郎，折纸与几何构造

一

折纸与几何作图

由罗伯特郎

简介

指南针和-直尺的几何结构是最熟悉的高中学生几何。如今，它们被视为大多数为不超过古雅的好奇心学术兴趣。古代的希腊人和埃及人，不过，几何结构为有用的工具，以及一些日常工具，用于建筑，测量等，活动。

指南针和-直尺经典规则允许一个单一的弧线和指南针罢工传输距离，和一个没有标记的直尺画直线，二者可能不会结合使用（例如，持有指南针，以有效打击直尺马克后者）。但是，也有对一般的主题很多变化几何建设，包括使用有标记的规则和罗盘为工具，其他建设几何图形。

更有趣的变化之一，是一张纸折叠表使用几何建设。如同指南针和-直尺结构，折叠纸结构都有趣的学术和实践上非常有用，尤其是在折纸的折叠艺术张进纸完整无缺的有趣，美丽的形状。现代折纸设计显示这是可能的折叠，从单一的令人难以置信的复杂性，现实主义，美容造型未经切割的正方形。折纸人物具有的一种审美的美丽，无论对数学家上诉和门外汉。他们上诉的一部分是简单的概念：从最简单的弹簧一开始深度，微妙和复杂性的对象往往可以构建折叠步骤的精确定义序列。然而，许多折纸设计，甚至相当简单的，需要创造一个广场上特定地点的初始折叠：分成三份或十二分它，例如。虽然人们可以一直测量和标记这些点，有一个审美情趣创造这些关键点，作为参考点称为纯粹折。

因此，在折纸，有一个特别设计的折叠序列的实际利益比例，随着作图数学领域重叠。在这个文章中，我将提出一个折纸几何结构为多种技术。该油田丰富多样，有以惊人的数学的其他分支连接。我会告诉折纸二元结构师为基础，然后展示如何将这些扩展

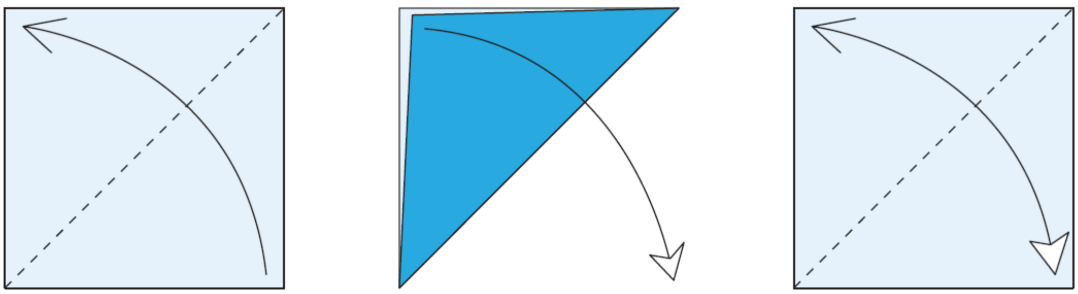
构建合理的比例是任意的分数。某些不合理的比例还与构造的折纸，我将提出几个特别有趣的例子。然后我会谈谈近似折叠序列，其中，虽然也许不是数学题目有趣的，具有相当的实

用价值。一路上，我将介绍公理化理论折纸结构，其中不仅规定哪些类的比例可折叠的，但还提供了极其有效的寻找近似折叠序列的基础计算机解决方案的一个发现，在已发表的折纸数的应用技术书籍设计。

预赛和定义

折纸，如几何结构，有许多变化。在最常见的版本，一首先是一个没有标记的正方形的纸页。只允许折叠：无切削。的目标折纸建设是精确定位在纸张上的一个或多个点，经常在工作表的边缘，但也可能在室内。上述各点，作为参考点称为是然后用于定义最终目标是塑造其余倍。的折叠过程一路上模型创建新的参考点，这是作为交叉产生点凡折痕或折痕打一折的边缘。在一个理想的折纸折叠序列的一个分步的折纸指示，每一层的一系列行动，正是对准定义对纸张，功能组合在这些特性可能是点，边，折痕线，相同或交叉。

建立这样的两个例子所示路线图 1 和 2。图 1 说明了折叠在沿其对角线一半的纸。折叠的定义是把一个角向对面角落，平坦的文件。当纸张夷为平地，一个折痕形成，（如果该文件是真正的平方）连接的另外两个角。



1。折叠右下角到左上角。　　2。展开。　3“折叠和展开”是表示，由一个双头箭头。

图 1。对于一个半平方米折叠角序列。

作为一个速记符号，折叠和展开的两个步骤通常是表示由一个双箭头在图 1 的第三步。

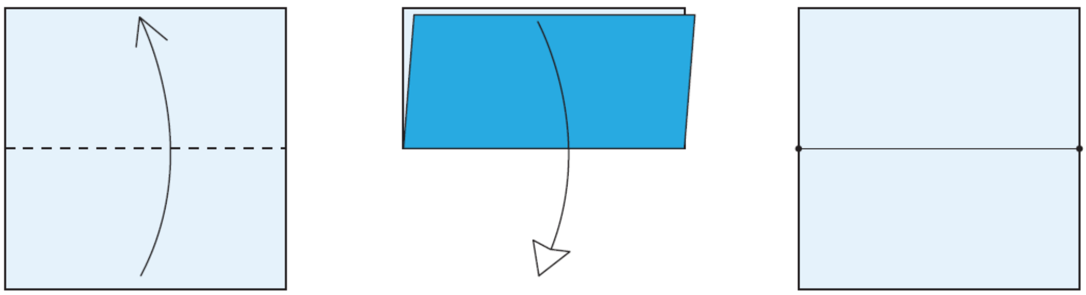
图 2 说明了另一半折叠方式的文件（“bookwise”）。这圈可以定义在 3 个不同的，但等价的方法：

（1）　折左下角到左上角。

（2）　折右下角到右上角。

（3）　折底部边缘要与顶边对齐。

对于一个正方形，这三种方法是等价的。不过，如果你稍微歪斜纸（一平行四边形，而不是一个正方形）开始，您将获得从三个略有不同的结果。



1。折叠底部边缘顶端优势。　2。展开。　3。定义新的折痕两个新点。

图 2。对于折叠一半 bookwise 广场序列。

在这两种情况下，如果你展开纸回原来的广场，你会发现你已经创建了一个新的折痕在纸上。对于图 2 中，你会也已经定义了两个新的要点：双方的中点。每个点的准确界定由带有毛边的纸张折痕的交叉点。

也说明了这两个序列的规则，我们将通过折纸的几何结构。折纸的几何结构的目标是定义在一个长方形的几何规范的一个或多个点或线（例如，行或三等分角平分线），或有一个定量的定义（例如，一个点的 1 / 3 的方式沿着边缘）。我们假定以下规则：

（1）　所有线路被定义为边缘，无论是正方形或纸张上的折痕。

（2）所有的点被定义为两条线的交叉点。

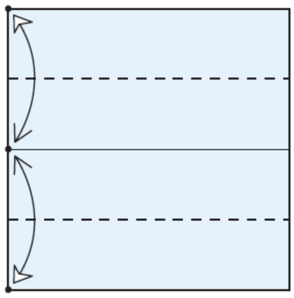
（3）所有的折叠必须是唯一的定义调整点和线组合。

（4）是由折痕作出的单皮，扁平化的结果，和（可选）展开。

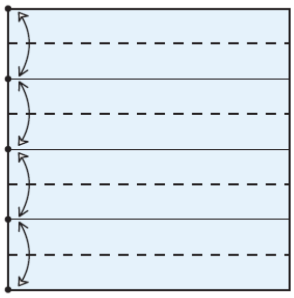
规则（4），特别是相当严格，它说，必须在折叠一次。相比之下，除了最简单的折纸数字包括多个步骤，其中折叠同时发生。在后面的文章中，我将讨论时会发生什么，我们放宽这项限制。

二元区划

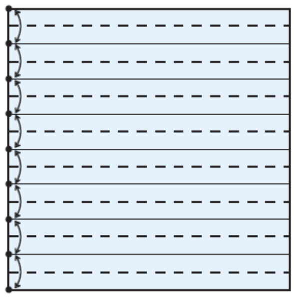
最常见的折纸结构，轮流在实际折叠之一是把一或成 N 等分，其中 N 是一些整数都在广场边的问题。图 2 所示的简单的情况下，除以一个正方形的边分成两部分和其解决方案。当然，这种方法不局限于一个正方形，它同样适用于任何在一个正方形的线段。因此，在广场的两部分可以单独分为两部分，等等。通过反复的段划分了一半，有可能分化成方形（或矩形）边缘到 4ths，8ths 等等，如图 3 所示。



划分为 4ths。



划分为 8ths。



划分为 16 份。

图 3。科方将 4ths，8ths，和 16 份。

这种方法使我们分成 1 / 2，1 / 4，1 / 8，...，一般而言，1/2n 比例为整数方全每个司是在广场边 1/2n。通过扩展到所有数字的平方大小，我们可以说，我们已经构建的分数 1/2n，其中一部分是在广场的一侧的形式给出。

它也可以构建一个对任何整数 m <2n 个形式 m/2n 一小部分。 （在所有随后的讨论中，我们会考虑 0 和 1 之间只有分数。）最直接的方法是完全细分成 2n 个部份效果广场的边缘，再算上从底部米分歧。这种方法显然需要为 2n -1 折痕，是不是很有效，因为在完全细分了许多不必要的折痕创作方的结果。为建设有一个此类型的任何使用褶皱的最小的一小部分优雅的方法。一个有理分式的分母是两个完美的功率称为二进制分数;的折叠方法被称为二进制折叠算法。

二进制折叠算法

二进制折叠算法描述布伦顿[1]和扩大郎[2]时。它产生一个有效的折叠序列构建任意比例是一个二进制数，是根据二进制表示法为基础。在二进制表示法中，只有两个数字，1 和 0，所有的数字为 1 和 0 字符串写入。什么数字都可以写成二进制表示为 1 和 0 的字符串。例如，数字 1 到 10 的二进制可写，如表 1 所示。

Decimal	Binary
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001
10	1010

表 1。为 1-10 十进制数字的二进制等值。

任何形式 m/2n 二进制数可以折叠成 N 个折痕，所需
折叠序列编码的二进制表达式的分数。

二进制表示的分数是最好理解的比喻与普通十进制格式。在十进制表示法，每个到小数点左边数字的理解是乘 10 的幂，例如，

$$1043 = 1\times10^3 + 0\times10^2 + 4\times10^1 + 3\times10^0 = 1000 + 0 + 40 + 3. \quad (1)$$

同样的事情发生在二进制表示，除非您使用的权力，而不是 10 2 的幂和只有两个可能的数字：1 和 0。因此，二进制数是 1011

$$1011 = 1\times2^3 + 0\times2^2 + 1\times2^1 + 1\times2^0 = 8 + 0 + 2 + 1 = \text{eleven}. \quad (2)$$

通过这种方法，可以写任意整数二进制表示法中具有独特的 1 和 0 的组合。

虽然它并没有常见的做，也可以写在一个二进制符号，类似于我们的十进制记数法，其中数量以分数的小数点（尽管也许它应该被称为右位小数数量出现了“二进制点“，而不是一个”小数点“）。例如，正如十进制 0.753 手段

$$.753 = 7\times10^{-1} + 5\times10^{-2} + 3\times10^{-3} = \frac{753}{1000}, \quad (3)$$

二进制分数可能被解释为.111

$$.111 = 1\times2^{-1} + 1\times2^{-2} + 1\times2^{-3} = \frac{7}{8}. \quad (4)$$

其他例子：分数 1 / 2 给予 0.1 二进制;分数 1 / 4 是在二进制 0.01，而 3 / 4 是 9.11。分数 5 月 8 日是 0.101，和 23/32，以二进制写的，是 0.10111。任何分数的分母是两个完美的功率有一个带有限位数到小数点右边的二进制表示。

您可以通过以下方法构造算法对任何数的二进制分数：

（1） 写下一个小数点。

（2）乘以 2 的一小部分。

（3）关闭减去整数部分（1 或 0），并把它写下来到最后你说的权利。

（4）重复步骤（2）及（3）根据需要多次，每次加入到正确的数字，直到你得到一个 0 的剩余部分。

等价地，分数 m/2n 写成小数点加上整数米，到了小数点有权立即得到一个 n 位二进制总足够的零填充扩张。

怎么样分数的分母是不是 2 的完美动力（其中包括大多数的数字）？如果你写的如 1 / 3 的二进制数用上述算法，你就永远无法获得零的其余部分。相反，它形成了一个无限的数字串，例如，1 / 3 = 0.010101 ...如果该号码是有理数，两个整数的比例，则分数最终将开始重演。

对于一小部分二进制表达式给出了一个在需要作出了在纸张的一面给定距离的标志折叠序列的准确描述。首先，这里的折叠算法：

标出的距离等于一个折叠二进制分数，写下它的二进制形式。

然后，开始从右侧的分数（最低有效位）：第一位数字（这始终是一个 1，因为你把任何尾随零）折叠自上而下至底部的展开。

对于其余的每个数字，如果是 1，折叠纸的顶部上皱纹，捏，并展开，如果它是 0，折叠纸的底部到以前的皱纹，捏，和展开。

通过比较一个二进制数，这与扩展公式算法，你可以看到如何折叠算法的工作原理。让我们搭 0.11001 为例（25/32）。扩大这种传统的方法是扩大在 2 的幂数，如公式（5）所示。

$$0.11001 = 1\times 2^{-1} + 1\times 2^{-2} + 0\times 2^{-3} + 0\times 2^{-4} + 1\times 2^{-5} \tag{5}$$

另一种方式写的二进制扩张是扩大为一个嵌套的一系列如公式（6）。

$$0.11001 = \frac{1}{2} \times (1 + \frac{1}{2} \times (1 + \frac{1}{2} \times (0 + \frac{1}{2} \times (0 + \frac{1}{2} \times (1))))) \tag{6}$$

为了评估这种形式，你开始在表达式（终端“1”）内心的数量和工作中的方式回到左侧，慢慢的工作嵌套括号的出路。如果我们写出这样的分数，它变成了每个操作可以是嵌套的一系列操作：

（一） 新增 0 乘以 1 / 2，或

（二）加 1，再乘以 1 / 2。

现在让我们来看看在配方上折纸折叠序列。如果我们有一个从底部位于距离 r 一折痕折叠广场和自下而上的广场，展开，新的折痕是由从底部距离（1 / 2）住宅。如果相反，我们折下的广场顶部的标记和展开，新的折痕是由距离（1 / 2）（1 + R）的倒数。因此，折自上而下或自下而上相等于执行业务（a）或（b）分别。

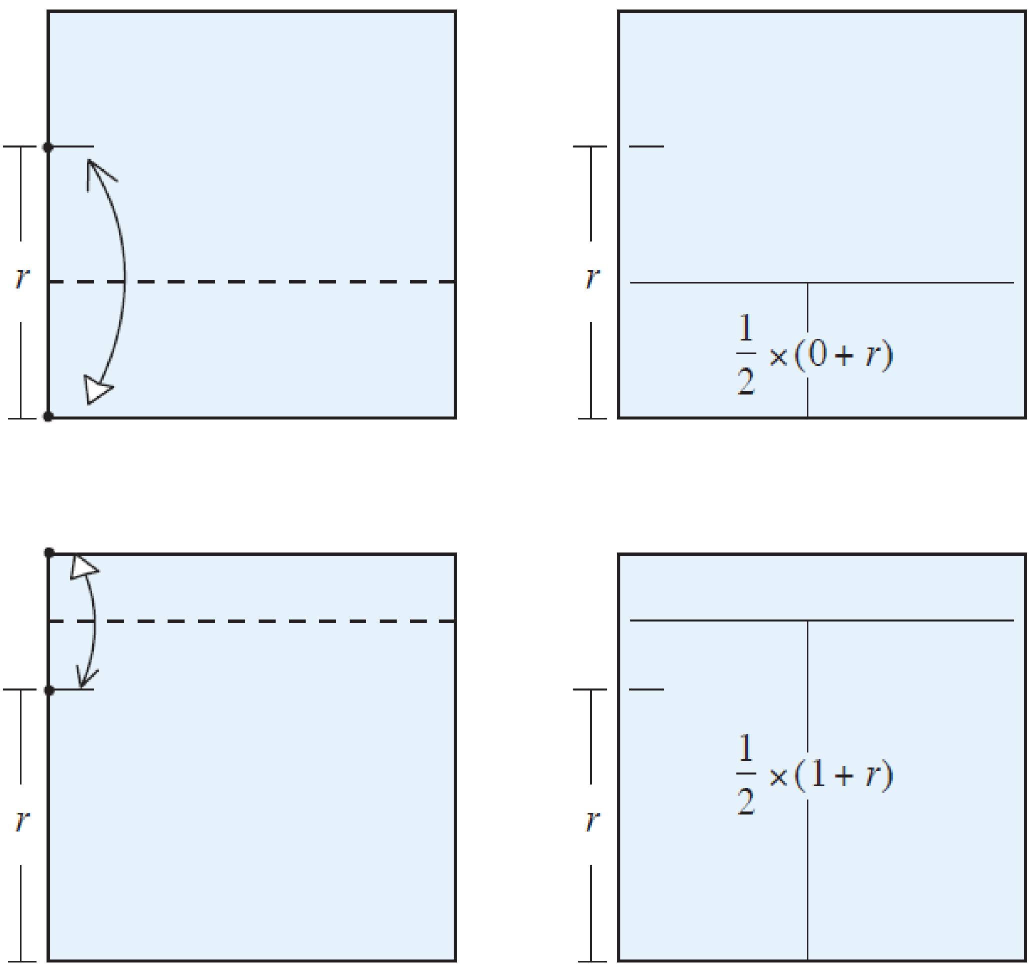


图 4。 （顶部）折叠的底部边缘到一个折痕r给出了一个新的折痕从底部（r/ 2）。 （下）顶边向下折叠到一个折痕r提供了新的折痕（（1 +r）/ 2）从底部。

由于任何二进制数可以写成两个操作嵌套序列（a）和（b）和图 1 执行这两个操作所示的两个折叠的步骤，因此，任何比例可以从它的二进制扩张折叠。

折叠之间在各部门的效率和差异与二进制计数方法向上，是巨大的。对于一小部分 $m/2^n$，前一种方法需要为 2^n-1倍，后者只有 n.

二进制逼近

其分母是 2 的完美动力拥有一个具有有限位数的二进制扩张只有分数。对于大多数的分数，分数二进制的扩张是无限的。但是，如果我们在某些时候截断二进制扩张，我们得到一个二进制数，提供了一个数字近似值。这适用于任何数量的基地。例如，在十进制表示法，1 / 3 = 0.3333 ...（也是无限小数）。如果我们在一个数字截断（0.3），我们得到的分数 3 / 10，这是只有大约等于 1 / 3。如果我们以两位数字（0.33），我们得到一百分之三十三，这是非常接近 1 / 3;，如果我们采取 3 位（0.333），我们得到一千分之三百三十三，这确实是非常接近。

同样的事情发生在二进制符号。如果我们截断的 1 / 3 2 位二进制的扩大，我们得到 0.01 = 1 / 4 – 1 / 3，而原油逼近。但 0.0101 是 5 / 16，这是越接近 1 / 3，0.010101 是六十四分之二十一，从 1 / 3 相差不到 1%。因此，什么数字都可以近似为一个二进制数，以任意精度，从而导致一个简单的方法来找到任何比例折叠的近似：构建的分数二元扩张;截断在理想水平的精确度扩张，然后使用二进制算法构造一个折叠序列。

组分，它们是两个整数的比其中分母是不是 2 的二进制展开，最终有重复的力量。这个属性允许一个反复折叠顺序先后接近理想的比例。重复部分定义的折叠序列被重复

例如，1 / 3 的二进制扩张.01，其中横线表示重复（即 0.01 = 0.010101 ...）。重复的部分，01，定义序列（请记住，我们在正确的开始），“折上往下以前的标记和开展;折底达到以前的标志和展开。”一遍又一遍地重复这个程序会生产出的折痕，标志着较快的 1 / 3 和 2 / 3 收敛，如图 5 所示，对系列。

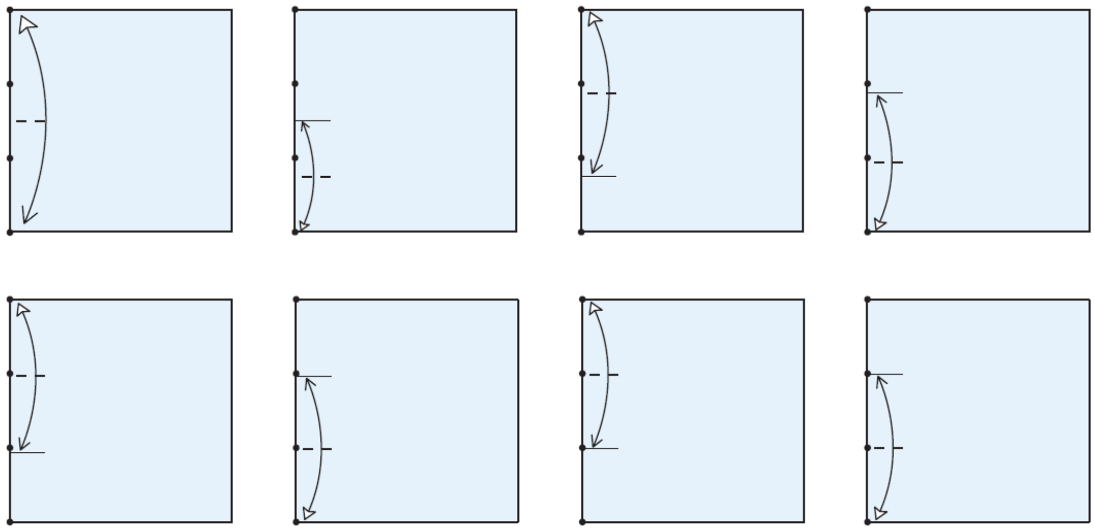


图 5。折叠序列的迭代找到 1 / 3。

存在类似的迭代方法寻找 1 / 5，其二进制扩张.0011。其迭代序列，也可以读出其二进制扩展：对折两次自上而下，自下而上，然后两次重复的需要。由于所有非理性的分数最终二进制重复，没有适合他们所有的迭代过程。

你也可以考虑交谈;假设我们选择一个过程，如“折自上而下两次，然后向上三次底部。重复”请问这是什么分数衔接呢？这种程序将有一个 0.11000 二进制扩张。有一个合理的分数转换成一个重复扩张众所周知的程序。你写的分子中的重复部分，并填写了相同数量的数字，分母 d，其中 d 是一个比数字的系统基少。在我们的例如，d = 1，因此

$$.\overline{11000} = \left.\frac{11000}{11111}\right|_{binary} = \left.\frac{24}{31}\right|_{decimal}. \tag{7}$$

对于 1 / 3 的迭代程序收敛图 5 所示的两个折痕，在 1 / 3 和 2 / 3 沿边缘方向。这是因为定义迭代程序，01 重复对应两个分数：0.01 和 0.10，其重复的部分是彼此循环排列。出于同样的原因，应该明确规定，任何重复折叠序列将收敛到由周期性排列的重复部分的所有定义的折痕集。因此，例如，011（向下，向下，向上）将在收敛到折痕

$$\frac{001}{111}=\frac{1}{7},\ \frac{010}{111}=\frac{2}{7},\ \text{and}\ \frac{100}{111}=\frac{4}{7}. \tag{8}$$

由于任何数量，合理与否，可以通过二进制扩张近似，这种技术提供了一个折叠任意精度任何比例的方式。

该近似算法的二进制力量在于它达到了相当数量相对较少的折叠良好的准确性。人们可以很容易计算褶皱的必要达到一定水平的准确性数目。如果你想一个分数折叠，精度ε r 来，由一个二进制数逼近所需的折痕小于或等于

$$\left\lceil \left(\log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right) - 1 \right\rceil, \tag{9}$$

哪里 $\lceil \ldots \rceil$ 是上限函数（圆形向上的最接近的整数）。

所需要的某一比例折叠折痕数是一个重要的折叠序列的实际措施，所谓的排名顺序。低等级花较少的时间和一般，树叶在纸上减少不必要的折痕。在有限的二进制小数 m/ p（减少到最低计算），很明显的是，二进制倍方法等级，按箱（m/ P）的表示，由下式给出

$$rank(bin(m/p)) = \log_2 p. \tag{10}$$

从纯数学的角度来看，这是数学上的精确结构是最有趣的，但是从实用的角度来看，低等级近似结构是更有用。为了得到一个部分中，一千年的准确性（更精确，通常需要在失败者折纸），方程（9）表明，我们需要不超过 9 折痕来逼近理想的比例。在实践中，折痕数量可能比理论上的最大值少。有的比例将恰恰有是少于 9 个数字准确的二进制扩张。

二进制算法的另一个不错的地方是，你可以利用沿着纸张的边缘小掐痕的皱纹最多，它不会弄乱了很多外来折痕的主要广场。

还有一个使用的二进制算法，它是在几个精确距离调查算法的关键因素。虽然二进制算法是精确的分数，其分母仅是两个完美的力量，还有其他几个算法，可以折叠任何合理的分数完全相同。这些算法在随后的章节中描述。

有理分式

在为箱褶裥知名折叠，风格的休姆和埃利亚斯，其中他人作品为代表，本文最初折痕成同等大小的正方形网格。一个模型可能开始分裂成十二分，十六分，或较少见的九分之二，fifteenths，或作为 78ths [3]即使是这样奇特文件。该需要的频率划分成定数等分正方形导致了数学构造问题：如何将一个到 b 相等的部分广场。更一般地，我们可以提出这样的问题，如何才能构建一个单独的折叠长度段的 a / b 倍的广场，其中 a 和 b 都是整数和 b 面是不是 2 的幂。二进制算法可以让我们发现任何形式的 m/ P，其中 P 是一个 2 的乘方的一部分。是否可以启动一个或多个二进制分数，构建比例等于非二进制
分数？这样做的有几种不同的方法。

隧道对角线

对于一个任意的分数的 a / b，如图 6 所示最多才多艺的折纸建筑之一的建设。它使用两个折痕：其中一个是正方形的对角线，另一个是一个折痕，连接两个对立面点。

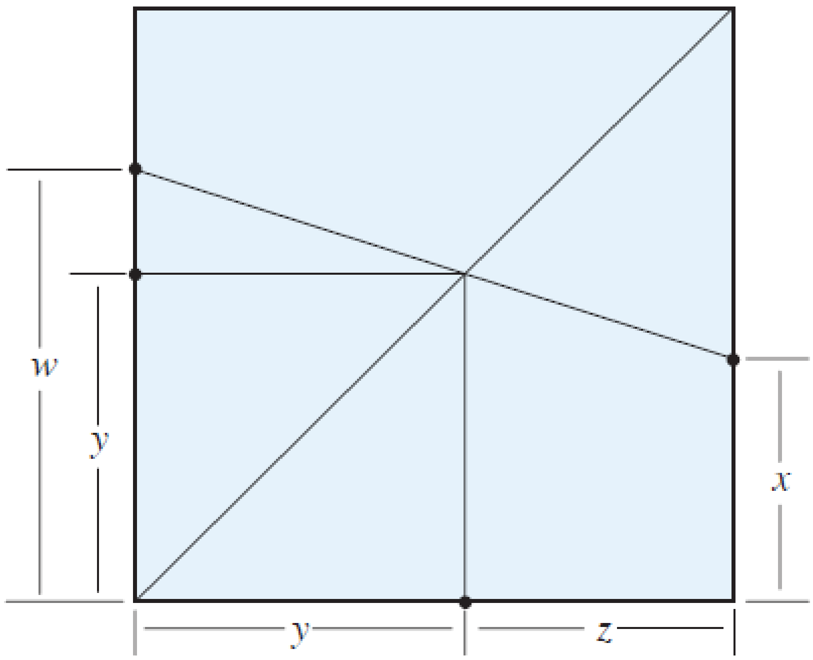


图 6。施工找到作为一个正方形的边分数有理数。

我们从一个单位正方形中，我们有折痕的对角线，从左下角到右上角运行。然后，我们构造了两个在距离 w 和 x，分别沿双方各，并与他们一个折痕。这两个定义一个新的折痕相交点，其投影到任何边缘定义了一个新的距离华 y 的求解以及与其相配套 z = 1 – y 的，给予

$$y = \frac{w}{1+w-x},\ z = \frac{1-x}{1+w-x}. \tag{11}$$

背后的过境对角线建设思路（和许多其他人）是一采两个 w 和 x 的初始比例是相对容易的构建，即二进制分数，以构建分数 y（或 z），这是非二进制分数（我们将记的 a / b）。因此，我们采取 w 和 x 是二进制分数

$$w \equiv \frac{m}{p},\ \ x \equiv \frac{n}{p}, \tag{12}$$

其中 m 和 n 是整数比 P 和 P 是一个较小的 2 的乘方。接着

$$y = \frac{m}{p+m-n}, \ z = \frac{p-n}{p+m-n}. \tag{13}$$

设置为 y =的 a / b 引起下列顺序。

定义 p 为未来的 2 功率等于或大于既是一个更大和 b-a。

定义 m=a，每组 n=（p + a - b）。

构建点 w 沿左，右边缘 w=m/ p 中，x=n / p 使用二进制
方法。他们可以与一个折痕。

构建对角线。

这两个分数的折痕交集定义为高于广场（或等价的左边缘的距离）的底部高度的 a / b。

让我们来看看几个例子。最常见的一平方多师是它分为三分之二。如果我们采取的 a / b = 1 / 3，则 p = 4，m = 1 时，n = 2 时，这就会引起的折叠序列图 7 所示。

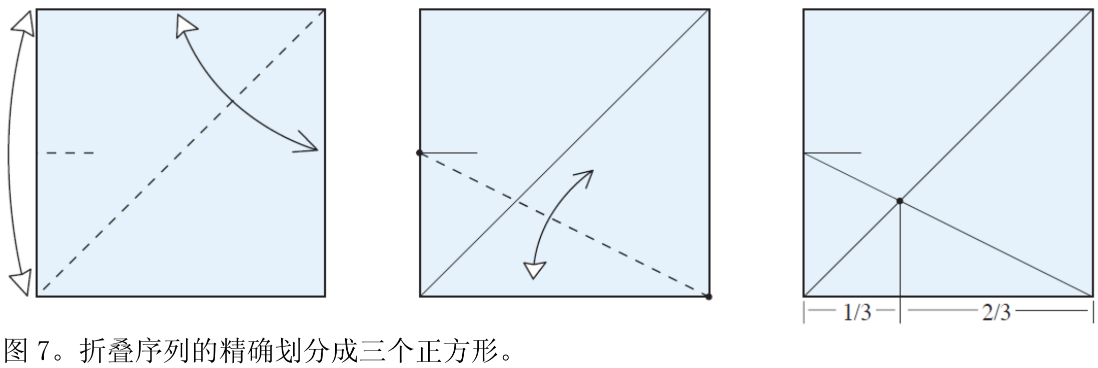


图 7。折叠序列的精确划分成三个正方形。

对于进入图 7 所示的三分之二划分顺序是相当不错，在折纸闻名。这只是一个一般的折纸建设为已知的交叉对角线方法，例如[2]，它可以适用于任何非二进制合理。表二列表为减少非二进制分数值 w 和 x，以及排名与分母，高达 10。（注意，一小部分为 y =的 a / b，距离标志着图 6 ,z 给出的分数（b- a ）/ b，因此我们只需要考虑小于 1 / 2 分数。）

$y=a/b$	$z=1-y$	w	x	$rank$
1/3	2/3	1/2	0	3
1/5	4/5	1/4	0	4
1/6	5/6	1/8	3/8	8
1/7	6/7	1/8	1/4	7
2/7	5/7	1/4	3/8	7
3/7	4/7	3/4	0	4
1/9	8/9	1/8	0	5
2/9	7/9	1/4	1/8	7
4/9	5/9	1/2	3/8	6
1/10	9/10	1/16	7/16	10
3/10	7/10	3/8	1/8	8

表 2。减少非二进制分数和所产生的二进制分数建设。

不少人对这个寻找合理数量的比例基本思想的许多可能的变化。它们都是基于两个路口有不同的斜坡对角线折痕的想法。（同样的概念也适用于发现许多无理数，特别是双线性组合和√2 的整数，我们将在后面看到。）这里是另一个过境对角线版本。而不是采取一折痕总是要在广场和其他连接两条对角线两端点，而不是一个可以跨两个对角线，这两个从广场的底部，如图 8 所示的角落，开始。

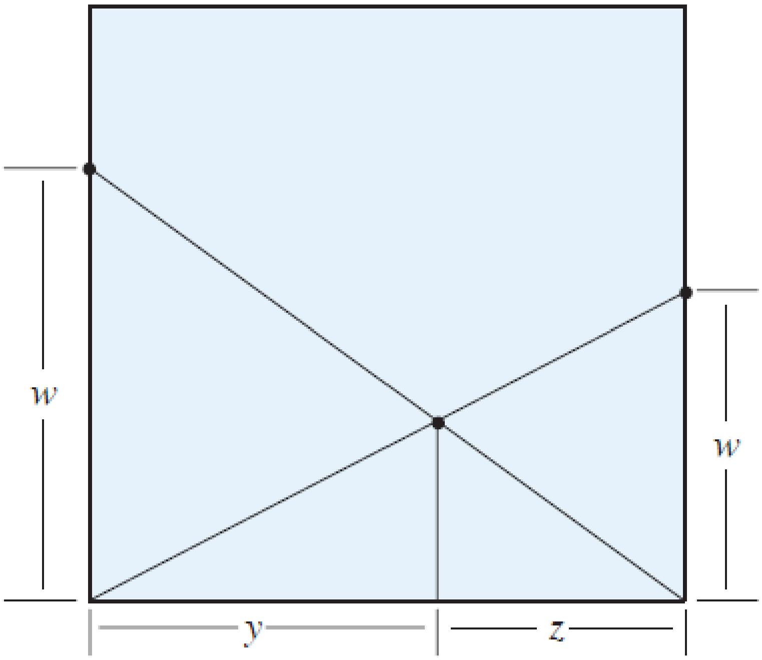


图 8。另一种寻找比例对角线交叉施工。

对于这种结构，我们发现，底部边缘划分成分数

$$y = \frac{w}{w + x},\ z = \frac{x}{w + x}. \tag{14}$$

再次，选择了我们的比例 w 和 x 为二进制分数，

$$w \equiv \frac{m}{p}, x \equiv \frac{n}{p}, \tag{15}$$

我们发现

$$y = \frac{m}{m + n},\ z = \frac{n}{m + n}. \tag{16}$$

这引发了下面的一小部分的 a / b. 在折叠序列

p 来定义最小是大于 2， a- b。

定义 m=a，n=b -a。

构建点 w =m/ p 中，x=n / p 使用二进制
方法。
w 和 x 连接点带折痕的底部与对面的角落。
这两个分数的折痕交集定义为高于广场（或等价的左边缘的距离）的底部高度的 a / b。

表 3 给出了如表 2，项目建设分数为同一分数和职级。事实证明，对于一个给定的分数，两个过境对角线方法具有相同的排名。

$y=a/b$	$z=1-y$	w	x	rank
1/3	2/3	1/2	1	3
1/5	4/5	1/4	1	4
1/6	5/6	1/8	5/8	8
1/7	6/7	1/8	3/4	7
2/7	5/7	1/4	5/8	7
3/7	4/7	3/4	1	4
1/9	8/9	1/8	1	5
2/9	7/7	1/4	7/8	7
4/9	5/9	1/2	5/8	6
1/10	9/10	1/16	9/16	10
3/10	7/10	3/8	7/8	8

表 3。施工分数和排名第二个十字路口对角线折叠序列

藤本的建设

一种折叠合理的替代技术是制定分数由日本数学家藤本修三[4]，并自主波士顿几何学家珍妮莫瑟利[5]重新发现。藤本的算法依赖于利用在图 9 所示的折叠比例建设的基础，在一个优雅的倒数建设。

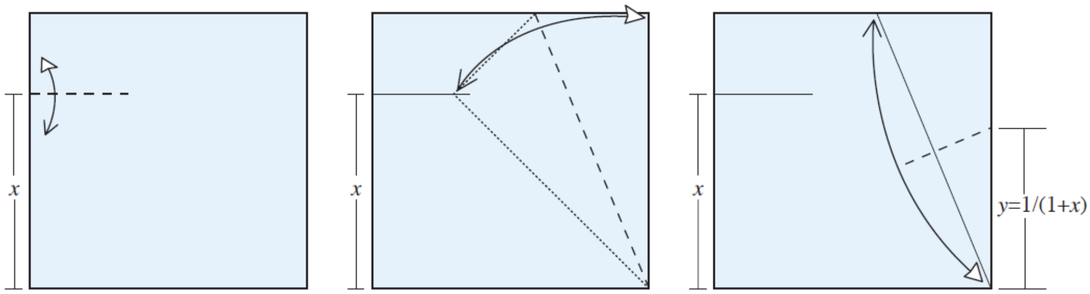


图 9。示意图藤本的一个互动建设。

从 x 的比例开始沿着正方形边的一个折痕的定义，这样的双重序列产生的倒数（1 + x）的。因此，举例来说，如果你想找到一个数 y 的倒数，如果你用的比例（y – 1）标记沿左侧关闭，藤本的建设将产生数字 1 /（1 + y-1） = 1 / y 的

要构造一个分数的 a / b，我们定义 x 是一个二进制数

$$x \equiv \frac{m}{p}. \tag{17}$$

利用藤本建设，距离 y 是

$$y = \frac{p}{m+p}. \tag{18}$$

我们以 p 为 2 比的分母 b 中的较小规模最大功率，和 m = b – p。接着

$$y = \frac{p}{b}, \tag{19}$$

这给需要的分母 b, 由于 p 是一个 2 的乘方，我们可以使用的二进制算法，以减少这一因素（a/ p）的比例给予最后，分数：

$$z = \frac{a}{p} y = \frac{a}{p} \times \frac{p}{b} = \frac{a}{b}. \tag{20}$$

完整的算法总结如下。

定义为 2 个较小的最大功率 p 比 b

定义 x =（b - p）/p

构建 X 的使用二进制算法，最后横向折痕延长所示图 9。

应用藤本的建设。这将使部分性（p / b）的沿右侧文件所确定的，沿着正确的标记。降低分数这个距离的 a / p，再次使用二进制算法

我总结了建设分数为不可约非二进制表 4 分数和排名。

y	$1-y$	x	a/p	$rank$
1/3	2/3	1/2	1/2	4
1/5	4/5	1/4	1/4	6
1/6	5/6	1/2	1/4	5
1/7	6/7	3/4	1/4	6
2/7	5/7	3/4	1/2	5
3/7	4/7	3/4	3/4	6
1/9	8/9	1/8	1/8	8
2/9	7/9	1/8	1/4	7
4/9	5/9	1/8	1/2	6
1/10	9/10	1/4	1/8	7
3/10	7/10	1/4	1/4	6

表 4。施工部位和藤本的算法排名。

虽然这两个过境对角线和藤本的算法提供了精确的任何有理分式折叠技术，折叠序列在实践中可能不准确，例如，要求一折一长，瘦三角瓣（这是很难做到整齐）。各种施工方法有时是互补的，当一个算法是漫长的，另一方可以很短，当一个是不确切的，另一个则不是。为了便于比较，一成等五分之四分工见图 10 和 11 两种方法。

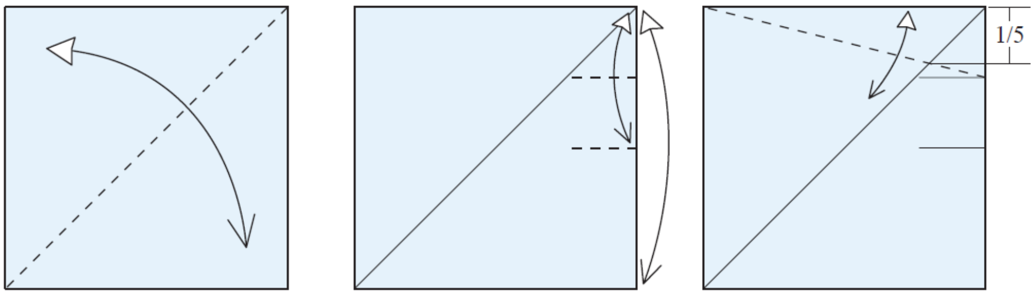


图 10。隧道对角线算法到五分之四表决。

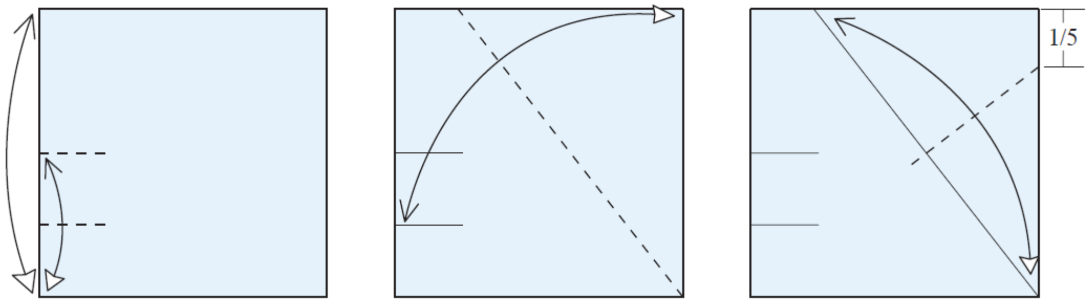


图 11。藤本的算法到五分之四表决。

其中一个过境对角线和藤本算法的缺点是，它们给整个运行该文件中额外折痕。那岂不是很好的，但是，如果有一个能够生产建设任何可能只有一小部分，那就是与周围的边掐痕构造，放在室内的纸张没有折痕？有这样一个建筑，它是下一节的主题。

野间的方法

如果你与原来的规定，只允许折痕都是围绕掐痕边缘开始，你很快就会发现，只有少数有可能的折叠类型的边缘上创建新的标记。这两个简单的是：

（1）你可以带一个在边缘上的另一个标志相同边缘标记。这是我们做什么，当我们使用二进制除法算法，而我们已经知道，这将只提供分数的分母是 2 的幂。

（2）您可以带来不同的边缘上的一个边缘到一个不同的标记一个商标。

另外有一些人（我们会遇到后），但有大量未实现的潜力，只有这两个操作。考虑的情况下，我们汇集两个相邻边痕，并在那里产生的折痕打边，如图 12 所示的新标志。这项行动的相关折纸结构是由正道野间发现[6]，因此我们将它称为野间的建设。

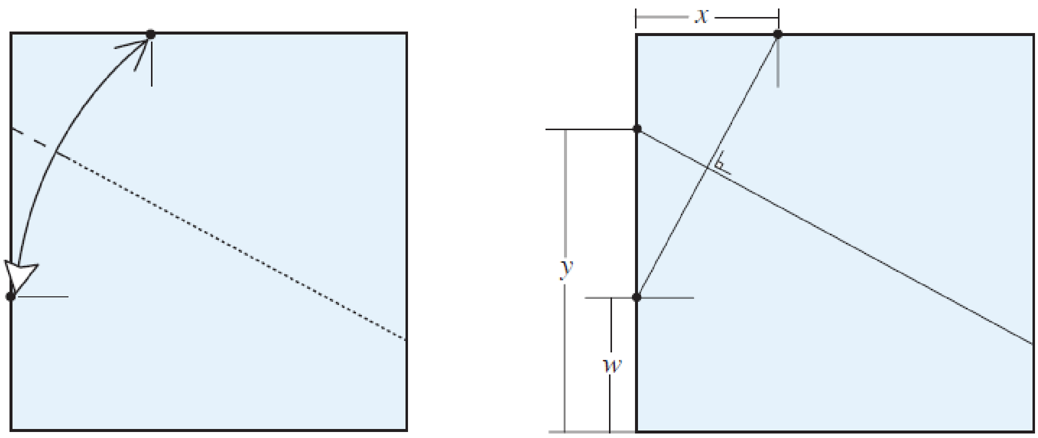


图 12。示意图野间的建设。

通过工作了（其中一些在图 12 所示）的各个方面，我们可以证明，如果一个人需要

$$w = x = \frac{b}{2p}, \tag{21}$$

y 是那么点距离

$$y = \frac{p}{b} \tag{22}$$

以上的正方形的底部。这就导致了下面的算法。

定义为 2 个较小的最大功率 p 比 b。

构建分数为 W = b/2p 中，x =b/2p 分别沿左侧和顶部边缘。

把点 w 到 x 点，使得在高度 y = P / b.有折痕沿左边缘。

构建分数的 a / p 相对于该段。

其结果是理想的分数 a/b。

完整的算法，说明了折叠的缩写，如图 13 所示序列。

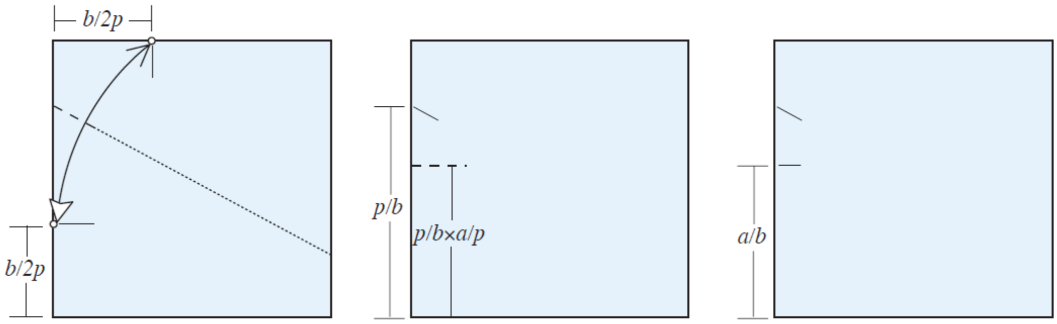


图 13。完整的野间算法任何合理比例。

所要求的分数和与分母有理数到 10 级载列于表 5。

y	1–y	b/2p	a/p	rank
1/3	2/3	3/4	1/2	6
1/5	4/5	5/8	1/4	9
1/6	5/6	3/4	1/4	7
1/7	6/7	7/8	1/4	9
2/7	5/7	7/8	1/2	8
3/7	4/7	7/8	3/4	9
1/9	8/9	9/16	1/8	12
2/9	7/7	9/16	1/4	11
4/9	5/9	9/16	1/2	10
1/10	9/10	5/8	1/8	10
3/10	7/10	5/8	3/8	10

表 5。分数，建设分数和排名野间的算法。

有一个权衡在这里，我们需要使用二进制算法三次（第一至两个不同的边缘，然后再沿着野间分工分），使野间的方法排名一般比其他方法排名更高。

哈加的建设

然而，另一间建筑芳贺和夫发现了[7-9]，只需要一个单一的对角线折痕，还可以生产各种合理的分数。项目建设一般称为“芳贺的定理。”一哈加的定理的 Husimi 发现，变异，也提供了一个到五分之四师，应当与前两次分裂成五分之四的例子比较。它是在图 14 所示。

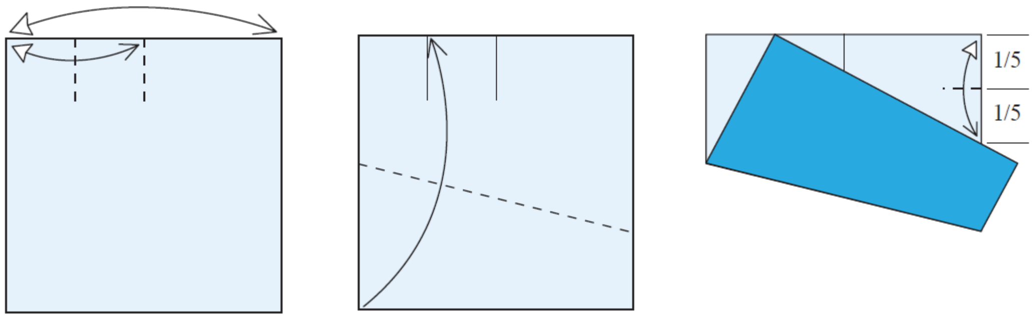


图 14。成五分之四分工的基础上哈加定理。

像其他两种算法，有芳贺的建设的许多变化是理性的发现，其他组分的比例。该哈加建设的总体形式如图 15 所示。有两个变化;所需的参考点可以被视为是在图 15 中的形象两毛边，在这种情况下，通过折叠形成的标志是沿两条边的一个路口。第二，一折上角的十字路口。

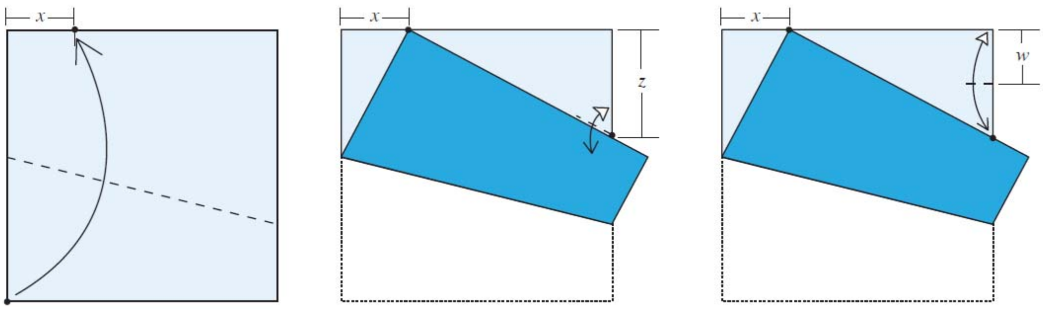


图 15。示意图的一般哈加建设。

哈加的建设不同于其他人的，该文件不是所有的折叠之间展开。但是，它允许一些特别有效合理的结构。如果我们在距离第 x 折沿顶边，那么这两个建于距离图 15

$$z = \frac{2x}{1+x}, \quad w = \frac{x}{1+x}. \tag{23}$$

这就导致了下面的一小部分 a/b 建设。

p 来定义是小于 2 ，b 的最大功率。

定义 m=p – b 标准。

构建点 x = m/p 沿顶部使用二进制方法边缘。

折叠左下角到顶部的边缘。

折叠右上角向下穿越两毛边和展开，定义

距离为 y = p/b。

降低分数段Ÿ的 a / p 使用二进制方法。其结果是

渴望得到的部分 a/b。

这些尺寸见图 16。

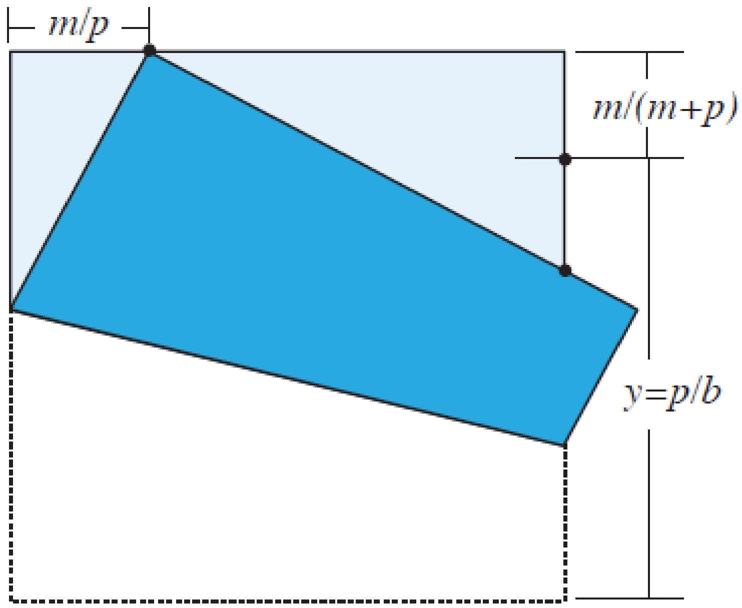


图 16。对于分数建设的 a / b 相关尺寸使用哈加的建设。

随着哈加建设，对角线折痕并不需要作出任何沿着它的长度尖锐，折叠的折叠只需要边缘被折下来，同时按住右上角的定义距离瓦特表 6 给出了使用哈加建设和他们的等级结构的有关分数。

y=a/b	*1–y*	*m/p*	*a/p*	*rank*
1/3	2/3	1/2	1/2	4
1/5	4/5	1/4	1/4	6
1/6	5/6	1/2	1/4	5
1/7	6/7	3/4	1/4	6
2/7	5/7	3/4	1/2	5
3/7	4/7	3/4	3/4	6
1/9	8/9	1/8	1/8	8
2/9	7/7	1/8	1/4	7
4/9	5/9	1/8	1/2	6
1/10	9/10	1/4	1/8	7
3/10	7/10	1/4	3/8	7

表 6。不可约分数，他们的建筑形态，并为野间的方法军衔。

这些解决方案，一般来说，比野间施工简单，如果不是对角线折痕压平，也可以无标识的纸张内作出。

不合理的比例

连分式

虽然许多几何结构与折纸，很多可以折叠的比例究竟有可能，这是有一个确切的折叠序列或者是与折纸（如 1／π）的比例或其他不可能，即使它是可能的，它可能离开纸包有这么多的折痕，以全权任何折叠的不切实际。其执业折纸艺术家，问题不是“我怎样才能折叠，这一比例是什么呢？”，而是“我怎样才能尽可能倍？几个折痕这必要精度的比例在”理想状态下，人会找到一个准确的数学方法折叠的距离，但数学的精确性并不总是必要的。在现实世界的折叠，低于 0.5％的正方形的边的距离误差很少可见。因此，人们没有找到一个确切的比例折叠的方法：它仅仅只需找到一个折叠的比例接近的近似方法。

下面是一个简单的例子;假设我们想建立一个 60 ° 内的一个方角的角度，创造出了一方 30-60-90 直角三角形。这样做的一个办法是找到的地步折痕相交广场的一侧，如图 17 所示。因为这种在一个三角形的边的比例 1：√3：2 由于在广场一侧分数表示，从角落的距离，沿折痕底部是量的 1／√3 = 0.577 ... 。构建一个角度的方法是沿底部发现那里的路线打它，那是点，找到距离 1 ／√3。这个距离既不是一个二进制数，也不是一个合理的分数，所以我们目前不知道确切的解决方案。我们怎样才能找到一个合理的分数逼近这个数字是准确的，比一个指定的宽容更好吗？

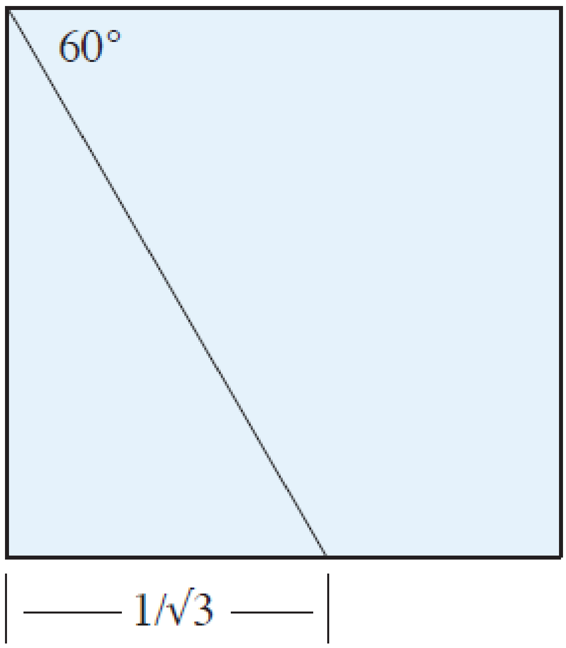


图 17。建设一个 60 度角的方式是沿着一条划去广场边的距离的 1 ／√3。

（注：有恰巧是寻找一个 60 ° 角几优雅，准确的结构，但我们会忽视了对他们说明用途的时刻。）

最直接的方式折叠的比例是蛮力一，写为十进制数，例如，1 / √3 = 0.57735 . . . 。截取到三位数，并写为分数小数;

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=0.57735\ldots\approx 0.577=\frac{577}{1000}. \tag{24}$$

分为一，千分之一的文件，并计算了五百七十七分歧。

虽然这显然是蛮力和不雅，二进制算法在第一部分中描述的作品，在大约相同的方式。如果我们写的二进制这个分数，我们得到

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=0.1001001111\ldots\approx\frac{591}{1024}, \tag{25}$$

我们可以申请的二进制算法（连续十捏马克），以查找所需的比例。但是，十掐痕是一个折叠很多。那岂不是很好，如果我们能找到一个相对较小的部分，仍然可以让人近距离逼近问题是多少？经常有，但如何找到它？

答案就在一个数学对象称为“连分数”，这在数论与分析[10]出现。连分数是代表一个号码，在一小部分一小部分一小部分内...等等方式。一个连分数的一般形式为

$$r=b_0+\cfrac{1}{b_1+\cfrac{1}{b_2+\cfrac{1}{b_3+\ldots}}}, \tag{26}$$

其中 r 是问题和 *b0*，*b1* 的数量和 *b2*（通常）整数。有些连分数有有限项，在其他部位对嵌套永远走。任何数字可以写成连分数，事实上，有无限多的连分数能代表相同的数字。但是，如果我们要求的数字{*bn*}是正整数，那么对于一个给定数的连分数表示是唯一的 – 也就是是

说，只有一个数字的，你可以把获得的分数插头数字序列。例如，分数 3 / 16，是继续给予的分数

$$\frac{3}{16}=0+\frac{1}{5+\frac{1}{3}} \tag{27}$$

这是相当简单。另一方面，分数 1 /√3 给出了无限连分数

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=0.577\ldots=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}} \tag{28}$$

这里的省略号表示的分数层次不断去 – 永远。如果数字 r 是一个有理数 – 也就是说，它可以为两个整数，如 3 / 16 的比率表示 – 有一个在分数有限项。如果数字是不合理的（例如，1 / √3），序列从未停止。如果该号码是一个合理的数量之和一个合理的数的平方根，它最终会重复（请注意，在上述比例的 1s 和 2s 的重复模式），但对于大多数无理数，其顺序欢快地游行，循环往复。

连分数的一个实用工具是这样的：即使分数永远继续下去，如果你砍掉了无穷小部分的底部，您会获得一个有限的部分，它是原来的数近似值。条件越多，你拍的更好的是你有理逼近。

一个口袋计算器，它是非常简单的判断分数为任何数字序列的第一个持续几个术语。让我们以一个例子数学常数 π = 3.1415926535 ...。这里是你如何让一个连分数：

（1）减去整数部分，把它写下来（例如，减去 3，留下 0.14159 ...）。

（2）以互惠，其余（如 1/0.14159 ... = 7.06251 ...）。

（3）重复步骤（1）及（2），直到剩余是零，或者你觉得累

（或者你超过你的计算器决议）。

的整数序列，包括你写的连分数的顺序。该号码π，你会发现，它的序列是π= {3;
7,15,1,293,10,3，...}，这意味着

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{293 + \cfrac{1}{10 + \dots}}}}}. \tag{28}$$

如果你砍掉了部分的底部，您会获得一个合理的分数该是对无理数π的近似值。该近似精度取决于你砍了无限的一部分。前四个为π组分，例如，

$$3 = 3.00, \tag{29}$$

$$3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} = 3.1428\dots, \tag{30}$$

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15}} = \frac{333}{106} = 3.141509\dots, \tag{31}$$

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{355}{113} = 3.14159292\dots. \tag{32}$$

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{293}}}} = \frac{104,348}{33,215} = 3.14159265\dots \tag{33}$$

正如你从这个例子可以看到，越远你继续砍它关闭之前，更准确的有理逼近一小部分。这个过程得到的分数是众所周知的连分数渐近式。 （娱乐数学家将承认 355/113，著名逼近π作为第四收敛。）

虽然您可以通过反复评估简化复杂的层次分数表达式的渐近式，有一个小桌子，你可以构建快速评估渐近式。写在如表 7 所示，在桌面上连分数排顺序。

		3	7	15	1	293	…
0	1						
1	0						

表 7。渐近式的π的连分数展开。

前两个在未来两行项目分别是 0，1 和 1，0。然后你先后填写每个未来两行按照本规则的单元格：

在任何单元格的数字是 2 细胞的数量总和的左侧和产品的
数在同其相邻左边的数字列的顶部。

使用此规则，您填写的细胞从左至右。例如，根据 3 细胞立即得到填补了 3 × 1 +1 = 3。它下面的细胞得 3 × 0 +1 = 1。 7 下的细胞立即得到 7 × 3 +1 = 22，细胞根据该得到 7 × 1 +0 = 7。以此类推。对于连分数顺序为π，该表填写为这样的：

		3	7	15	1	293	…
0	1	3	22	333	355	104,348	…
1	0	1	7	106	113	33,215	…

表 8。渐近式的π的连分数展开。

正如你可以看到这个表比较早的分数，每个收敛仅仅是一个中间行号和它下面的人数的比例。

那么为什么要这么麻烦得到一个合理的近似;为何不干脆写为截断十进制数？之所以用连分数作为理性逼近源于独特性能的渐近式，每个收敛具有最小的一定水平的准确性可能分母。每个收敛是你能找到最佳逼近，直到下一个收敛，其中“最佳”是指最小的可能的错误。因此，22 / 7 是最好的逼近π与分母比 106 小;333/106 是带有分母比 113 小的最佳逼近和

355/113 是带有分母小于 33，215 的最佳逼近，这是异常好（这就是为什么这个分数这么有名）。小分母连分数渐近式的确是非常准确的。即使是像 22 / 7 简单的分数仅相差 0.001 从π。

即使是折纸结构不具有确切的折叠序列，它有可能来任意接近的确切比例以连分数。不管是什么数字，你需要简单地写成连分数的，计算出前 4 或 5 渐近式，并选择最小的收敛给出了一个可以接受的小错误。问题在于，从而简化，而不是正准备找一个折叠序列无论任何数字，我们只需要找到一个有理性的分数折叠序列 - 两个整数之比。这些已经可以提供描述的折叠算法。

二次 Surds

我所描述的算法迄今适用于有理数，两个整数比率。有时，这些都是需要直接，例如，当你必须在九分之正方形分割，有时，我们使用一个作为另一个的比例逼近有理分式。这些其他比例可能涉及平方根，立方根，三角函数，甚至可能是由计算机或计算机解决数值。所有这些比例可以近似将它们转换为有理数，然后用一个准确的合理比例折叠序列。

然而，还有另一种非理性的比例内频繁出现的折纸简单和精确的解决方案往往存在着折叠系列：这些都是形式比例

$$\frac{1}{a+b\sqrt{2}} \tag{34}$$

其中 a 和 b 是整数，通常是小[2]。这样的比例被称为二次 surds。 （准确地说，他们是二次 surds 子集。一般二次 surds 可以有内部的平方根之比重大于 1 以及与其它数字）经常出现在这些比例折纸，以至于它们是值得特别一提。使许多折纸纹路与他们的角度 22.5 °，这是一个几何倍数为单位圆 1/16th 使用数字相关的对称性。在这样的基地，在折痕模式的主要业务范围大多是成正比的因素，彼此 $a + b \sqrt{2}$。例如，与这些角平分线折痕包含了几个平方的比例形成了属于这种类型的所有提升系列线的家庭。

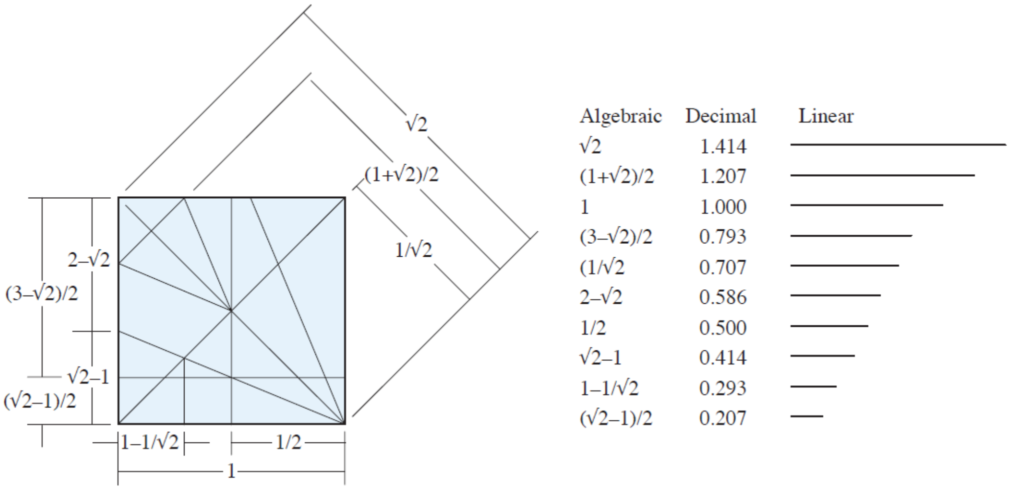


图 18。双线性 surds 折痕中出现的一个广场。

折纸基地的折痕模式，利用了 22.5 ° 几何对称三角形有两种类型组成：45-45-90 直角三角形和 22.5-67.5-90 直角三角形，其双方在图 19 所示的比例。

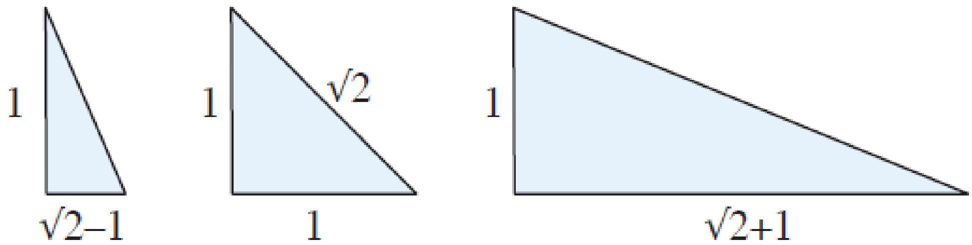


图 19。三角形的角度比例是 22.5 度的倍数。

折纸设计方法论瓦片众所周知，在[11-15]中描述，构建了一道简单的模式进行拟合，复杂的是这些三角形组成基地纹路。这些模式经常出现反复在不同尺度。当所有在 22.5 ° 的倍数运行折痕，在正方形，长方形，三角形和构成这些模式是 1 和√2 的所有双线性组合的比例。此外，比例因子，适用于这些模式也是这样双线性组合。其结果是，在这种模式的折痕尺寸的因素，该表通常都与对方通过 a+b√2。

作为一个例子，图 20 显示了一个这样的折痕格局，老鹰，我设计了一些几年前使用：

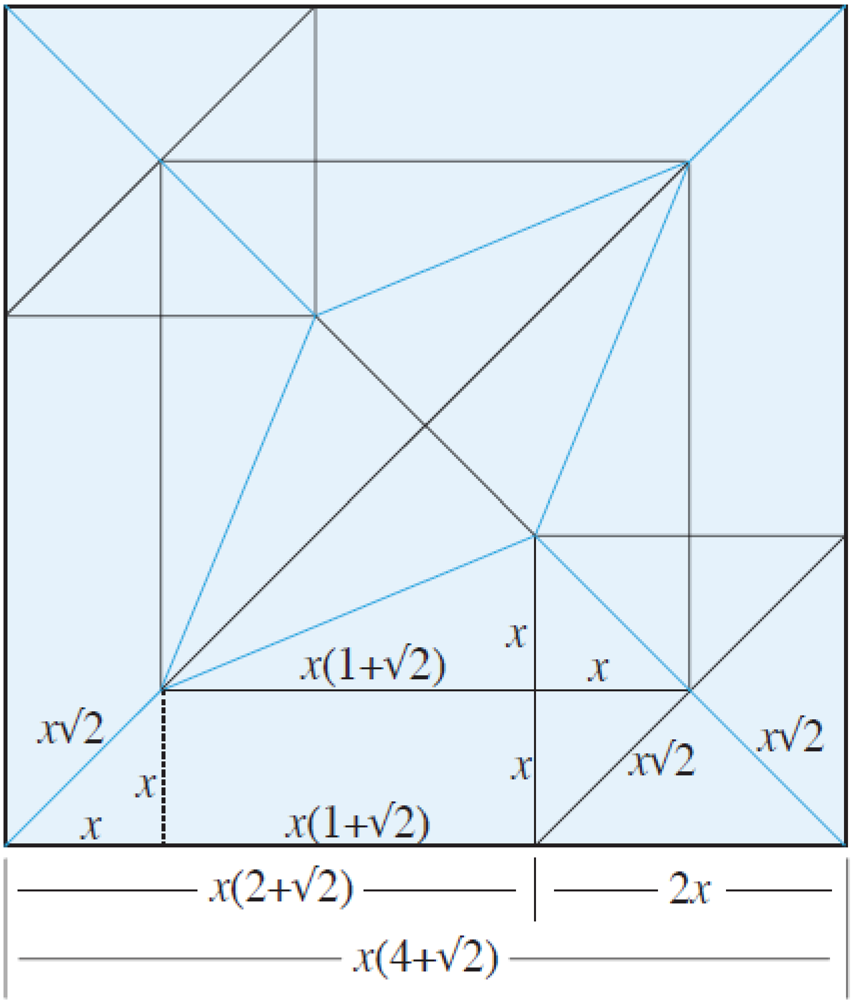


图 20。防皱模式的鹰和相对比例。

在这个数字中，我在一个段的比例相对于 x 的一些显着的标记所有的段到 x 成正比相邻三角形的比例可参照图 2 所示的三个三角形的比例。

我们可以填写各阶层的比例，直到我们到达广场的边缘;通过总结沿边缘所有线段的长度，我们发现，在广场边是 x（4 +√2）为单位长。如果假设一个单位正方形，然后

$$x = \frac{1}{4 + \sqrt{2}}. \tag{35}$$

构建由折纸折叠折痕模式，它有必要寻找距离 X 或任何相关的距离，如 x√2，2x，或 x（1+√2） – 由折叠。这可以通过几种方法：由一个二进制逼近连分数作为一个理性或近似，通过合理的方法之一其次（交叉对角线，藤本，芳贺，或野间）。

事实证明，然而，许多的形式通过 a +b√2 的比例，特别是本一，正好可以折叠使用类似建造的过境对角线建设。让我们看看两个过境对角线的几何形状，如图 21 所示，再次。

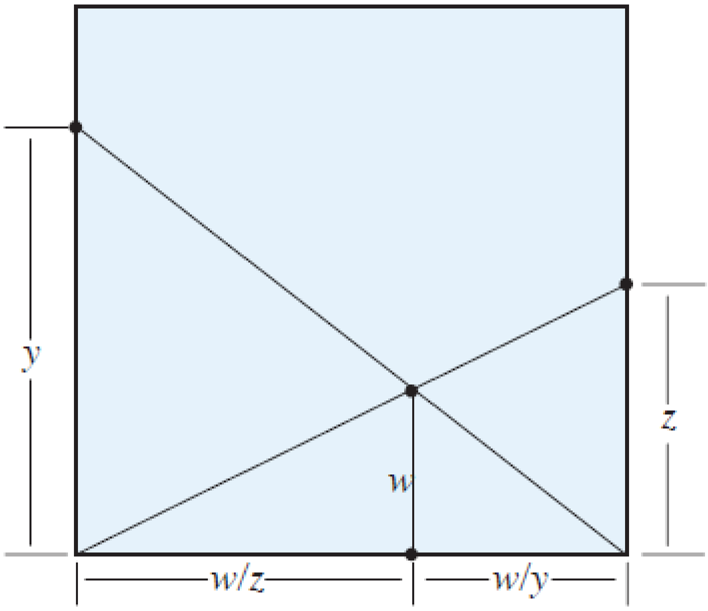


图 21。一般形式的过境对角线算法。

如果两个对角线折痕命中，双方高度 y 和 z，分别和我们定义为上面然后删除该文件从相贯线，底部相交分为高 w 的段在广场的底部长 $\frac{w}{z}$ 和 $\frac{w}{y}$ 分别。底部边缘的总长度是这样

$$w\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right). \qquad (36)$$

现在，比较此表为边长的计算基础，我们在图 20 中，这是 X 上的折痕模式下

x（4 + √2）。如果我们等同的两个，那么我们就可以设法找到一个 w，的 x，y 分配和 z，允许一个相对简单的建设：

$$x\left(4+\sqrt{2}\right)\equiv w\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right). \tag{37}$$

最简单的任务是拍摄 x =w 然后，我们只剩下方程

$$\left(4+\sqrt{2}\right)=\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right). \tag{38}$$

如果我们可以划分成两部分，其倒数很容易找到，（4 + √2），那么我们就会发现，特别是有分工的精确解。

而事实证明，有执行这个师许多方面。让我先给特定的解决方案，并显示它为什么有效，然后我就回去做其他的解释方式，并给予一般程序。

特定的解决方法是：

$$(4+\sqrt{2})=\left((2)+\left(2+\sqrt{2}\right)\right)=\left(\frac{1}{(1/2)}+\frac{1}{\left(1-1/\sqrt{2}\right)}\right), \tag{39}$$

因此，如果我们采取为 y = 1 / 2 和 z = 1 - 1 / √2，跨越鸿沟的对角线将在纸张底部，如图 21 所示。

寻找为 y = 1 / 2 是很容易，但要找到 z = 1-1 /√2 不是立即明显。事实证明，虽然，这一比例为鱼基地内称为折纸形状，如图 22 所示所在。

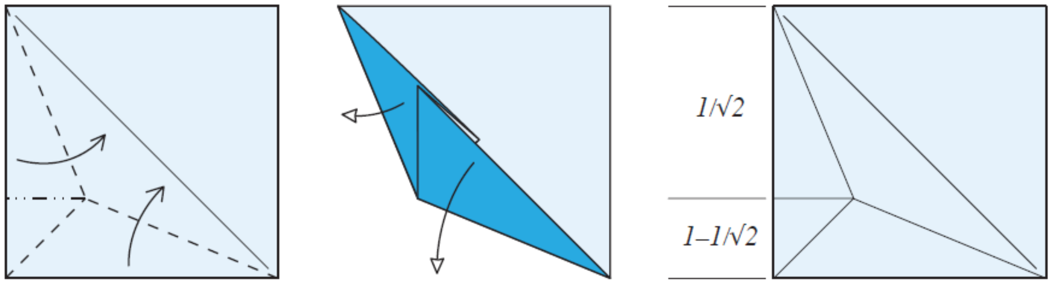


图 22。建设 1-1 /√2。

因此，如果我们从一个半一边掐鱼基地和其他标记的半山腰，然后对角线分为两个过境所需的比例，在底部，如图 23 所示。

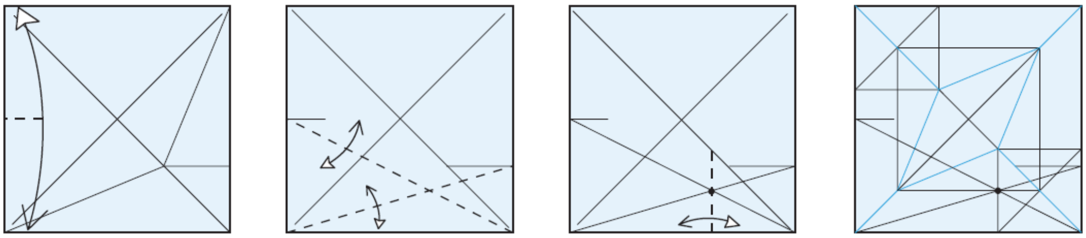


图 23。折叠序列，找到最初的表决。

基本上我们正在做的是寻找，找到一个底部边缘，其中单独的部分很容易找到的倒数 a 组的底部边缘的倒数。一般来说，当在广场一侧的形式 x 是（a + b √2），其中 x 是一个模式中的重要折痕的长度，a 和 b 是有理数，人们通常可以找到一个过境对角线序列给出了比十找到这个序列，就等于找到了倒数（a+b √2）。找到的窍门过境对角线序列分手（a+b √2）分为两个方面，而我们可以很容易地找到他们的倒数。

整数或理性的一部分，通常不是一个问题，因为我们可以找到任何使用前面给出的合理比例结构整数的倒数。在确定的困难来自一个容易折叠部分的相互包含一个条件 b √2。

幸运的是，没有过多的这些很多，我们可以很容易地列举最常见的可能性。所有被发现的风筝，折叠，折叠角 22.5 °。图 24 显示的距离 y，它的倒数，和折痕指定所需的比例。虚线的痕迹相关的对角线折痕，这将是一对之一。

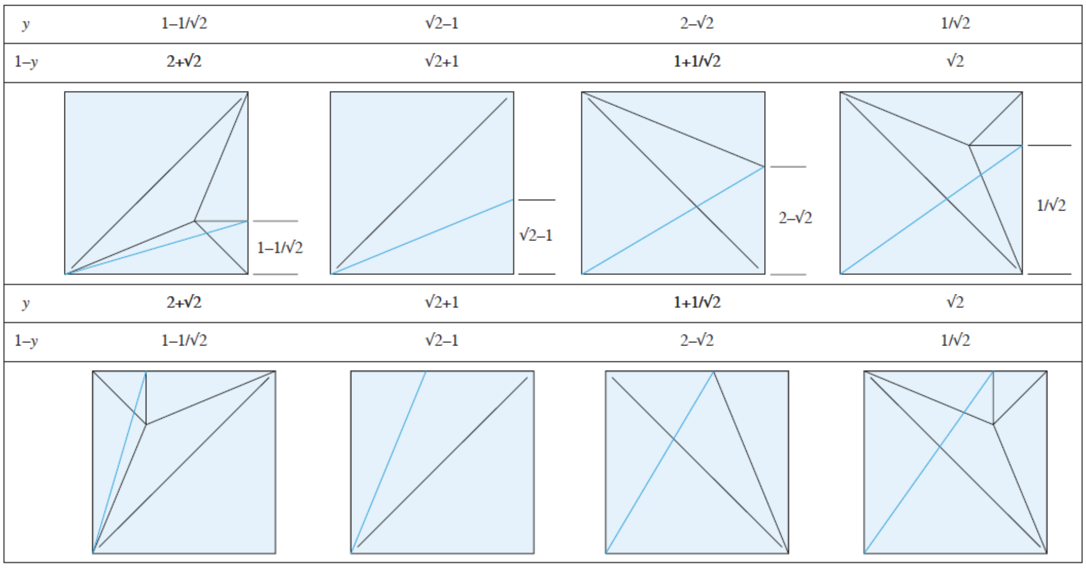


图 24。在共同二次 surds 折纸，他们的倒数，以及如何折叠，坡度线等于二次根式的价值。

这些表格提供的 1 /y，其中包含的因素±√2，但对较大的√2 的倍数？这很简单，如果你将形成对角线，然后由 b 因子分数 y，那么由此产生的倒数是增加了同样的因素。

因此，寻找对等算法（a+b√2）是让一个对角线给你部分含有√2，让对方给你的对角线整数或合理的部分。由于与前几节的纯粹理性的建设，有很多方法，找到相同的比例。

角分部

较少见的不是一条线部门是部门角度;划分一分为三，五分之二，或七分之角。像一条线师，师角度为 2 的幂是相对容易的。有人可能会认为，既然线划分为一个任意比例很简单，把简单的解决办法会存在任意角度的比例为一师以及。但到其他部位的角度部门也相当困难。

事实上，它的知名度，使用指南针和直尺，而线段可分为任意等分，任意角度的分裂次数的三分之二将简单的东西是不可能的。指南针和-直尺建设是一个古老的数学分支 – 关于这个问题的日期后超过两千年历史文本。解指南针和-直尺建设给我们很多在折纸建筑所使用的工具，因此，让我们偏离了一会儿考虑数学领域。

很多人遇到指南针和-直尺高中几何中的问题。 Compassand -直尺建设是类似于在几个方面折纸。在这两个，你要生产的几何形状，都有严格的规定。在折纸，当然，你使用无切削折叠。罗盘和-直尺，你可以使用指南针，这是一个绘制圆工具，和一个没有标记的直尺画直线。这是一个基础教育学习各种几何结构的共同部分：通过画一个给定的点线平行线，一分为二的角度，或绘图等边三角形，如几何图形，等腰直角三角形，或正方形。外地可以回溯到古代的根源; 许多建筑解决方案中介绍了欧几里德的元素，且发表公元前 300 年左右的时间。

三个著名的古代数学问题，可以追溯到古希腊数学在雅典一些四百年公元前的辉煌岁月。而且有一个 origamists 特殊的意义。最早的大难题，而我们有记录是“水中捞月”，或建设作为单独使用指南针和直尺圈具有相同面积的问题。第二是“倍增立方”，也被称为“提洛问题”，因为它是由于在德洛斯阿波罗神谕，该对象是建立一个立方体的体积也正是双一面给定立方体，或等价，给定一个线段，兴建第二部分，这正是长$\sqrt[3]{2}$倍。第三个大问题，这是我们的利益在这里，是一个任意角三等分。希腊数学的大部分（实际上是现代数学的主要部分），专门讨论了这三种解决方案问题。虽然在数学的巨大身体成长的这种追求时，它是一切都是徒劳的，最终所有三个指南针和-直尺结构被证明是不可能的一些 2200 年，以后。而指南针和直尺画都允许一个圈，线，折纸，只能折直线。因此，它是相当令人惊讶的是三等分角（和立方体增加一倍，也一样，原来）可以通过折纸技术解决了！

折纸的优点是拥有指南针和直尺在于双方构造的数字字符。由所有数字构造的罗盘和直尺可以在一个二次方程的解，一个方程中未知的指数不大于 2 的条款写入。给定一个定长行设置，可以用圆规和直尺构造任何线性组合，多或这些长度的平方根。因此，带指南针和直尺，可以解决任何二次方程或高次方程就是还原到其作为构造的距离定系数二次方程。

然而，两个立方根和一个任意角三等分的建设需要一个三次方程，其中未知的指数为 3 的解决方案，而圆的平方需要一个长度为π，其中段施工是一个超越数，不能被看作是一个多项式方程的根写的不是一个方面无限数量少。这三个经典问题被证明是不可能大约 200 年前。

一个不同的排序的“不可能的证明”是 1995 年在美国数学月刊文章，标题为“，也不可能全实折纸折纸”，即表明作者声称，这是不可能复制的立方体使用折纸技术[16，17]。事实上，他们声称，折纸实际上比罗盘和-直尺结构限制，无法例如，构建形式 $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ 某些号码是圆规和直尺构造的。

事实上，对于重复的立方体，三等分一个角，以及 $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ 结构及相关的数字解决方案已经闻名多年的折纸。对超过指南针和-直尺建设折纸折纸优点是，允许一个同时调整到两个不同的行两个独立的点。的每月文章的作者认为是已知的折纸操作，并没有让这同时对齐类型子集。然而，两点两线同时调整到允许的三次方程的解，因此，解决方案的古代经典问题二：多维数据集和一个给定的角三等分的重复。

因此，折纸可以解决三次方程，并自角三等分需要一个立方方程的解，这样看来，折纸也可以三等分任意角 - 第二个经典问题。事实上是可以的，有几个这样的建筑。其中一个 trisecting 在一个广场一角由日本数学家 Tsune 文件夹和安倍[18，19]设计，一个锐角的解决方案，如图 25。

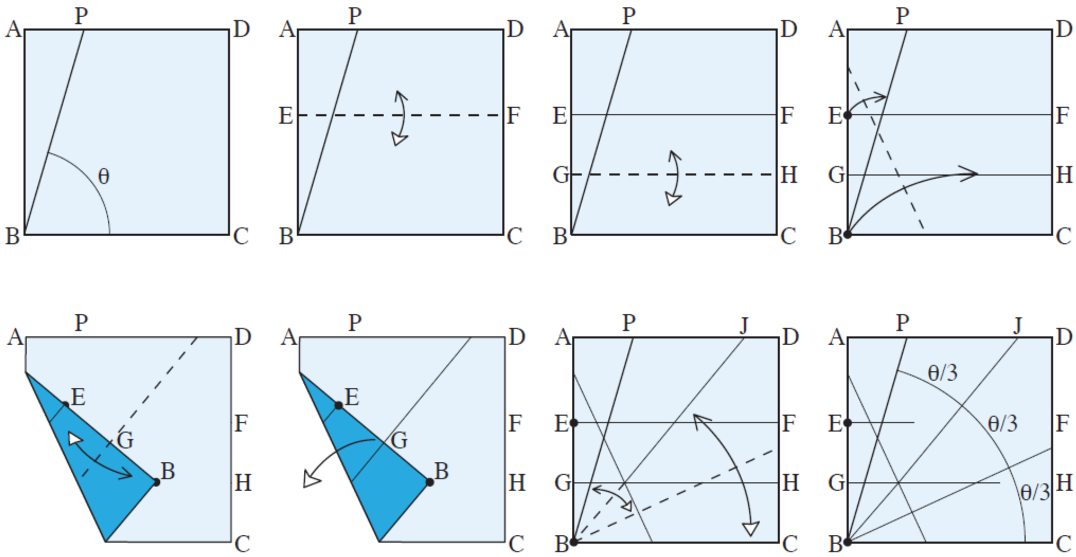


图 25。 Tsune 安倍晋三的三等分一个任意锐角。

对于安倍的三等分过程如下：

（1）马克的角度是在一分为三的广场一角。在这个例子中，角 PBC 将被分为三。

（2）折叠的任何折痕平行边 BC。

（3）折边 BC 高达折痕 EF 和展开。

（4）折角落 B 的注册，使 E 点位于 B 的在线 BP 和角落在线 GH 谎言。

（5）沿现有抗皱防皱通过 G 点，通过所有层的皱褶。

（6）展开。

（七）扩大由点 j 折痕回到 B 点同时，把边 BC 和折叠 BJ 展开。

（8）角分为三。

一种 trisecting 由法国数学家雅克文件夹和贾斯汀设计钝角技术，则说明以及图 2 [20]。（因为任何角度可以由 trisecting 其补分为三，无论是技术可以用于任何角度。）Justin 的技术并不需要在广场的一角使用，是说明了一个无限的表中好象。关键点要注意的是，这两个技术都需要在一条直线上两点同时对齐。

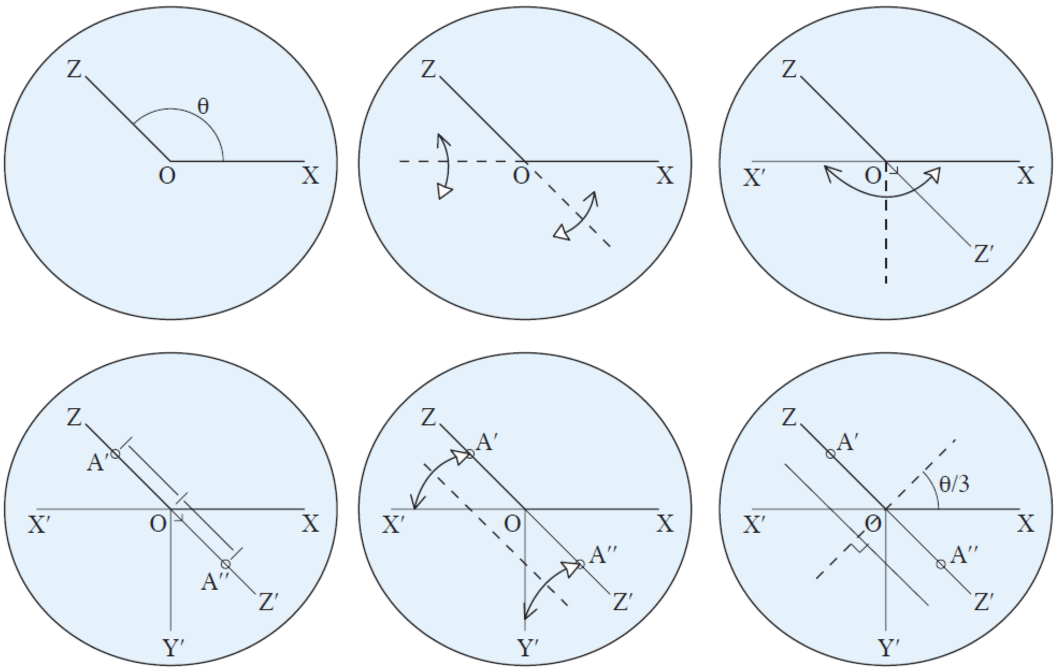


图 26。雅克 Justin 的三等分一个钝角。

Justin 的三等分如下：

（1）将分为三角是角 ZOX。

（2）扩展线 ZO 和 XO。

（3）通过折 x 到 x’ 点 O.的

（4）划出点 A’和 A’ ’ 上线 ZO 和 Z’O 在相等的距离从点澳''

（5）折点 A’和 A ''躺在线 X’O 和 Y’O 和展开。

（6）折点的垂直线通过 O 到三等分角到最后折痕。

三等分角平分可以组合和分裂成许多不同部门的单位圆，或等价地，兴建一个 n 边正多边形（一“正 N 边形”），其中 N 的形式为 $2^n 3^m$（n 和 m 是任意整数）。因此，只用折叠，可以分为相等的编号 2，3，4，6，8，9，12 个任意角度，等等。

为特定的情况下你是划分成 N 等份一个完整的圆，还有另外一个发现的由奥地利数学家罗伯特 Geretschläger [21-24]折纸家庭结构，对历史可追溯至 1890 年[25]几何结构为基础。他已经表现出了一种构造一个正 n 边形，其中 N 是一个素数形式 $2^n 3^m + 1$ 一般方法。本表格中的数字是 3，5，7，13，17 ...这种结构可与角平分线和三等分，以及给予的其他形式多边形 $2^j 3^k \left(2^n 3^m + 1\right)$ 每当括号中的词是素数的总和。虽然有 Geretschläger 的做法充分说明超出了本文的范围，在本节最后的参考文献说明一些具体案件和一般的方法。利用这些结构中，只有 nonconstructible 正 N 边形的 N≤20 为 N = 11。

角部结构是游览德精确的数学力量，但它们通常是不切实际的复杂，用于折纸设计的，因为它们涵盖了附带折痕纸本身不准确的，可以要求压痕：狭长的三角形，使用折痕遥远的推断，复制的角度和距离。

然而，正如我们在看到一个分裂的边缘，出于实用的目的，常常可以近似为好，甚至更好的精确解。事实上，我们可以使用边缘的部门，建设部门近似角。

从我自己的工作的例子来说明这个过程。在我的书，对折纸，一只蝎子设计要求划分为七分的 90 度角，在模型的早期阶段，全书[26]。这并不难找到尝试和错误（成七分折叠式的角

度和不断调整的皱褶，直到所有部门都是平等的），但我们也可以找到一个近似的解决方案，是确定的和准确的内折错误。

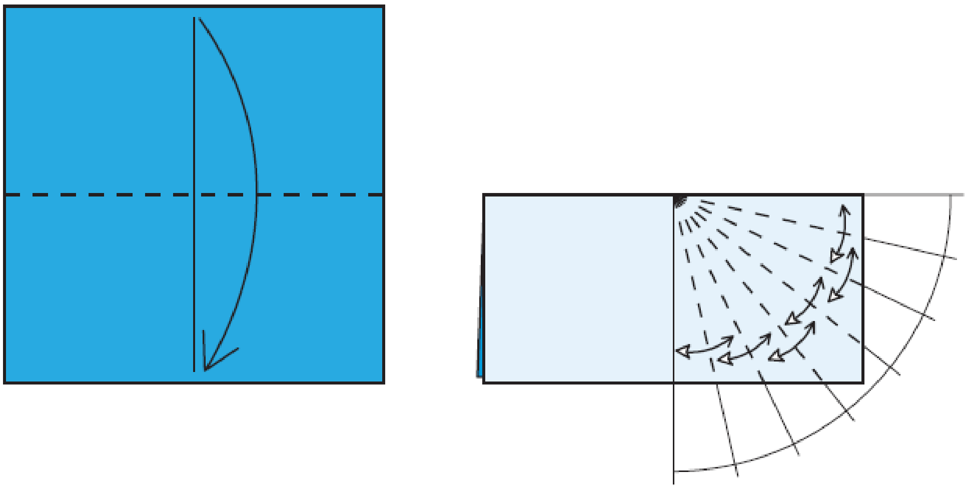


图 27。第一二步郎的蝎子，这需要一到七分的角度划分。

现在，我们可以这两种方式的方法：我们可以尝试七分角度分为本身，或者我们可以尝试定位在纸张的其中一个或更多的访问的折痕的纸张边缘的边缘点。如果我们对这个聪明的，我们只有找到其中之一;如果，例如，我们找到了 4 / 7 行的角度，我们便可以平分两次就可以得到 2 / 7 和 1 / 7，随后所有其他部门，纯粹由折叠。

现在有没有简单的对这些点的位置代数的表现，但使用一些高中三角函数，我们可以计算出其中的折痕击中边;小数点的数字值显示在图上展开 2 平方米。的距离，作为一个在广场的边缘分数表示，给出的公式

$$y_i = \frac{1}{2}\left(1 + \tan\frac{90^\circ}{7}i\right), \qquad (40)$$

在那里 i 是在图 28 所示的角度索引。

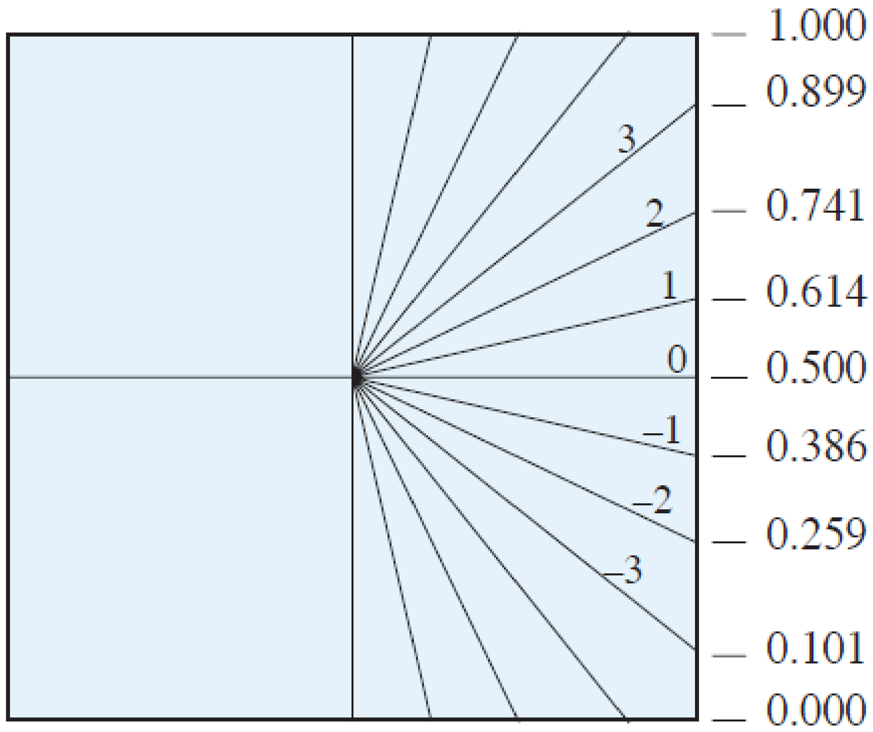


图 28。交叉口与纸张边缘角第七师。

上述任何一个可能是近似的二进制方法或合理比例从连分数的渐近式而得。注意到日圆= 0.101≈1 / 10 导致的折叠序列图 29 所示。

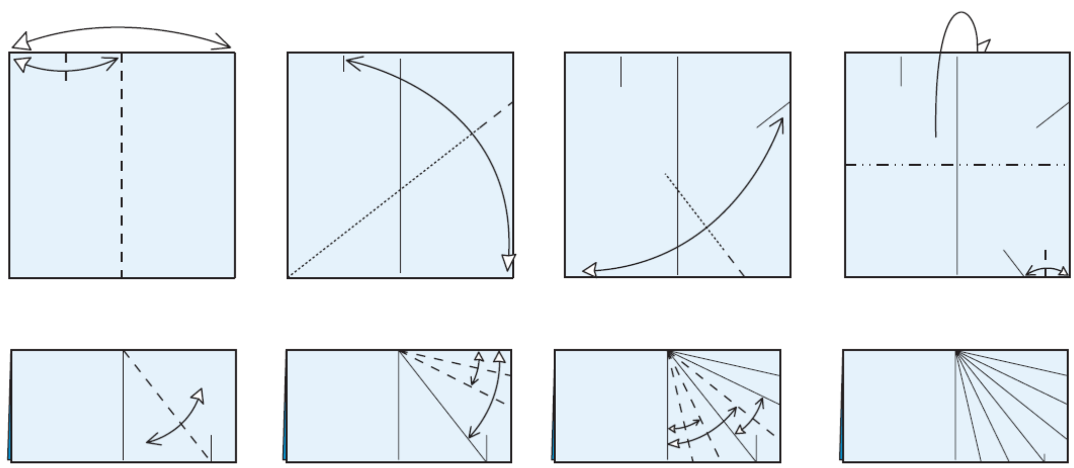


图 29。七分折叠划分成 90 度角的中央序列。

它也可以使用一个迭代逼近任何角度划分，基于二进制的方法，用人的角度（就像二进制方法采用连续科）连续平分。如果我们任等同与在广场的顶部和底部边缘的光线角度一边，然后有一个褶皱之间的鸿沟在广场边缘和褶皱，自然对应的角度划分，如图 30 所示。

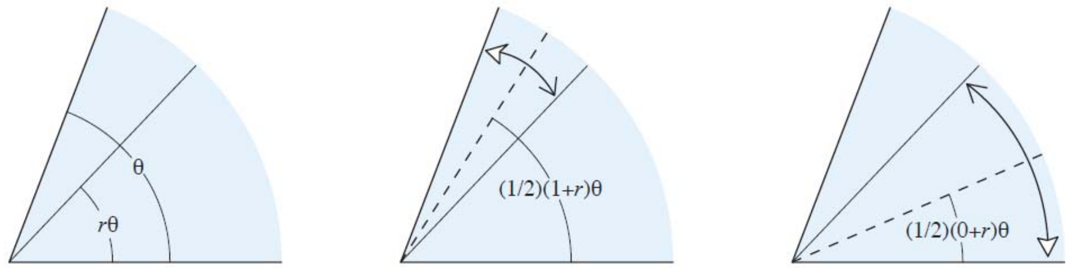


图 30。由二分的角度司对应两个操作组成的二进制折叠方法。

如果我们使用这两个图 30 所示的操作，那么我们可以应用这两个操作按分数 r 二进制扩张分裂的比值 r :1 – r 角。对于（如 1 / 3）非二组分，无限重复的部分，但二元表达式给出了一个分裂的迭代法。因此，举例来说，分为 7ths 角度，它的二进制扩张

$$\frac{1}{7} = .\overline{001}, \tag{41}$$

可以通过重复的程序（左，左，右），其中“左”的和“右”指的角度双方划分成 7ths。

公理化折纸

因此，我已经证明目前使用的折叠方法，在不同的相同的基本操作
组合：折点到另一个点，折一条线，另一条线（角平分线），将通过一个或两个分的折痕。在 20 世纪 70 年代开始，几个文件夹开始系统枚举折叠，并研究可能的组合是什么类型的距离是由他们以各种方式相结合构造的。第一个系统的研究是由 Humiaki Huzita [27-29]，谁所描述的调整现有的点，线，折叠线本身的各种组合，确定了六个单眼皮设置的基本方法。这六项行动已经成为为“Huzita 的公理”（HA）称，虽然他们可能是最好的操作后，为点和线的行为思想。给定一个点和线在一张纸上集，Huzita 的操作允许一个创建新的生产线；

在新老线的交点确定加分。点和线的一套扩展届时可能进一步扩大了反复的手术中的应用获得进一步的点和线组合。

通过反复的积分的 HA 应用构造的一些初始设置集功能，通常情况下，角和边的单位平方米的是学术和现实利益。从学术方面，它已被证明是 HA 可以用来构造的距离是由单倍连续三次方程的解。特别是，优雅的建筑已经提出了三个伟大的古典主义的问题，不带指南针和没有标志的直尺可能二：三等分角，正如我们所看到的，和立方体加倍[30]，我们将在短期内遇到..在实际方面，HA 可以让双方非常低等级的精确和近似的折叠序列。

HA 特别明确的和清晰帐户是在[31]。虽然所谓的“公理”，他们是最好的因为这点和线法对基本操作产生一个新行，这是折线思想。确定的六个 Huzita 操作如图 31

（01）鉴于二点 P1 和 P2，我们可以折叠线连接起来。

（02）鉴于二点 P1 和 P2，我们可以折叠小一到小二。

（03）由于 L1 和 L2 两行，我们可以折叠到 L1 的线格 L2

（04）作为一个点 P1 和直线 L1 给出，我们可以通过点 P1 的一折到 L1 垂直传递。

（05）鉴于两点 P1 和 P2 和 L1 行，我们可以做出一个折叠，放置到 L1 的 P1 和 P2 的通行证通过点。

（06）鉴于两点 P1 和 P2 两线 L1 和 L2，我们可以使折叠，放置到 P3 上线 L1 和 L2 的 P2 的地方

正如我们将会看到，操作 01-05 可用于构建任何有理性的系数二次方程的解决方案。操作 06 是独特的，它允许解的构造一般三次方程。

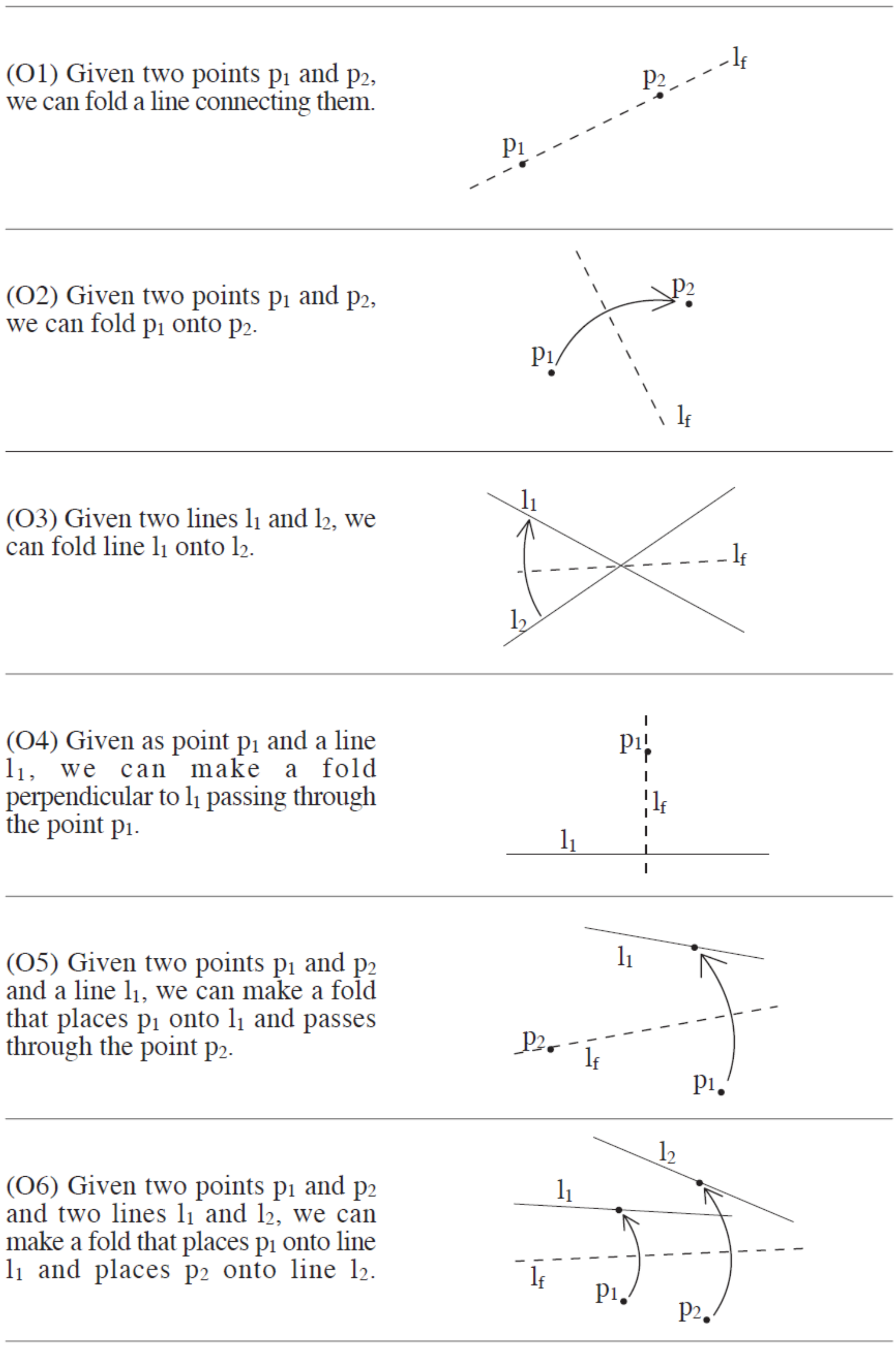
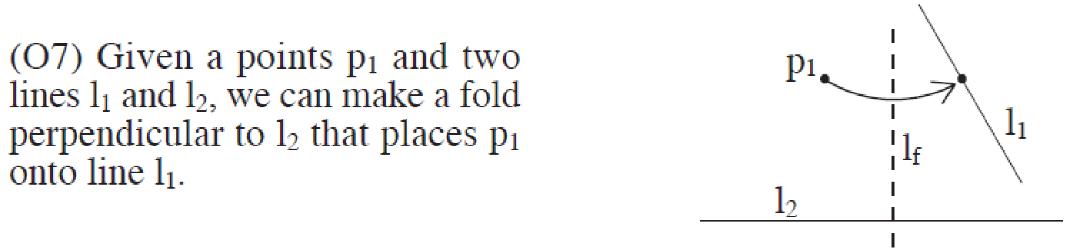


图 31。对 Huzita 的公理六个业务。

最近，一个第七操作是由 Hatori [32]，我会记（07）。它是在图 32 所示。



07）给定一个点 P1 和 L1 和 L2 两行，我们可以折叠到 L2 的垂直线放置到 P1 的 L1。

图 32。 Hatori 第七公理。

Hatori 指出，这一行动并不等于任何的 H1A。 Hatori 的 07 允许某些二次方程式（等价，它可以构建指南针和直尺）解决方案。如果我们记为“Huzita – Hatori 公理”（HHA）扩展集，事实证明，这一套是完整的，这些都是所有的操作由一个单一的定义与有限线段点对准折叠。在接下来的部分中，我将表明，这一套是完整的。

预赛

完整性和统计证明依赖于点票系统的操作部分的自由度。此枚举是通过创建一个辅助点，线，和运营代数描述。

定义：一个点 P 是一个有序对在ℜ2（的 x，y）与 x∈[– ∞，∞]，的 y∈[– ∞，∞]。

我们注意到，一个点有 2 个自由度（DOF），即两个参数，可以是多种多样的独立，即两个坐标值度。

线是一个比较复杂一点，一个线可以从几个方面定义。一位来自 01 收益的可能性，这对应于欧几里得的公理之一：“通过任何两点恰恰存在着一条线。”这表明，一条线被定义为两个不同的点在它的地方。由于每个点是两个坐标的定义，该定义将要求四坐标值被用来定义任何行。然而，这样的定义是不是唯一的，一个可以定义的任何两个点对的同一行。

第二，更简洁的定义是由一个在直角线高中代数方程建议坐标：为 y = mx + b，其中 m 为斜率，b 是 y 型拦截，该行定义的所有坐标点（x，y）满足这个方程。这个表达式清楚地表明，一条线，也有 2 DOF;两个坐标值 m 和 b 是足以唯一描述几乎所有的行。

一个使用笛卡尔式的不足是，它没有唯一指定平行于 y 轴（其中有无穷的斜率 m 和截距 b 是不确定的）线。它是采用一种更为有用的参数，这并不需要无限的价值，在一定意义上，对待所有行“一视同仁。”

我觉得是很有用的特性通过 2 向量垂直线和一个特定的点就行了一条线，按照以下。

定义：定义定向单位向量 u（α），作为

$$U(\alpha) \equiv (\cos\alpha, \sin\alpha) \text{ for any } \alpha \in [0, 180°). \tag{42}$$

定义：A 线之 L（d，α）是集所有点 P 满足方程

$$(P - dU(\alpha)) \cdot U(\alpha) = 0, \tag{43}$$

对任何 D∈[－∞，∞]，α∈[0180°)，与 A·B 表示 A 和 B 是不难标产品，以证明这个定义，任何行是由唯一的组合指定（d，α）。这也很容易证明方程（43）等价于

$$P \cdot U(\alpha) - d = 0. \tag{44}$$

一个行之 L（d，α）是由以下给予方便的参数化。

定义：给定一个 P =（x，y），垂直向量 P⊥被定义为向量

$$P^{\perp} \equiv (y, -x). \tag{45}$$

P 是 P⊥有经历了 90°逆时针旋转。作为一种简化的符号点，我将定义 U⊥(α)≡(U(α))⊥。

⊥那么很容易证明，每行之 L（d，α）可以在 P 点的形式表示

$$P = dU(\alpha) + tU^{\perp}(\alpha) \text{ for some } t \in [-\infty, \infty]. \tag{46}$$

该方程的几何解释（46）图 33 所示。这一点 dU（α）是上线最接近原点;偏移 tU⊥（α）的变化由距离 t，可以是正面还是负面的点线沿线 dU（α）。

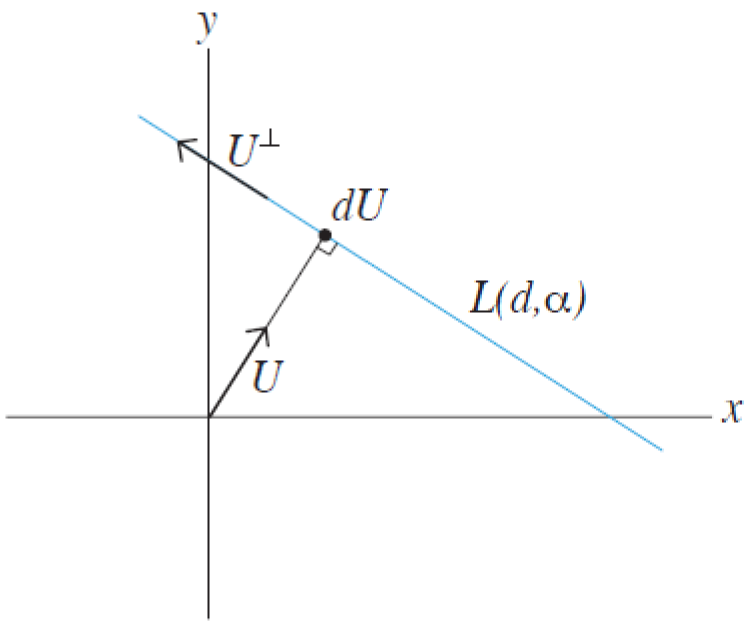


图 33。在几何解释参数方程（4）。

每一个表格（4）点满足方程（2），反之亦然，因此，无论是方程可作为一个行定义中使用。

折页

折叠被定义为一条线，称为折线。折线分为两个区域的文件。在一个行一边是固定区域，另一边是运动区域。其中选择的是固定的，哪些是完全任意的，移动的名字只会帮助直觉。

当折叠形成，在运动区域的所有功能都通过他们的坐标折线，这将是由 $L_F(d_F,\alpha_F)$ 表示。

由于折叠的定义是一条线，一条线有两个 DOF（即 d_F and α_F 参数），它需要两个 DOF 完全指定的折线。

对于在下面记法简洁明了，我将定义用 $U_F \equiv U(\alpha_F)$。

如果折线是由 $L_F(d_F, \alpha_F)$，然后给出一个点 P 的运动区域内，折叠后，在给定的点 P' 位于

$$\begin{aligned} P' &= P - 2\left(\left(P - dU_F\right) \cdot U_F\right)U_F \\ &= P + 2\left(d_F - P \cdot U_F\right)U_F \end{aligned} \quad (47)$$

我们将表示的折叠结果一用 F（P）的 P 点。也就是说，

$$F(P) \equiv P + 2\left(d_F - P \cdot U_F\right)U_F. \quad (48)$$

这是两个相对简单的身份验证：

$$\text{For any point } P,\ F(F(P)) = P, \quad (49)$$

它只是陈述了显而易见的事实，折叠点来回折沿同一叶片中发生变化。

对于任何 $L_F(d_F, \alpha_F)$ 点 P，

$$F(P) = P, \quad (50)$$

其中规定，对折线点是由一个折叠不变。

我们还将定义一个线路上的褶皱作用的结果。对于直线 L，记为 F（L）的所有点 F（P）的满足（a）P 满足方程（44），（b）P 在纸张的运动区域所在。

路线

我们现在描述意味着什么使用折叠对准两个特点。一个单一的调整包括将两个功能在一起。我们有两种类型的特点：点和线。我们必须首先定义我们所说的一致的意思。

两个点 P1≡（X1，Y1）的和的 P2≡（x2，y2）据说是一致的坐标值时，双方都是平等的。我们用一个双箭头对齐：小↔P2 的。也就是说，

$$P_1 \leftrightarrow P_2 \text{ if and only if } x_1 = x_2 \text{ and } y_1 = y_2. \qquad (51)$$

由于必须满足两个方程，对准两点消耗两个 DOF。

把一到行性（P↔L）点

一个点的 P1≡（X1 和 Y1）被认为是与直线 L 对齐的（d，α）当且仅当它上线，也就是说，如果 P1 在于满足方程（44）。我们之间的一致性和记点和由同一双箭头线：P1↔之 L（d，α）。也就是说，

$$P_1 \leftrightarrow L(d,\alpha) \text{ if and only if } P_1 \cdot U(\alpha) - d = 0. \qquad (52)$$

由于只有一个方程，必须满足，对准一个点到线只消耗一 DOF。

我们注意到，调整经营者被定义为交换，也就是说，异种操作数，

$$P_1 \leftrightarrow L(d,\alpha) \text{ if and only if } L(d,\alpha) \leftrightarrow P_1. \qquad (53)$$

带着一个线到另一个线（L↔L）

两条线 L1（d1，α1）和 L2（d2，α2）据说是一致的当且仅当每一个点在 L1 与 L2，反之亦然对齐。

对于简单的符号，让我们表示 U1 的≡U（α1），U2≡U（α2）。那么，如果我们选择参数方程（46）来定义 L1 行，就是一个点 L1 行 P1 是给予

$$P_1 = dU_1 + tU_1^{\perp}, \qquad (54)$$

一些的（d，t），则两线对齐意味着每个这样的点 P1 必须满足方程（44），即：

$$\left(d_1U_1 + tU_1^{\perp}\right)\cdot U_2 - d_2 = 0. \tag{55}$$

一个重新安排位使

$$\left(d_1\left(U_1\cdot U_2\right)-d_2\right)+t\left(U_1^{\perp}\cdot U_2\right)=0. \tag{56}$$

左边的方程（56）是在 t 型;为方程对所有 t 满意，无论是线性项和常数必须单独等于零。因此：

$$d_1\left(U_1\cdot U_2\right)-d_2=0, \tag{57}$$

$$U_1^{\perp}\cdot U_2=0. \tag{58}$$

因此，对于两条线将其带进调整，必须满足两个方程和两个 DOF 消耗。

两个方程的一个几何解释是，方程（58）执行，这两个线是平行的，而公式（57）强制要求他们相交。

事实上，它可以很容易地表明，如果两行，已知有一交点，则方程（58）就足够了。

通过折叠路线

在上一节中，我定义的三个路线，基本类型：P↔ p，p↔L，L↔L 我现在列举所有可能由一个折叠创建可行路线。可提出这样的路线之间已经存在的功能在纸上，或可能包括创建该功能的折叠，即折行本身。

我们认为（和解雇）两个已经存在的功能，都是移动或静止路线。任何这样的路线是不创建

的褶皱，因此不能被用来指定折线的位置。剩余的，有趣的课程的路线是两个已经存在的功能，其中一个是移动，一个是固定的，与先前存在的功能和路线的折线。

考虑两个功能之间已经存在的文件，其中一个是在移动部分和其他必须在第一部分固定的路线。这样就产生了 5 个可能的路线，这是在表 9 给出。

Symbol	Description	# of Equations
$F(P_1) \leftrightarrow P_2$	Fold point P_1 to another point P_2	2
$F(P_1) \leftrightarrow L$	Fold point P_1 to line L	1
$F(L) \leftrightarrow P$	Fold line L to point P	1
$F(L_1) \leftrightarrow L_2$	Fold line L_1 to different line L_2	2
$F(L) \leftrightarrow L$	Fold line L onto itself	1

表 9。在五个不同的点和线之间的平凡路线。

我们必须区分后两种情况下，因为在折叠到另一行线需要两个条件的解（方程(15)和(16)），当行到自身折叠的折叠线，它根据图像相交于折线，因此它是只需要足够方程（16）。

第二组的路线由既存之间的特点和折线路线。有两种可能性：对齐与折线点，对准折线一条线。后一种情况是微不足道的，正沿着现有路线的折纸没有新的功能。因此，唯一的非平凡的情况是对准折线表 10 给出了一个点。

Symbol	Description	# of Equations
$P \leftrightarrow L_F$	Align point P with the fold line L_F	1

表 10。平凡的唯一不同点之间的一致性和折线。

这就完成了所有可以通过创建一个平凡的单眼皮路线上市。

多序列

现在，我们想用路线来定义折叠，即由一个或多个指定的路线，我们完全指定折线位置（或等价地，它的两个参数 dF 和 α F）。这就要求我们一定要在路线创造尽可能多的方程式，因

为我们有未知：两个。我们注意到，有两个路线，通过自身每个征收两个方程。他们是 F（P1）↔为 P2（折一个点到另一个点）和 F（L1）↔L2（折一条线转到另一条线）。这两个路线个别足以定义一个折叠线，它们对应 Huzita 的公理 02 和 03，分别列于表 11 给出。

$F(P_1) \leftrightarrow P_2$	O2
$F(L_1) \leftrightarrow L_2$	O3

表 11。这两个操作指定两个 DOF 和 HA，他们对应。

其他四个路线只有建立一个单一的方程;因此，我们必须考虑他们对建立两个方程，完全指定折线。有四个可能的路线，有 10 个可能的不同对（因为顺序是不重要的），这是在表 12 总结。

	$F(P_2) \leftrightarrow L_2$	$F(L_2) \leftrightarrow P_2$	$F(L_2) \leftrightarrow L_2$	$P_2 \leftrightarrow L_F$
$F(P_1) \leftrightarrow L_1$	O6			
$F(L_1) \leftrightarrow P_1$	O6	O6		
$F(L_1) \leftrightarrow L_1$	O7	O7	N/P	
$P_1 \leftrightarrow L_F$	O5	O5	O4	O1

表 12。可能是指定路线对单眼皮和相应 HHA。

一个组合，（F（L1）↔L1，F（L2）↔L2）有没有解决办法，如果 L1 和 L2 是解决非平行和无限的，如果他们是平行的。其余对每个对应于 Huzita－Hatori 公理之一。由于这些代表了所有可能的路线，创造正好有两个自由度，这表明 HHA 集完成（这 Hatori 第七公理确实是必要的完整性）。

施工性

它是建立在相对简单的点和线组成的参数条件，为折线参数为七个 HHA 作业六 (d_F, α_F) 的显式表达。每一个涉及到更复杂的方程式不超过二次，而事实上，这六个操作可以用来构建任何有理系数二次方程精确解的解决方案。

不过，操作的 06 折叠两点两线，更为复杂。解析为折线的解决方案需要解决，一个三次方程，这意味着通过执行此动作，一可以解决三次方程准确。

或许，解决了使用这种倍立方最有名的例子是彼得梅塞尔对多维数据集，或者更具体分为两部分，其建设增加一倍的长度在 3 √2 比例的解决方案。这个美丽的建设，提出了在[30]，并在图 34 复制。该广场分为横向折痕的三分之二。然后，角落折叠，使点 P1 和 P2 的线条 L1（左边缘）和 L2（上横向折痕）的谎言。P1 的地步边缘分在所需配比。

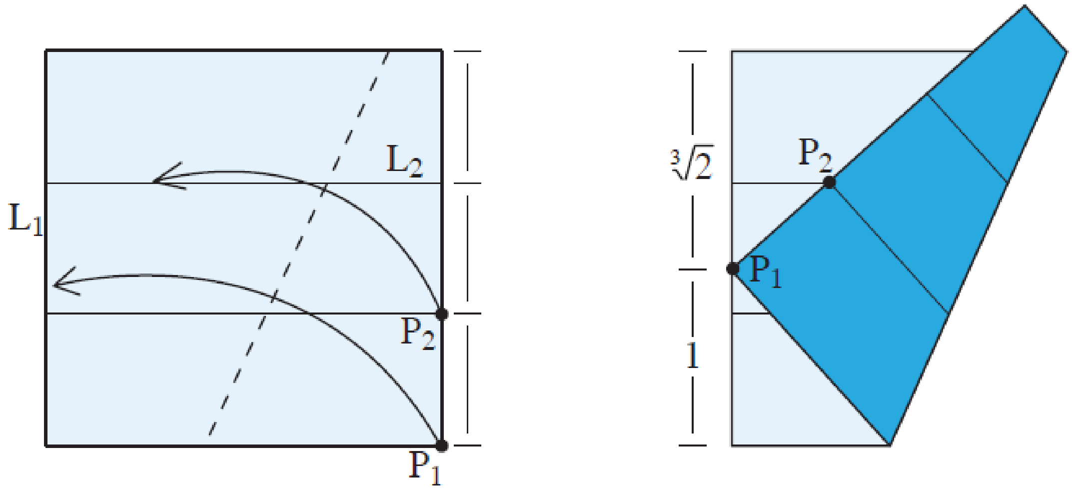


图 34。彼得梅塞尔的建设 3√ 2。

事实上，公理的 06 有几个有趣的数学分支连接，因此值得深入研究的一点。

公理 6 和三次曲线

给定任何两个点，两个在一张纸上片材生产线，公理 6 个州，有可能折到两行两分。这是一个不完整的概括，因为事实证明，它并不总是对的点和线组合和其他一些有可能在一个以上的可能方式。我们应该考虑两个点 P1，P2 和两行的 L1，L2 的所有可能组合。为了简化考试，我们将调整我们的坐标系统，使一对线，一楼为 X 轴，使

$$d_1 = 0,\ U_1 = (0,1). \tag{59}$$

同样，我们可以假设，没有一般性损失点 P1 位于

$$P_1 = (-1,0). \tag{60}$$

我们还假设线 L1 是静止的点 P1 移动。

我们现在假设一个折线的L_f，由d_f特征参数和a_f，使得

$$U_f = \left(a_f, \sqrt{1-a_f^2}\right). \tag{61}$$

我们定义 P1’的所规定的褶皱L_f形象的 P1，也就是说，

$$\begin{aligned} P_1' &= F(P_1) \\ &= P_1 + 2(d_F - P_1 \cdot U_F)U_F \end{aligned} \tag{62}$$

如果我们要求折线L_f的地方P_1'点到 L1 行，那么方程（44）必须得到满足，即

$$P_1' \cdot U_1 - d_1 = 0. \tag{63}$$

将（59-62）代入（63）和解决提供了d_f

$$d_f = \frac{2a_f^2 - 1}{2\sqrt{1-a_f^2}}, \tag{64}$$

只留下一个自由参数（a_f）来指定折线。

对于任何折行参数a_f，任何点 P2 具有影像 P2’的，成果从行动

对折线折叠。对于给定的点 P2，因为我们改变了它的范围从-1 a_f为 1，

出空间曲线点P_2' 的扫描。两个这样的曲线点的 P2 =（2，-1.5）和

的 P2 =（2，+1.5），是在图 35 所示。

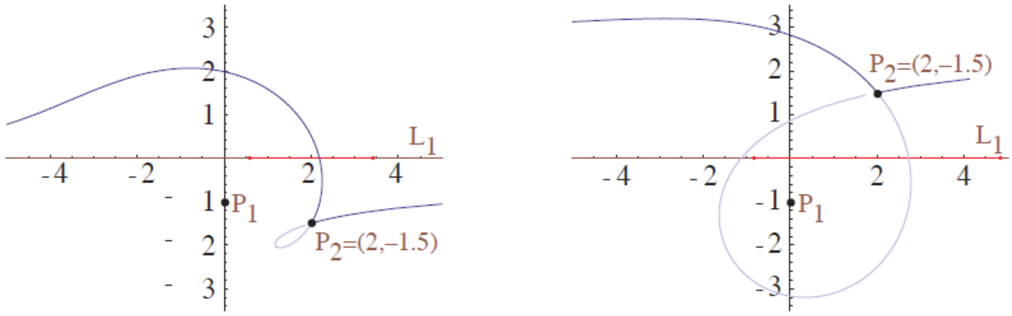


图 35。点的轨迹扫出由 P2 的折线作为参数 a_f 少则-1 P2 到一两点。

至于是否有一个解决方案，P2’的地方是在一个给定的行 L2 是按有否，有多少次，L2 型线相交刮起了曲线的 P2’回答’的问题。因此，它是有用的这条曲线推导出一个公式。

如果我们定义

$$P_2 \equiv (a,b), \tag{65}$$

$$P_2' \equiv (x,y), \tag{66}$$

并解决了 P2’的坐标，我们发现

$$x = a - 2aa_f^2 + \frac{a_f\left(2a_f^2(1+b) - (1+2b)\right)}{\sqrt{1-a_f^2}}, \tag{67}$$

$$y = 2aa_f\sqrt{1-a_f^2} + \left(2a_f^2 - 1\right)(1+b). \tag{68}$$

消除了两个方程 a_f 给出了一个用于刮起 P2’的出曲线的形状方程：

$$\begin{aligned} &y^3 + (1-b)y^2 + \left(x^2 - b(2+b) - a^2\right)y + \\ &\left(b^3 + b^2 + a^2b - a^2 + 2ax - x^2 - bx^2\right) = 0 \end{aligned} \tag{69}$$

方程（69）包含在 Y 最多三次，二次项在 x，没有超过 3 度较高的任期，这是一个三次曲线，曲线型，在数学的许多分支的数字。

图 35 说明了这样一条曲线，这可能是由式（69）派生几个显着特点。

•作为自动对焦→± 1 时，曲线的渐近线方法（±∞，1 + b）。

. •它通常包含一个循环（如图 35 色光灰色）循环的过境点 P2 =（a，b）发生。

•任何 L2 的切割线的曲线在最多 3 位，因此，到 B1 的最多有 3 P2 的可行路线。如果行的 L2 只有削减 1 将曲线，那么只有一个可能的协调一致，如果 L2 曲线完全忽略了，有没有可能的路线。

.

如果我们强加给一个变量在这个曲线变化，

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x + a \\ y &\rightarrow y + b, \end{aligned} \tag{70}$$

如果我们强加给一个变量在这个曲线变化，...

$$y^3 + (1 + 2b)y^2 + y(2a + x)x = x^2, \tag{71}$$

这对于特殊情形 b =- 1 / 2 被称为 Ophiuride 曲线，[33]，a= 0，b=- 1 / 2，是所谓的 Diocles [34] Cissoid。

本人在上述隐含假设是固定的 L2 分析和 P2 在动;在每个与此折线二级假设，一致的，我们必须确保 P1 和 P2 都在同一侧的褶皱线的谎言。它可以证明，这种情况到处沿曲线除了在循环持有，因此，只有曲线的黑色部分对应于一个物理可实现对齐。

我们也可以使用这条曲线（这对齐），解决了一般三次方程。如果我们把方程（26）等于一般立方米，

$$y^3 + ry^2 + sy + t, \tag{72}$$

和等同系数，我们可以找到 a，b 两个解决方案，x，它变成是相当复杂的代数表达式，但只涉及平方根。以个别案件

$$y^3 - 2 = 0, \tag{73}$$

我们发现两个可能的解决方案：

$$P_2 = (a,b) = (\pm 1,1),\ \ x = \pm 2. \tag{74}$$

因此，一个 3√ 2 解由放置在 L1 点 P1 和 P2 =（1, 1）到垂直直线 x = 2，如图 36 所示，与它的镜像考虑到其他的解决办法。的 y 坐标 P’ 2 给出了所需的比例。

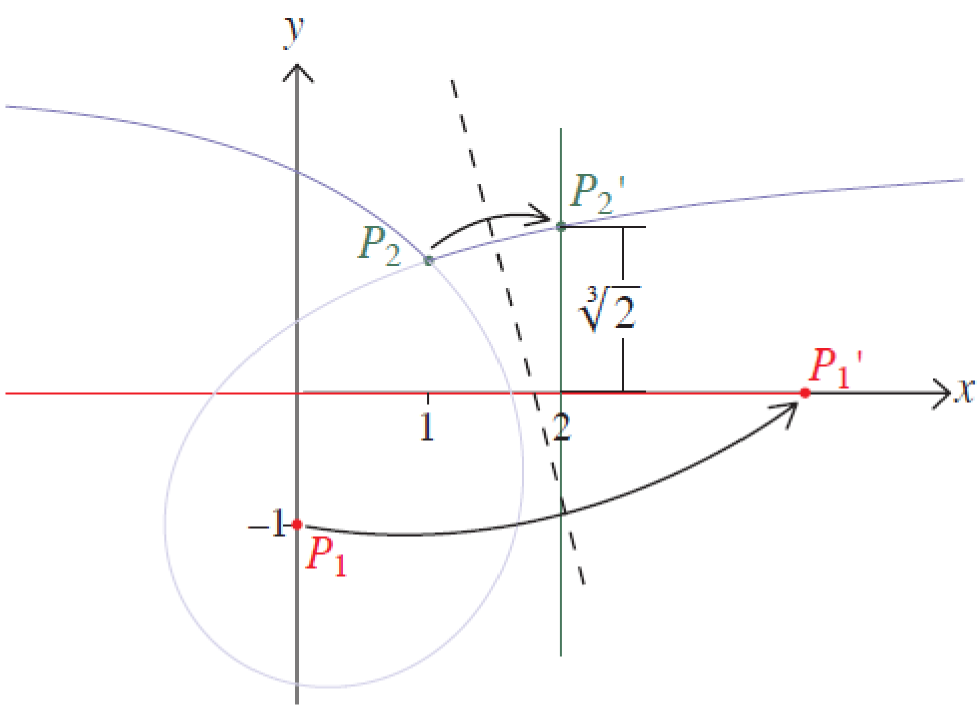


图 36。另一种折叠序列，构建 3 √2。

通过使用操作的 06，是有可能的解决三次方程。那么高阶

方程？正如前面谈到的，罗伯特 Geretschläger 展示了如何构建正 N 边形，当 N 是一个形式 2^n3^m+1，“皮尔庞特总理”[25]素数。这样的建筑，就等于解决了分圆方程，

$$z^N - 1 = 0, \tag{75}$$

其复杂的根源 z 的它不知道是否皮尔庞特素数一直持续下去，有 42 个这样的素数少于 100 万个，但很显然，求解方程（30），不仅可以用折叠提供了求解高次多项式方程的例子。但是，该解决方案依赖于这样一个事实：皮尔庞特素数，方程（30）可以在需要的方式和二次只有三次方程的解的因素。更普遍的问题是，是否不可约的高次方程是由折叠可解的。

如果我们要求所有的折叠发生一次，然后，七个 HHA 操作定义所有可能的路线，由于他们集体只能解决二次和三次方程，答案是“没有。”但是，如果我们扩大业务，包括接受指定路线折叠多，答案似乎是，至少一些束缚高阶多项式方程可解折。

考虑，例如，下面的操作。我们使折叠 L_{f1} 点 P1 移动到线 L1 和 L_{f2} 折叠，移动的点 P2 上线 L2;我们额外要求 L_{f1} 个移动 P3 和 L_{f2} 移动 P4 的形象，使他们的 P3’和 P4’对齐，如图 37 所示对方。对这一行动方案将被定义由两对方程的形式（26），这是这个数字覆盖三次曲线交点。有五种可能的交汇点，对应的 5 个可能的解决方案两折叠。相交的点是由彩色圆点表示，从这些工作进行必要的褶皱是相对比较简单。如果没有找到两三次曲线援助的实证试验和错误的五种可能的解决方案，是相当具有挑战性。

它有可能获得两个这样的曲线之间至少有 7 交汇点，表明该定义多项式可在至少 7 号命令。虽然这种说法并不能解决所有这些是否是不可约多项式，由于一般性的配置，前景似乎不太可能。这个问题也相当开放的，以一般高阶多项式可分为折叠问题的翻译。

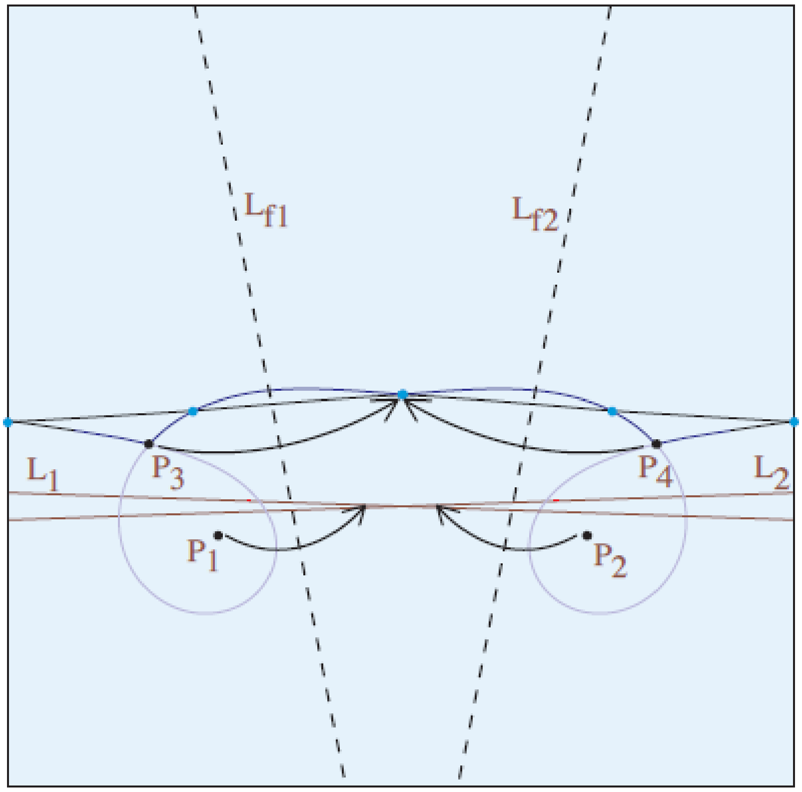


图 37。阿两方面建设的解决方案是由两个三次曲线的交点给出。

逼近的计算机

正如我们所看到的，是有可能的逼近任意沿方形边缘任意精度的比例。事实上，这是有可能找到同样在一个正方形内任何一点，所有的人需要做的是找到 X 和 Y 坐标点沿两个相邻的两边，那么项目向内垂直折痕，如图 38 所示为点（3 / 8，5 / 8）。该路口的折痕定义两个坐标给出了所需的参考点。

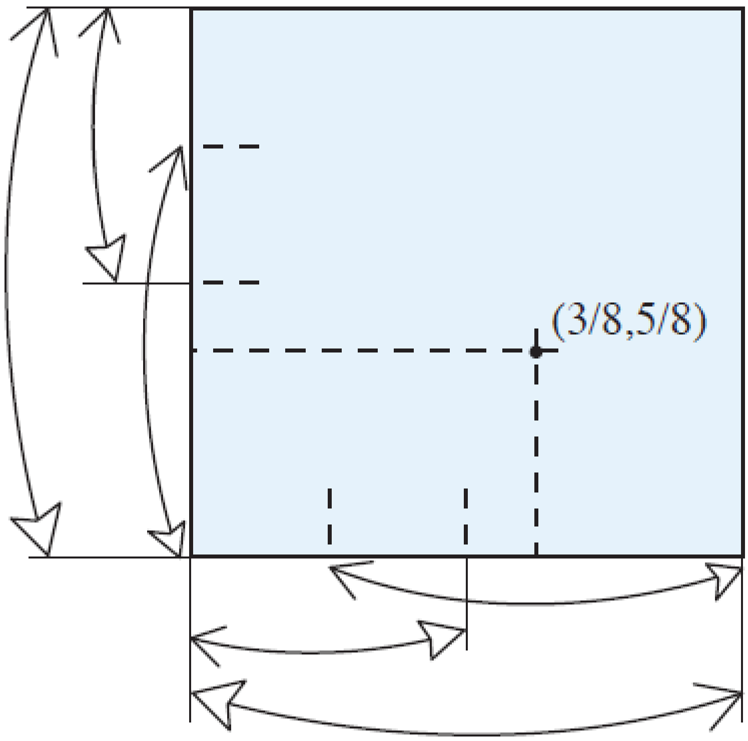


图 38。建设中的一个边缘沿广场内点参考点（3 / 8，5 / 8）。

沿着边缘的点可以近似在几个方面，正如我们所看到。最简单的方法是二进制的数字使用。回想一下，与二进制方法，近似沿一条边任意位置的准确度 0.005 最多需要 9 折叠。要找到一个在这样的精度内点到 18 折叠，然后要求。

然而，构建独立的 X 和 Y 坐标定位是一个点而低效的方法。定位点的二进制算法仅利用了七个 Huzita－Hatori 行动，特别是氧气一使用（“给定两个点 P1 和 P2，我们可以折叠到 P1 的 P2 的”），然后只考虑沿一条边点广场。也许我们通过使用其他任何操作更好吗？如果是的话，怎么办？

让我们考虑一个更广泛的问题：给定一个广场，有多少不同点，我们可以创建使用不低于 r 折叠多？如果有一个点在相对少数的步骤构造的数量庞大，赔率是好的，为任何需要的参考点，在构造的要点之一是相当接近目标点。这样就可以量化;与 N 构造的分，因此只要点大致分布均匀，为任何需要的参考点以后，有一段距离内的 $N^{-1/2}$ 构造的目标点上的平均

水平。因此，举例来说，10^6构造的点，对于任何给定的目标点，就是对平均距离大约只有 001 台，在广场上任何地方的构造的要点之一。

那么问题就变成:什么是一个给定的职级的构造的问题？这个问题可以通过递归处理所有可能的建设点。

首先考虑 r = 0 的情况，即一个没有标记的正方形。在这种情况下，有四个识别要点：四角，四线：四边。它没有褶皱，以确定广场的角落;所以我们指定的四角为零级。

我们也可以指定一职级折叠线，以及到一个点，一条线排名是多少折叠它需要创建行。在一个广场展开，有四个识别线，这是正方形的四边。由于他们采取任何褶皱构造，这四条线得到一个零，以及排名。因此，一个正方形有四个不同的点，四个不同的秩为 r = 0 行。

现在考虑 r = 1 时。每个操作的可能褶皱如图 39 01，02，03，和.05。 04 的，06 和 07 不（还）允许建立任何新的线路。

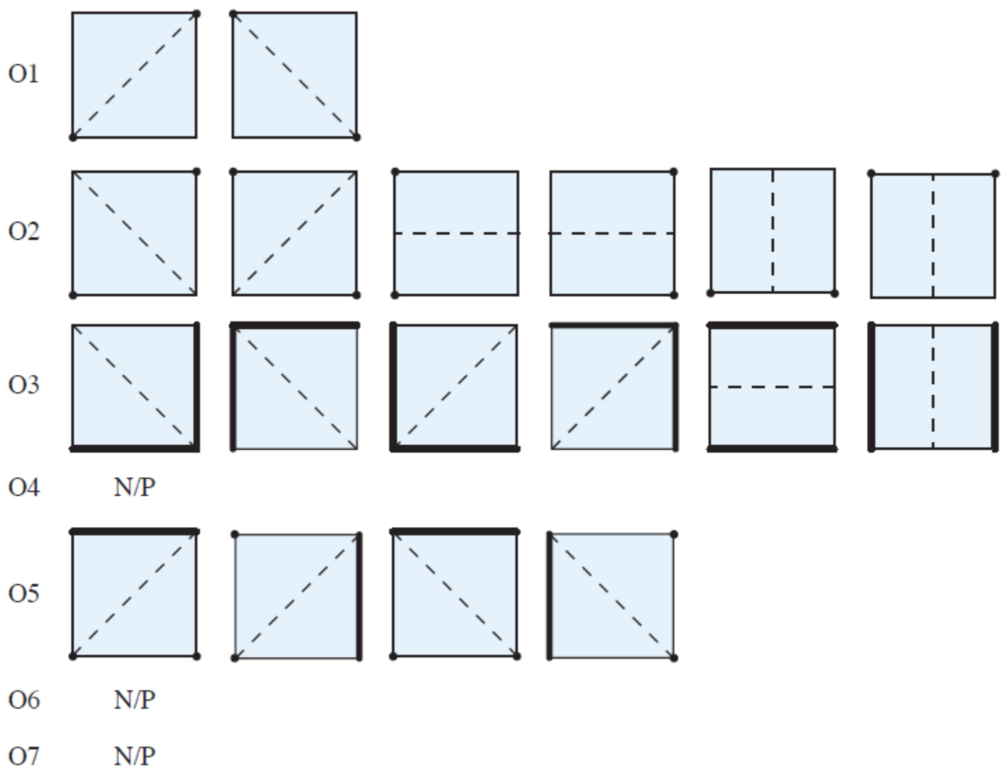


图 39。在一个没有标志的使用 7 HHA 行动方的构造的线。点，并在建设涉及的行突出。

图 39 显示，在所有 HHA 操作，有四种不同的新线路，可以创建：两个角平分线和中线的两个广场。由于每行需要一个折叠，创造，每个人都有等级 1。

四个之间的相互之间以及与原有的广场边的新铁路线的交叉点定义了五个新观点：对双方中点和广场的中心。每个沿广场边新的点被定义为 A 的秩- 0 优势和秩 1 线相交;因为他们可以用单眼皮形成，因此，我们给他们一个 1 级。中心点可以定义为几对线相交，但在所有的组合，这两条线是秩 1，因此，中心问题是 2 级。现在有 9 个不同的点和 12 个不同的总行。每 8 个有秩为 r≤1。

现在，让我们考虑一个更倍。拥有 9 不同点，有 9 × 8 = 72 点可能对。 01 和 02 的行动上的每个点的行为，对创造一个新的起点，因此，对这类建设下一阶段，我们希望从 9 点到 153 点的可能。同样，03 作用于对线，上 04 的点线结合，等等。每个操作创建几何多线（其定义几何路口对多点）。即使重复是不可避免的，独特的线条和点的数量可能增加呈指数允许的折叠数。

在我们做出更多的褶皱，在新创建的褶皱和分等级可以表示的点和线的路线是为他们带来的行列创造条件。一个新的点总是定义为两线的交点恰好，它的排名由下式给出

$$r_p = r_{l_1} + r_{l_2}. \tag{76}$$

另一方面，折叠线可以在几个方面建立由点和线的各种组合，它的排名总是增加了 1 次（折叠线本身计）：

$$r_{l_f} = 1 + \sum_{p_i} r_{p_i} + \sum_{l_j} r_{l_j}. \tag{77}$$

对一个给定的职级构造的点的数量取决于行动让我们为他们的建设。最简单的例子，而且是可以治愈的解析，是双二进制方法，限制自己，我们将沿着一条边的点对在一起，使倍。这是相当容易证明，对构造的点沿着一条边数给出

$$N(r) = 1 + 2^r. \tag{78}$$

随着更多的精力有些可以证明它的秩为 r 的构造的位于一个使用双二进制数点，建筑面积给出任何地方通过

$$N(r)=1+\left(3+\frac{r}{2}\right)2^r, \tag{79}$$

它定义了序列{4 例，8，17，37，81 ...}为 R = {0，1，2 ...}。

如果我们打开了可以接受的业务，包括所有 7 HHA 操作，组合爆炸。简单地计算了所有的可能的操作相结合的点和线的方式给出了序列号{4，258，154 800，132，826，269 ...}，其中约 1000 个，每个迭代中增长。然而，只有一小部分在物理上可能的组合变现，而那些包括许多重复 - 这可以用不同折叠序列构建相同点。对不同构造的点数远远超过了组合限制小。

另一个美中不足的是，知道，一个简构造的点目标点附近的某个地方是不一样的不知什么构造的点其实是一样的。这将是很好，如果给定一个任意点（x，y）的，我们可以找到一个最近的点构造的一个给定的等级和其建造折叠序列的公式。

这样的公式存在一个单一的比例二元近似;给出一个数 x，在最近的构造的等级分数 N 是 X 下和折叠序列的二进制编码表示的 n 位二进制逼近十

对于一般情况下，我们允许 HHA 所有操作，并允许任何的线和点的组合，在广场内创建一条线。不幸的是，一般情况下，也没有有效地找到一个给定的职级点已知的最接近构造的方法，我强烈怀疑，没有这样的方法存在。

幸运的是，即使是低效率的方法可以适用。自10^6点应该足以提供一个约 001 的准确性，就足以构造简单的10^6左右的最低军衔标志和线条，然后给出一个期望的目标点，一个简单的搜索都通过他们找到最近点。显然，这不是一个东西，用手做，但它很可能是一台电脑。

我写了一个 C + +被叫 ReferenceFinder 但这只是这一计划。它作为输入
参考坐标，目标定位，并打印出这一点的最好折叠序列。

在其初始化，ReferenceFinder 构建了一个独特的约 30 万线的数据库和通过递归建立从下级更高等级 6 级痕痕或以下，淘汰重复，近重复，并没有物理组合变现的不用。这在相当严格筛选温和得多，但仍令人印象深刻的增长速度在商标的数字，它运行结果N = {4，8，65，1033，7009，32469，277546}。

用 6 或以下职级的 277546 马克，我挑了 1000 个随机目标点，找到了最亲密的构造的点，对误差的分布计算统计。结果列于表 13。

Percentile	Error
10^{th}	0.0004
20^{th}	0.0006
50^{th}	0.0013
80^{th}	0.0024
90^{th}	0.0032
95^{th}	0.0042
99th	0.0081

表 13。百分以及从 277，546 6 折叠的建筑采取不同的点序列的错误。

在一般情况下，误差为 0.005 - 1.2 毫米的有 25 厘米见方出来 - 被发现。目标点的 97%，有 6 折叠序列，实现了上述的错误级别。相比之下，与二进制方法，它要求 18 倍，达到相同的精度。

区别来自于，在每个施工阶段，可能的不同的折痕和标记号码是较低级别的对象，从而导致指数增长有可能的组合为基础的事实，指数比例常数大约是关系到数不同的方式，点线结合，可以产生新的问题。

折叠序列的计算机有效解决方案是除了学术兴趣。由于设计人员转向折纸折纸设计的数学方法，有必要制定有效的折叠，以供参考点，这些定义为 highorder 代数方程的解完全序列。像 ReferenceFinder 程序可以构造序列的折叠，可在他们的效率令人惊讶。最近的一些折纸书籍[3，35，36]已经将作为指令的一部分的个别数字等电脑生成的折叠序列，我预计这种用法将在未来变得更加常见。

（全文完）