Euler连分数公式与广义连分数

MATHEART_EVER　　茶水不太凉丶

2020 年 3 月 19 日

摘要

本文主要介绍了Euler[1]连分数公式，并且推出了几个初等函数广义连分数展开。

1 Euler公式简介

所谓(无穷)连分数，就是指形如$x_0+\cfrac{1}{x_1+\cfrac{1}{x_2+\cfrac{1}{x_3+\ddots}}}$的式子，其中$x\in\mathbb{Z}$

Euler连分数公式即

$$\boxed{a_0+a_0a_1+a_0a_1a_2+\cdots+a_0a_1\cdots a_n=\cfrac{a_0}{1-\cfrac{a_1}{1+a_1-\cfrac{a_2}{1+a_2+\cfrac{\ddots}{\cdots\cfrac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}-\cfrac{a_n}{1+a_n}}}}}}}$$

2 推导过程

令$s_i=a_i+a_ia_{i+1}+a_ia_{i+1}a_{i+2}+\cdots a_ia_{i+1}\cdots a_n$ 那么

$$\begin{aligned}s_{i+1}&=a_ia_{i+1}+a_ia_{i+1}a_{i+2}+\cdots+a_{i+1}\cdots a_{n+1}\\ s_0&=a_0+a_0a_1+a_0a_1a_2+\cdots+a_0a_1\cdots a_n\end{aligned}\tag{1}$$

[1]欧拉(Euler)(1707-1783)———卓越的数学家和力学家，按族系说是瑞士人，一生大部分时间居住在圣彼得堡.按拉普拉斯的说法，“欧拉是18世纪后半叶全体数学家共同的导师”

不难得到

$$s_i = a_i \left(1 + a_{i+1} + a_{i+1}a_{i+2} + \cdots\right) = a_i \left(1 + s_{i+1}\right) \tag{2}$$

由(1)知

$$\begin{aligned}
&a_0 + a_0a_1 + a_0a_1a_2 + \cdots + a_0a_1\cdots a_n \\
&= s_0 \\
&= a_0\left(1 + s_1\right) \\
&= \frac{a_0}{\dfrac{1}{1+s_1}} \\
&= \frac{a_0}{1 - \dfrac{s_1}{1+s_1}}
\end{aligned} \tag{2}$$

由（2）又知

$$\begin{aligned}
\frac{s_i}{1+s_\mathrm{i}} &= \frac{a_i\left(1+s_{i+1}\right)}{1+s_i} \\
&= \frac{a_i}{\dfrac{1+s_i}{1+s_{i+1}}} \\
&= \frac{a_i}{\dfrac{1+a_i\left(1+s_{i+1}\right)}{1+s_{i+1}}} \\
&= \frac{a_i}{\dfrac{\left(1+s_{i+1}\right)+a_i\left(1+s_{i+1}\right)}{1+s_{i+1}} - \dfrac{s_{i+1}}{1+s_{i+1}}} \\
&= \boxed{\frac{a_i}{1+a_i-\dfrac{s_{i+1}}{1+s_{i+1}}}}
\end{aligned}$$

用上式带入（3）继续化简

$$
\begin{aligned}
&\frac{a_0}{1-\dfrac{s_1}{1+s_1}}\\
=&\frac{a_0}{1-\dfrac{a_1}{1+a_1-\dfrac{s_2}{1+s_2}}}\\
=&\frac{a_0}{1-\dfrac{a_1}{1+a_1-\dfrac{a_2}{1+a_2-\dfrac{s_3}{1+s_3}}}}\\
=&\frac{a_0}{1-\dfrac{a_1}{1+a_1-\dfrac{a_2}{1+a_2+\dfrac{\ddots}{\cdots\dfrac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}-\dfrac{a_n}{1+a_n}}}}}}
\end{aligned}
$$

3 一些具体的例子

由Taylor[2]公式可以知道$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+1\cdot x\cdot\frac{x}{2}+1\cdot x\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}+\cdots$

[2]泰勒(Taylor)(1685-1731)———英国数学家

代入上述公式可得

$$
\begin{aligned}
e^x &= \cfrac{1}{1-\cfrac{x}{1+x-\cfrac{\frac{1}{2}x}{1+\frac{1}{2}x-\cfrac{\frac{1}{3}x}{1+\frac{1}{3}x-\ddots}}}} \\
&= \cfrac{1}{1-\cfrac{x}{1+x-\cfrac{x}{2+x-\cfrac{\frac{2}{3}x}{1+\frac{1}{3}x-\ddots}}}} \\
&= \cfrac{1}{1-\cfrac{x}{1+x-\cfrac{x}{2+x-\cfrac{2x}{3+x-\cfrac{3x}{4+x-\ddots}}}}}
\end{aligned}
$$

当$x=1$时可以得到一个关于e的广义连分数

$$
\boxed{e = \cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{3-\cfrac{2}{4-\cfrac{3}{5-\cfrac{4}{6-\ddots}}}}}}}
$$

同理，

$$
\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots
$$

$$\begin{aligned}
&= x + (x)\left(\frac{-x^2}{2\cdot 3}\right) + (x)\left(\frac{-x^2}{2\cdot 3}\right)\left(\frac{-x^2}{4\cdot 5}\right) + (x)\left(\frac{-x^2}{2\cdot 3}\right)\left(\frac{-x^2}{4\cdot 5}\right)\left(\frac{-x^2}{6\cdot 7}\right) + \cdots \\
&= \cfrac{x}{1 - \cfrac{\cfrac{-x^2}{2\cdot 3}}{1 + \cfrac{-x^2}{2\cdot 3} - \cfrac{\cfrac{-x^2}{4\cdot 5}}{1 + \cfrac{-x^2}{4\cdot 5} - \ddots}}} \\
&= \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{2\cdot 3 - x^2 + \cfrac{2\cdot 3x^2}{4\cdot 5 - x^2 + \ddots}}}
\end{aligned}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 + 1\cdot\left(-\frac{x^2}{1\cdot 2}\right) + 1\cdot\left(-\frac{x^2}{1\cdot 2}\right)\left(-\frac{x^2}{3\cdot 4}\right) + 1\cdot\left(-\frac{x^2}{1\cdot 2}\right)\left(-\frac{x^2}{3\cdot 4}\right)\left(-\frac{x^2}{5\cdot 6}\right) + \cdots \\
&= \cfrac{1}{1 - \cfrac{-\frac{x^2}{1\cdot 2}}{1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} - \cfrac{-\frac{x^2}{3\cdot 4}}{1 - \frac{x^2}{3\cdot 4} - \cfrac{-\frac{x^2}{5\cdot 6}}{1 - \frac{x^2}{5\cdot 6} - \ddots}}}} \\
&= \cfrac{1}{1 + \cfrac{\frac{x^2}{1\cdot 2}}{1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \cfrac{\frac{x^2}{3\cdot 4}}{1 - \frac{x^2}{3\cdot 4} + \cfrac{\frac{x^2}{5\cdot 6}}{1 - \frac{x^2}{5\cdot 6} + \ddots}}}} \\
&= \cfrac{1}{1 + \cfrac{x^2}{1\cdot 2 - x^2 + \cfrac{1\cdot 2x^2}{3\cdot 4 - x^2 + \cfrac{3\cdot 4x^2}{5\cdot 6 - x^2 + \ddots}}}}
\end{aligned}
$$

$$
\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots
$$

$$= x + x\left(\frac{-x^2}{3}\right) + x\left(\frac{-x^2}{3}\right)\left(\frac{-3x^2}{5}\right) + x\left(\frac{-x^2}{3}\right)\left(\frac{-3x^2}{5}\right)\left(\frac{-5x^2}{7}\right) + \cdots$$

$$= \cfrac{x}{1 - \cfrac{\frac{-x^2}{3}}{1 + \frac{-x^2}{3} - \cfrac{\frac{-3x^2}{5}}{1 + \frac{-3x^2}{5} - \ddots}}}$$

$$= \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 - x^2 + \cfrac{(3x)^2}{5 - 3x^2 + \cfrac{(5x)^2}{7 - 5x^2 + \ddots}}}}$$

特别的，当$x = 1$,$\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$
代入我们的公式得到

$$\boxed{\pi = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \ddots}}}}}}$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$
\begin{aligned}
&= x + x \cdot \frac{x^2}{2 \cdot 3} + x \cdot \frac{x^2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{x^2}{4 \cdot 5} + x \cdot \frac{x^2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{x^2}{4 \cdot 5} \cdot \frac{x^2}{6 \cdot 7} \\
&= \cfrac{x}{1 - \cfrac{\frac{x^2}{2 \cdot 3}}{1 + \frac{x^2}{2 \cdot 3} - \cfrac{\frac{x^2}{4 \cdot 5}}{1 + \frac{x^2}{4 \cdot 5} - \ddots}}} \\
&= \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{2 \cdot 3 + x^2 - \cfrac{2 \cdot 3x^2}{4 \cdot 5 + x^2 - \cfrac{4 \cdot 5x^2}{6 \cdot 7 + x^2 - \ddots}}}}
\end{aligned}
$$

$$
\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 + 1 \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2} + 1 \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{x^2}{3 \cdot 4} + 1 \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{x^2}{3 \cdot 4} \cdot \frac{x^2}{5 \cdot 6} + \cdots \\
&= \cfrac{1}{1 - \cfrac{\frac{x^2}{1 \cdot 2}}{1 + \frac{x^2}{1 \cdot 2} - \cfrac{\frac{x^2}{3 \cdot 4}}{1 + \frac{x^2}{3 \cdot 4} - \ddots}}} \\
&= \cfrac{1}{1 - \cfrac{x^2}{1 \cdot 2 + x^2 - \cfrac{1 \cdot 2x^2}{3 \cdot 4 + x^2 - \cfrac{3 \cdot 4x^2}{5 \cdot 6 + x^2 - \ddots}}}}
\end{aligned}
$$

$$
\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots
$$

$$
\begin{aligned}
&= x + x\left(-\frac{1}{2}x\right) + x\left(-\frac{1}{2}x\right)\left(-\frac{2}{3}x\right) + x\left(-\frac{1}{2}x\right)\left(-\frac{2}{3}x\right) + x\left(-\frac{1}{2}x\right)\left(-\frac{2}{3}x\right)\left(-\frac{3}{4}x\right) + \cdots \\
&= \cfrac{x}{1 + \cfrac{\frac{1}{2}x}{1 - \frac{1}{2}x + \cfrac{\frac{2}{3}x}{1 - \frac{2}{3}x + \ddots}}} \\
&= \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{2 - x + \cfrac{2^2x}{3 - 2x + \cfrac{3^2x}{4 - 3x + \ddots}}}}
\end{aligned}
$$

当$x = 1$时可以得到

$$
\boxed{\ln 2 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2^2}{1 + \cfrac{3^2}{1 + \cfrac{4^2}{1 + \ddots}}}}}}
$$

4 后记

连分数是个很有意思的话题（尤其是广义连分数），可以提现数学之美，当你看到π,e和$\ln 2$的连分数形式时你会不会也会被它们的美感所震撼呢?！如同Taylor公式一般不可言喻。

遗憾的是互联网中关于这方面的资料实在少的可怜，也没有使更多的人所认识。

笔者第一次看到这个证明是在Bilibili上看到的，作者即为开头第一位的MATHEART_EVER,只不过是用数学引擎manim[3]制作的视频，后来联系到了本人，征得同意后LaTeX写出了这篇文章，修改了一些细节，添加了$\cos x$,$\sinh x$,$\cosh x$,$\ln(1+x)$和e,$\ln(2)$的展开式。顺便推荐下这位up主

他的个人主页：https://www.bilibili.com/video/av88328910

视频原址：https://space.bilibili.com/346660989?spm_id_from=333.788.b_765f7570696e666f.2

[3] 3Blue1Brown频道的作者Grant基于python开发的一款用于可视化数学的引擎，他的视频内容丰富而高质量。

此外这篇文章也被笔者发在了不同的地方，欢迎查阅更多资料
知乎：https://zhuanlan.zhihu.com/p/110671418
超理论坛：https://chaoli.club/index.php/5096
此外欢迎与各位交友!

笔者QQ:3339829816

参考文献

https://en.wikipedia.org/wiki/Euler