
			4	5	4.5	0.5	
	w	59.5	0	0	−4.5	−0.5	

（表 3）

例题 6. 对下列线性规划问题，不用图解法，而用代数解法求解.

约束条件 $\begin{cases} -x+y\leqslant 3 & ① \\ 3x-y\leqslant 12 & ② \\ 2x+y\leqslant 12 & ③ \end{cases}$

目标函数 $w=-x+3y$ ④

求 w 最大时 x,y 的值.

解 用松弛变数表示，得

约束条件 $\begin{cases} -x+y+x_1=3 & ①' \\ 3x-y+x_2=13 & ②' \\ 2x+y+x_3=12 & ③' \end{cases}$

目标函数 $w=-x+3y$ ④'

◇程序 1

设 $x=0, y=0$，这时，x_1, x_2, x_3 的值，由①'，②'，③' 得

$$x_1=3, x_2=12, x_3=12.$$

因为 x_1, x_2, x_3 的值均为非负数，所以 $x=0, y=0$ 的点是约束

条件区域内的点. 这时，w的值为 $w=-0+3\times0=0$

◇程序 2

由④′得知，w 可用取 0 的变数 x，y 表示. 在④′式各变数的系数中，因为 y 的系数为正，如果确定 y 的值大于 0 从而 w 的值大于 0. 于是确定 y 的值大于 0.

将①′，②′，③′变形，得

$$\begin{cases}x_1=3+x-y & ①''\\ x_2=12-3x+y & ②''\\ x_3=12-2x-y & ③''\end{cases}$$

在①″，②″，③″中，令 $x=0$，$y=k$（k 为正数），得

$$\begin{cases}x_1=3-k\\ x_2=12+k\\ x_3=12-k\end{cases}$$

在这个式子中，x_1，x_2，x_3 适合非负数的条件，所以，非负变数 k 的取值范围在 $0\leqslant k\leqslant3$ 内. 由此可知，y 值最大限度不超过 3.

在 ①″，②″，③″，④′ 中，令 $x=0$，$y=3$，得

$$x_1=0,\ x_2=15,\ x_3=9,\ w=-0+3\times3=9$$

◇程序 3

为了判别是否有比 9 更大的 w 值，首先，用 $w=9$ 时，变数 x，y，x_1，x_2，x_3 中值为 0 的变数 x，x_1 表示其它变数 y，x_2，x_3，w. 由 ①″，②″，③″，④′ 得

$$\begin{cases}y=3+x-x_1 & ①''' \quad（将①''变形）\\ x_2=15-2x-x_1 & ②''' \quad（将①'''代入②''）\\ x_3=9-3x+x_1 & ③''' \quad（将①'''代入③''）\\ w=9+2x-3x_1 & ④'' \quad（将①'''代入④'）\end{cases}$$

因为在④″中，x 的系数是正的，所以 x 的值大于 0，于是 w 的值大于 9.

在①‴，②‴，③‴中，令 $x=k$（k 为非负数），$x=0$，得

$$\begin{cases} y=3+k \\ x_2=15-2k \\ x_3=9-3k \end{cases}$$

在这个式子中，y, x_2, x_3 适合非负数的条件，所以非负数 k 的取值在 $0\leqslant k\leqslant 3$ 内．由此得知，x 的值最大限度不超过 3.

在①‴，②‴，③‴，④″中，令 $x=3, x_1=0$，得

$$y=6,\ x_2=9,\ x_3=0, w=15.$$

◇程序 4

为了判别是否有比 15 更大的 w 值，用 $w=15$ 时变数 x, y, x_1, x_2, x_3 中为 0 的变数 x_1, x_3 表示其他变数 x, y, x_2, w.

由①‴，②‴，③‴，④″得

$$y=6-\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}x_3 \qquad ①''''（将③''''代入①'''）$$

$$x_2=9-\frac{5}{3}x_1+\frac{2}{3}x_3 \qquad ②''''（将③''''代入②'''）$$

$$x=3+\frac{1}{3}x_1-\frac{1}{3}x_3 \qquad ③''''（将③'''变形）$$

$$w=15-\frac{7}{3}x_1-\frac{2}{3}x_3 \qquad ④'''（将③''''代入④''）$$

观察④‴，因为 x_1, x_3 的系数是负数，如果 x_1, x_3 的值大于 0 大，则 w 的值比 15 小．于是，设 $x_1=x_3=0$，由①⁗，②⁗，③⁗可确定其他变数，即 $x=3, y=6, x_2=9$，显然不能有其他

的值．即 w 的值不能大于 15．所以，当 $x=3$，$y=6$，$x_1=0$ 时，目标函数 w 的最大值为 15．

发展题

用单纯形法求例题 6 最合适的解，然后比较表的变化与例题的代数解法．

要点〈表的作法〉

根据[例题6]①′，②′，③′，④′的系数列成表．乙列是目标函数的系数 0，0，0，丙列是 x_1，x_2，x_3 对应顶点的值 3，12，12．

下数第二行是乙列与各列乘积之和．

下数第一行是（上数第一行）－（下数第二行）．

解 (i) 将例题 6 用①′，②′，③′的系数表示，得

$$3=-1\cdot x+1\cdot y+1\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3 \quad ①'$$

$$12=3\cdot x-1\cdot y+0\cdot x_1+1\cdot x_2+0\cdot x_3 \quad ②'$$

$$12=2\cdot x+1\cdot y+0\cdot x_1+0\cdot x_2+1\cdot x_3 \quad ③'$$

$$w=0-1\cdot x+3\cdot y+0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3 \quad ④'$$

表 1 根据上边①′，②′，③′，④′各变数的系数而制成的．

甲　　　乙　　　丙

④′				−1	3	0	0	0		
				x	y	x_1	x_2	x_3		
①′	x_1	0	3	−1	$\boxed{1}$	1	0	0	$\boxed{3}$	
②′	x_2	0	12	3	−1	0	1	0	−12	×
③′	x_3	0	12	2	1	0	0	1	12	
				0	0	0	0	0		
④′		w	0	−1	$\boxed{3}$	0	0	0		

如果下数第一行有正数，可选其中最大的数（表 1 中的3）对应变数y所在的列，即从左边数第五列的系数1，-1，1分别除丙列的3，12，12，得3，-12，12记入右边第一列．在这些值中选择最小正值 3 作为新顶点 y 的坐标．

根据表 1 作表 2．找出在表 1 右边含有$\boxed{3}$的行与最下边含有$\boxed{3}$的列的交点$\boxed{1}$（叫做鞍点）．

表 2 第三行的数是用表 1 第三行的鞍点数$\boxed{1}$除表 2 的第三行的数．

表 1 是当 $x=0, y=0$ 时的表．甲列表示不为 0 的变数，丙列表示各变数的值，乙列表示目标函数④′对应上述各变数的系数．

最下一行用□围成的数，表示对应该列比 0 大，且为有利的变数（此时，为变数y）．其次，右边用□围成的数，表示最大变数的界限（此时，y 的值不大于3）．

(ii) 用①‴，②‴，③‴，④″的系数表示，得

$$3=-1\cdot x+1\cdot y+1\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3 \qquad ①'''$$

$$15=2\cdot x+0\cdot y+1\cdot x_1+1\cdot x_2+0\cdot x_3 \qquad ②'''$$

$$9=3\cdot x+0\cdot y+1\cdot x_1-0\cdot x_2+1\cdot x_3 \qquad ③'''$$

$$w=9+2\cdot x+0\cdot y-3\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3 \qquad ④''$$

根据上边的①‴，②‴，③‴，④″各变数的系数可以制成表 2．

④′				-1	3	0	0	0		
				x	y	x_1	x_2	x_3		
①‴	y	3	3	-1	1	1	0	0	-3	×
②‴	x_2	0	15	2	0	1	1	0	7.5	
③‴	x_3	0	9	$\boxed{3}$	0	-1	0	1	$\boxed{3}$	
				-3	3	3	0	0		
④″		w	9	$\boxed{2}$	0	-3	0	0		

表 2 是当 $x=0, x_1=0$ 时的表.

一列是不为零的变数，三列是各变数对应的值,二列是目标函数④′对应变数的系数.

最下一行□围成的数，表示对应该列比零大且为有利的变数(此时是变数 x).右边被用□围成的数表示变数 x 的最大界限.

(iii) 用①″″,②″″,③″″, ④″′的系数表示. 得

$$6=0\cdot x+1\cdot y+\frac{2}{3}\cdot x_1+0\cdot x_2+\frac{1}{3}\cdot x_3 \quad ①''''$$

$$9=0\cdot x+0\cdot y+\frac{5}{3}\cdot x_1+1\cdot x_2-\frac{2}{3}\cdot x_3 \quad ②''''$$

$$3=1\cdot x+0\cdot y-\frac{1}{3}\cdot x_1+0\cdot x_2+\frac{1}{3}\cdot x_3 \quad ③''''$$

$$w=15+0\cdot x+0\cdot y-\frac{7}{3}\cdot x_1+0\cdot x_2-\frac{2}{3}\cdot x_3 \quad ④'''$$

根据上边①″″,②″″,③″″, ④″′各

表 2 第四行的数是在表 1 中含有鞍点的列上取鞍点以外的元素，使下列式子成为 0 时,适当选取 a.

(表 1 的鞍点) $-a$(与表 1 的鞍点同列,但不是鞍点元素)这时，$1-a(-1)=0$ $\therefore a=-1$. 其次,(表 1 第四行) $-a$(表 2 第三行)得表 2 第四行. 表 2 第五行与上述相同,确定 $a=1$(表 1 第五行) $-a$ (表 2 第三行).

表 1 含有鞍点列的变数及其他的数.(此时为 y 和3),是表 2 含有鞍点行的甲乙列.

表 2 的丙列三行的数，是由表 1 的丙列三行的数除以鞍点所得的数.

丙列四行的数是由（表 1 的丙列四行的数）$-a$（表 2 的丙列第三行的数）[注

意] 此时$a=-1$.

丙列五行的数是由(表1的丙列五行的数)$-a$(表2丙列三行的数)[注意]此时$a=1$.

表的最下一行中，除去丙列外都不是正数时便作成新表。

变数的系数可以制成表3.

表3是$x_1=0, x_3=0$时的表.

甲列是不为零的变数，丙列是各变数对应的系数. 由于最下一行已不是正数，所以w的值不大于15. 故由表3得知，$x=3, y=6, x_1=0, x_2=0, w=15$.

(表 3)

				-1	3	0	0	0		
				x	y	x_1	x_2	x_3		
①''''	y	3	6	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$		
②''''	x_2	0	9	0	0	$\frac{5}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$		
③''''	x	-1	3	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$		
				-1	3	$\frac{7}{3}$	0	$\frac{2}{3}$		
④''''		w	15	0	0	$-\frac{7}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$		

习　　题（答案见137～141页）

——A——

1. 试用图形表示，下列不等式组所表示的区域.

(1) $\begin{cases} 3x+2y\leqslant 12 \\ -x+2y\leqslant 4 \\ x\geqslant 0,\ \ y\geqslant 0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x+4y\geqslant 16 \\ x+4y\geqslant 8 \\ x\geqslant 0,\ \ y\geqslant 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x+y\geqslant 10 \\ -x+5y\geqslant 12 \\ 2x+y\leqslant 20 \\ -x+2y\leqslant 10 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 3x-y\geqslant 2 \\ -x+4y\geqslant 3 \\ 2x+3y\leqslant 15 \end{cases}$

2. 对一次式 $2x-3y$，回答下列问题.

(1) 当 $x=3, y=2$ 时，求一次式的值.

(2) 试用图形表示，满足 $2x-3y=6$ 的解的集合$\{(x,y)\mid 2x-3y=6\}$.

(3) 设 $2x-3y=k$，当$k=0,6,12,18$ 时，画出解的集合$\{(x,y)\mid 2x-3y=k\}$的图形.

当 k 值逐渐增大时，问图形如何移动.

3. 设区域 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 8, 2\leqslant y\leqslant 6\}$，直线 $3x+2y=k$，回答下列各问题.

(1) 在直线 $3x+2y=k$ 上，当 $k=22,20,8$ 时，试用图形表示满足各式点的集合.

(2) 当直线 $3x+2y=k$ 与区域 D 相切时，求 k 值及切点的坐标.

(3) 当直线 $3x+2y=k$ 通过区域 D 内时，求 k 值变化的范围.

——B——

4. 在下列不等式组的区域内，求一次式 $11x+10y$ 最大或最小时点的坐标及一次式的最大值与最小值.

$$\begin{cases}-5x+4y\leqslant 8\\2x+6y\geqslant 12\\4x-y\leqslant 24\\x+y\leqslant 11\end{cases}$$

5.

约束条件 $\begin{cases}x+2y\geqslant 10\\4x-3y\leqslant 18\\2x+5y\leqslant 48\\2x-y\geqslant 0\end{cases}$

目标函数 $w=2x+5y$

求 w 最小时 x, y 的值及 w 的最小值.

6.

约束条件 $\begin{cases}2x+3y+4z=35 & ①\\2x+4y+6z=46 & ②\\x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0\end{cases}$

目标函数 $w=3x+2y-5z$ ③

求 w 最大时 x,y, z 的值及 w 的最大值.

7. 试用单纯形法，解下列线性规划问题.

约束条件 $\begin{cases}-x+3y\leqslant 9\\x+y\leqslant 7\end{cases}$

目标函数 $w=x+3y$

求 w 最大时 x, y 的值及 w 的最大值.

8. 试用单纯形法，解下列线性规划问题.

约束条件 $\begin{cases} -2x+3y\leqslant 5 \\ 2x+3y\leqslant 27 \\ 5x+2y\leqslant 40 \end{cases}$

目标函数 $w=4x+5y$

求 w 最大时 x, y 的值及 w 的最大值.

6. 线性规划法的应用

实际问题

具体的最大或最小问题的LP(Linear Programming,线性规划),可由下列形式给出:

约束条件 $\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y\leqslant b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y\leqslant b_2 \\ \vdots \end{cases}$

目标函数 $w=c_1x+c_2y$

求 w 最大时 x,y 的值及 w 的最大值.

上面线性规划问题中出现的各个系数所表示的内容,自然因问题的不同而异. 一般地,系数 a_{ij} 表示平均每一单位量生产所需资源的数量,系数 b_i 表示生产某些制品时,从总体上,某种资源可能利用的限度.

多数场合,目标函数大都是为了求得最大利益和最小损失,因此系数大都表示每一单位的损益.

化成 LP 的顺序
(组成线性规划问题的顺序)

根据上述约束条件和目标函数的性质,为了作为线性规划问题,求具体的最大或最小问题:

(1) 首先分析获得最大利润或最小损失的要素.

(2) 设要素为 x_i（以后叫做变数），平均每一单位的损益为 c_i，判别目标函数能否用一次式 x_i, c_i 表示.

(3) 设变数 x_i 生产 1 单位所需各资源的数量为 a_{ij}，从整体上研究可能利用各资源的限度为 b_i.

(4) 研究根据 x_i，a_{ij}，b_i 的关系组成一次方程或不等式.

由以上的顺序，将具体的问题化成线性规划问题，实际上，多数场合都不能简单地用一次式表示，只能近似地表示，只有附加几个条件，才能构成线性规划问题.

A 最大值问题

例题 7. 某公司为了制作产品 A，平均每 1 kg 需要煤 12 t，电力 6 kw 时，劳动力 4 人，为了制作产品 B，平均每 1 kg 需要煤 8 t，电力 9 kw 时，劳动力 10 人.

这时，对产品 A 每 1 kg 获利 10 万日元，对产品 B 每 1kg 获利 20 万日元.

今有煤 500 t，电力 300 kw 时，使用劳动力总数为 600 人，要想得到最大利益，问产品 A，B 各生产多少最好？

提示 (i) 对这个问题，获得最大利益的产品 A，B 的数量.

(ii) 当平均单位的损益因素为 c_i 时，产品 A 获利 10 万日元，产品 B 获利 20 万日元，现在设产品 A，B 的生产量分别为 x, y，则目标函数为

$$w=10x+20y$$

(iii) 制作每一单位产品A,B所必须的各种资源的数量为a_{ij},可能利用各资源全体数量的限度为b_i,那么,对制作每一kg产品A时,需煤12t,电力6kw,劳动力4人;制作每一kg产品B时,需煤8t,电力9kw,劳动力10人,作为整体,可能利用各种资源的限度为煤500t,电力300kw,劳动力600人.

(iv) x_i, a_{ij}, b_i 的关系如下:

煤	$12x+8y\leqslant 500$
电力	$6x+9y\leqslant 300$
劳动力	$4x+10y\leqslant 600$

解

$$\text{约束条件}\begin{cases}12x+8y\leqslant 500, \\ 6x+9y\leqslant 300, \\ 4x+10y\leqslant 600.\end{cases}$$

目标函数 $w=10x+20y$

最合适的解是 $x=0$, $y=\dfrac{100}{3}$

译者注 例题7除用图解法外,还可用单纯形法.

第一步

引进松弛变量(表示未被利用的资源数量),将约束条件不等式变为等式.

$$\begin{cases}12x+8y+x_1 \qquad\qquad =500 \\ 6x+9y \qquad +x_2 \qquad =300 \\ 4x+10y \qquad\qquad +x_3=600\end{cases}$$

$$w=10x+20y+0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3$$

表 1

			10	20	0	0	0		
			x	y	x_1	x_2	x_3		
x_1	0	500	12	8	1	0	0	$\frac{500}{8}$	
x_2	0	300	6	$\boxed{9}$	0	1	0	$\boxed{\frac{300}{9}}$	
x_3	0	600	4	10	0	0	1	$\frac{600}{10}$	
			0	0	0	0	0		
	w	0	10	$\boxed{20}$	0	0	0		

① 选w行中最大的正数 20 为调整数，以除以 20 所在的列常数列，将得数记入右数第二列.

② 选$\frac{500}{8}$，$\frac{300}{9}$，$\frac{600}{10}$中最小的数$\frac{300}{9}$，以$\frac{300}{9}$所在的行与$\boxed{20}$所在的列的交点$\boxed{9}$作为鞍点.

③ 为使鞍点为 1，用$\boxed{9}$除该行，得表 2.

表 2

			10	20	0	0	0		
			x	y	x_1	x_2	x_3		
x_1	0	500	12	8	1	0	0		
x_2	0	$\frac{300}{9}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{9}$	0		
x_3	0	600	4	10	0	0	1		
			0	0	0	0	0		
	w	0	10	$\boxed{20}$	0	0	0		

第二步

为使①所在列的第三行，五行，交点的元素为0，利用初等变换，得表3

表 3

			10	20	0	0	0		
			x	x_2					
x_1	0	$\frac{2100}{9}$	$\frac{20}{3}$	0	0	$-\frac{8}{9}$	0		
y	20	$\frac{300}{9}$	$\frac{2}{3}$	①	0	$\frac{1}{9}$	0		
x_3	0	$\frac{240}{9}$	$-\frac{8}{3}$	0	0	$-\frac{10}{9}$	1		
			$\frac{40}{3}$	20	0	$\frac{20}{9}$	0		
	w		$-\frac{10}{3}$	0	0	$-\frac{20}{9}$	0		

这时，w行是0和负数，不能再调整. ①对应的y值$\frac{300}{9}=\frac{100}{3}$就是所求的值. 由于$x$不能是负数，而最小的正数只能取0，所以$x=0$，$y=\frac{100}{3}$.

$$w=10\times 0+20\times\frac{100}{3}=\frac{2000}{3}$$

发展题

制作一瓶饮料水A，需将果汁50g和药品3g溶于水；制作一瓶饮料水B，需将同样的果汁40g和药品10g溶于水.

现在使用果汁 100kg，药品 20kg．饮料水 A，B 每瓶卖价分别为 60 日元和 50 日元．为使卖出时得到最大利益，问应按怎样比例将果汁和药品分配给 A，B 两种产品．

要点

确定变数x，y的方法是选择关系式得以尽可能简单的一次式表示出来的方法．

解 设制作饮料 A，B 分别为 x 瓶和 y 瓶．由果汁和商品的约束条件，得

$$\begin{cases}50x+40y\leqslant 100000\\3x+10y\leqslant 20000\end{cases}$$

设卖出时，得到最大利益为 w，则

$$w=60x+50y.$$

于是，这个问题可归结为下列线性规划问题：

约束条件	$\begin{cases}50x+40y\leqslant 100000\\3x+10y\leqslant 20000\end{cases}$
目标函数	$w=60x+50y$
求 w 最大时 x,y 的值．	

求变数为整数时的最佳解的方法与求变数为实数时的解法相同．然后对最佳解进行研讨．

这个问题最合适的解：$x=\dfrac{10000}{19}$，$y=\dfrac{35000}{19}$，因为要求 x,y 是整数，所以取

$$x\approx 526,\quad y\approx 1842.$$

于是，制成饮料水A需要使用果汁 26.3kg 和药品 1.6kg．制作饮料水 B 需要使用果汁 73.7kg 和药品 18.4kg．

练习 （答案见 131 页）

7．制作产品 R，S 各 1 个单位，需要 A，B，C 三种原料，其中R 需2kg， 1kg，4kg；S 需 3 kg，1kg，3kg．今使用原料 A，B，C 各为 100kg，40kg，120kg．制成产品 R，S 的 1 单位的利益分别为 8 万日元和 9 万日元时，问平均生产 R，S 各多少单位利益最大．

B. 最小值问题．

例题 8. 饲养某种动物时，每天需要分别供应甲、乙、丙三种荣养素 11 单位，13 单位，15 单位以上．

今有饲料 A、B 二种．A，B 1 kg 所含各荣养素如右表，A，B 每一kg 的价格分别为 300 日元，400 日元．

	甲	乙	丙
A	1	3	2
B	2	1	2

饲养这种动物时，为了饲养费最少，平均使用饲料 A，B各为多少 kg 最好．并求每日所需最少费用．

提示．(i) 在这个问题上，使费用最少的因素是饲料 A，B 的数量．

(ii) 设每单位的价格为 c_i，因为饲料 A 为 300 日元，饲料 B 为 400 日元，设 A, B 的使用数量分为 x，$y$kg，平均一天费用 w，则

$$w=300x+400y$$

(iii) 从 A、B 每一单位得到荣养素的数量为 a_{ij} 和必要的总荣养素数量为 b_i，对于：

产品 A 需甲 1 单位、乙 3 单位、丙 2 单位．

产品 B 需甲 2 单位、乙 1 单位、丙 2 单位．

而必要的荣养素；甲 11 单位，乙 13 单位，丙 15 单位．

(iv) x_i, a_{ij}, b_i 之间的关系为

关于甲：$x+2y\geqslant 11$，关于乙：$3x+y\geqslant 13$，关于丙：

$2x+2y\geqslant 15$.

解

$$\text{约束条件}\begin{cases} x+2y\geqslant 11 \\ 3x+y\geqslant 13 \\ 2x+2y\geqslant 15 \end{cases}$$

目标函数 $w=300x+400y$

求 w 最小时 x, y 的数量.

最合适的解为

$$x=4\text{kg},\quad y=3.5\text{kg} \qquad \text{答}$$

$$w=300\times 4+400\times 3.5=2600(\text{日元}) \qquad \text{答}$$

译者注

引入松弛变量，将不等式化为等式，然后在等号两边都乘以-1. 同时，目标函数改变了符号，成为求解最大值问题. 即满足

$$\begin{cases} -x-2y+x_1 \qquad\qquad =-11 \\ -3x-y \qquad +x_2 \qquad =-13 \\ -2x-2y \qquad\qquad +x_3=-15 \end{cases}$$

使得 $w=-300x-400y+0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3$

最大.

这种方法叫做对偶单纯形法.

发展题

在总面积 100000m^2 的空地上，计划修建二层楼 A，平房 B 两种住宅共 800 户.

二层楼 A 平均每户需土地 $90m^2$，修建费 800 万日元，平房 B 平均每户需土地 $160m^2$，修建费 500 万日元.

问 A, B 各修建多少户，总修建费最少. 于此，道路等公共设施不计算在内.

要点

依占地面积和住宅户数列出约束条件.

解 设修建 A, B 住宅各为 x, y 户，由占地面积和住宅户数为约束条件，得

$90x+160y\leqslant 100000$ 约束空地面积.

$x+y\geqslant 800$. 约束必要户数.

设修建住宅 A、B 各为 x, y 户，总费用为 w，则

$$w=800x+500y$$

于是，这个问题可归结为下列线性规划问题.

约束条件	$\begin{cases} 90x+160y\leqslant 100000 \\ x+y\geqslant 800 \end{cases}$
目标函数	$w=800x+500y$
求 w 最小时 x, y 的值.	

求最合适的解，得 $x=400$ 户，$y=400$ 户所求最少费用为.

$800\times 400+500\times 400=520000$ 万日元.

译者注

本题的约束条件是“$\leqslant$”号和“$\geqslant$”号，所以不能简单的应用例题的方法. 为了将第一个方程化为等式，我们引入一个松弛变量 x_1，为了将第二个方程也化为等式，我们引入一个剩余变量 x_2，即

$$\begin{cases}90x+160y+x_1 & =100000\\ x+y \quad -x_2 & =800\end{cases}$$

当 $x=0, y=0$ 时，$x_2=-800$，这样就违反了约束条件非负的准则. 为此，我们再引入一个 x_3，称之为人造变量，这时，约束条件为

$$\begin{cases}90x+160y+x_1 & =100000\\ x+y \quad -x_2+x_3 & =800\end{cases}$$

在约束条件中加入一个人造变量后，目标函数应如何处理？我们希望人造变量对目标函数取值不受影响，可以给人造变量指定一个很大的目标函数系数. 这个系数应该多大？对于这个问题没有肯定的回答. 许多教科书给人造变量指定一个M的目标函数系数，然后说M是"一个非常大的数"，用以回避这个问题. 所以对这种方法，命名为"大M法则". 即

$$w=800x+500y+0\cdot x_1+0\cdot x_2+M\cdot x_3$$

然后用单纯形法计算.

练习 （答案见 132 页）

8. 某医院患者的伙食，一周内平均每人肉食的摄取量至少需肥肉 0.10kg，瘦肉 0.10kg. 猪肉，牛肉每 100g 的肥瘦肉比例及价格如右表.

	肥肉	瘦肉	价格元/100g
牛肉	0.4	0.6	300
猪肉	0.6	0.4	240

现在这医院有 200 名患者，问要使购买费最少时，问牛肉，猪肉各应购买多少 kg 最好？

C 应用问题

例题 9. 午前6时从家出发，到离家6 km的A地，步行前往的速度为vkm/h($2\leqslant v\leqslant 6$)，然后乘汽车去B地. A、B两地之间距离为60 km，汽车行驶的平均速度为$w$km/h($30\leqslant w\leqslant 120$).

于该日午前9至10时之间到达B地.

设步行，乘汽车所需要时间分别为x，y，所需经费为p日元，即

$$p=1500-10x-40y$$

问所需最少时间及最快速度v,w各为多少.

提示 由$v=\dfrac{6}{x}$和v的约束条件$2\leqslant v\leqslant 6$，得

$$1\leqslant x\leqslant 3$$

由$w=\dfrac{60}{y}$和w的约束条件$30\leqslant w\leqslant 120$，得

$$0.5\leqslant y\leqslant 2$$

因为所需时间为$x+y$，在午前6时出发，同日午前9时到10时之间必须到达，故所需时间为

$$3\leqslant x+y\leqslant 4$$

于是，这个问题可归结为下列线性规划问题.

解

约束条件 $\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 3\\0.5\leqslant y\leqslant 2\\3\leqslant x+y\leqslant 4\end{cases}$

目标函数 $p=1500-10x-40y$

求p最少时x,y的值.

所求最合适的解为 $x=2, y=2$，步行和汽车速度分别为

$y=3\text{km/h}$，$w=30\text{km/h}$.

发展题

某化学工厂，制作药品 A、B，每 1 单位需用工厂 E_1，E_2 两种设备的比率如右表.

	E_1	E_2
A	0.2%	0.4%
B	0.5%	0.2%

药品 A、B 卖出每 1 单位，估计各得二万元，三万元的利益.

试回答下列问题.

(1) 问生产药品 A、B 各多少单位才能获得最大利益.

(2) 要将化学设备 E_1 的 2% 用于其它生产，预计能获得多少利益时，把这 2% 的设备投入为好.

要点

(1)使 E_1，E_2 为 100%的利用率，即可求出约束条件.

目标函数为 $w=2x+3y$.

解 (1) 设生产药品 A、B 各为 x、y 单位，则这个问题可归结为下列线性规划问题.

约束条件 $\begin{cases} 0.2x+0.5y\leqslant 100 & ① \\ 0.4x+0.2y\leqslant 100 & ② \end{cases}$

目标函数 $w=2x+3y$ ③

求 w 最大时 x, y 的值.

最合适的解为

$x=187.5$ 单位，$y=125$ 单位.

w 的最大值为

$2\times187.5+3\times125=750$ 万日元.

(2)用E_1的2%作为其他生产，则E_1的利用率只有98%.

(2) 将(1)中约束条件①式右边改成98时,求出目标函数 w' 的最大值.求出最大值 w 与 w' 的差 $w-w'$. 即求出由于 E_1 的设备减少2%所减少的收入.

再判断设备 E_1 的2%投入其他生产能否获得更大的利益.

约束条件	$\begin{cases}0.2x+0.5y\leqslant98\\0.4x+0.2y\leqslant100\end{cases}$
目标函数	$w'=2x+3y$
求 w' 最大时 x,y的值.	

所求最合适的解为.

$x=190$ 单位，$y=120$ 单位

w'的最大值为

$2\times190+3\times120=740$ 万日元.

(1)中 w 的最大值 750 和(2)中w'的最大值 740 之差为.

与(1)的利益比较.

$w-w'=750-740=10$ 万日元.

如果收益在10万日元以上,可考虑压缩药品 A,B 的生产.

练习 (答案见132页)

9. 某工厂制作 A、B 两种产品,每1单位需经过三道工序 T_1,T_2,T_3,对产品 A 各工序需熟练工人分别为3人,13人,7人;对产品 B 各工序需熟练工人分别为13人,12人,5人.

设各工序 T_1,T_2,T_3 在一个月内,可使用的熟练工，人分别为3900人,4930人,2450人一次,产品 A, B 每1单位得到利益分别

为 350 日元，480 日元.

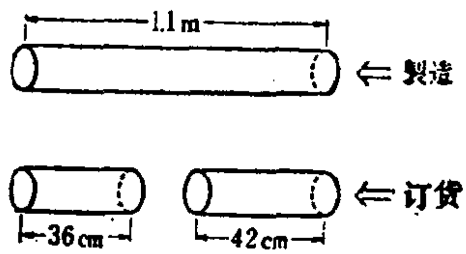
试回答下列问题：

(1) 要想得到最大利益，问在一个月内产品 A、B 各应生产多少单位？只从各工厂所需劳力判断.

(2) 若从工序 T_2 在一个月内的劳动力 4930 人次中抽出 500 人转入生产其它产品，问这 500 人抽出后，产品的利润减少多少？

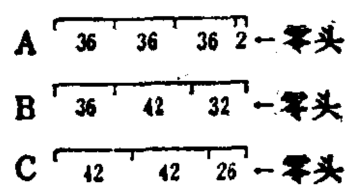
D. 特殊问题

例题 10. 某造纸厂生产如右图所示：宽 1.1m，长 1km 的卷纸筒. 该厂今有订货，要求订购宽 36cm，长 1km 的 500 卷宽 42cm，长 1km 的 450 卷.



根据订货要求，将宽 1.1m 的卷纸筒裁切，可按下图 A、B、C 三种情况考虑.

为了尽量少出零头，问按 A、B、C 三种情况各裁切多少卷为好？



提示 如上图所示，设按 A，B，C 三种方式分别切 x，y，z 卷.

按规格 A 每一卷能裁切出宽 30cm 纸 3 卷，零头 2cm. 因此，若按规格 A 裁切 x 卷，可得宽 36cm 卷筒纸 $3x$ 卷和零头 $2x$cm.

同理，按规格 B 每一卷能裁切出宽 36cm 纸 y 卷，宽 42 cm纸 y 卷，零头总长 $32y$cm.

按规格 C 每一卷能裁切出宽 42cm 纸 z 卷，零头总长26

$z$cm.

对宽 36cm 纸卷要求 500 卷，在三种规格中，正好裁切出

$$3x+y=500 \quad ①$$

对宽 42cm 纸卷要求 450 卷，在三种规格中，正好裁切出

$$y+2z=450 \quad ②$$

A,B,C 的三种规格的卷数，在约束条件①,②情况下，应当使零头总长度 w 为，即

$$w=2x+32y+26z \quad ③$$

由约束条件①,②,可以确定③式 w 最小时 x,y,z 的值.

解 设 A,B,C 规格的卷数，分别为 x,y,z.

约束条件	$\begin{cases}3x+y=500\\ y+2z=450\end{cases}$	① ②
目标函数	$w=2x+32y+26z$	③
求 w 最小时 x,y,z 的值.		

由①,②二式消去③式中的 x,z，得.

$$w=\frac{55}{3}y+\frac{18550}{3}$$

因为 y 不能是负数，且为整数，所以，$y=2$ 时 w 最小，这时，x，z 的值由①，②得

$$x=166,\quad y=2,\quad z=224(\text{卷})$$

发展题

设两个工厂生产同一产品，从二个工厂 P_1，P_2 向两个市场 M_1,M_2 运输产品，试考虑如何使运费最少的问题.

P_1,P_2 各工厂每月产量、分别为数值 18,22，又 M_1;M_2市

场所需产品分别为数值 14,26.

从各工厂向各市场运输产品平均1单位运费如右表，问从各工厂向各市场分别运输多少产品，才能使运费最少.

	P_1	P_2
M_1	3	2
M_2	2	4

(单位　万日元)

要点

所谓**运输问题**是线性规划的一个特殊问题.

解　(i) 节约产品运费的因素，是从各工厂向各市场运输产品的数量 x_{ij}.

右表变量 x_{ij} 的下标 i,j,表示从工厂 P_j 向市场 M_i 运输产品数量 x_{ij}.

	P_1	P_2	
M_1	x_{11}	x_{12}	14
M_2	x_{21}	x_{22}	26
	18	22	

(ii) 设从工厂向市场运输产品的总运费为 w,则

$$w=3x_{11}+2x_{12}+2x_{21}+4x_{22}$$

所谓运输问题这一线性规划必须满足的条件.

(iii) 组成约束条件的式子. 运输问题，必须满足下边两个条件.

I　各工厂生产的产品数量、和从工厂向各市场运输的数量. 必须相一致，不多也不少.

运输问题的约束条件是变量各系数为1或0.

II　各市场需要的数量和从各工厂向市场运输的数量必须相一致，不多也不少.

由约束条件 I, II, 得

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12} \qquad\qquad = 14 & ① \\ \qquad\qquad x_{21}+x_{22} = 26 & ② \\ x_{11} \quad +x_{21} \qquad\quad = 18 & ③ \end{cases}$$

$$(\qquad x_{12} \quad +x_{22} = 22) \qquad ④$$

由①,②,③可以推出④，所以作为约束条件具备①,②,③即可.

(iv) 由 i, ii, iii 组成下列线性规划问题.

约束条件	$\begin{cases} x_{11}+x_{12} \qquad = 14 \\ \qquad x_{21}+x_{22} = 26 \\ x_{11} \quad +x_{21}+ = 18 \end{cases}$	① ② ③
目标函数	$w = 3x_{11}+2x_{12}+2x_{21}$ $+4x_{22}$	④
求 w 最小时 $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$ 的值.		

(v) 求最合适的解.

在 (iv) 中，应用①,②,③，消去④式中的 x_{12}, x_{21}, x_{22}，得 $w=96+3x_{11}$.

因为变量 x_{11} 不能是负数，所以，当 $x_{11}=0$ 时，w 最小，其他变量可由①,②,③，得

$x_{12}=14$，$x_{21}=18$，$x_{22}=8$.

故　$x_{11}=0$，　$x_{12}=14$，　$x_{21}=18$，

$x_{22}=8$，

注意

这说明运输问题有特有解法，在此说明从略.

习　题 (答案见142～145页)

—A—

9　某工厂使用同一种原料，生产 A，B 二种产品．生产每种产品，必须使用设备 E_1，E_2．

右表表示制作产品 A，B 每 1 单位所必需的原料，设备利用率及卖出时的利润，表的最右边一列表示原料和设备可能利用的限度．

	A	B	各资源利用的限度
原料(kg)	1	1	1500
设备 E_1(%)	8	6	100
设备 E_2(%)	5	7	100
利　润	180	160	

问 A、B 每种产品各制作多少才能得到最大的利益．

10．高中三年级学生，每一顿饭需热量和蛋白质各为 850Cal 和 32.9以上．

	热　量(cal)	蛋白质 (g)	每 1 g 价格
面粉 1 g	4.0	0.1	0.4 日元
肉类 1 g	1.5	0.2	3.0 日元
一顿饭必要量	850	32	

上表是一顿饭必须满足的热量和蛋白质．

设面粉使用数量在 400g 以下，肉的使用数量在 30kg 以上，问每顿饭各使用多少克，使伙食费最少.

11. 某工厂制造 1 个产品 A，需 1 kg 原料 I，2kg 原料 II. 制造 1 个产品 B，需 2 kg 原料 I，1 kg 原料 II，但是，无论使用原料 I 或原料 II，都不能超过1200kg. 卖出产品时的利润是，1 个A4000 日元，1 个 B2000 日元，问 A，B 各生产多少个才能得到最大利益？在此，商店在获得同等利益条件下，要求尽量多生产产品 B.

——B——

12. 某工厂制作二种产品 A，B，需原料，设备，人工如下表. 它们所能利用的限度如表中最右边的一列.

	A	B	利用限度
原　　料	1	1	6
设　　备	2	1	10
人　　工	1	2	10

产品 A，B 每 1 单位的利润分别为 3 万日元，2 万日元. 要想得到最大利益，问产品应各生产多少个.

若设备的利用限度只能为 8，问利润减少了多少？

13. 某厂制造电机，在同一工序生产 A，B二种产品.

	A	B	月间能力
电气车间	6	9	21000
装配车间	12	6	29000
利　　润	4000元	5000元	

制造一台产品需各车间的加工量与每一台的利润，以及每月各车间的生产能力如上表. 问产品 A,B 每月各生产多少台，得到的利润最大.

14. 制造同一商品的企业，由 P_1,P_2 两个厂向 M_1,M_2 两个市场运输.

P_1,P_2 各厂每天生产量最高数值为 30 个和 40 个，M_1,M_2 各市场每天需要量为 20 个和 50 个.

从各厂向各市场运输商品每 1 单位的运费如下表所示. 要使运费最少，问从各厂向各市场应如何运输商品.

	工厂 P_1	工厂 P_2
市场 M_1	3	4
市场 M_2	4	2

7. 资料的整理

频率分布表

将整理的资料适当分成组，等级，将每组的频率记入表内，则这个表叫做频率分布表。频率分布表可按下列程序求出.

(1) 已知资料的总数 N.

(2) 组数确定 7 到 14 比较合适. 一般要考虑资料的总数 N 来确定适当的组数. 或用**斯托鸠斯的经验公式**

$$\log_2 N + 1 \sim 2.$$

(3) 求出资料数值的最大值和最小值，计算出最大值与最小值之差. ($R = \max - \min$)

(4) 求出(2), (3)之后，再确定各组的组距(幅度)，使各组的组距相等即可.

(5) 判断各组所含的频率.

直方图（柱状图象）

取横轴为变量，纵轴为将柱状长方形的纵横分别对应于频率分布表的频率和各组，这一图形叫做**直方图(柱状图)**. 直方图可按下列顺序求出.

(1) 在横轴上从小的一端开始，标出各组的数值.

(2) 以各组的组距为一边作长方形，在各组上以长方形的面积表示频率.

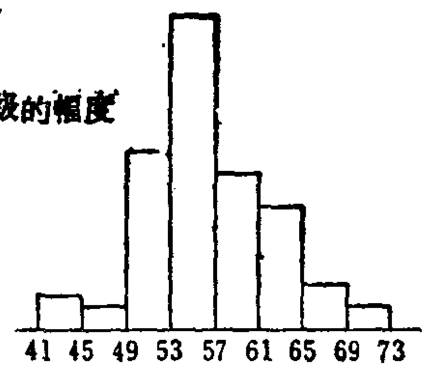
例　频率分布表(左)和直方图(右)

等级　等级值

体重 以上 以下	x_i	f_i ←度数
41.0～45.0	43	3
45.0～49.0	47	2
49.0～53.0	51	16
53.0～57.0	55	28
57.0～61.0	59	14
61.0～65.0	63	11
65.0～69.0	67	4
69.0～73.0	71	2

等级的个数(8)

4 等级的幅度



平均值 $\bar{x}$ 标准差 s

从频率分布表求平均值 $\bar{x}$，标准偏差 s 的公式为

$$\bar{x}=\frac{1}{N}\cdot\sum_{k=1}^{n}x_k\cdot f_k$$

$$s^2=\frac{1}{N}\cdot\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2\cdot f_k$$

$$=\frac{1}{N}\cdot\sum_{k=1}^{n}x_k^2\cdot f_k-\bar{x}^2$$

译者注

$$s^2=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2\cdot f_k$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n}(x_k^2f_k-2x_kf_k\bar{x}+\bar{x}^2f_k)$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n}x_k^2f_k-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n}2x_kf_k\bar{x}+\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n}\bar{x}^2f_k$$

$$\because\quad \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n}x_k^2f_k=\bar{x},\qquad \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n}f_k=1$$

$$\therefore\quad s^2=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n}x_k^2f_k-2\bar{x}^2+\bar{x}^2=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n}x_k^2f_k-\bar{x}^2$$

国内教材大多数用$s^2=\dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2\cdot f_k$.

而化成$s^2=\dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2f_k-\bar{x}^2$ 计算较便.

例题 11. 下表是从连续生产的盖形螺母中任意取出200个，测量其外径为mm单位.

试求平均值 $\bar{x}$ 及标准差 s

盖形螺母的外径(mm)	组值 x_i	频率 f_i
以上　　以下		
23.785～23.825	23.805	2
23.825～23.865	23.845	1
23.865～23.905	23.885	1
23.905～23.945	23.925	14
23.945～23.985	23.965	39
23.985～24.025	24.005	29
24.025～24.065	24.045	28
24.065～24.105	24.085	64
24.105～24.145	24.125	22
	计	200

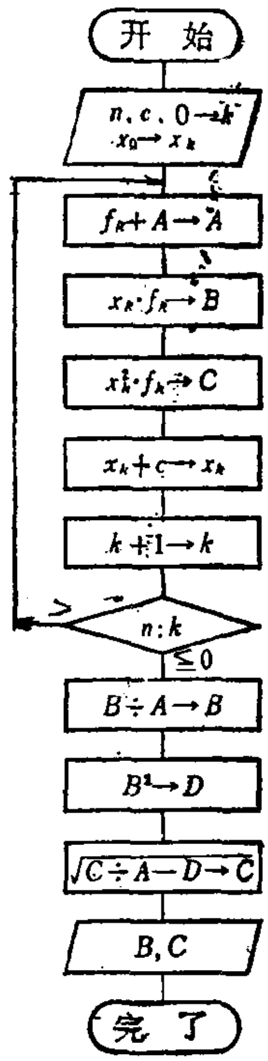
解法　利用求平均值、标准差的公式.

$$\bar{x}=\frac{1}{N}\cdot\sum_{k=1}^{n}x_k\cdot f_k \qquad ①$$

$$s^2=\frac{1}{N}\cdot\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2\cdot f_k$$

$$=\frac{1}{N}\cdot\sum_{k=1}^{n}x_k^2\cdot f_k-\bar{x}^2 \qquad ②$$

②式右边的式子是从左边式子变形而得出的.



x	f	xf	x^2f
x_1	f_1	x_1f_1	$x_1^2f_1$
x_2	f_2	x_2f_2	$x_2^2f_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	f_n	x_nf_n	$x_n^2f_n$
$N=\sum_{k=1}^{n}f_k$		$\sum_{k=1}^{n}x_kf_k$	$\sum_{k=1}^{n}x_k^2f_k$

①、②式如上表所示，按各组计算各组值 x_k 和频率 f_k 之积为 x_kf_k，各组值 x_k 的平方与频率 f_k 之积，求其和 $\sum_{k=1}^{n}x_k\cdot f_k$，$\sum_{k=1}^{n}x_k^2\cdot f_k$，将各值代入式子①，②，即可求出平均值和标准差.

右边的程序框图是按电子计算机操作的程序编排的.（x_0 表示最初的组值，n 表示组数，C 表示组距.

解　$\sum_{k=1}^{n}x_k\cdot f_k=4806.52$，　$\sum_{k=1}^{n}x_k^2\cdot f_k=116647.41$

$\bar{x}=24.0326$, $s^2=0.0045424$, $s\approx0.06674$.

发展题

下表是测量高中三年级男生的体重所得的资料.

试依此资料制成频率分布表.

63.0	60.8	55.0	51.8	56.0	50.0	68.2	60.5
55.0	51.0	53.6	67.5	56.0	41.2	65.2	44.0
53.2	59.5	64.5	50.7	53.5	60.1	53.7	54.5
55.0	51.5	49.5	61.8	63.8	49.0	69.5	54.7
53.7	49.8	52.0	66.0	56.0	53.2	46.0	61.8
49.0	53.2	59.8	61.0	60.0	72.3	55.5	53.0
57.0	52.5	63.0	62.5	61.0	53.2	54.0	51.6
54.5	55.5	57.8	52.4	55.0	59.0	51.2	53.0
46.0	62.2	64.5	41.5	60.5	53.7	58.4	57.4
57.5	53.5	56.6	51.2	51.0	58.0	53.0	54.8

提示

(1)已知总数N.

(2)确定组数.

(3)找出资料中的最大值和最小值，求其范围.

(4)确定组距.

(5)分组.

(6)判断频率，完成分组表.

解 (1) 资料的总数 $N=80$.

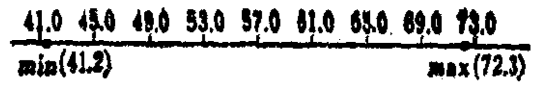
(2) 由斯托鸠斯公式 $\log_2 N+1\sim2$ 得 $\log_2 80+1\sim2=7.3\sim8.3$ 所以组数是 8.

(3) 资料中的最大值(max)和最小值(min)分别为最大值$=72.3$，最小值$=41.2$，范围 $R=$最大值$-$最小值$=72.3-41.2=31.1$.

(4) 由范围$R\div$组数$=31.1\div8\approx4$，得组距为 4.

(5) 最小值 41.2，最大值 72.3，范围

$R=31.1$,



由组距 4，利用上图可以确定各组的值，

(6) 判断各组包含资料的个数.

按上述程序完成如下边的频率分布表。

组	频率	组	频率
以上　不足		以上　不足	
41.0～45.0	3	57.0～61.0	14
45.0～49.0	2	61.0～65.0	11
49.0～53.0	16	65.0～69.0	4
53.0～57.0	28	69.0～73.0	2

发展题

设有N个资料$x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots, x_N$，其平均值为$\bar{x}$，标准差为$s$时，证明偏离平均值$\bar{x}$，大于标准差$s$的$a$倍的资料的个数$n$，小于或等于全体资料$N$的$\frac{1}{a^2}$.

即
$$n \leqslant \frac{1}{a^2} \cdot N$$

提示

上边定理是有名的切比谢夫不等式.

解 求离散s^2的式子：即

$$s^2 = \frac{1}{N}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots$$

$$+(x_N-\bar{x})^2] \quad ①$$

在 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ 中，使 $|x_k-\bar{x}|\geqslant as$ 资料的个数为 n 时，则①式变为下列②式:

$$N_s^2\geqslant(x_1'-\bar{x})^2+(x_2'-\bar{x})^2+\cdots+(x_{N-n'}-\bar{x})^2+a^2ns^2 \quad ②$$

其中 $x_1', x_2', \cdots, x_{N-n'}$ 是从 N 个资料中减去超过与平均值 $\bar{x}$ 距离为 as 的几个资料，由剩下的资料组成的.

将②式变形，得

$$(N-a^2n)\cdot s^2\geqslant(x_1'-\bar{x})^2+(x_2'-\bar{x})^2+\cdots\cdots+(x_{N-n'}-\bar{x})^2 \quad ③$$

由③式，得

$$N-a^2n\geqslant 0, n\leqslant\frac{1}{a^2}N \quad ④$$

练习 (答案见 133 页)

10. 标有 1 至 5 的大小相同的球各10个，放入袋中. 从袋中任意取出 5 个，将球上数字的平均值记录下来，再将球返回袋中. 这样进行45次的结果如右表所示.

试从表中求平均值和标准差.

以上　不足	频　率
1.4～1.9	2
1.9～2.4	3
2.4～2.9	20
2.9～3.4	9
3.4～3.9	8
3.9～4.4	3

8. 正态分布

连续变量概率的定义

已知连续变量 x 在区间 $[a, b]$ 上取值的概率 $P(a\leqslant x\leqslant b)$，为

$$P(a\leqslant x\leqslant b)=\int_a^b f(x)\,dx$$

概率密度函数

其中 $f(x)$ 具有下列两个性质的函数，叫做**概率密度函数**.

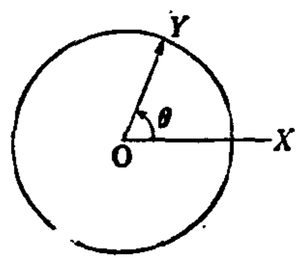
(1) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$

(2) 对任意区间 $[a,b]$ 内

$$0\leqslant\int_a^b f(x)\,dx\leqslant 1$$

例 当轮盘旋转时，指针停止位置的偏角为 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$，则 θ 为概率变量. 于是概率密度函数为

$$f(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)\\ 0 \quad 此外\end{cases}$$



(1) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}dx+\int_{2\pi}^{+\infty}0\,dx=1$

(2) 对任意区间 $[a, b]$ 内 $(0\leqslant a\leqslant b$

$\leqslant 2\pi$)，有

$$\int_a^b \frac{1}{2\pi}dx = \left[\frac{1}{2\pi}x\right]_a^b = \frac{1}{2\pi}(b-a) \geqslant 0$$

$$b-a \leqslant 2\pi \qquad \therefore\ 0 \leqslant \int_a^b \frac{1}{2\pi}dx \leqslant 1$$

平均值和标准差

当连续变量 x 的概率密度函数为 $f(x)$ 时，则平均值 $E(x)$ 和**标准差** $S(x)$ 定义如下：

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx.$$

$$S^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty}(x-E(x))^2 \cdot f(x)dx$$

正态分布

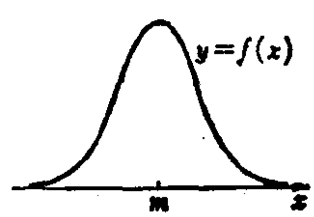
连续的概率变数 x 的概率密度函数 $y=f(x)$ 表示为

正态曲线正态分布的均值和标准差

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

(其中 e 为自然对数的底，m,σ 为常数)则 x 的概率分布叫做**正态分布**.

$y=f(x)$ 的图象如右图吊钟形的曲线. 这曲线叫做**正态曲线**.



求正态分布的平均值 $E(x)$ 和标准值差 $S(x)$ 得

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = m.$$

$$S^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty}(x-E(x))^2 \cdot f(x)dx = \sigma^2.$$

$N(m,\sigma^2)$

即，正态分布是由平均值 m 和标准差 σ

正态分布的性质

来决定的分布．于是有平均值分布 m，标准差 σ 的正态分布可用记号 $N(m,\sigma^2)$ 表示．

▶正态分布的性质

（1）上图所表示的正态曲线是以 m 为中心，左右对称的图象．

（2）下图（a）表示曲线与 x 轴围成的面积为 1.

（3）围绕均值 m 讨论如下：

① 下图(b)表示

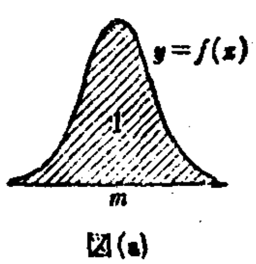
$$p(m-\sigma<x<m+\sigma)=0.6826.$$

② 下图(c)表示

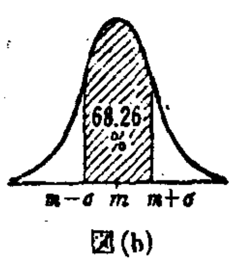
$$p(m-2\sigma<x<m+2\sigma)=0.9544.$$

③ 下图(d)表示

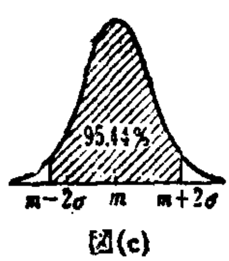
$$p(m-3\sigma\leqslant x<m+3\sigma)=0.9973.$$



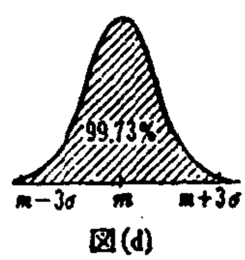
（图 a）



（图 b）



（图 c）



（图 d）

例题 12. 概率变数为 X，平均值为 140，标准差为20，服从正态分布，利用正态分布表求下列概率．

（1）$p(170<X)$　　（2）$p(X<100)$

（3）$p(120<X<160)$　　（4）$p(110<X<160)$

解法 书末的正态分布表是表示正态分布 $N(0,1^2)$．

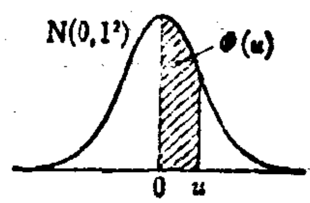
对正态分布 $N(m,\sigma^2)$ 也可使用书末的表，只要将概率分布 $N(m,\sigma^2)$ 的变数 X，变换成概率分布 $N(0,1^2)$ 的概率变数 t 即可．设

$$t=\frac{x-m}{\sigma} \tag{①}$$

①式所变换的变数服从正态分布 $N(0,1)$．于是，x 值与 t 值一一对应．从而，在任意区间 (a,b) 内，有

$$p(a<x<b)=p\left(\frac{a-m}{\sigma}<t<\frac{b-m}{\sigma}\right)$$

书末的正态分布表，如右图所示．对 t 的函数值 $\phi(t)$ 可表示为



$$\phi(u)=\int_0^u f(t)\,dt=p(0\leqslant t\leqslant u)$$

解

(1) $$p(170<x)=p\left(\frac{170-140}{20}<t\right)=p(1.5<t)$$
$$=0.5-\phi(1.5)=0.5-0.4332$$
$$=0.0668.$$

(2) $$p(x<100)=p\left(\frac{100-140}{20}>t\right)=p(-2>t)$$
$$=p(2<t)=0.5-\phi(2)$$
$$=0.5-0.4772=0.0228.$$

(3) $$p(120<x<160)=p\left(\frac{120-140}{20}<t<\frac{160-140}{20}\right)$$
$$=p(-1<t<1)=2\cdot p(0<t<1)$$
$$=2\cdot\phi(1)=2\times0.3413=0.6826.$$

(4) $p(110<x<160)=p\left(\frac{110-140}{20}<t\frac{160-140}{20}\right)$

$=p(-1.5<t<1)=\phi(1.5)+\phi(1)$

$=0.4332+0.3413=0.7745.$

发展题

当概率变数 x 服从正态分布 $N(200,40^2)$时，试回答下列各问.

(1) $p(a<X)=0.05$，求 a 的值. (其中 $a>200$)

(2) $p(a<|X-200|)=0.05$，求 a 的值. (其中 $a<200$)

(3) 求X的值大于 250 的概率.

(4) 求 $250-X$ 为负值的概率.

提示

根据$P(a\leqslant x\leqslant b)=p\left(\frac{a-m}{\sigma}\leqslant t\leqslant\frac{b-m}{\sigma}\right)$进行变换.

解

(1) $p(a<X)=p\left(\frac{a-200}{40}<t\right)$

$=0.5-\phi\left(\frac{a-200}{40}\right)$

$=0.05$

$\phi\left(\frac{a-200}{40}\right)=0.45$

$\frac{a-200}{40}=1.645 \quad a=265.8$

(2) $p(a<|X-200|)$

$=1-p(a\geqslant|X-200|)$

$=1-p(-a\leqslant X-200\leqslant a)$

$=1-2\cdot p(200-a\leqslant x\leqslant a+200)$

$$1-2\cdot p\left(0\leqslant t\leqslant\frac{a}{40}\right)=0.05$$

$$2\cdot p\left(0\leqslant t\leqslant\frac{a}{40}\right)=0.95$$

$$p\left(0\leqslant t\leqslant\frac{a}{40}\right)=0.475$$

$$\therefore\quad \frac{a}{40}=1.96,\qquad \therefore\quad a=78.4.$$

(3) $p(250<X)=p\left(\frac{250-200}{40}<t\right)$

$=p(1.25<t)=0.5-\phi(1.25)$

$=0.5-0.3944=0.1056.$

(4) $p(250-X<0)=p(250<X)$

$=0.1056.$

练习 （答案见 134 页）

11．当概率变数X服从正态分布$N(164,20^2)$时，试回答下列问题．

(1) 求$P(164<X<184)$的值．

(2) 求$P(204<X)$的值．

(3) 求$P(124<X<204)$的值．

(4) 当$P(a<X)=0.1$时，求a的值．(其中$a>164$)

9. 需求量的分布

需求量的变动随机性变动

需求量变动的方式，大致可区别为下列四种类型.

(1) **随机性变动**: 某种需求量的变动服从一定的分布.

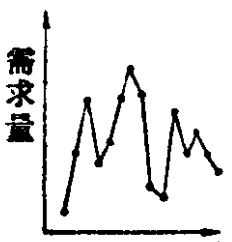
周期性变动

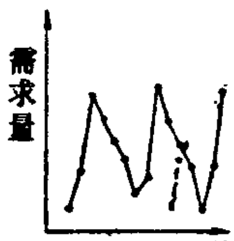
(2) **周期性变动**: 一周或一个月等等，间隔一定期间为周期，需求量的变动.

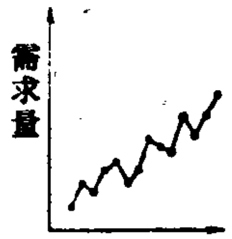
倾向性变动

(3) **倾向性变动**: 需求量逐渐增加，或逐渐减少的变动.

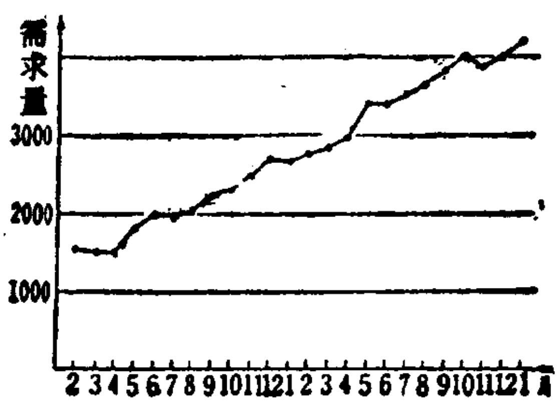
(4) 由(1),(2),(3)组合起来的变动.







例 下图表示去年 2 月卖出的制品 A 到今年



1 月间每月的需求量.

这图形是需求量表现为倾向性变动时的图象.

需求量的分布

当一定期间需求量的变动为偶然性变动时，一般地考虑需求量的分布服从正态分布 $N(m, \sigma^2)$.

k 日间总需求量的分布

一天需求量的分布服从正态分布 $N(m, \sigma^2)$，且可以独立考虑每天需求量时，在 k 日间总需求量的分布服从正态分布 $N(km, k\sigma^2)$.

例题 13. 日用品 A 一天卖出的数量，由过去 100 天的调查，得出下边的频率分布表.

这日用品 A 需求量的分布，从各种状况中，可以考虑为服从正态分布 $N(m, \sigma^2)$.

从下边的频率分布表，可求平均值 $\bar{x}$，标准差 s，即可预测出需求量的分布. $m \approx \bar{x}, \sigma \approx s$

求日用品 A 一天卖出数量的分布.

	等级值 x	频率 f
470～480	475	4
480～490	485	14
490～500	495	22
500～510	505	32
510～520	515	18
520～530	525	6
530～540	535	4

解法 利用公式，从频率分布表求平均值 $\bar{x}$，标准差 s.

$$\bar{x}=\frac{1}{N}\cdot\sum_{k=1}^{n}x_k\cdot f_k \qquad s^2=\frac{1}{N}\cdot\sum_{k=1}^{n}x_k^2\cdot f_k-\bar{x}^2$$

$$\bar{x}=503,\ s^2=188,\ s\approx 14$$

解 $$m\approx\bar{x}=503,\quad \sigma\approx s=14$$

于是，可得需求量的分布服从正态分布 $N(503,14^2)$.

发展题

某制品一天的需求量，从过去的数据可以考虑为服从正态分布 $N(2000,100^2)$.

试回答下列问题：

(1) 当每天需求量独立时，问一周间总需求量的分布是何种分布.

(2) 当有的制品在一定期间的出库量和入库量分别服从正态分布 $N(m,\sigma^2)$，$N(m',\sigma'^2)$时，如果不常以出库量调解入库量，则这一定期间库存量的分布即服从正态分布 $N(m'-m,\sigma'^2+\sigma^2)$.

现在，出库量的分布即为上述需求量的分布，入库量的分布服从正态分布 $N(2000,40^2)$时，求一天库存量的分布.

要点

(1) k日间总需求量的分布为 $N(km,k\sigma^2)$

解 (1) 当每天需求量独立，一天需要量的分布服从正态分布 $N(m,\sigma^2)$，k 日间总需求量分布服从正态分布 $N(km,k\sigma^2)$.

对这个问题可从 $m=2000,\sigma=100$，$k=7$ 得到一周间总需求量分布服从正态

分布 N(14000,70000).

(2) 从出库量和入库量的分布求库存量的分布.

(2) 出库量分布 $N(m',\sigma'^2)$，入库量分布中 $m'=2000,\sigma'=100,m=2000,\sigma=40$，由一天库存量的分布 $N(m'-m,\sigma'^2+\sigma^2)$ 即

$$m'-m=2000-2000=0$$

$$\sigma'^2+\sigma^2=10000+1600=11600$$

所以服从正态分布 N(0,11600).

练习 (答案见 134 页)

12. 某制品一天的需求量，由过去资料得知服从正态分布$N(400,30^2)$，试回答下列问题：

(1) 十天间总需求量的分布，

(2) 一周间总需求量的分布，

其中，每天需求量是独立的.

发展题

观察商品 A 每周每天的卖钱额不同. 过去五周每天卖钱额如下表所示.

	1 周	2 周	3 周	4 周	5 周
星期日	1957	2083	1491	2357	1545
星期 1	1285	826	1344	854	898
星期 2	1023	1597	835	1197	1493
星期 3	1640	1605	1306	1332	1609
星期 4	904	1548	1261	1652	1557
星期 5	1316	1283	1057	1160	802
星期 6	2506	2908	2278	2928	2856

根据这个表回答下列问题：

(1) 求每周每天卖钱额的平均数与每天卖钱额的平均数量.

(2) 求每周每天的变动系数，即

每周每天的变动系数

$$=\frac{\text{每周每天卖钱额的平均数}}{\text{每天卖钱额的平均数}}$$

由这个变动系数可看出每星期每天卖钱额不同.

要点

(1)由过去资料，求每周每天平均需求量.

(2) 求每周每天的变动系数，当需求量为已知时

(1) 每周每天卖钱额的平均如下表.

	星期日	1	2	3	4	5	6	每天平均
每周每天平均	1886	1041	1229	1498	1384	1123	2695	1550
每周每天变动系数	% 122	% 67	% 79	% 97	% 89	% 72	% 174	% 100

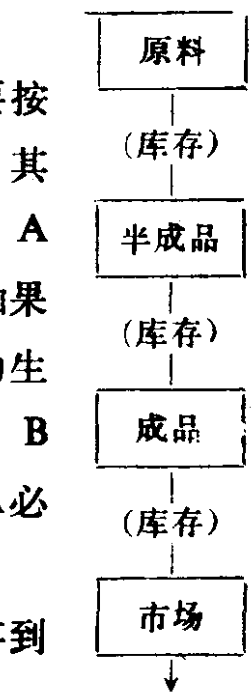
(2) 上表表示每周每天的变动系数. 利用这个变动系数可以看出每周每天不同，星期六和星期日与其它每天不同，要比其它每天需求量约多一倍.

商品 A 每周每天买进的数量，可根据变动系数决定，容易知道缺货或剩货的数量，但不能看出是否浪费.

10. 库存量的确定

库存量的意义

举一个工厂为例，说明最适当的库存量的必要性.



制作一个产品，首先要按程序制作各部件(右图 A)，其次组装(右图 B).

象这样的生产活动，如果库存没有原料，半成品A的生产就要停止.

库存的半成品的数量A必须多于成品 B的数量.

完成的制品，还须库存到市场需要.

这样，库存量即成为调节剂，不必要的库存量，反而浪费开支，成本就要提高.

库存量的确定

在一定期间内需求量的变动是随机性变动时，在多数情况下，可考虑需求量的分布服从正态分布 $N(m,\sigma^2)$.

当需求量X服从正态分布 $N(m,\sigma^2)$，

$$p(X>X_0)\leqslant 0.05$$

由正态分布性质可得 X_0的值. 即

$$X_0 \approx m + 1.656$$

利用这个性质，得一定期间内的库存量，在开始时也包含预备的库存量 $m+1.656$，这时，成品缺货的危险率可以控制在5%以下.

库存剩余及其概率

在一定期间内的需要量X服从正态分布时，开始仅注意半成品A的库存，产生库存剩余量的概率，可表示为

$$p(X < A)$$

例题 14. 某商品一周的需求量，从过去的资料中得知，服从正态分布 $N(2000, 100^2)$.

这商品为满足一周的需求量，必须在每周开始时预先购入放在库里.

这时，回答下列问题：

（1）缺货的危险率控制在 1% 以下，问每周开始时库存量应是多少？

（2）设每周开始库存量为 2200，求商品剩余的概率.

提示 （1）商品一周的需求量服从正态分布 $N(m, \sigma^2)$时，缺货的危险率在 1% 以下，则库存量 X_0 为

$$p(X > X_0) \leqslant 0.01$$

$$p(X > X_0) = p\left(\frac{x-m}{\sigma} > t_0\right) \leqslant 0.01$$

由正态分布表得 $t_0 = 2.33$，因为 $m = 2000, \sigma = 100$，所以

$$\frac{X_0 - 2000}{100} = 2.33 \qquad \therefore \quad X_0 = 2233$$

（2）商品剩余比需求量X不少于 2200。所以

$$p(X<2200)=p\left(t<\frac{2200-m}{\sigma}\right)=p(t<2)$$

$$=0.5+p(0<t<2)=0.9772$$

解 (1) 缺货的危险率控制在 1% 以下时库存量 X_0 为

$$p(X>X_0)\leqslant 0.01$$

$$p(X>X_0)=p\left(\frac{X-m}{\sigma}>t_0\right)\leqslant 0.01$$

因为 $t_0=2.33, m=2000, \sigma=100$，所以 $X_0=2233$

(2) $p(X<2200)=p\left(t<\frac{2200-m}{\sigma}\right)=p(t<2)$

$$=0.9772$$

发展题

去年某种物资材料调配期间(参考××员)二个月的需求量和预测量如下表所示:

	1～3月	2～4月	3～5月	4～6月	5～7月	6～8月	7～9月	8～10月	9～11月	10～12月
需求量	697	478	521	670	473	381	977	1039	1135	1084
预测量	671	447	529	629	560	487	879	1086	1290	917

试回答下列问题:

(1) 从表中求出需求量与预测量之差的绝对值，再求平均 d.

(2) 设已知需求量和预测量之差的分布平均为 0，服从标准差为 $1.25d$ 的正态分布.

设今年与去年需求量相同，为把缺货的危险率控制在5%

以下，除预测量外，应预备多少物资.

要点

(1) 利用平均差求标准差.

(2) 利用正态分布的性质可决定预备量.

解 (1) 从表中求出需求量与预测量之差的绝对值，即

26, 31, 8, 41, 87, 106, 98, 47, 155, 167, 平均 $d=76.6$.

(2) 求正态分布 $N(m,\sigma^2)$ 的 m,σ，因为 $m=0, \sigma=1.25d=1.25\times 76.6\approx 96$

设预备物资为 X_0 时，需求量超过预测量 X_0 的概率 $p(X>X_0)$ 在 5%以下，就是所求的 X_0.

$$p(X>X_0)=p\left(t>\frac{X_0-0}{96}\right)$$

$$=0.05$$

$$\frac{X_0}{96}\approx 1.65,\quad X_0\approx 158$$

练习 (答案见 135 页)

13. 已知每月需要相同程度制品 K 的分布服从正态分布 $N(800, 60^2)$. 如果月初只注意库存量，问为把缺货的危险率控制在 1% 以下，库存量应是多少.

习　　题 (答案见146～149)

—A—

15. 从下边的频率分布表计算平均值 $\overline{X}$、标准差 S.

x	71	74	77	80	83	86	89	92
y	3	13	42	55	49	36	8	4

16. 50 个资料的平均值和标准偏差分别为 120, 120. 这些资料 X 与平均值 120 之差在 24 以上的资料数,问50 个资料中在多少个以下可能出现. 试利用切比雪夫不等式判断.

17. X 的分布是正态分布 $N(m, \sigma^2)$ 时,求下列概率.

(1) $P(50 \leqslant X \leqslant 65)$, $m=50$, $\sigma=15$

(2) $P(76 \leqslant X \leqslant 124)$, $m=100$, $\sigma=20$

(3) $P(|X-500| \geqslant 60)$, $m=500$, $\sigma=30$

18. 某制品一天的需求量, 根据过去资料得知服从正态分布 N $(60, 10^2)$. 设每天的需求是独立的,回答下列问题:

(1) 求一个月(30 天)需求量的分布.

(2) 为满足一个月的需要,在月初应准备制品数量应当是多少. 缺货的危险率设在 1% 以下.

19. 某制品一个月的需求量,由过去资料可判断出平均为 1200,标准差为 100,且服从正态分布. 要求缺货的危险率在 10% 以下,问月初库存的制品应是多少.

—B—

20. 某工厂管理制品 A 的仓库主任做调查的结果, 从仓库到各市场上

市的制品 A，每天服从正态分布 $N(8000, 1200^2)$.

生产的数量与上市的数量无关，可以认为每天服从正态分布 $N(8000, 200^2)$.

这时，试回答下列问题：

(1) 每天上市数量是独立时，求十天中上市数量的分布.

(2) 当十天中上市数量的分布为 $N(m_1, \sigma_1^2)$，生产数量的分布为 $N(m_2, \sigma_2^2)$ 时，这工厂的制品 A 的库存量服从 $N(m_2-m_1, \sigma_2^2+\sigma_1^2)$，求库存量的分布.

(3) 以(2)的库存量分布为基础，按十天出厂数量计，为防止缺货，作为安全库存量，问应该准备多少制品. 设缺货危险率在 1% 以下.

21. 某商品一天的需要量，从过去资料得知服从正态分布 $N(300, 40^2)$.

为了压缩每周商品的购入量，在每周开始要将商品汇总进货.

假如每天的需求量是独立的，试回答下列问题：

(1) 商品缺货的危险率在 10% 以下，问每周开始库存商品是多少方可。

(2) 每周开始库存量为 2200 时，问缺货商品的概率及剩余的概率.

22. 从下表日用品 A 一天卖钱额的资料中，求平均值 $\bar{x}$，标准差 s。并求一天购入量 $\bar{x}+3s$.

x	475	485	495	505	515	525	535
y	4	14	22	32	18	6	4

11. 订货量的确定方法

库存量管理方式

与库存量有关的问题，大致有：

① 如何决定仓库的大小(可能库存量的限度).

② 经常满足需要，而且尽量减少不必要的库存，库存量应多少，这是分别考虑的二个问题.

第①个问题，一般要在建库之前考虑，第②个问题是在库存开始之后考虑.

库存管理是指与②有关的经营问题.

库存量本来就不固定，与需要和供应有关，因为经常变动，所以考虑最适当的库存量更重要.

(1) 何时补充订货.（订货时期问题）

(2) 订货量多少最好.

安全库存量

(3) 为了防止缺货，库存量（安全库存量)应多少.

注意 当库存量服从分布 $N(m, \sigma^2)$ 时，估计危险率为1%，安全库存量一般为 3σ.

订货点与定期订

家庭使用煤气罐时，当发现一个罐里煤

货方式

气不足，就打电话让补送.

观察这种库存量的管理方法，就是库存量(两罐煤气)少到一定限度就需要补充.

订货点

订货量

上边的例子说明库存量达到一定的数量(库存量决定订货时间，故叫订货点)即补充一定量的物品(订购物品的数量，叫订货量)，这一库存管理方式，叫订货点方式.

这个方式说明：订货物品经常保持一定的数量，这是优点，但由于库存量决定订货日期因而补充物品的时间不固定.

根据时间和季节，需求量不同，或者物品价格昂贵，所以必须预先准备好买入的费用，等等，因此，与其固定订货的数量，不如固定订货的日期，而在每次订货时再考虑订货的数量更好些.

订货周期

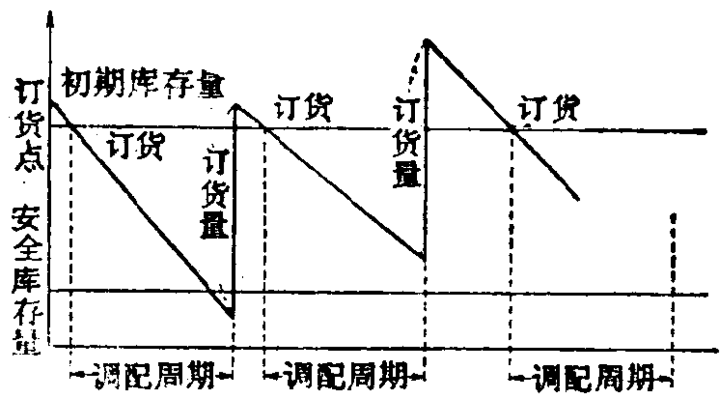
按在每次订货时再考虑订货量，这种库存管理方式，叫做定期订货方式. 定期购货方式，从这次订货日到下次订货日之间，叫做**订货周期**.

采购期间

从订货日到物品实际到达，叫做**采购期间**.

例 订货点方式库存量变动图

根据订货点方式，求最佳订货量的公式为



$$Q=\sqrt{\frac{2RC_0}{P_i}} \quad ①$$

求最佳订货量公式

根据定期订货方式，当订货周期为 n 个月时，求 n 的公式为

$$n=\sqrt{\frac{288C_0}{RP_i}} \quad ②$$

求订货周期公式

在①,②中，R：一年总销售量

C_0：一次的订货费

P：制品的单价

i：一年库存保管率（制品一单位是一年间保存费用除以 P 的值）.

例题　15. 全年需求程度大致相同的某物品一年间的和销售总量为 18000 单位.

一次订货费为 1000 日元，单价 700 日元，一年间库存保管率为 20% 时，求最佳的订货数量.

解　最佳订货公式为　$Q=\sqrt{\frac{2RC_0}{P_i}}$

当 $R=18000, C_0=1000, P=700, i=0.2$，则

$$Q=\sqrt{\frac{2\times18000\times1000}{700\times0.2}}\approx507$$

答

另解 (1) 在一年一次订货的情况下

订货费：1000(元)×1(次)＝1000(元)

一年卖出 18000 单位是在一次订货购入的，年初库存量18000，年末制品全部卖出，而且，全年需求量大致相同，平均之，$\frac{18000+0}{2}=\frac{18000}{2}$的制品就是一年库存量．又，制品 1 单位的库存费为 700×0.2.

一年库存费：$\frac{18000}{2}\times700\times0.2=1260000$(元)

(2) 在一年二次订货的情况下

订货费：1000(元)×2(次)＝2000(元)

由一年二次订货得知，一次订货量为$18000\div2$，年初库存为$\frac{18000}{2}$，半年为 0，二次订货为 $\frac{18000}{2}$，年末为 0，所以平均库存量为$\frac{18000}{2}\div2$.

一年库存费：$\frac{18000}{2}\div2\times700\times0.2=630000$(元)

(3) 一年三次、四次等等订货的情况

订货次数	……	33	34	35	36	37	38	39	……
订货费	……	33000	34000	35000	36000	37000	38000	39000	……
一年库存费	……	38182	37059	36000	35000	34054	33158	32308	……
合计	……	71182	71059	最小 71000	最小 71000	71054	71158	71308	……

$$18000 \div 35 \approx 514, \text{ 或 } 18000 \div 36 = 500$$ 答

例题 16. 某物品一年总卖销售量为 48000 kg，每kg 的价值为 1000 元，每一次的订货费为 10000 元，一年内库存保管率为 20%.

这物品采取定期订货方式，求订货周期.

其中假设，物品全年需求量相差不大.

解法 物品的需求量与季节有关，某个时期需要很多时，确定订货周期一般来说是复杂的. 这个例题假定与季节需求程度变化不大，其订货周期可按下列方式求得. 即

每月平均需求量为 $\bar{D}$，则

$$\bar{D} = R \div 12 (R\text{: 一年销售量})$$

设订货周期为 n 个月时，则 $n\bar{D}$的值正好等于合适的订货量 Q，所以 n 可以决定，即

$$Q = n\bar{D} = \frac{nR}{12}$$

$$n = \frac{12Q}{R} = \sqrt{\frac{288C_0}{RP_i}}$$

解 订货周期公式为 $n = \sqrt{\dfrac{288C_0}{RP_i}}$

其中 $C_0 = 10000, R = 48000, P = 1000, i = 0.2$，所以

$$n = \sqrt{\frac{288 \times 10000}{48000 \times 1000 \times 0.2}} = 0.5477$$

设一个月为 30 天，则日数为$0.5477 \times 30 = 16.431$，于是订货周期大约为 16 天，即周期为半个月左右即可.

发展题

推导出最合适的订货量公式：

$$Q=\sqrt{\frac{2RC_0}{P_i}}$$

其中 R：一年总销售量，C_0：一次订货费用

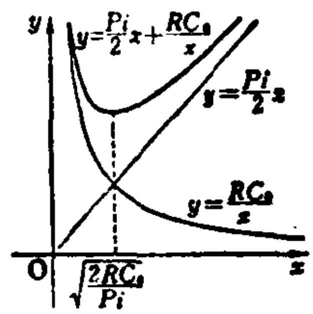
P：制品的单价， i：一年间库存保管率

要点

可按订货费和库存费合计的费用为最小时，来确定订货量.

解 设一次订货量为 x，则订货费为

$$\frac{R}{x}\times C_0=\frac{RC_0}{x}$$



库存费为

$$\frac{x}{2}\times Pxi=\frac{xPi}{2}$$

设合计费用为 y，则

$$y=\frac{Pi}{2}x+\frac{RC_0}{x}\,(0<x\leqslant R)\cdots①$$

画①式的图象如下：

由右图得知，合计费用 y 最小时，即

$$\sqrt{\frac{2RC_0}{Pi}}<R\text{ 时，}$$

$$Q=\sqrt{\frac{2RC_0}{Pi}},\qquad R<\sqrt{\frac{2RC_0}{Pi}}\text{时，}$$

$$Q=R$$

译者注

今函数 y 对 x 的一阶导数为零，即

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Pi}{2}-\frac{RC_0}{x^2}=0\quad\text{得}$$

$$x^2=\frac{2RC_0}{Pi}\qquad\therefore\quad x=\sqrt{\frac{2RC_0}{Pi}}$$

练习（答案见 135 页）

14. 制品 S 的需求状况，是全年需求程度相同，设去年总需求量为 14000kg.

设制品 S 的每 kg 价值为 180 元，一年库存保管率为 10%，当一次订货费为 2000 元时，求最佳订货量.

发展题

设每天需求量变化不大，制品 A 的调配期间的需求量分布服从正态分布 $N(760,108^2)$.

按订货点方式，进行库存管理时，试回答下列问题：

(1) 缺货危险率为 1%以下，问安全库存量是多少.

(2) 问订货点是多少.

(3) 问订货量是多少.

其中，设制品 A 每单位价值为 500 元，一年库存保管率为 20%，一年总销售量为 840000 单位，一次订货费为 2000 元.

要点

(1)安全库存量为3σ.

(2)订货点为$m+3\sigma$.

解 (1) 当需求量X的分布服从正态分布$N(m,\sigma^2)$时，得

$$P(X>m+3\sigma)\leqslant 0.01$$

估计调配期间的需求量为 m，安全库存量为 3σ，缺货危险率在 1%以下. 因为 $\sigma=108$，所以安全库存量为

$$3\sigma=3\times108=324\ 单位$$

(2) 缺货的危险率在 1%以下，设订货点为 $m+3\sigma$ 即可. 因为 $m=760$，$\sigma=108$，所以订货点为 $760+3\times108=1084$ 单位.

(3) 最佳订货量为 $Q=\sqrt{\frac{2RC_0}{Pi}}$	(3) 最佳订货量公式为 $$Q=\sqrt{\frac{2RC_0}{Pi}}$$ 其中，$R=840000$，$C_0=2000$，$P=500$，$i=0.2$， $$\therefore \quad Q=\sqrt{\frac{2\times 840000\times 2000}{500\times 0.2}}\approx 5800$$

发展题

下表是制品E去年各月的需求量和各月的需要预测量.

	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月
需要量	486	388	452	381	486	488	425	411	465	480	456	418
预测量	477	392	454	379	487	489	420	417	459	484	457	411

这个制品E的单位为 960 元，订货费为 1800 元，一年库存保管率为 10%，采购期间为一个月，试回答下列问题：

(1) 问去年年度的总销售量是多少.

(2) 求订货周期.

(3) 问订货时间预测需求期间为n个月.（参照指示）

(4) 预测期间的需求量和预测量之差的分布服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$.

其中 $\sigma=1.25d$，d 是预测期间的需求量和预测量之差的绝对值的平均.

问这时安全库存量是多少.

要点

(1) 各月需求量的合计.

(2) 因为各月需求大致相同，所以可使用订货周期公式.

(3) **需求预测期间**，当发出订货时，必须考虑确定订货量能够满足多长期间的需求，这一期间就叫做预测需求期间.

解 (1) $486+388+452+381+486+488+425+411+465+480+456+418=5336$

(2) $$n=\sqrt{\frac{288C_0}{RPi}}=\sqrt{\frac{288\times1800}{5336\times960\times0.1}}\approx1(\text{月})$$

(3) 需求预测期间＝采购期间＋订货周期＝1＋1＝2(月)

(4)

	1～2月	2～3月	3～4月	4～5月	5～6月	6～7月
二个月的需要	874	840	833	867	974	913
二个月的预测	869	846	833	866	976	909
差	5	6	0	1	2	4

	7～8月	8～9月	9～10月	10～11月	11～12月	
二个月的需要	836	876	945	936	874	
二个月的预测	837	876	943	941	868	
差	1	0	2	5	6	

由上表得知

$$d=\frac{5+6+0+1+2+4+1+0+2+5+6}{11}$$

≈ 2.9

$$\sigma = 1.25d = 1.25 \times 2.9 = 3.6$$

安全库存量为 $3\sigma = 3 \times 3.6 = 10.8$.

12. 期望值与概率

在第10、11节中，主要用正态分布概念处理库存问题. 下边用已学过的概率和期望值处理库存问题.

概　　率

把随机事件发生的结果中的某一事件发生的确实性，用数量来表示，对这个数叫做这个事件的概率.

这样的概率必须满足下列三个条件

(1) 对任意事件A，其概率$p(A)$为

$$0 \leqslant p(A) \leqslant 1$$

(2) 对全事件S的概率$p(S)$为

$$p(S)=1$$

(3) 当事件A和B，如果$A \cap B=\phi$（互斥）时，则

$$p(A \cup B)=p(A)+p(B)$$

概率分布

概率变数x，当取值为x_1，x_2，…，x_k，…，x_n

其概率分别为$p_1, p_2, \cdots, p_k, \cdots p_n$时

概率变数 $X=x_i$	x_1	x_2	…	x_k	…	x_n
概率 $p(X=x_i)$	p_1	p_2	…	p_k	…	p_n

上表所表示的概率变数 x 的值与其概率的对应关系，叫做**概率分布**.

［**例**］ 投掷一个骰子，骰子上的数字是概率变数，其概率分布为

骰子上的数字	1	2	3	4	5	6
概　　率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

期望值

取概率变数 X 的取值为 $x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots, x_n$，其概率分别为 $p_1, p_2, \cdots, p_k, \cdots, p_n$ 时，

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_n
p	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$	p_n

当 $E(X)=x_1\cdot p_1+x_2\cdot p_2+\cdots+x_n\cdot p_n$ 时，则 $E(X)$ 叫做**期望值**.

例　从 A 地到 C 地行驶有公共汽车. 在途中 B 站等车时，发现通过的车有时高峰时间车上满员而不停车.

通过的汽车台数	0	1	2	3	4
其 概 率 $p(X)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

现在在 B 站等待汽车，通过的台数的概率如上表，问估计必须通过多少台才能上

去车.

解 设期望值为 $E(X)$，则

$$E(X)=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{8}+3\times\frac{1}{16}+4\times\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$$

大数定律

即 $E(X)\approx1$，所以平均有一台车不停.

能在相同条件下反复试验，当事件 A 发生的概率为 p 时，这种试验反复 N 次，其间事件 A 发生的次数设为 f_A，对任意正数 ε，下式成立.

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{f_A}{N}-p\right|<\varepsilon\right)=1$$

即，N 充分大时考虑 $p\approx\frac{f_A}{N}$ 即可. 这就叫**大数定律**

相对频率分布表与概率分布

相对频率分布表和概率分布

等级值	相对频率		变数 X	概率 $p(X)$
x_1	$\frac{f_1}{N}$		x_1	p_1
x_2	$\frac{f_2}{N}$	$N\to\infty$	x_2	p_2
$\vdots$	$\vdots$	$\to$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	$\frac{f_k}{N}$		x_k	p_k
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_n	$\frac{f_n}{N}$		x_n	p_n

例题 17. 设有两个不偏心的骰子，同时投掷，对于出现的数字之和，回答下列问题：

(1) 设出现数字之和为变数 X，试求其概率分布.

(2) 求出现数字之和的期望值 $E(X)$.

解法 投掷两个骰子时，可利用各骰子面上数字出现的相同，按下表可求各变数的概率.

两个骰子数字之和	确定性相同事件						概率
2	(1,1)						$\frac{1}{36}$
3	(1,2)	(2,1)					$\frac{2}{36}$
4	(1,3)	(3,1)	(2,2)				$\frac{3}{36}$
5	(1,4)	(4,1)	(2,3)	(3,2)			$\frac{4}{46}$
6	(1,5)	(5,1)	(2,4)	(4,2)	(3,3)		$\frac{5}{36}$
7	(1,6)	(6,1)	(2,5)	(5,2)	(3,4)	(4,3)	$\frac{6}{36}$
8	(2,6)	(6,2)	(3,5)	(5,3)	(4,4)		$\frac{5}{36}$
9	(3,6)	(6,3)	(4,5)	(5,4)			$\frac{4}{36}$
10	(4,6)	(6,4)	(5,5)				$\frac{3}{36}$
11	(5,6)	(6,5)					$\frac{2}{36}$
12	(6,6)						$\frac{1}{36}$

解 (1) 概率分布为

变数 X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
概率 $p(X)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

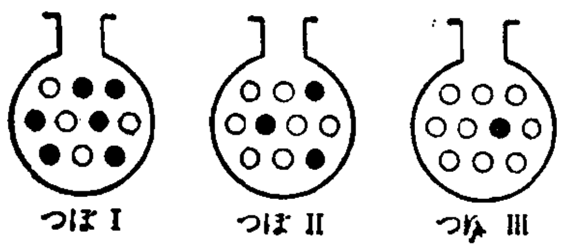
(2) 期望值 $E(X)=2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+4\times\frac{3}{36}+5\times\frac{4}{36}$

$$+6\times\frac{5}{36}+7\times\frac{6}{36}+8\times\frac{5}{36}+9\times\frac{4}{36}+10\times\frac{3}{36}$$

$$+11\times\frac{2}{36}+12\times\frac{1}{36}=7$$

发展题

在下列三个罐子中，分别装有黑色命中球和白色落空球，装入比例如右表



	黑球	白球
罐 I	6	4
罐 II	3	7
罐 III	1	9

当给出下列条件时，问从哪个罐里取球最好.

(i) 一个罐只许取一次，而且是任取一个球.

(ii) 取出的球是落空的白球时不给奖金，取出的球是命中的黑球时给下列奖金.

① 若是罐 I 给 15000 元

② 若是罐 II 给 40000 元

③ 若是罐 III 给100000 元.

要点

(*A*) 重视概率最大的判断.

(*B*) 重视奖金最多的判断.

(*C*) 重视期望值最大的判断。

解 (*A*) 如果重视命中概率,

取出命中球的概率分别为：罐 I 是 0.6,罐 II 是 0.3,罐 III 是0.1,所以选择命中球取出概率最高的罐 I.

(*B*) 如果重视奖金,

则选择奖金最高的罐 III.

(*C*) 如果重视期望值,

则选择罐 I 时奖金的期望值为

$E(X_1)=0\times 0.4+15000\times 0.6=9000$ 元

同理，选择罐 II、罐 III 时的期望值为

$$E(X_2)=12000\text{ 元},$$
$$E(X_3)=10000\text{ 元},$$

因此,选择罐 II.

发展题

某个贩卖半新汽车的小商店，由每周卖出的数量得出下表的概率分布.

由于经费关系,希望每次购入三台. 库存保管方式为:

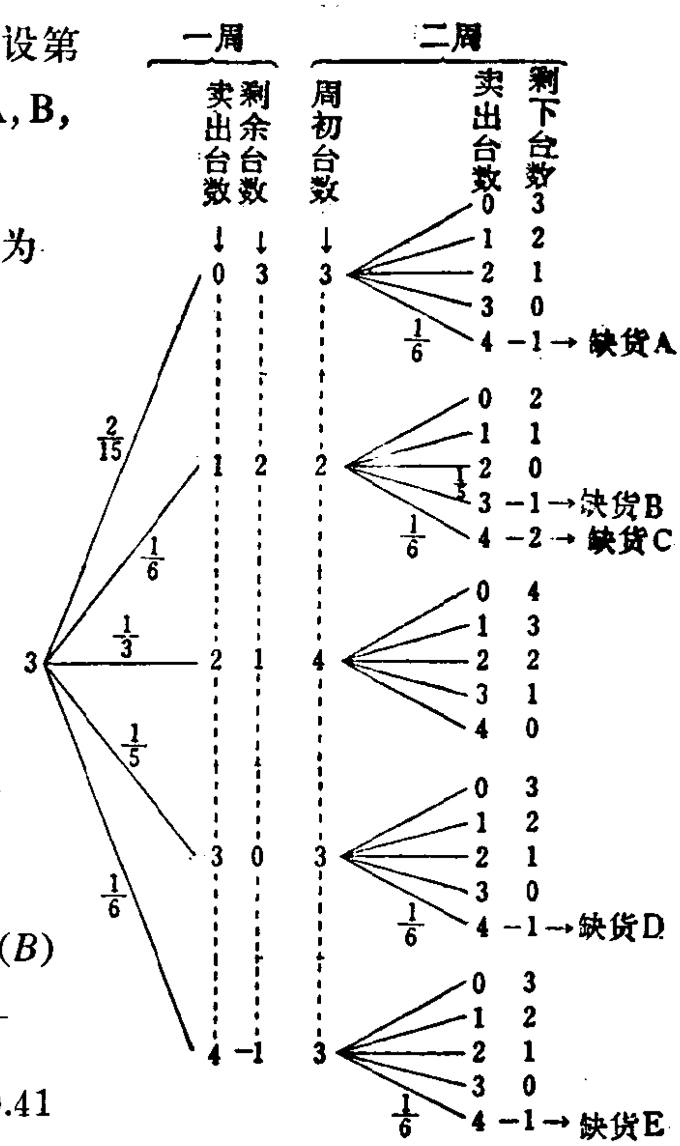
台数	0	1	2	3	4
概率	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$

"第一周初展出 3 台,周末剩下 2 台,到第二周不订货,保持到周末,如果只剩下 1 台,第三周就想购入 3 台"

当这种管理方式继续下去时，求第二周末缺货的概率.

其中，假设各周是独立的，如果周末订货，到下周初即能展示.

解 由右边树形图，设第二周缺货的情况为 A, B, C，D, E五种.



这些事件的概率为

$$p(\mathrm{A})=\frac{2}{15}\times\frac{1}{6}$$

$$p(\mathrm{B})=\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}$$

$$p(\mathrm{C})=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$$

$$p(\mathrm{D})=\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}$$

$$p(\mathrm{E})=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$$

于是，所求概率

$$p(S)=p(A)+p(B)+p(C)+p(D)+p(E)=\frac{13}{90}\approx 0.41$$

发展题

某商店调查每天卖出日用品 s 的状态后发现：由于前一天卖出的状态不同，影响下一天卖出的状态.

现将卖出多少用 A, B, C 三种状态表示，按前一天的 A,

	A_k	B_k	C_k
A_{k-1}	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$
B_{k-1}	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$
C_{k-1}	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

B,C 状态，调查下一天的 A,B,C 状态，大致可认为如上表中的概率.

当今天卖出的状态为B时，求三天后卖出状态成为C的概率.

解 由下页树形图，得知三天后卖出状态为C时，共有，I，II，III，IV，V，VI，VII，VIII，IX，9 种情况:

这些事件出现的概率，可求各种情况下的各分支上的概率之积.

$$p(\mathrm{BAAC})=\frac{1}{8}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{12}$$

$$p(\mathrm{BABC})=\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}$$

$$p(\mathrm{BACC})=\frac{1}{8}\times\frac{1}{12}\times\frac{1}{5}$$

$$p(\mathrm{BBAC})=\frac{3}{8}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{12}$$

$$p(\mathrm{BBBC})=\frac{3}{8}\times\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}$$

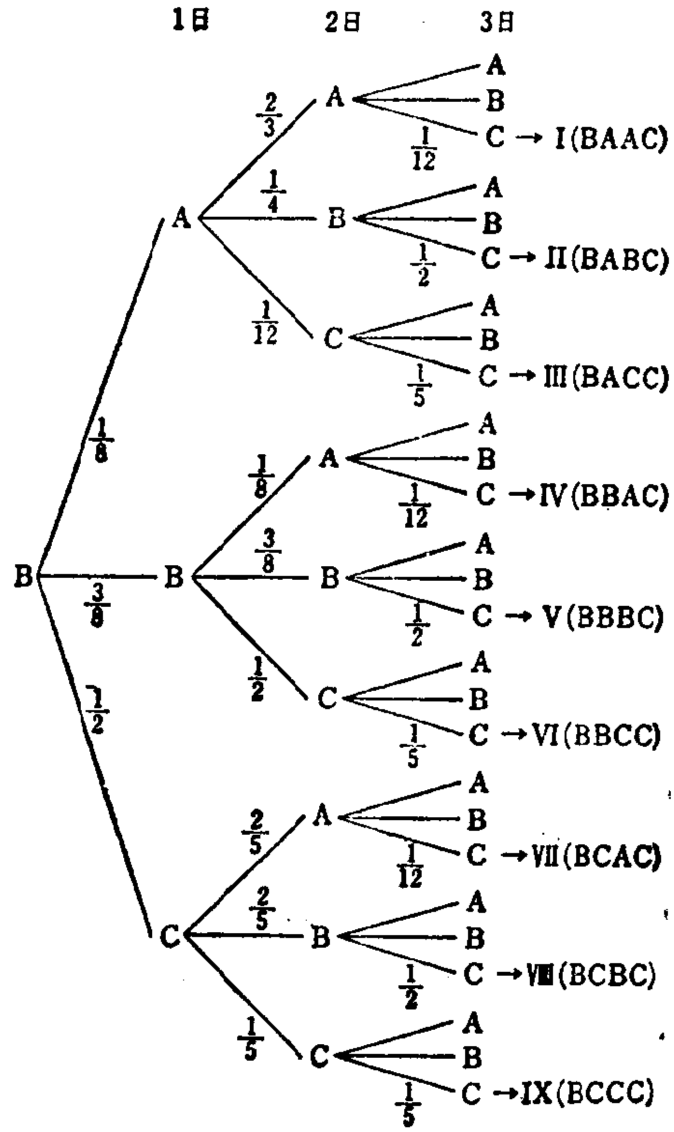
$$p(\mathrm{BBCC})=\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}$$

$$p(\mathrm{BCAC})=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{12}$$

$$p(\mathrm{BCBC})=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}$$

$$p(\mathrm{BCCC})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}$$

于是三天后得 C 的概率为 $p({}_BC_3)\approx 0.273$



习　　题 (答案见150～155)

——A——

23. 将正四面体的各面记上数字 1,2,3, 4 作成骰子. 当两个骰子同时投掷时,对于出现的数字和,回答下列问题.

(1) 设出现数字和为变数,求其概率分布.

(2) 求出现数字之和的期望值.

24. 某工厂为了确定制品原料的订货量,由过去数据调查得出:

每年总卖出量为 160000kg, 一次订货费为 8000 元, 每 kg 原料单价为 200 元,一年库存保管率为 10%.

根据这一资料,试确定最佳订货量.

25. 某物品一年总卖出量为 2400 单位,每单位购入单价为 1000 元, 一次订货费为 3000 元,一年库存保管率是单价的 20%.

因物品的单价高昂,故考虑订货费用多少而决定订货时间, 即采用定期补充物品,定期订货方式来管理库存.

问物品几个月订货一次最经济.

26. 某商品 10 天卖出的状况,从过去数据知道概率分布如下表.

个数	0	1	2
概率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

库存管理方式为开始时库里有 3 个商品, 10 天后商品库存量为 0,则重新购入商品. 如果库存量还多少有一些,就下周再进货. 若用这种方式继续 30 天,问从第 20 天到 30 天之间,因库存量为 0 而缺货的概率.

其中，假定订货单发出后可立即补充商品，又各期间的需求量假定相互独立。

27. 某商店，贩卖商品 A，判断每天卖出状态时，发觉依前一天卖出状态的不同而决定下一天卖出的状态。

那么，设卖出状态为 A，B，C 三种情况，由前一天 A_{k-1}，B_{k-1}，C_{k-1} 状态判断下一天 A_k，B_k，C_k 状态，得下表中的概率。

	A_k	B_k	C_k
A_{k-1}	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$
B_{k-1}	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$
C_{k-1}	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

当今天卖出状态为 B 时，求 3 天后卖出状态为 A 的概率。

又，三天后若为状态 A 利益，则为 30000 元，状态 B 为 20000 元，状态 C 为 10000 元，求三天后利益的期望值。

——B——

28. 某食品由于气候原因，卖出的数量极端不同。希望为了下一天贩卖，而在前一天制作食品。

如果明天气候分为 A，B，C，D，E 五种状态，由过去数据得知：A，B，C，D，E 各种状态的需求量分别为 14000 个，9000 个，6000 个，5000 个，2000 个。

若明天气候状态出现的比例预想为 A:B:C:D:E =1:3:4:3:1，问这种食品制作多少个才能得到最大的利润。

其中，食品卖出一个得利益 50 元，剩下一个损失 20 元。

29. 制品B每天的需要量变化不大，采购期间顾客的需求量分布服从正态分布$N(500,40^2)$.

订货点方式由库存管理方式进行，试回答下列问题:

(1) 为使缺货危险率控制在1%以下，问安全库存量应置办多少.

(2) 问订货点应是多少.

(3) 问订货量应是多少.

其中，制品B每单位的价格为600元，每一年库存保管率为10%，一年总销售量为48000单位，一次订货费为4000元.

30. 下图表示制品F去年每月的需要量和每月的预测需要量.

期间	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月
需要量	181	186	192	195	199	201	207	213	217	220	226	235
预测量	175	195	200	196	199	192	211	217	209	216	223	238

这一制品F原价为2330元，订货费为4000元，一年库存保管率为20%，采购期间为一个月.

回答下列问题:

(1) 问去年总销售量是多少.

(2) 求订货周期.

(3) 问订货时预测需要期间是多少个月.

(4) 预测需求期间中的需要量和预测需求量之差的分布，服从正态分布$N(0,\sigma^2)$.

其中，$\sigma=1.25d$，d是预测期间中的需求量和预测量之差的绝对值的平均.

这时，问安全库存量是多少. 其中，缺货危险率在1%以下.

13. 报童卖报问题

报童卖报问题

报纸和杂志等，当天或一周内卖不完，以后就要变成废纸.

因为这种物品剩下时损失很大，所以确定库存量时，必须充分考虑卖出的利益，缺货的损失，剩下的损失.

这类问题统称为**报童卖报问题**.

由利润和亏损求最佳进货量的方法

下列的定理和系，是解决这类问题的重要线索.

定理 1:（确定进货量的方法）

下表是某商品在一定期间内卖出的个数及其概率.

个　数	0	1	2	…	k	…	n
概　率	p_0	p_1	p_2	…	p_k	…	p_n

库存管理采用如下方式:

(1) 在一定期间开始时，成批进货.

(2) 在期间内，剩余物品进行处理，不留到下一个期间.

卖出一个获利 A 元，剩下一个损失 B 元，这时，令

$$p(k)=p_0+p_1+p_2+\cdots+p_k$$

$p(k)$的值是最初超过$\frac{A}{A+B}$的值时的 k 值，即最经济的进货个数.

考虑售缺时的损失

定理 2：在上边的定理中，脱销的损失为 C 元时，则 $p(k)$的值最初超过 $\frac{A+C}{A+B+C}$的 k 值，是最经济的进货个数.

变数是连续的情况

定理 3：上边的概率分布服从正态分布 $N(m,\sigma^2)$时，概率 $p(-\infty<x<k)$的值最初超过$\frac{A+C}{A+B+C}$的值的 k 值，是最经济的进货量.

例题 18. 某商品一周内卖出的数量，由过去的资料得到下列概率分布表. 试回答下列问题：

个数	0	1	2	3	4	5
概率	0.09	0.23	0.27	0.23	0.11	0.07

(1) 卖出一个得 6 万元利润，剩下一个损失 2 万元. 问购入多少个最经济.

(2) 估计缺货的损失为 4 万元，问购入多少个最经济.

解法 (1) 由上表可作出累积概率分布，如下表.

个　数　k	0	1	2	3	4	5
累 积 概 率 $p(k)$	0.09	0.32	0.59	0.82	0.93	1.00

当卖出时得到利润A元，剩下时损失B元，只要求出当累积概率$p(k)$值，最初超过$\frac{A}{A+B}$的值时k的值，则这k值即给出的最佳进货量.

(2) 缺货时损失C元，只要求出当累积概率$p(k)$的值最初超过$\frac{A+C}{A+B+C}$的值时k的值，则这k值给出最佳进货量.

解 (1) $A=6, B=2$ $\quad \therefore \frac{A}{A+B}=\frac{6}{8}=0.75$

在上表中$p(k)$的值最初超过0.75时，k为3，即最佳进货量为3个.

(2) 因为$C=4$，所以$\frac{A+C}{A+B+C}=\frac{10}{12}\approx 0.833$

由上表得知$p(k)$的值最初超过0.833时，k为4. 于是，最佳进货量为4个.

发展题

报童卖一份20元的报纸，从过去的资料中，得知一天的销售量平均为500份，标准差为100份，近似于正态分布.

如果卖出一份利润10元，剩下一份损失5元，问一天进货多少份最经济.

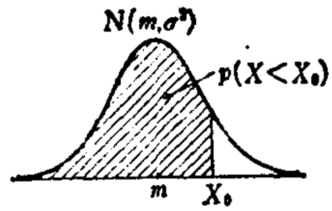
要点

报纸的销售量是离散量，不是连续量，所以销售报纸的份数的多少，若近似于正态

解 在右下边的正态分布图中，当一天报纸的销售量X，少于x_0的概率用$p(X<X_0)$表示时，则

$$p(X<X_0)=\int_{-\infty}^{x_0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx$$

分布，按右边的方法求最佳进货量较简单



所以只要求出 $p(X<X_0)$ 的值最初超过 $\frac{A}{A+B}$ 时 X_0 的值，这时 X_0 的值就是最佳进货量.

因为 $A=10, B=5$，所以 $\frac{A}{A+B}=\frac{10}{15}$

$$\approx 0.667, P(X<X_0)=0.667,\text{求}$$

X_0 即

$$p\ (X<X_0)=p\left(t<\frac{X_0-m}{\sigma}\right)=0.667$$

$$\frac{X_0-m}{\sigma}=0.43\ .$$

因为 $m=500, \sigma=100$，所以

$$X_0=m+0.43\sigma=500+0.43\times 100$$
$$=543$$

于是，进货 543 份最适宜.

练习 (答案见 135 页)

15. 某商店每月初，购入某商品贩卖. 每单位的利润为 4000 元，剩余时每单位损失 2000 元. 当商品一个月的需求量服从正态分布 $N(100, 10^2)$ 时，问一个月进货量为多少才能得到期望的利润.

习　　题（答案见156页）

（答案见156页）

——A——

31. 在某车站街头有人卖报纸．体育报每卖出一份利润7元，剩下的要削价为原价13元的2成回收．

这体育报一天卖出的份数，可由过去的数据，得下列概率分布表．问进货份数为多少才能得到最大的利润．

卖出份数	200	250	300	350	400
概　　率	0.1	0.2	0.3	0.3	0.1

32. 某书店每月初购入月刊杂志F贩卖．如果卖一册得利润120元，剩下一册损失90元．这书店从过去数据得知月刊杂志需要册数如下列概率分布．

需要数量	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
概率	0.01	0.08	0.13	0.14	0.17	0.14	0.11	0.09	0.07	0.04	0.01	0.01

问库存多少册得的利益最大．

33. 某商店每月初购入某商品贩卖．每单位利润400元，剩下的每单位损失100元．

这商品一个月需要量的分布服从正态分布 $N(2000, 200^2)$，问一个月购入多少数量得到的利润最大．

14. 模型试验

随机性变动系列与得到的方法

如果预先知道在一定期间内的需求量再来决定它的库存量就不会困难. 但是当需求量是随机性变动时，需求量的预测就非常困难.

当需求量的变动不是周期性变动和倾向性变动，而是随机性变动时，若将变动的需求量，归纳成频率分布表，就容易扑捉.

例 下列资料是某制品在一定期间内需求量变动的系列. 这种需求量的变动并非有特殊重大的原因，而可以认为是随机性变动. 为了得到变动的系列，将下列资料归纳为频率分布表.

52,	47,	50,	54,	59,	63,	67,	57,	55,	48,	54
35,	53,	58,	47,	53,	52,	61,	54,	53,	49,	46
56,	43,	57,	45,	53,	28,	42,	55,	60,	56,	61
55,	55,	51,	56,	37,	53,	51,	55,	47,	51,	52
48,	60,	44,	49,	57,	62,	40,	53,	57,	46,	57
62,	53,	57,	47,	45,	58,	48,	50,	53,	54,	44
52,	50,	55,	50,	55,	61,	47,	63,	49,	59,	54
59,	46,	56,	51,	54,	63,	53,	53,	47,	54,	38
41,	49,	57,	48,	30,	42,	56,	49,	46,	56,	60
55,	45,	47,	44,	52,	54,	59,	56,	49,	58,	43

60, 52, 58, 55, 61, 51, 50, 48, 50, 54, 56
51, 46, 46, 58, 38, 52, 55, 51, 52, 52, 42
53, 60, 45, 48, 56, 50, 46, 53, 54, 51, 47
56, 54, 54, 52, 57, 53, 43, 59, 55, 62, 50
47, 59, 66, 53, 49, 74, 53, 53, 56, 51, 49
53, 58, 44, 55, 64, 65, 65, 45, 57, 52, 46
52, 57, 48, 58, 61, 50, 55
56, 55, 48, 53, 54, 51, 56
64, 68, 54, 44, 53, 54, 58
49, 55, 47

将变动的数据归纳成频率分布表时，如果资料的数量足够大，其频率分布表可以认为表示需求量的分布．即，需求量的变动服从这种分布．

	频率		频率
以上未满		以上未满	
25～30	1	50～55	65
30～35	1	55～60	52
35～40	4	60～65	18
40～45	13	65～70	5
45～50	40	70～75	1

建立随机性变动模型

反之，对应频率分布表中各组的比率，任意取出组值，即可作成一个需求量变动的模型．

作象这样的变动，无论是随性变动还是从频率分布表得出的变动，都可以按着统计

的规则保存起来.

随机数字表查法

下面是日本工业标准协会(JIS)规定的标准随机数字表的使用方法.

(1) 规定出发点是随机的.

例如,闭上眼睛,将铅笔任意地立在随机数字表上,离铅笔最近的数字为起点,连续读出三个数字,这三个数字就是行数.[000看作1000,书末随机数字表只有1页,25行,可任意连续选二个数字,按下边(3)中的(c)来确定].其次,再将铅笔随意立到表上,依最近的数字确定列的数.(每四个数字为一组,一行10组,从左起为1～9及0号,以选出的数字的列数的左端为出发点).

(2) 读出随机数列.

一位数的原随机数列或二位数的原随机数列,必要时向右移动,到达右端后再移到下一行的左端.到达最后一行的右端后再移到最初一行的左端.

(3) 变换成指定范围内的随机数列.

(a) $N\leqslant 10$的情况,取一位数的原随机数列.超过N的越过去,将0看作10.

(b) $11\leqslant N\leqslant 20$的情况,取二位数的原随机数列,用除以20的剩余置换,超过N的数略去.

(c) $21\leqslant N\leqslant 50$($d$) $51\leqslant N\leqslant 100$时,与

(b)相同,将 00 读作 100.

(e) N 超过 100 的情况，也可按上边的标准进行.

例题 19. 下面的数列是记录一个骰子投掷 20 次的结果.

5, 3, 4, 2, 3, 6, 6, 1, 3, 2

2, 6, 4, 4, 6, 2, 6, 6, 2, 4

问投到 21 次时会出现的数字是什么?

又，用相同的方法投掷 2000 次的结果有记录时,问 2001 次会出现的数字是什么?

解法 由于随机投掷,出现的数字难以预测,但是必须预测第 21 次的结果时,可能有下列预测方法:

(1) 凭直觉回答特定的数.

(2) 随意从 1～6 的数中回答一个数.

(3) 从上边的结果预测回答.

(1) 的方法,虽然不是科学的方法,但它是以过去经验为依据的,似应受到重视.

(2) 的方法，也好象是不科学的，因为它是随意选出来的,但是从 1—5 的数字中预测的均等概率，还是切合实际的一种预测方法.

(3) 的方法,若是用,上边的结果过于资料不足. 假设从这个结果预测,常希望出现数字 6.

设 N 次试验中,某数字出现的次数为 f,则 $\frac{f}{N}$ 的值是当 N 充分大时,与某数字出现的概率 p 近似. 预测 2001 次也可用

(3)的方法，当N充分大时，为 2000 次.

解 21 次的预测，用(2)的方法. 20001 次数的预测可用(2)的方法或(3)的方法.

例题 20. 从班级 40 名学生中，任意选出 5 名接力赛选手.

解法 从 40 中任意选出 5 人的方法，可有各种各样. 最一般的选法是划拳或抽签的方法。

其它方法有：

(1) 卡片法；

(2) 随机数法；

(3) 利用随机数字表.

(1) 的方法，是把全班学生从 1 到 40 写成编号卡片，从中任意抽出 5 张，抽中的人就是选手.

(2) 的方法，是在正二十面体的各个面上记有从 0 到 9 的数共两次，投掷这两个骰子出现的数(一个作十位数，一个作个位数)，以此作为选出 5 名学生的方法.

从出现的数，选出参加的学生的号数，选法与(3)的方法相同.

(3) 的方法，是根据 JIS 标准(日本工业标准)规定的随机数法任意取出二位数.

例如：

32, 93, 06, 22, 97, 71, 78, 47, ……

因为 $N=40$，所以将上边随机数用 50 除之，使出现剩余，余数超过 40 的舍去，再舍去相同的数，或00，从剩下的选

出 5 个.

将上边随机数列处理后，得，

32, 06, 22, 21, 28, ……

解例 从随机数字表任意选出二位随机数，当 $N=40$，则

32, 06, 22, 21, 28, ……

于是选出 32 号，6 号，22 号，21 号，28 号学生.

发展题

已给出相对频率分布表如下，表示从 0 到 9 的相对频率的比率，试任意选出 20 个.

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
相对频率	0.02	0.05	0.10	0.15	0.19	0.17	0.14	0.09	0.06	0.03

要点

随机数的利用（将随机数按相对频率分布表中各组的比率分组）.

解 二位的随机数，即从 00 到 99 的100个随机数按各组的相对频率比率分成各

数	相对频率	累积相对频率	随机数
0	0.02	0.02	00～01
1	0.05	0.07	02～06
2	0.10	0.17	07～16
3	0.15	0.32	17～31
4	0.19	0.51	32～50
5	0.17	0.68	51～67
6	0.14	0.82	68～81
7	0.09	0.91	82～90
8	0.06	0.97	91～96
9	0.03	1.00	97～99

个等级．上页下表中右端一列数即分成的随机数．

任意从随机数字表中取出二位数的随机数 20 个，例如：

抽出各随机数所属的组值．

66,49,22,70,90,18,88,22,10,49, 46,51,46,12,67,33,08,69,09,12

最初的随机数 66，从上述表知这个值属于 5 的等级，于是考虑最初取出的数是5．

第二个随机数 49 是属于 4 组，于是取出的第 2 个数是 4．

以下同理，选出 20 个数．得：

5,4,3,6,7,3,7,3,2,4,4,5,4,2,6,2,2．

练习 （答案见 135 页）

16．下边的相对频率分布表，是从 3 到 9 的数相对频率的比率，试任选出 20 个．

	3	4	5	6	7	8	9
相对频率	0.07	0.13	0.17	0.21	0.18	0.14	0.10

15. 需求与库存变动的模型

模拟

新的飞机在测验飞行之前，必须进行性能检查．但是为了进行这种性能检查，使每一架飞机在空中飞行，是危险的．

飞行模拟

在这种情况下，在地面上制造与空中相同状态进行性能检查(模拟飞行)．

原子炉模拟

又，使用原子能时，也是危险的，使用模型做各种性能试验(原子炉模拟)．

为了判断各种事物的性质和性能，制作相应的模型，进行模型试验．

为此目的制作模型，叫做模拟试验．

蒙特卡路法

将做这种试验的事件，是随机性变动时，利用随机数得到统计的规律性；反之，由统计的规律性制作随机变动的事件模型．这种模拟叫作蒙特卡路法．

需求量模型

如能知道每天的需求量，则解决库存量问题就容易．

但是，实际上每天需要多少，准确地预测是较难的．

如能制作出每天需求量的模型，则对解决库存问题是便利的．

做需求量模型时，首先观察需求量的变

动，分析资料，找出随机性变动中的统计规律，这种就须引入概率概念.

根据统计的规律，用随机数字表，可作出需求量的模型.

例题 21. 每天的需求量变动不太大的商品s，一天卖出的数量可由过去 1000 天判断出来. 下表是已得到的频率分布表.

卖出数量	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	计
频率	23	64	91	132	157	199	151	118	52	13	1000

这种商品每天销售量与今后销售的情况相同. 利用上表的结果，试作出今后一个月每天销售的模型.

解法 因为观察次数 N 可以充分大，从上表作出频率分布表，可以得出一天需求量的概率分布.

卖出数量	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
相对频率概率	0.023	0.064	0.091	0.132	0.157	0.199	0.151	0.118	0.052	0.013

假设每天的需求量，服从上边的概率分布.

从 000 到 999 的 1000 个随机数，各等级的最大概率合起来分组作成下页表.

从书末随机数字表取 3 位随机数 30 个. 例如:

791,288,210,902,609,120,801,867,361,530,883,988,372, 798,230,056,466,714,881,819,977,847,206,049,390,659,200,444,524,023

最初的随机数 791 是属于右表 61 组第一天销售量模型采用 61. 又,第二个随机数 288 是属于 58 组,第二天销售量采用模型 58.

销售量	概　　率	累积概率	随　机　数
55	0.023	0.023	000～022
56	0.064	0.087	023～086
57	0.091	0.178	087～177
58	0.132	0.310	178～309
59	0.157	0.467	310～466
60	0.199	0.666	467～665
61	0.151	0.817	666～816
62	0.118	0.935	817～934
63	0.052	0.987	935～986
64	0.013	1.000	987～999

解　由表作出 30 天销售量的模型如下:

61,58,58,62,60,57,61,62,59,60,62,64,59,61,58,56, 59,61,62,62,63,62,58,56,59,60,58,59,60,56

发展题

下页表是商品 k 每天需求量,按过去的资料分析得来的概率分布.

按这一概率分布建立 50 天内每日需求量的模型,按此模型试确定每隔十天购入商品的最佳订货量.

其中,设中间缺货也不补充商品,剩下的商品留着卖.

需要数量	1	2	3	4	5	6	7
概　　率	0.01	0.04	0.07	0.09	0.11	0.13	0.15
需要数量	8	9	10	11	12	13	
概　　率	0.12	0.10	0.08	0.06	0.03	0.01	

要点

为从需求量的概率分布中取出一个需求量(对应于概率分布),将随机数按各组概率分组,将其随机数对应于概率取出来.

按取出的随机数建立需求量模型.

解 从00到99的100个随机数,对应各组的比率,分组成下表:

为建立需求量模型,从随机数字表取出50个随机数作成表. 例如:50,11,17,17,76,86,31,57,20,18,95, 60,78,46,75,88,78,28,16,84,13,52,53, 94,53,75,45,69,30,96,73,89,65,70, 31,99,17,43,48,76,45,17,75,65,57, 28,40,19,72,12

需求量	概率	累积概率	随　机　数
1	0.01	0.01	00
2	0.04	0.05	01～04
3	0.07	0.12	05～11
4	0.09	0.21	12～20
5	0.11	0.32	21～31
6	0.13	0.45	32～44
7	0.15	0.60	45～59
8	0.12	0.72	60～71
9	0.10	0.82	72～81
10	0.08	0.90	82～89
11	0.06	0.96	90～95
12	0.03	0.99	96～98
13	0.01	1.00	99

设这随机数有对应的需求,则需求

量模型为：7，3，4，4，9，10，5，7，4，4， 11，8，9，7，9，10，9，5，4，10，4，7，7，11，7， 9，7，8，5，12，9，10，8，8，5，13，4，6，7， 9，7，4，9，8，7，5，6，4，9，4

作为进货量的大致目标，采用分布的平均值.

上边概率分布的平均值为 6.85，十天内购入的个数目标为 6.85×10=68.5.

以这个值为目标，十天购入个数为 65 个，70 个，75 个时的库存量模型，可按上边的需求量模型建立，如下表.

注明购入 65，购入70，购入 75的各行，是对应各购入量的库存量模型.

年月日	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
需要模型	7	3	4	4	9	10	5	7	4	4	11	8	9	7	9	10	9	5	4	10
购入65	65										65									
	58	55	51	47	38	28	23	16	12	8	62	54	45	38	29	19	10	5	1	×
购入70	70										70									
	63	60	56	52	43	33	28	21	17	13	72	64	55	46	39	29	20	15	11	1
购入75	75										75									
	68	65	61	57	48	38	33	26	22	18	82	74	65	58	49	39	30	25	21	11
年月日	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
需要模型	4	7	7	11	7	9	7	8	5	12	9	10	8	8	5	13	4	6	7	9
购入65	65										65									
	61	54	47	36	29	20	13	5	0	×	56	46	38	30	25	12	8	2	×	×
购入70	70										70									
	67	60	53	42	35	26	19	11	6	×	61	51	43	35	30	17	13	7	×	×
购入75	75										75									
	82	75	68	57	50	41	34	26	21	9	75	65	57	49	44	31	27	21	14	5
年月日	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	×印：品切れを示す									
需要模型	7	4	9	8	7	5	6	4	9	4										
购入65	65										65									
	58	54	45	37	30	25	19	15	6	2										
购入70	70										70									
	63	59	50	42	35	30	24	20	11	7										
购入75	75										75									
	73	69	60	52	45	40	34	30	21	17										

从上边库存量模型判断:

(1) 购入 65 个,缺货过多.

(2) 购入 70 个, 剩下很少, 可能缺货.

(3) 购入 75 个,可防止缺货, 预想有剩余.

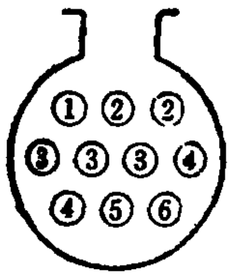
根据(1),(2),(3)三种状态,再按商店具体情况考虑购入商品 k, 即可确定最佳库存量.

习　　题（答案见156～163页）

——A——

34. 从书末的随机数字表任意取出三位随机数 20 个.

35.



球的号码	1	2	3	4	5	6
频率	1	2	3	2	1	1

罐中的 10 个球按表中频率标有数字．将罐充分振动，任意取出一个球，将球上数值记下之后再放回去，这样反复进行 30 次.

30 次取出的结果记录如下：

1，1，4，4，3，6，2，2，4，1

6，1，2，5，5，5，2，2，2，1

3，6，3，4，3，2，3，4，2，2.

问第 31 次取出的数字可能是多少.

如果将上边试验 3000 次，取出的结果为已知时，问第 3001 次取出的数字是多少.

36. 从右边的频率分布表中，将 36 到 44 的数按各组的频率比率，任意选出 30 个.

数	36	37	38	39	40	41	42	43	44
频率	2	12	17	36	39	28	9	6	1

—B—

37. 商品 S 每天需求量变化不大，一天销售量是由过去 1000 天的结果，得到右表的相对频率分布表.

此商品每天销售的动向今后也会相同. 利用右表试作出今后一个月每日销售量的模型.

销售数量	相对频率
41	0.040
42	0.060
43	0.085
44	0.115
45	0.150
46	0.165
47	0.145
48	0.120
49	0.075
50	0.045

38. 下表是商品 M 每天的需求量，是从过去资料分析得出的概率分布.

按此概率分布作出 60 天每日需求量的模型，再利用这一模型确定每隔 5 天购入物品的最佳订货量.

其中即使缺货也不补充，剩下时留着卖.

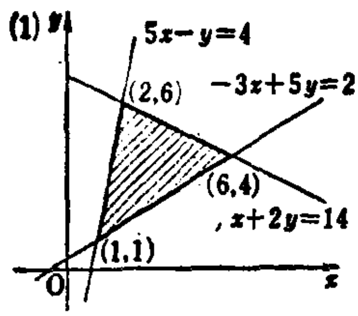
需要量	3	4	5	6	7	8	9
概率	0.01	0.08	0.13	0.14	0.17	0.14	0.11
需要量	10	11	12	13	14		
概率	0.09	0.07	0.04	0.01	0.01		

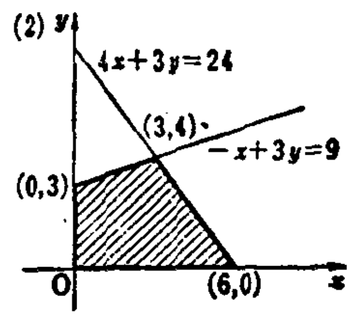
39. 某工厂附属仓库，每天入库制品 R 的数量服从正态分布 $N(400, 30^2)$，制品 R 出库量服从正态分布 $N(400, 80^2)$.

初期库存量有 640 个制品 R，以前一天入库的制品 R 和到前一天为止的库存剩余量，正好补充明天的出库量，问库存量的变动情况如何，试作出入库量和出库量的模型加以考察.

练习题答案

1.



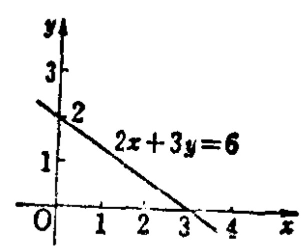


2. （1）的顶点坐标由上图得知

$$(2,6),(1,1),(6,4)$$

（2）的顶点坐标由上图得知

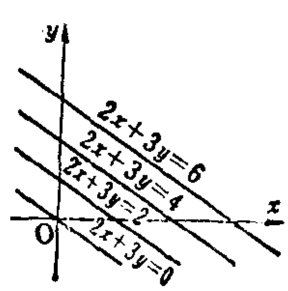
$$(0,0),(6,0),(3,4),(0,3)$$

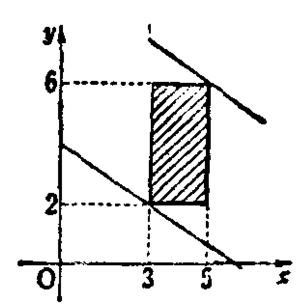


3. （1）在原式 $2x+3y$ 中，分别代入 $x=3,y=5$，得

$$2\times3+3\times5=21$$

（3）将 $2x+3y=k$ 变形，得





$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{k}{3} \qquad \cdots\cdots①$$

随着 $k=0,2,4,6$ 的增大，①式截距的值逐渐增大，如右图所示，在 y 轴正向平行移动.

(4) 区域 $\{(x,y)\,|\,3\leqslant x\leqslant 5,\ 2\leqslant y\leqslant 6\}$ 是右图画阴影的长方形的边界及内部.

直线 $2x+3y=k$ 通过区域点 $(5,6)$ 时 k 最大，最大值为 $2\times5+3\times6=28$.

在点 $(3,2)$ 处 k 最小，最小值为 $2\times3+3\times2=12$ 于是，k 的取值范围为

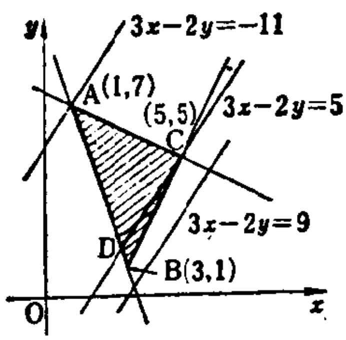
$$12\leqslant k\leqslant 28$$

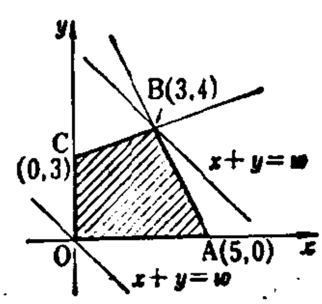
4. 区域的图形如右图的三角形 ABC.

(1) 直线 $3x-2y=5$ 的图象与区域线段 DC 相交，对于线段 DC 上的点，一次式 $3x-2y$ 的值为 5.

(2) 直线 $3x-2y=-11$ 的图象与区域的点 A 相切，对于点 $A(1,7)$，一次式 $3x-2y$ 的值为 -11.

(3) 直线 $3x-2y=9$ 的图象与区域不相交. 即在区域内的点，得不到一次式 $3x-3y$ 的值为 9 的点.





5. 区域的图形如右图四边形 $OABC$.

设一次式 $x+y$ 的值为 w，则

$$x+y=w \qquad \cdots\cdots①$$

①式是含有参数 w 的直线方程. w 值的增减如右图所示，对应区域内的点①式通过点 B 时，使 w 最大；并且，通过点 O 时使 w 最

小．于是，当通过点 $B(3, 4)$ 时得到 w 的最大值 $3+4=7$．当通过 $O(0,0)$ 时得到 w 的最小值 $0+0=0$．

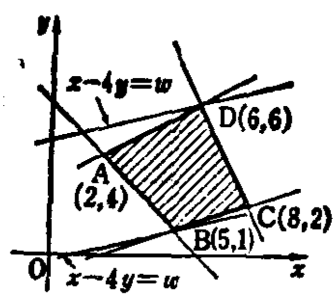
6. 区域的图形如右图的四边形 $ABCD$.

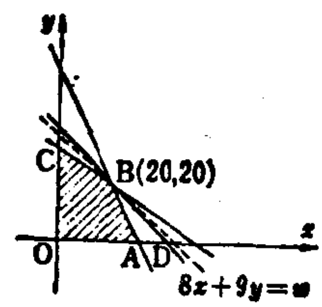
目标函数 $w=x-4y$ ……①

①式是含有参数 w 的直线方程．将①式变形，得

$$y=\frac{1}{4}x-\frac{w}{4} \qquad \cdots\cdots ②$$

从②式得知 y 的截距最大时 w 的值最小，截距最小时 w 的值最大．由图得知直线通过点 $D(6,6)$ 时 w 最小，最小值为 -18，又直线通过点 $B(5,1)$ 时 w 最大，最大值为 1.





7. 设 R,S 各为 x 单位，y 单位．

由原料 A,B,C 可能利用的约束条件，得

$2x+3y\leqslant 100$…………………(约束原料 A)

$x+y\leqslant 40$ …………………(约束原料 B)

$4x+2y\leqslant 120$…………………(约束原料 C)

设目标函数为 w，则

$$w=8x+9y$$

对这个问题可归结为下边的线性规划问题．

约束条件

$$\begin{cases}2x+3y\leqslant 100\\ x+y\leqslant 40\\ 4x+2y\leqslant 120\end{cases}$$

目标函数

$$w=8x+9y$$

求 w 最大时 x,y 的值及 w 的最大值.

由约束条件可得区域的图形如下图四边形 $OABC$.

目标函数 $8x+9y=w$ ……①

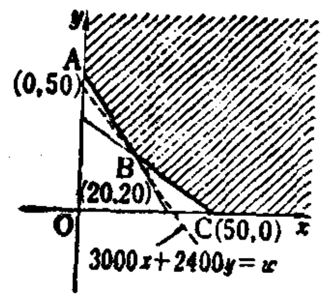
①式是含有参数 w 的直线方程. 如右图知① 式通过点 $B(20, 20)$ 时 w 的值最大. 于是, $x=20$, $y=20$ 时 w 的值最大, 最大值为

$$8\times20+9\times20=340.$$

8. 设购进牛肉、猪肉的数量各为 x, y 公斤. 这个问题可归结为下边的线性规则问题.

约束条件

$$\begin{cases}0.4x+0.6y\geqslant0.10\times200\\0.6x+0.4y\geqslant0.10\times200\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}2x+3y\geqslant100\\3x+2y\geqslant100\end{cases}$$



目标函数

$$w=3000x+2400y$$

求 w 最小时 x,y 的值.

约束条件的区域如右图的阴影部分.

将目标函数的斜率 m 和直线 AB 的斜率 m_1, 直线 BC 的斜率 m_2 进行比较, 得

$m=-1.25$, $m_1=-1.5$, $m_2\approx-0.67$ 所以

$$m_1<m<m_2.$$

直线 $3000x+2400y=w$ 与区域上点 B 相切, 在切点 B w 的值为最小. 所以 $x=20$ 公斤, $y=20$ 公斤

9. (1) 设 A, B 各为 x 单位, y 单位, 这个问题可归结为下边的线性规划问题:

约束条件

$$\begin{cases}3x+13y\leqslant3900\\13x+12y\leqslant4930\\7x+5y\leqslant2450\end{cases}$$

目标函数 $w=350x+480y$

求 w 最大时 x,y 的值及 w 的最大值.

所求最合适的解为 $x=130, y=270$，这时 w 的值最大，最大值为 $350\times130+480\times270=175100$（日元）

(2) 工程 T_2 的劳动力为 500 人，与工程 T_2 可能利用的劳动力为 4430 人. 于是，可归结为下边的线性规划问题：

约束条件

$$\begin{cases}3x+13y\leqslant3900\\13x+12y\leqslant4430\\7x+5y\leqslant2450\end{cases}$$

目标函数 $\quad w'=350x+480y$

求 w' 最大时 x, y 的值及 w' 的最大值.

求最合适的解，当 $x=\dfrac{10790}{133}, y=\dfrac{37410}{133}$ 时 w' 最大. 最大值为

$$350\times\frac{10790}{133}+480\times\frac{37410}{133}=\frac{21733300}{133}=163408.3$$

于是，减少利益 $175100-163408.3=11691.7$ 日元.

10. 设频率分布表各组的组值为 x_i，设 x_i 的频率为 f_i，则平均值 X，标准偏差 S 可由下式求出.

x_i	f_i	x_if_i	$x_i^2f_i$
1.65	2	3.30	5.45
2.15	3	6.45	13.87
2.65	20	53.00	140.45
3.15	9	28.35	89.30
3.65	8	29.20	106.58
4.15	3	12.45	51.67

$$X=\frac{1}{N}\cdot(x_1\cdot f_1+x_2\cdot f_2+x_3\cdot f_3+x_4\cdot f_4+x_5\cdot f_5+x_6\cdot f_6)$$

$$S^2=\frac{1}{N}\cdot(x_1^2\cdot f_1+x_2^2\cdot f_2+x_3^2\cdot f_3+x_4^2\cdot f_4+x_5^2\cdot f_5+x_6^2\cdot f_6)-X^2$$

其中，$N=f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6$

$$\bar{X}=\frac{1}{45}\times 132.75=2.95$$

$$S^2=\frac{1}{45}\times 407.32-2.95^2$$

$$=9.052-8.703=0.349$$

$$S\approx 0.59$$

11. (1) $P(164<x<184)=P\left(\frac{164-164}{20}<t<\frac{184-164}{20}\right)$

$$=P(0<t<1)=\varphi(1)=0.3413$$

(2) $P(204<x)=P\left(\frac{204-164}{20}<t\right)$

$$=P(2<t)=0.5-\varphi(2)$$

$$=0.5-0.4772=0.0228$$

(3) $P(124<x<204)=P\left(\frac{124-164}{20}<t<\frac{204-164}{20}\right)$

$$=P(-2<t<2)=2P(0<t<2)$$

$$=2\varphi(2)=2\times 0.4772$$

$$=0.9544$$

(4) $P(a<x)=P\left(\frac{a-164}{20}<t\right)$

$$=0.5-P\left(0<t<\frac{a-164}{20}\right)$$

$$=0.5-\varphi\left(\frac{a-164}{20}\right)=0.1$$

$\therefore\quad \varphi\left(\frac{a-164}{20}\right)=0.4$，由书末正态分布表得

$$\frac{a-164}{20}=1.28$$

$\therefore\quad a=164+1.28\times 20=189.6$

12. 每天的需求是独立的，一天需求量的分布，服从正态分布 $N(m, \sigma^2)$，K 日间总需求量的分布，服从正态分布 $N(Km, K\sigma^2)$.

(1) $m=400, \sigma=30, K=10$，所以 10 日间需求量的分布，服从正态分布 $N(4000, 9000)$.

(2) $m=400, \sigma=30, K=7$，所以一周间需求量的分布，服从正态分布 $N(2000, 6300)$.

13. 需求量服从正态分布 $N(m, \sigma^2)$，月初库存量 A 包含预备库存量，即

$$A=m+3\sigma$$

因为 $m=800, \sigma=60$，所以

$$A=800+3\times 60=980$$

14. 在最佳订货量公式

$$Q=\sqrt{\frac{2RC_0}{Pi}}$$

中，$R=14000, C_0=2000, P=180, i=0.1$　所以

$$Q=\sqrt{\frac{2\times 14000\times 2000}{180\times 0.1}}\approx 1764$$

15. $A=4000, B=2000$，所以

$$\frac{A}{A+B}=\frac{4000}{6000}=0.667$$

由正态分布 $N(100, 10^2)$，得 $P(x<x_0)=0.667$，所以 x_0 可以求出，即

$$\frac{x_0-100}{10}=0.43 \qquad \therefore \quad x_0=104.3$$

16. 二位随机数，即，从 00 到 99 共 100 个随机数，比较各等级的相对频率，将各等级分成组．右表右编的数列是分成组的随机数．

从随机数字表任意取出二位随机数 20 个．

66, 42, 03, 55, 48, 78, 18, 24, 02, 32,

88, 65, 68, 80, 00, 66, 49, 22, 70, 90

已经选出的这些随机数对应的等级数为

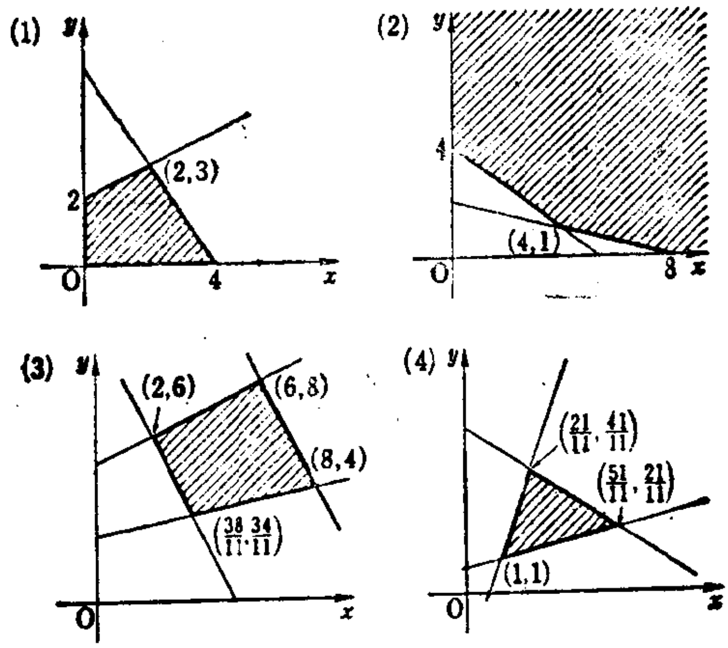
7, 6, 3, 6, 6, 8, 4, 5, 3, 5

8, 7, 7, 8, 3, 7, 6, 5, 7, 9

数	相对频率	累积相对频率	随 机 数
3	0.07	0.07	00～06
4	0.13	0.20	07～19
5	0.17	0.37	20～36
6	0.21	0.58	37～57
7	0.18	0.76	58～75
8	0.14	0.90	76～89
9	0.10	1.00	90～99

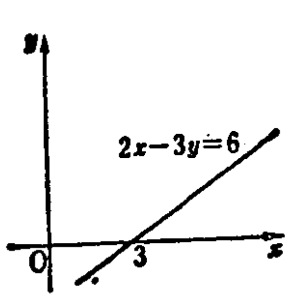
习 题 答 案

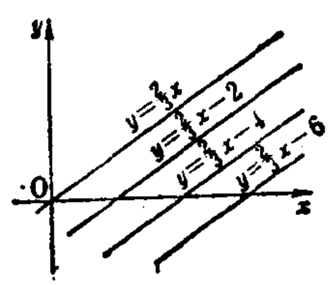
1. (1) $y=-\frac{3}{2}x+6$ 的下方，$y=\frac{x}{2}+2$ 的下方，x 轴，y 轴的正向所围成的部分．(2)～(4)与(1)同样，论意，不等号的方向确定区域．各图象如下所示．(全部包含边界)



2. (1) 将 $x=3, y=2$ 代(2)入原式 $2x-3y$ 得

$$2\times3-3\times2=0$$





(3) 将 $2x-3y=k$ 变形，

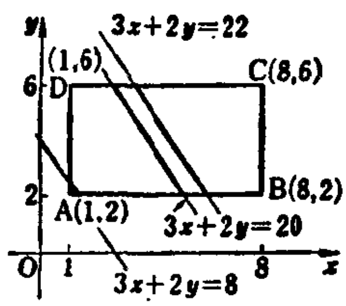
$$y=\frac{2}{3}x-\frac{k}{3} \qquad \cdots\cdots①$$

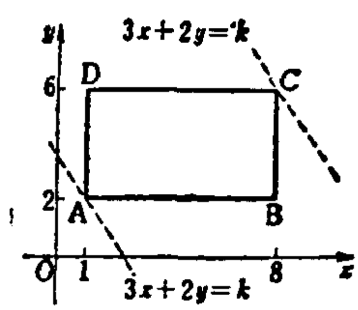
随着 $k=0,6,12,18$ 逐渐增大，① 式的截距渐渐变小，如上页图所示，向 y 轴负的方向平行移动.

3. (1) 将 $3x+2y=k$ 变形，得

$$y=-\frac{3}{2}x+\frac{k}{2} \qquad \cdots\cdots①$$

将 $K=22,20,8$ 代入 ① 式. 如图所示，所得到直线与区域相交的线段，就是所求点的集合.





(2) 如右图所示，$3x+2y=k$ 与区域 D 相切，得切点 $A(1,2)$ 和切点 $C(8,6)$.

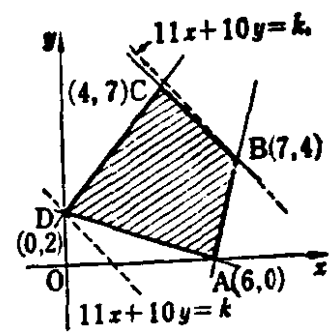
在 A 点 $(1,2)$ 处 k 值为

$$3\times1+2\times2=7$$

在点 $C(8,6)$ 处 k 值为

$$3\times8+2\times6=36$$

(3) 由(2)知，$7\leqslant k\leqslant36$



4. 区域如右图所表示的四边形 $ABCD$.

$$11x+10y=k \qquad \cdots\cdots①$$

①式是以 k 为参数 k 的直线方程.

k 值的增减，如右图所示，对区域内的点，① 式通过点 B 时 k 最大，通过点 D 时 k 最小.

当点为 $B(7,4)$ 时得 k 的最大值为 $11\times7+10\times4=117$

当点为 $D(0,2)$ 时得 k 的最小值为 $11\times0+10\times2=20$

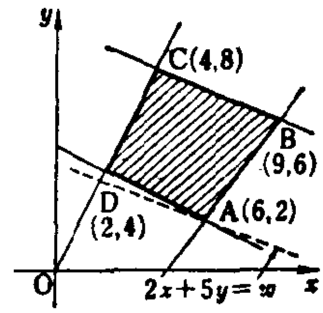
5. 区域如右图所示的四边形 $ABCD$.

$$2x+5y=w \qquad \cdots\cdots①$$

①式是含有参数K的直线方程.

w值的增减，由右图所示，对区域内的点，①式通过点 $A(6,2)$ 时 w 最小. 于是当 $x=6, y=2$ 时 w 最小，最小值为

$$2\times6+5\times2=22$$



6. 由①、②式，变数 x, y 用 z 表示.

$$y=11-2z \qquad ④$$

$$x=1+z \qquad ⑤$$

将④，⑤代入③得

$$w=25-6z \qquad ⑥$$

由⑥ 式知，z 不能是负数，当 $z=0$ 时 w 最大. 将 $z=0$ 代入④，⑤，⑥，当 $x=1, y=11, z=0$ 时，w 最大，最大值为 25.

7. 用松弛变数 x_1, x_2 表示，得

约束条件

$$\begin{cases}-x+3y+x_1 \quad =9\\ x+y+x_2 \qquad =7\end{cases}$$

目标函数 $\qquad w=x+3y+0\cdot x_1+0\cdot x_2$

用下边一连串的单纯形表求最合适的解.

代替

			1	3	0	0	
			x	y	x_1	x_2	
x_1	0	9	−1	$\boxed{3}$	1	0	$\boxed{3}$
x_2	0	7	1	1	0	1	7
			0	0	0	0	
	w	0	1	$\boxed{3}$	0	0	

	代替		1	3	0	0	
			x	y	x_1	x_2	
y	3	3	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	-9
x_2	0	4	$\boxed{\frac{4}{3}}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\boxed{3}$
			-1	3	1	0	
	w	9	$\boxed{2}$	0	-1	0	

			1	3	0	0
			x	y	x_1	x_2
y	3	4	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
x	1	3	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
			1	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
	w	15	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$

从最后的表得知，$x=3$，$y=4$ 时 w 最大，最大值为 15 .

8. 用松弛变数 x_1, x_2, x_3 表示，得

约束条件

$$\begin{cases} -2x+3y+x_1 \qquad\quad =5 & ① \\ 2x+3y \qquad\quad +x_2=27 & ② \\ 5x+2y \qquad\quad +x_3=40 & ③ \end{cases}$$

目标函数 $\quad w=4x+5y+0x_1+0x_2+0x_3 \qquad ④$

下表所示，作一连串的单纯形表，求出最合适的解.

			4	5	0	0	0		
			x	y	x_1	x_2	x_3		
x_1	0	5	-2	$\boxed{3}$	1	0	0	$\boxed{\frac{5}{3}}$	
x_2	0	27	2	3	0	1	0	9	
x_3	0	40	5	2	0	0	1	20	
			0	0	0	0	0		
		0	4	$\boxed{5}$	0	0	0		

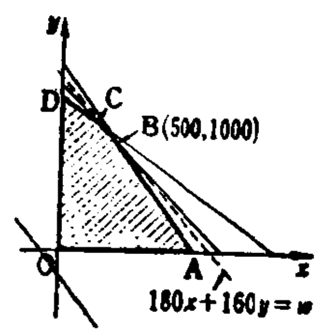
			4	5	0	0	0		
			x	y	x_1	x_2	x_3		
y	5	$\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{5}{2}$	×
x_2	0	22	$\boxed{4}$	0	-1	1	0	$\boxed{\frac{11}{2}}$	
x_3	0	$\frac{110}{3}$	$\frac{19}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	0	1	$\frac{110}{19}$	
			$-\frac{10}{3}$	5	$\frac{5}{3}$	0	0		
		$\frac{25}{3}$	$\boxed{\frac{22}{3}}$	0	$-\frac{5}{3}$	0	0		

			4	5	0	0	0		
			x	y	x_1	x_2	x_3		
y	5	$\frac{16}{3}$	0	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	32	
x	4	$\frac{11}{2}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	-22	×
x_3	0	$\frac{11}{6}$	0	0	$\boxed{\frac{11}{12}}$	$-\frac{19}{12}$	1	$\boxed{2}$	
			4	5	$-\frac{1}{6}$	$\frac{11}{6}$	0		
	w	$\frac{146}{3}$	0	0	$\boxed{\frac{1}{6}}$	$-\frac{11}{6}$	0		

			4	5	0	0	0		
			x	y	x_1	x_2	x_3		
y	5	5	0	1	0	$\frac{5}{11}$	$-\frac{2}{11}$		
x	4	6	1	0	0	$-\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$		
x_1	0	2	0	0	1	$-\frac{19}{11}$	$\frac{12}{11}$		
			4	5	0	$\frac{17}{11}$	$\frac{2}{11}$		
		49	0	0	0	$-\frac{17}{11}$	$-\frac{2}{11}$		

由上边最后的表可知 $x=6, y=5$ 时 w 最大，最大值为 49.

9. 设制品 A, B 各为 x 单位、y 单位，这个问题可归结为下列线性规划问题.



约束条件

$$\begin{cases} 0.08x+0.06y \leqslant 100 \\ 0.05x+0.07y \leqslant 100 \\ x+\quad y \leqslant 1500 \end{cases}$$

目标函数 $\qquad w=180x+160y$

约束条件的区域是右图阴影部分.

比较目标函数的斜率 m 和直线 AB 的斜率 m_1，直线 BC 的斜率 m_2 得

$$m \approx -1.12, \qquad m_1 \approx -1.33,$$

$$m_2 \approx -1, \qquad m_1 < m < m_2$$

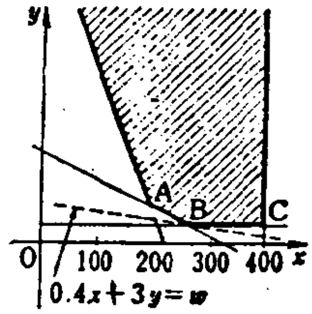
因此，直线 $180x+160y=w$ 在点 $B(500, 1000)$ 处与区域相切，在点 B, w 的值最大.

$$x=500, \qquad y=1000$$

w 的最大值为 $180\times500+160\times1000=250000$.

10. 设使用面粉、肉类各为 x,y 吨，这个问题可归结为下列线性规划问题：

约束条件
$$\begin{cases}4x+1.5y\geqslant 850\\0.1x+0.2y\geqslant 32\\x\leqslant 400\\y\geqslant 30\end{cases}$$



目标函数 $w=0.4x+3y$

求 w 最小时 x,y 的值.

约束条件的区域如右图阴影部分所示.

比较目标函数的斜率 m 与直线 AB 的斜率 m_1，直线 BC 的斜率 m_2 得

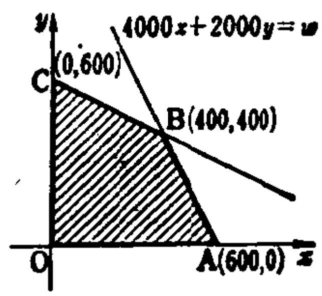
$$m=-\frac{2}{15},m_1=-0.5,m_2=0,m_1<m<m_2.$$

直线 $0.4x+3y=w$ 在点 $B(260,30)$ 与区域相切，在点 B w 的值最小．即 $x=260,y=30$.

11. 设制品 A,B 各为 x,y 个，这个问题可归结为下列线性规划问题：

约束条件

$$\begin{cases}x+2y\leqslant 1200\\2x+y\leqslant 1200\end{cases}$$



目标函数 $w=4000x+2000y$

求 w 最大时 x,y 的值.

约束条件的区域是右图四边形 $OABC$.

目标函数

$$4000x+2000y=w \qquad ①$$

①式是含有参数 w 的直线方程．由图知①式与线段 AB 重合时 w 的值最大．即由题意知在区域线段 AB 上任何的点都可以使 w 的值最大，制品 B 最多，即选取 y 值最大的点时可以使 w 的值最大．该点为 $B(400,400)$．$x=400,y=400$.

12. (1) 设制品 A,B 各为 x,y 单位，则

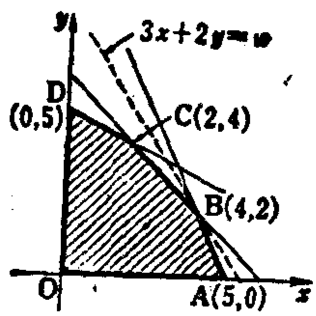
约束条件 $\begin{cases} x+y\leqslant 6 \\ 2x+y\leqslant 10 \\ x+2y\leqslant 10 \end{cases}$

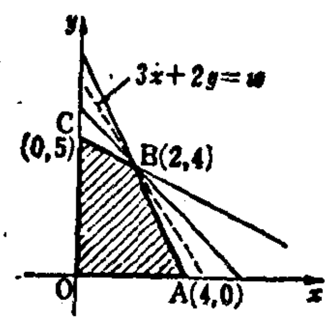
目标函数 $w=3x+2y$

求 w 最大时 x,y 的值及 w 的最大值.

约束条件的区域如右图所示的五边形 $OABCD$.

当直线 $3x+2y=w$ 通过点 B 时，w 的值最大. $x=4$，$y=2$ 得 w 的最大值为 $3\times4+2\times2=16$.





(2) 设制品 A，B 各为 x，y 单位，则可能利用的设备减少 8，所以

约束条件 $\begin{cases} x+y\leqslant 6 \\ 2x+y\leqslant 8 \\ x+2y\leqslant 10 \end{cases}$

目标函数 $w'=3x+2y$

求 w' 最大时 x,y 的值及 w' 的最大值.

约束条件的区域如右图所示的四边形$OABC$.

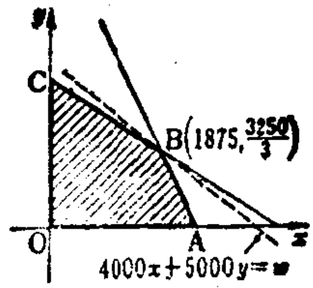
当直线$3x+2y=w'$ 通过点 B 时，w' 的值最大. $x=2,y=4$，w' 的最大值为

$$3\times2+2\times4=14,$$

由(1)，(2)得最合适的解，可能利用的设备从 10 减到 8，最大利益从 16 减到 14. 即减少 2 万日元的利润.

13. 设制品A，B各为 x 台，y 台，则

约束条件 $\begin{cases} 6x+9y\leqslant 21000 \\ 12x+6y\leqslant 29000 \end{cases}$



目标函数　　　$w=4000x+5000y$

求 w 最大时 x, y 的值.

约束条件的区域如右图所示的四边形 $OABC$.

直线 $4000x+5000y=w$ 在点 $B\left(1875,\ \frac{3250}{3}\right)$ 与区域相切时 w 的值最大. 于是

$$x=1875,\ y=\frac{3250}{3}\approx 1083.3.$$

因为 x, y 必须是整数,所以 $x=1845, y=1083$

w 的最大值为 $4000\times1875+5000\times1083=12915000$.

14. 由各工厂向各市场运输制品.

数量按右表确定.

约束条件

$$\begin{cases} x_{11} \quad\quad +x_{21} \quad\quad =30 & ① \\ \quad x_{12} \quad\quad +x_{22} =40 & ② \\ x_{11}+x_{12} \quad\quad\quad =20 & ③ \end{cases}$$

$(x_{21}+x_{22}=50)$.

	P_1	P_2	
M_1	x_{11}	x_{12}	20
M_2	x_{21}	x_{22}	50
	30	40	

目标函数

$$w=3x_{11}+4x_{12}+4x_{21}+2x_{22} \quad ④$$

将①,②,③式中的 x_{11},x_{21},x_{22} 用 x_{12} 表示,代入④式得

$x_{11}=20-x_{12}, x_{21}=10+x_{12}, x_{22}=40-x_{12}$

$$w=180+3x_{12}.$$

因为变数 x_{12} 为非负数,所以当 $x_{12}=0$ 时 w 最小.

于是,$x_{11}=20, x_{12}=0$, $x_{21}=10$, $x_{22}=40$ 时 w 最小, 最小值为 180.

15. $\bar{X}=\frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot f_i$

$S^2=\frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2\cdot f_i-\bar{X}^2$

$N=210$, $\sum_{i=1}^{n}x_i f_i=17052$

x	f	xf	x^2f
71	3	213	15123
74	13	962	71188
77	42	3234	249018
80	55	4400	352000
83	49	4067	337561
86	36	3096	266256
89	8	712	63368
92	4	368	33856
	210	17052	1388370

$\sum_{i=1}^{n}x_i^2\cdot f_i=1388370$ 所以

$\bar{X}=\frac{1}{210}\times 17052=81.2$

$$S^2=\frac{1}{210}\times 1388370-81.2^2=17.8457$$

$\therefore \quad S\approx 4.2.$

16. 设资料全体的个数为 N，平均值为 $\bar{X}$，标准差为 S，为了求资料 x 与平均值 $\bar{X}$ 的偏差 $|X-\bar{X}|$ 在 as 以上的资料个数 n，由切比谢夫不等式

$$n\leqslant\frac{1}{a^2}N \qquad ①$$

即由 $|x-120|\geqslant 24$，可以求出资料的个数 n，利用①式，由 $N=50, a=2$ 得

$$n\leqslant\frac{1}{4}\times 50=12.5$$

于是，可考虑在 12 个以下.

17.

(1) $P(50\leqslant x\leqslant 65)=P\left(\frac{50-50}{15}<t<\frac{65-50}{15}\right)$

$=P(0<t<1)$

$=\phi(1)=0.3413.$

(2) $P(76\leqslant x\leqslant 124)=P\left(\frac{76-100}{20}<t<\frac{124-100}{20}\right)$

$=P(-1.2<t<1.2)$

$=2\cdot P(0<t<1.2)$

$=2\cdot\phi(1.2)=2\times 0.3849$

$=0.7698.$

(3) $P(|x-500|\geqslant 60)=P\left(|t|\geqslant\frac{560-500}{30}\right)$

$=P(|t|\geqslant 2)=2\cdot P(t\geqslant 2)$

$=2\cdot(0.5-P(0<t<2))$

$=1-2\cdot\phi(2)$

$=1-2\times 0.4772$

$=0.0456.$

18. (1)每天的需求是独立的，一天需求量的分布服从正态分布 $N(m,\sigma^2)$，K 日间总需求量的分布服从正态分布 $N(Km, K\sigma^2)$. 因为 $m=60$，$\sigma=10$，$K=30$，所以一个月总需求量的分布为 $N(1800, 3000)$.

(2) 需求量服从正态分布 $N(m,\sigma^2)$，月初库存量 A 包含预备库存量，即 $A=m+3\sigma$，因为 $m=1800$，$\sigma=\sqrt{3000}\approx54.8$，所以

$$A=1800+3\times54.8=1964.4.$$

19. 当一个月总需求量为 x，月初库存量为 x_0，当 $x>x_0$ 时就要缺货.

需求量的分布服从正态分布 $N(1200,100^2)$ 时，即

$$P(x>x_0)\leqslant0.1$$

x_0 可以求出. 即，

$$P\left(\frac{x-1200}{100}>\frac{x_0-1200}{100}\right)=0.1$$

$$\frac{x_0-1200}{100}=1.28,\qquad\therefore\quad x_0=1328.$$

20. (1) 每天的出库量是独立的，K 日间出库量的分布为 $N(Km, K\sigma^2)$，

$$m=8000,\sigma=1200,K=10.$$

10 日间出库量的分布服从正态分布 $N(80000, 14400000)$

(2) 10 日间生产量的分布 $N(Km,K\sigma^2)$ 为

$$m=8000,\sigma=200,K=10.$$

10 日间库存量分布为 $N(m_2-m_1,\sigma_2^2+\sigma_1^2)$，因为

$$m_2=80000,\quad \sigma_2^2=14400000$$

$$m_1=80000,\quad \sigma_1^2=400000$$

所以，生产量的分布服从正态分布 $N(0.14800000)$.

(3) 库存量服从正态分布 $N(m,\sigma^2)$ 时，10 日间开始时准备的库存量 A，为了将缺货危险率控制在 1% 以下，预备库存量为

$$A=3\sigma$$

由(2)得 $\sigma^2=14800000$，$\sigma\approx3847$，所以

$$A=3\times3847=11541.$$

21. (1) 一周间总需求量的分布，由一天需求量分布 $N(m, \sigma^2)$ 得 $N(7m, 7\sigma^2)$，因为 $m=300$，$\sigma=40$，所以一周间总需求量的分布为 $N(2100, 11200)=N(2100, 105.8^2)$

设一周间总需求量为 x，一周间库存量为 x_0，因为

$P(x>x_0)\leqslant 0.1$ 所以 x_0 可以求出，即

$P(x>x_0)=0.1$，求 x_0，得

$$P\left(\frac{x-2100}{105.8}>\frac{x_0-2100}{105.8}\right)=0.1.$$

由书末正态分布表，得

$$\frac{x_0-2100}{105.8}=1.28.$$

$x_0=2100+1.28\times 105.8\approx 2235.4$

为将缺货危险率控制在 10% 以下，周初备货 2235 即可.

(2) 设一周间总需求量为 x，当

$x>2200$ 时售缺，当 $x<2200$ 时积压

$$\begin{aligned} p(x>2200) &= p\left(t>\frac{2200-2100}{105.8}\right) \\ &\approx p(t>0.95) \\ &= 0.5-p(0<t<0.95) \\ &= 0.5-0.3289=0.1711 \end{aligned}$$

$p(x<2200)=1-p(x>2200)=1-0.1711=0.8289.$

22. $\bar{x}=\dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i f_i$

$$s^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 f_i-\bar{x}^2$$

$$N=100, \sum_{i=1}^{n}x_i f_i=50300.$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2 f_i=25319700$$

$$\bar{x}=\frac{1}{100}\times 50300=503$$

x	f	xf	x^2f
475	4	1900	902500
485	14	6790	3293150
495	22	10890	5390550
505	32	16160	8160800
515	18	9270	4774050
525	6	3150	1653750
535	4	2140	114490
	100	50300	25369700

$$s^2=\frac{1}{100}\times 25319700-503^2=188 \qquad \therefore s\approx 13.7$$

进货量为 $\bar{x}+3s$，因为 $\bar{x}=503$，$s=13.7$，所以

$$\bar{x}+3\cdot s=503+3\times 13.7=544.1.$$

23. (1)

数字的和	2	3	4	5	6	7	8
概　　率	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

(2) $$E(x)=2\times\frac{1}{16}+3\times\frac{2}{16}+4\times\frac{3}{16}+5\times\frac{4}{16}+6\times\frac{3}{16}+7\times\frac{2}{16}+8\times\frac{1}{16}=5.$$

24. 最佳订货量公式为

$$Q=\sqrt{\frac{2RC_o}{pi}}$$

因为 $R=160000$，$C_o=8000$，$p=200$，$i=0.1$ 所以

$$Q=\sqrt{\frac{2\times 160000\times 8000}{200\times 0.1}}=11314.$$

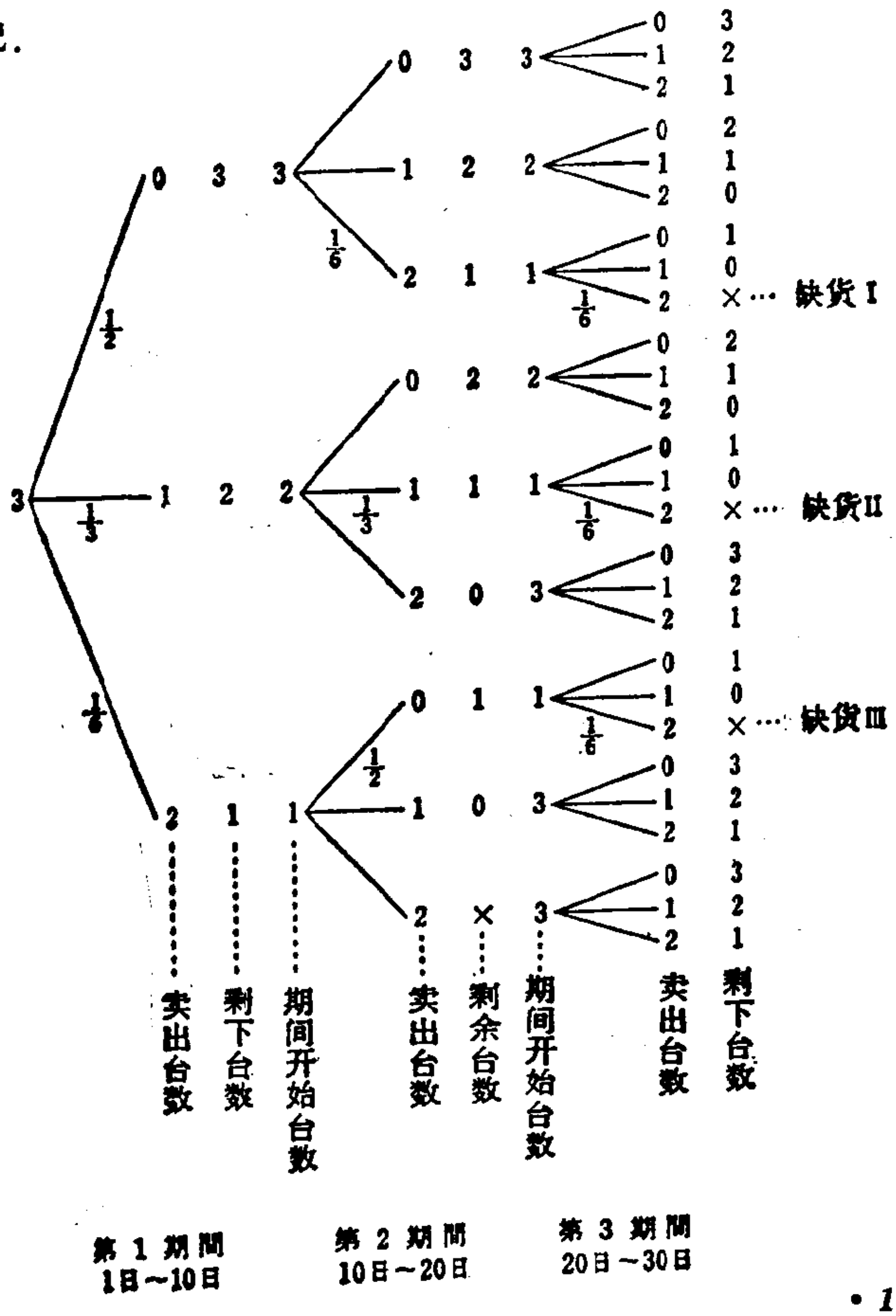
25. 订货间期公式为

$$n=\sqrt{\frac{288C_o}{Rpi}}$$

因为 $R=2400, p=1000, C_o=3000, i=0.2$ 所以

$$n=\sqrt{\frac{288\times3000}{2400\times1000\times0.2}}\approx1.34\text{ 个月}\approx40\text{日}.$$

26. 由下面树形图，考虑到 20～30 天的第 3 个期间售缺会有三种情况.



各种情况的概率由各分支概率之积可以求出.

$$p(\mathrm{I})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$$

$$p(\mathrm{II})=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}$$

$$p(\mathrm{III})=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}$$

所求概率 $p(s)=p(\mathrm{I})+p(\mathrm{II})+p(\mathrm{III})$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$$

$$\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}$$

$$=\frac{5}{108}\approx0.0463.$$

27. 由下页树形图，考虑到3日后A的状态会有9种情况. 这些事件的概率，由各分支概率之积可以求出.

所求概率

$$p(A)=p(\mathrm{I})+p(\mathrm{II})+p(\mathrm{III})+p(\mathrm{IV})+p(\mathrm{V})+p(\mathrm{VI})$$

$$+p(\mathrm{VII})+p(\mathrm{VIII})+p(\mathrm{IX})$$

$$=\frac{1}{8}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{12}\times\frac{2}{5}$$

$$+\frac{3}{8}\times\frac{1}{8}\times\frac{2}{8}+\frac{3}{8}\times\frac{3}{8}\times\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\times\frac{4}{8}\times\frac{2}{5}$$

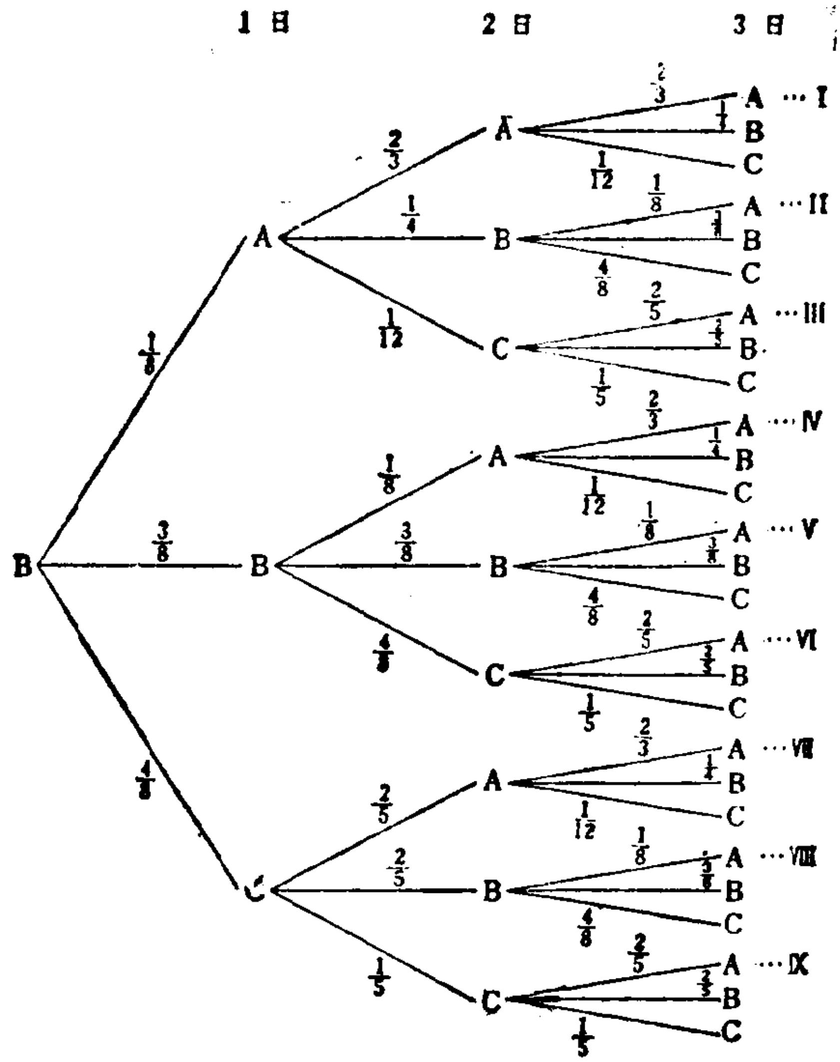
$$+\frac{4}{8}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{3}+\frac{4}{8}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{8}+\frac{4}{8}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}$$

$$=\frac{44443}{115200}.$$

同理，$p(B)=\frac{4239}{12800}, p(c)=\frac{16807}{57600}.$

期望值 $E(x)=3000\times\frac{44443}{115200}+20000\times\frac{4239}{12800}$

$$+10000\times\frac{16807}{57600}\approx21115.$$



28. 令前一天购置商品为 x 个，则利润的期望值 $E(x)$ 为

(1) $9000 \leqslant x \leqslant 14000$,

$$E(x)=50\times x\times\frac{1}{12}+[50\times 9000-20\times(x-9000)]$$

$$\times\frac{1}{4}+[50\times 6000-20\times(x-6000)]$$

$$\times\frac{1}{3}+[50\times 5000-20\times(x-5000)]$$

$$\times\frac{1}{4}+[50\times 2000-20\times(x-2000)]\times\frac{1}{12}$$

$$=-\frac{85}{6}x+\frac{1190000}{3}.$$

(2) $6000\leqslant x\leqslant 9000$.

$$E(x)=50\times x\times\frac{1}{12}+50\times x\times\frac{3}{12}+[50\times 6000-20\times(x-6000)]\times\frac{4}{12}+[50\times 5000-20\times(x-5000)]\times\frac{3}{12}+[50\times 2000-20\times(x-2000)]\times\frac{1}{12}=\frac{10}{3}x+\frac{717500}{3}.$$

(3) $5000\leqslant x\leqslant 6000$,

$$E(x)=50\times x\times\frac{1}{12}+50\times x\times\frac{3}{12}+50\times x\times\frac{4}{12}+[50\times 5000-20\times(x-5000)]\times\frac{3}{42}+[50\times 2000-20\times(x-2000)]\times\frac{1}{12}=\frac{80}{3}x+\frac{297500}{3}.$$

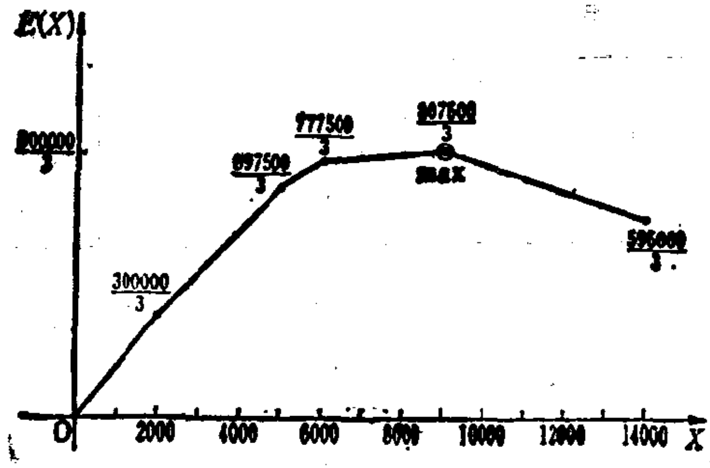
(4) $2000\leqslant x\leqslant 5000$,

$$E(x)=50\times x\times\frac{1}{12}+50\times x\times\frac{3}{12}+50\times x\times\frac{4}{12}+50\times x\times\frac{3}{12}+[50\times 2000-20\times(x-2000)]\times\frac{1}{12}=\frac{265}{6}x+\frac{35000}{3}.$$

(5) $0\leqslant x\leqslant 2000$,

$$E(x)=50\times x\times\frac{1}{12}+50\times x\times\frac{3}{12}+50\times x\times\frac{4}{12}+50\times x\times\frac{3}{12}+50\times x\times\frac{1}{12}=50x.$$

由下页图得知，当 $x=9000$ 时，期望值最大。



29. (1) 安全库存量为 3σ, 因为 $\sigma=40$, 所以

$$3\sigma=3\times40=120.$$

(2) 订货点为 $m+3\sigma$, 因为 $m=500,\sigma=40$, 所以

$$m+3\sigma=500+3\times40=620.$$

(3) 最佳订货量公式为

$$Q=\sqrt{\frac{2RC_0}{pi}}$$

因为 $R=48000, C_0=4000, p=600, i=0.1$ 所以

$$Q=\sqrt{\frac{2\times48000\times4000}{600\times0.1}}=800\sqrt{10}\approx2529.8$$

30. (1) 全年总销售量为

$R=181+186+192+195+199+201+207+213+217$
$+220+226+235=2472.$

(2) 订货周期公式为

$$n=\sqrt{\frac{288C_0}{Rpi}}$$

因为 $R=2472, C_0=40000, p=2330, i=0.2$ 所以

$$n=\sqrt{\frac{288\times4000}{2472\times2330\times0.2}}=1$$

(3) 预测需求期间＝采购期间＋订货周期＝1＋1＝2.

	1～2月	2～3月	3～4月	4～5月	5～6月	6～7月	7～8月	8～9月	9～10月	10～11月	11～12月	d
每2个月的需求量与预测量之差	−3	−17	−9	−1	9	5	−8	4	12	7	0	6.8

由上表，$1.25d=8.5$，安全率存量 $3\sigma=3\times8.5=25.5$

31. $A=7, B=13\times(1-0.2)=10.4$

$$\frac{A}{A+B}=\frac{7}{17.4}\approx0.4$$

累积概率 $p(k)$ 即　$p(250)=0.3, p(300)=0.6$

购入 300 部即可.

32. $A=120, B=90, \frac{A}{A+B}=\frac{120}{210}\approx0.57$

累积概率 $p(k)$ 即　$p(7)=0.53, p(8)=0.67$ 库存 8 册即可.

33. $A=400,\ B=100, \frac{A}{A+B}=\frac{400}{500}=0.8$

正态分布为 $N(2400,200^2)$，$p(x<x_0)=0.8$，x_0 可求.

$$\frac{x_0-2400}{200}=0.84, x_0=2400+0.84\times200=2568.$$

34. 将铅笔任意立在书末的随机数字表上，选最近的数为最初的随机数，从左到右的 3 位数选 20 个. 如果选到右端完了不够 20 个时可移至下一行的左端继续选取. 例如，

479, 468, 617, 148, 871, 745, 150, 743, 248, 216,

311, 843, 769, 649, 685, 522, 207, 808, 742, 825

35. 预测第 31 次数字的方法，

(1) 凭直觉回答特定的数.

(2) 计算各数值求出的概率，依其结果回答.

(3) 整理出以前的结果，依其结果回答.

如例题 19 所示，(1)的方法，虽然不科学，因为这是由经验得到的. 与其他情况不同，似应得到重视.

(2) 的方法是最适宜这个问题的方法. 按 (2) 的方法预测31次数字的一个例子，有如下列方法.

数	概率	累积概率	随 机 数
1	0.1	0.1	0
2	0.2	0.3	1～2
3	0.3	0.6	3～5
4	0.2	0.8	6～7
5	0.1	0.9	8
6	0.1	1.0	9

从频率分布表作右表概率分布，各等级的概率大小合起来，将从 0 到 9 的随机数分组，从书末的随机数表任意取出一个随 机数. 例如，

求 6. 这个随机数正好有 4 个等级，这样，求出 31 次数字为 4 的数就是预测的数.

(3) 的方法是不适合这种情况的. 因为 30 次的资料是不够的.

但是，在 3000 次的基础上预测 3001 次时，(3)的方法也适用.

36. 从频率分布表作右表的概率分布，按照各等级概率的大小，从 00

数	相对频率	累积相对频率	随 机 数
36	0.01	0.01	00
37	0.08	0.09	01～08
38	0.11	0.20	09～19
39	0.24	0.44	20～43
40	0.26	0.70	44～69
41	0.19	0.89	70～88
42	0.06	0.95	89～94
43	0.04	0.99	95～98
44	0.01	1.00	99

到 99 将 100 个随机数分成组. 从书末的随机数字表任意取出 30 个随机数.

51, 23, 22, 91, 13, 54, 24, 25,

58, 20, 02, 83, 05, 89, 66, 75,

80, 83, 75, 71, 64, 62, 17, 55,

03, 30, 03, 86, 34, 96

与上边被取出的随机数相对应取出等级的数,得

40, 39, 39, 42, 38, 40, 39, 39, 40, 39, 37, 41, 37,
42, 40, 41, 41, 41, 41, 41, 40, 40, 38, 40, 37, 39,
37, 41, 39, 43

37. 按题目的表作成下边的表.

从 000 到 999 的 1000 个随机数，同各等级的比例相对应，如下表右端的数列分成组.

卖出量	相对频率	累积相对频率	随　机　数
41	0.040	0.040	000～039
42	0.060	0.100	040～099
43	0.085	0.185	100～184
44	0.115	0.300	185～299
45	0.150	0.450	300～449
46	0.165	0.615	450～614
47	0.145	0.760	615～759
48	0.120	0.880	760～879
49	0.075	0.955	880～854
50	0.045	1.000	955～999

为了作需求量模型,从随机数字表取出 30 个随机数. 例如,

544, 902, 069, 325, 554, 906, 965, 231, 405, 978,
267, 441, 764, 335, 320, 759, 869, 206, 459, 525,
109, 420, 443, 219, 108, 941, 500, 906, 162, 887

设这随机数有其相对应的各等级，则需求量的模型为：

46, 49, 42, 45, 46, 49, 50, 44, 45, 50, 44, 46, 48, 45, 45, 47, 48, 44, 46, 46, 43, 45, 45, 44, 43, 49, 46, 49, 43, 49

38. 按题目中的表制成下边的表，从 00 到 99 的 100 个随机数，同各等级的比例相对应，如下表右端的数列分成组。

需要量	概　　率	累积概率	随 机 数
3	0.01	0.01	00
4	0.08	0.09	01～08
5	0.13	0.22	09～21
6	0.14	0.36	22～35
7	0.17	0.53	36～52
8	0.14	0.67	53～66
9	0.11	0.78	67～77
10	0.09	0.87	78～86
11	0.07	0.94	87～93
12	0.04	0.98	94～97
13	0.01	0.99	98
14	0.01	1.00	99

为了制作需求量模型从随机数字表取出 60 个随机数，如，

90, 84, 17, 83, 19, 21, 21, 49, 16, 05, 71, 21, 60, 77, 53, 75, 79, 16, 52, 57, 36, 76, 20, 59, 46, 50, 05, 65, 07, 47, 06, 64, 27, 57, 89, 89, 98, 26, 10, 16, 44, 68, 89, 71, 33, 78, 48, 44, 89, 27, 04, 09, 74, 25, 67, 87, 71, 50, 46, 84

设这随机数有其相对应的等级，则需求量的模型数为：

11, 10, 5, 10, 5, 5, 5, 7, 5, 4, 9, 5, 8, 9, 8, 9, 10, 5, 7, 8, 7, 9, 5, 8, 7, 7, 4, 8, 4, 7, 4, 8, 6, 8, 6, 8, 11, 11, 13, 6, 5, 5, 7, 9, 11, 9, 6, 10,

7, 7, 11, 6, 4, 5, 9, 6, 9, 11, 9, 7, 7, 10

求上边概率分布表的平均值 $\bar{x}=7.56$

5 日间进货量的目标为 $7.56\times5=37.8$

以这个值为目标,5 日间进货量为 35 个,38 个,41 个时，库存量的模型可由上边需求量的模型作出,如下表所示.

每日需	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
求模型	11	10	5	10	5	5	5	7	5	4	9	5	8	9	8	9	10	5	7	8
进货35	35					35					35					35				
	24	14	9	×	×	30	25	18	13	9	35	30	22	13	5	31	21	16	9	1
进货38	38					38					38					38				
	27	17	12	2	×	33	28	21	16	12	41	36	28	19	11	40	30	25	18	10
进货41	41					41					41					41				
	30	20	15	5	0	36	31	24	19	15	41	42	34	25	17	49	39	34	27	19
每日需	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
求模型	7	9	5	8	7	7	4	8	4	7	4	8	6	8	11	11	13	6	5	5
进货35	35					35					35					35				
	29	20	15	7	0	28	24	16	12	5	36	28	22	14	3	27	14	8	3	×
进货38	38					38					38					38				
	41	32	27	19	12	43	39	31	27	20	54	46	40	32	21	48	35	29	24	19
进货41	41					41					41					41				
	53	44	39	31	24	58	54	46	42	35	72	64	58	50	39	69	56	50	45	40
每日需	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
求模型	7	9	11	9	6	10	7	7	11	6	4	5	9	6	9	11	9	7	7	10
进货35	35					35					35					35				
	28	19	8	×	×	25	18	11	0	×	31	26	17	11	2	26	17	10	3	×
进货38	38					38					38					38				
	50	41	30	21	15	43	36	29	18	12	46	41	32	26	17	44	35	28	21	11
进货41	41					41					41					41				
	74	65	54	45	39	70	63	56	45	39	76	71	62	56	47	77	68	61	54	44

从上边每次进货个数的库存模型,考虑进货数量,则

(1) 进货 35 个,很可能形成售缺.

(2) 进货 38 个,不缺货,积压也不多.

(3) 进货 41 个,出现积压.

39. 根据正态分布 $N(400,30^2)$,作一个概率分布表.

设等级的个数为 20 个,但可按需要增减.

在表 1 的等级中，从 310 到 490 分成 20 个组，是正态分布的性质，设平均为 m，标准差为 σ，利用 $m\pm3\sigma$ 范围内的资料占全体 99% 以上这一点.

表 2 是按正态分布 $N(400,80^2)$ 作与表 1 相同的表.

等　　级	等 级 值	概　　率	累积概率	随　机　数
310～319	314.5	0.0035	0.0035	0000～0034
319～328	323.5	0.0047	0.0082	0035～0081
328～337	332.5	0.0097	0.0179	0082～0178
337～346	341.5	0.0180	0.0359	0179～0358
346～355	350.5	0.0309	0.0680	0359～0679
355～364	359.5	0.0483	0.1510	0680～1509
364～373	368.5	0.0690	0.1841	1510～1840
373～382	377.5	0.0902	0.2743	1841～2742
382～391	386.5	0.1078	0.3821	2743～3820
391～400	395.5	0.1179	0.5000	3821～4999
400～409	404.5	0.1179	0.6179	5000～6178
409～418	413.5	0.1078	0.7257	6179～7256
418～427	422.5	0.0902	0.8159	7257～8158
427～436	431.5	0.0690	0.8849	8159～8848
436～445	440.5	0.0483	0.9332	8849～9331
445～454	449.5	0.0309	0.9641	9332～9640
454～463	458.5	0.0180	0.9821	9641～9820
463～472	467.5	0.0097	0.9918	9821～9917
472～481	476.5	0.0047	0.9965	9918～9964
481～490	485.5	0.0035	1.0000	9965～9999

表　1

为了作出入库量和出库量的模型，分别取出 40 个随机数.

5236, 2604, 1370, 6050, 2472, 8457, 0049, 3869

8365, 7538, 8558, 5123, 2291, 1354, 2425, 5820

0283, 0589, 6675, 8083, 7571, 6462, 1755, 0330

0386, 3496, 3593, 9711, 7869, 7979, 0698, 7335

2906, 9156, 1223, 0604, 6967, 2304, 3439, 7034

6230, 9100, 0966, 4203, 5548, 7818, 2402, 3288

6568, 8000, 6649, 2270, 9018, 8822, 1049, 4651

等 级	等级值	概 率	累积概率	随 机 数
160～184	172	0.0035	0.0035	0000～0034
184～208	196	0.0047	0.0082	0035～0081
208～232	220	0.0097	0.0179	0082～0178
232～256	244	0.0180	0.0359	0179～0358
256～280	268	0.0309	0.0680	0359～0679
280～304	292	0.0483	0.1510	0680～1509
304～328	316	0.0690	0.1841	1510～1840
828～352	340	0.0902	0.2743	1841～2742
352～376	364	0.1078	0.3821	2743～3820
376～400	388	1.1179	0.5000	3821～4999
400～424	412	1.1179	0.6179	5000～6178
424～448	436	0.1078	0.7257	6179～7256
448～472	460	0.0902	0.8159	7257～8158
472～496	484	0.0602	0.8849	8159～8848
496～520	508	0.0483	0.9332	8849～9331
520～544	532	0.0309	0.9641	9332～9640
544～568	556	0.0180	0.1821	9641～9820
568～592	580	0.0097	0.9918	9821～9917
592～616	604	0.0047	0.9965	9918～9964
616～640	628	0.0035	1.0000	9965～9999

表 2

4612, 6733, 0869, 0912, 3293, 0622, 9771, 7847

2129, 7029, 7360, 8187, 7779, 3986, 3590, 8417

8319, 2121, 4916, 0571, 2160, 7753, 7579, 1652

设随机数有对应的等级值入库量和出库量,其模型分别如下

入库量的模型

404.5, 377.5, 359.5, 404.5, 377.5, 431.5, 323.5

398.5, 431.5, 422.5, 431.5, 404.5, 377.5, 359.5

377.5, 404.5, 341.5, 350.5, 413.5, 422.5, 422.5

413.5, 368.5, 341.5, 350.5, 386.5, 386.5, 358.5

422.5, 422.5, 359.5, 466.5, 386.5, 440.5, 359.5

350.5, 413.5, 377.5, 386.5, 413.5

出库量的模型

436, 508, 292, 388, 412, 460, 340, 364, 436

460, 436, 340, 508, 484, 292, 388, 388, 436
292, 292, 364, 268, 556, 460, 340, 436, 460
484, 460, 388, 366, 484, 484, 340, 388, 268
340, 460, 460, 316

下表是从上边入库量模型和出库量模型作成的库存量模型。

日　数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
入库模型	404.5	377.5	359.5	404.5	377.5	431.5	323.5	395.5	431.5	422.5
出库模型	436	503	292	388	412	460	340	364	436	436
库存模型	204	100.5	186	157.5	150	67.0	159	118.5	78	49.5
日　数	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
入库模型	431.5	404.5	377.5	359.5	377.5	404.5	341.5	350.5	413.5	422.5
出库模型	436	340	508	484	292	388	388	436	292	292
库存模型	36	127.5	24	×	67.5	57	73.5	×	58.5	180
日　数	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
入库模型	422.5	413.5	368.5	341.5	350.5	386.5	386.5	358.5	422.5	422.5
出库模型	364	268	556	460	340	436	460	484	460	380
库存模型	238.5	393	250.5	159.0	160.5	75	15	×	×	42.5
日　数	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
入库模型	359.5	422.5	386.5	440.5	359.5	350.5	413.5	377.5	386.5	413.5
出库模型	366	484	484	340	388	268	340	460	460	316
库存模型	99	×	×	46.5	63	154.5	165	118.5	36	106.5

▶正态分布表◀

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4980	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4983	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997

▶随机数字表◀　(JIS Z 9031)

1	67	11	09	48	96	29	94	59	84	41	68	38	04	13	86	91	02	19	85	28
2	67	41	90	15	23	62	54	49	02	06	93	25	55	49	06	96	52	31	40	59
3	78	26	74	41	76	43	35	32	07	59	86	92	06	45	95	25	10	94	20	44
4	32	19	10	89	41	50	09	06	16	28	87	51	38	88	43	13	77	46	77	53
5	45	72	14	75	08	16	48	99	17	64	62	80	58	20	57	37	16	94	72	62
6	74	93	17	80	38	45	17	17	73	11	99	43	52	38	78	21	82	03	78	27
7	54	32	82	40	74	47	94	68	61	71	48	87	17	45	15	07	43	24	82	16
8	34	18	43	76	96	49	68	55	22	20	78	08	74	28	25	29	29	79	18	33
9	04	70	61	78	89	70	52	36	26	04	13	70	60	50	24	72	84	57	00	49
10	38	69	83	65	75	38	85	58	51	23	22	91	13	54	24	25	58	20	02	83
11	05	89	66	75	80	83	75	71	64	62	17	55	03	30	03	86	34	96	35	93
12	97	11	78	69	79	79	06	98	73	35	29	06	91	56	12	23	06	04	69	67
13	23	04	34	39	70	34	62	30	91	00	09	66	42	03	55	48	78	18	24	02
14	32	88	65	68	80	00	66	49	22	70	90	18	88	22	10	49	46	51	46	12
15	67	33	08	69	09	12	32	93	06	22	97	71	78	47	21	29	70	29	73	60
16	81	87	77	79	39	86	35	90	84	17	83	19	21	21	49	16	05	71	21	60
17	77	53	75	79	16	52	57	36	76	20	59	46	50	05	65	07	47	06	64	27
18	57	89	89	98	26	10	16	44	68	89	71	33	78	48	44	89	27	04	09	74
19	25	67	87	71	50	46	84	98	62	41	85	51	29	07	12	35	97	77	01	81
20	50	51	45	14	61	58	79	12	88	21	09	02	60	91	20	80	18	67	36	15
21	30	88	39	88	37	27	98	23	00	56	46	67	14	88	18	19	97	78	47	20
22	60	49	39	06	59	20	04	44	52	40	23	22	51	96	84	22	14	97	48	08
23	36	45	19	52	10	42	83	86	78	87	30	00	39	04	30	38	06	92	41	51
24	45	71	08	61	71	33	00	87	82	21	35	63	46	07	03	56	48	94	36	04
25	69	63	12	03	07	91	34	05	01	27	51	94	90	01	10	22	41	50	50	56

n	n^2	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log_{10}n$
1	1	1.0000	1.0000	.0000
2	4	1.4142	1.2599	.3010
3	9	1.7321	1.4422	.4771
4	16	2.0000	1.5874	.6021
5	25	2.2361	1.7100	.6990
6	36	2.4495	1.8171	.7782
7	49	2.6458	1.9129	.8451
8	64	2.8284	2.0000	.9031
9	81	3.0000	2.0801	.9542
10	100	3.1623	2.1544	1.0000
11	121	3.3166	2.2240	1.0414
12	144	3.4641	2.2894	1.0792
13	169	3.6056	2.3513	1.1139
14	196	3.7417	2.4101	1.1461
15	225	3.8730	2.4662	1.1761
16	256	4.0000	2.5198	1.2041
17	289	4.1231	2.5713	1.2304
18	324	4.2426	2.6207	1.2553
19	361	4.3589	2.6684	1.2788
20	400	4.4721	2.7144	1.3010
21	441	4.5826	2.7589	1.3222
22	484	4.6904	2.8020	1.3424
23	529	4.7958	2.8439	1.3617
24	576	4.8990	2.8845	1.3802
25	625	5.0000	2.9240	1.3979
26	676	5.0990	2.9625	1.4150
27	729	5.1962	3.0000	1.4314
28	784	5.2915	3.0366	1.4472
29	841	5.3852	3.0723	1.4624
30	900	5.4772	3.1072	1.4771
31	961	5.5678	3.1414	1.4914
32	1024	5.6569	3.1748	1.5051
33	1089	5.7446	3.2075	1.5185
34	1156	5.8310	3.2396	1.5315
35	1225	5.9161	3.2711	1.5441

续表

n	n^2	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log_{10}n$
36	1296	6.0000	3.3019	1.5563
37	1369	6.0828	3.3322	1.5682
38	1444	6.1644	3.3620	1.5798
39	1521	6.2450	3.3912	1.5911
40	1600	6.3246	3.4200	1.6021
41	1681	6.4031	3.4482	1.6128
42	1764	6.4807	3.4760	1.6232
43	1849	6.5574	3.5034	1.6335
44	1936	6.6332	3.5303	1.6435
45	2025	6.7082	3.5569	1.6532
46	2116	6.7823	3.5830	1.6628
47	2209	6.8557	3.6088	1.6721
48	2304	6.9282	3.6342	1.6812
49	2401	7.0000	3.6593	1.6902
50	2500	7.0711	3.6840	1.6990
51	2601	7.1414	3.7084	1.7076
52	2704	7.2111	3.7325	1.7160
53	2809	7.2801	3.7563	1.7243
54	2916	7.3485	3.7798	1.7324
55	3025	7.4162	3.8030	1.7404
56	3136	7.4833	3.8259	1.7482
57	3249	7.5498	3.8485	1.7559
58	3364	7.6158	3.8709	1.7634
59	3481	7.6811	3.8930	1.7709
60	3600	7.7460	3.9149	1.7782
61	3721	7.8102	3.9365	1.7853
62	3844	7.8740	3.9579	1.7924
63	3969	7.9373	3.9791	1.7993
64	4096	8.0000	4.0000	1.8062
65	4225	8.0623	4.0207	1.8129
66	4356	8.1240	4.0412	1.8195
67	4489	8.1854	4.0615	1.8261
68	4624	8.2462	4.0817	1.8325
69	4761	8.3066	4.1016	1.8388
70	4900	8.3666	4.1213	1.8451

续表

n	n^2	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\log_{10} n$
71	5041	8.4261	4.1408	1.8513
72	5184	8.4853	4.1602	1.8573
73	5329	8.5440	4.1793	1.8633
74	5476	8.6023	4.1983	1.8692
75	5625	8.6603	4.2172	1.8751
76	5776	8.7178	4.2358	1.8808
77	5929	8.7750	4.2543	1.8865
78	6084	8.8318	4.2727	1.8921
79	6241	8.8882	4.2908	1.8976
80	6400	8.9443	4.3089	1.9031
81	6561	9.0000	4.3267	1.9085
82	6724	9.0554	4.3445	1.9138
83	6889	9.1104	4.3621	1.9191
84	7056	9.1652	4.3795	1.9243
85	7225	9.2195	4.3968	1.9294
86	7396	9.2736	4.4140	1.9345
87	7569	9.3274	4.4310	1.9395
88	7744	9.3808	4.4480	1.9445
89	7921	9.4340	4.4647	1.9494
90	8100	9.4868	4.4814	1.9542
91	8281	9.5394	4.4979	1.9590
92	8464	9.5917	4.5144	1.9638
93	8649	9.6437	4.5307	1.9685
94	8836	9.6954	4.5468	1.9731
95	9025	9.7468	4.5629	1.9777
96	9216	9.7980	4.5789	1.9823
97	9409	9.8489	4.5947	1.9868
98	9604	9.8995	4.6104	1.9912
99	9801	9.9499	4.6261	1.9956
100	10000	10.0000	4.6416	2.0000

▶质　数　表◀

2	283	661	1087	1523	1993	2437	2909	3433	3911	4421	4943	5449	5953	6481	7001
3	293	673	91	31	97	41	17	49	17	23	51	71	81	91	13
5	307	677	93	43	99	47	27	57	19	31	57	77	87	6521	19
7	311	683	97	49	2003	59	39	61	23	47	67	79	6007	29	27
11	313	691	1103	53	11	67	53	63	29	51	69	83	11	47	39
13	317	701	09	59	17	73	57	67	31	57	73	5501	29	51	43
17	331	709	17	67	27	77	63	69	43	63	87	03	37	53	57
19	337	719	23	71	29	2503	69	91	47	81	93	07	43	63	69
23	347	727	29	79	39	21	71	99	67	83	99	19	47	69	79
29	349	733	51	83	53	31	99	3511	89	93	5003	21	53	71	7103
31	353	739	53	97	63	39	3001	17	4001	4507	09	27	67	77	09
37	359	743	63	1601	69	43	11	27	03	13	11	31	73	81	21
41	367	751	71	07	81	49	19	29	07	17	21	57	79	99	27
43	373	757	81	09	83	51	23	33	13	19	23	63	89	6607	29
47	379	761	87	13	87	57	37	39	19	23	39	69	91	19	51
53	383	769	93	19	89	79	41	41	21	47	51	73	6101	37	59
59	389	773	1201	21	99	91	49	47	27	49	59	81	13	53	77
61	397	787	13	27	2111	93	61	57	49	61	77	91	21	59	87
67	401	797	17	37	13	2609	67	59	51	67	81	5623	31	61	93
71	409	809	23	57	29	17	79	71	57	83	87	39	33	73	7207
73	419	811	29	63	31	21	83	81	73	91	99	41	43	79	11
79	421	821	31	67	37	33	89	83	79	97	5101	47	51	89	13
83	431	823	37	69	41	47	3109	93	91	4603	07	51	63	91	19
89	433	827	49	93	43	57	19	3607	93	21	13	53	73	6701	29
97	439	829	59	97	53	59	21	13	99	37	19	57	97	03	37
101	443	839	77	99	61	63	37	17	4111	39	47	59	99	09	43
103	449	853	79	1709	79	71	63	23	27	43	53	69	6203	19	47
107	457	857	83	21	2203	77	67	31	29	49	67	83	11	33	53
109	461	859	89	23	07	83	69	37	33	51	71	89	17	37	83
113	463	863	91	33	13	87	81	43	39	57	79	93	21	61	97

127	467	877	97	41	21	89	87	59	53	63	89	5701	29	63	7307
131	479	881	1301	47	37	93	91	71	57	73	97	11	47	79	09
137	487	883	03	53	39	99	3203	73	59	79	5209	17	57	81	21
139	491	887	07	59	43	2707	09	77	77	91	27	37	63	91	31
149	499	907	19	77	51	11	17	91	4201	4703	31	41	69	93	33
151	503	911	21	83	67	13	21	97	11	21	33	43	71	6803	49
157	509	919	27	87	69	19	29	3701	17	23	37	49	77	23	51
163	521	929	61	89	73	29	51	09	19	19	61	79	87	27	69
167	523	937	67	1801	81	31	53	19	29	29	73	83	99	29	93
173	541	941	73	11	87	41	57	27	31	31	79	91	6301	33	7411
179	547	947	81	23	93	49	59	33	41	59	81	5801	11	41	17
181	557	953	99	31	97	53	71	39	43	83	97	07	17	57	
191	563	967	1409	47	2309	67	99	61	53	87	5303	13	23		51
193	569	971	23	61	11	77	3301	67	59	89	09	21	29		
197	571	977	27	67	33	89	07	69	61	93	23	27	37		
199	577	983	29	71	39	91	13	79	71	99	33	39	43		
211	587	991	33	73	41	97	19	93	73	4801	47	43	53		81
223	593	997	39	77	47	2801	23	97	83	13	51	49	59	6907	87
227	599	1009	47	79	51	03	29	3803	89	17	81	51	61	11	89
229	601	13	51	89	57	19	31	21	97	31	87	57	67	17	99
233	607	19	53	1901	71	33	43	23	4327	61	93	61	73	47	(以下省略)
239	613	21	59	07	77	37	47	33	37	71	99	67	79	49	
241	617	31	71	13	81	43	59	47	39	77	5407	69	89	59	
251	619	33	81	31	83	51	61	51	49	89	13	79	97	61	
257	631	39	83	33	89	57	71	53	57	4903	17	81	6421	67	
263	641	49	87	49	93	61	73	63	63	09	19	97	27	71	
269	643	51	89	51	99	79	89	77	73	19	31	5903	49	77	
231	647	61	93	73	2411	87	91	81	91	31	37	23	51	83	
277	653	63	99	79	17	97	3407	89	97	33	41	27	69	91	
281	659	69	1511	87	23	2903	13	3907	4409	37	43	39	73	97	