日本新高中数学研究丛书 8

集合与逻辑

[日] 早川康弌 著

尚文斗 译

文化教育出版社

日本新高中数学研究丛书书目

1*	数学公式集	竹之内脩著
2	数与式	胜浦捨造著
3	方程与不等式	茂木勇著
4	映射与函数	寺田文行著
5	指数、对数、三角函数	胜浦捨造著
6	图形与式	占部实著
7	向量与矩阵	早川康弍著
8	集合与逻辑	早川康弍著
9	数列与极限	茂木勇著
10	概率与统计	占部实著
11	微分、积分(上)	寺田文行著
12	微分、积分(下)	寺田文行著
13	新记号问题与整数问题	占部实著
14*	电子计算机的数学	竹之内脩著
15*	线性规划与运算	竹之内脩著

注：带*号者未译

[社科新书目 63　164]

书号 7057·059
定价 0.45 元

日本新高中数学研究丛书 8

集合与逻辑

[日] 早川康弌 著
尚 文 斗 译

文 化 教 育 出 版 社

内容提要

这套丛书，译自日本旺文社出版的新高中数学研究丛书，原书共分十五册，书中除有中学数学传统题材外，还包括一些较新的内容.

本册是第八册，主要内容有：集合、全集、空集、补集、子集、交集、并集，集合的运算、集合的图示、集合的直积；命题、复合命题、命题的运算、恒真命题、条件命题，命题的逆、否、逆否命题，推理、论证法. 叙述比中学数学教材广泛、深入、易懂，可供中学数学教学研究人员、中学数学教师、中学学生在研究、教学或自学中参考.

日本新高中数学研究丛书 8

集 合 与 逻 辑

［日］早川康弌 著

尚文斗 译

文化教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京市房山县印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 印张 5.75 字数 119,000

1982 年 5 月第 1 版 1983 年 4 月第 1 次印刷

印数 1—10,000

书号 7057·059 定价 0.45 元

译 者 的 话

这套丛书，译自日本旺文社出版的新高中数学研究丛书，原书共分十五册，我们译出了其中的第二册至第十三册，本册是第八册．丛书包括了中学数学教材中一些较新的内容．

这套丛书的特点是比教材内容广泛、深入、易懂．对基础知识作了系统整理，归纳概括，重视典型例题的解题方法、解题要点、思考方法的研究．可供我国中学数学教师和高中学生研究参考．

这套丛书是由我院教研部组织辽宁师范学院数学系、沈阳师范学院数学系、沈阳市教育学院数学系等单位合译的．本册由沈阳机电学院尚文斗译出，由我院教研部刘春、钱永耀、刘占元负责审校工作．

由于时间仓促以及译者、校者水平所限，缺点错误，恐难避免．希望读者提出宝贵意见．

辽宁教育学院

1980 年

前　　言

新教学大纲中对逻辑的研究，比旧教学大纲变化很大. 含变数的命题函数，采用了文部省规定的“条件命题”的名称，就是变化的特点，据此研究了谓语逻辑学的内容.

根据“条件命题”的采用，使其真值集合和条件命题联系起来，逻辑和集合之间的相似性——布尔代数的性质——更加明确. 在本书中，根据

用文氏图直观而易懂地表达集合的关系的叙述

与集合相关联的命题和各种命题之间的关系的叙述的方式，以

更加广泛、更加深入、更加易懂

为宗旨加以阐述.

还有在教学大纲中虽然没教给逻辑符号中的

$$\vee, \wedge, \forall, \exists$$

但在本书中采用了. 其理由是

第一，认为青年读者容易熟习这些符号;

第二，采用这些符号才能使逻辑和集合的相似性更加明确.

也含有这个意思，就是期望本书能对同学们的学习起到更有益的作用.

最后，对在编写本书的过程中给予大力协助的石川博朗先生，谨表谢意.

著　　者

1974 年 3 月

几 点 说 明

如前言所述，本书是一本独具风格的参考书. 它既能使苦于学习数学的人容易理解，又能使擅长数学的人对数学更加爱好. 为此，本书的结构编排如下.

主张划分细目

本书的各部分尽量划分细目，凡披阅所及均能一目了然；在解说时，既能配合教科书，又写得

比较广泛，比较深入，比较易懂.

在解说后的提要中，归纳出重要公式. 因此，希望在理解解说的同时，必须记住这些公式. 另外，用竖线把版面分成两部分，在左边列出重要项目，以便提高学习效率.

例题→发展题→练习

本书的最大优点是，力求在理解解说的基础上，反复学习例题、发展题、练习题，能在不知不觉中增强解决问题的实际能力. 虽然从例题到发展题依次提高了难度，但在**提示**和**要点**中，指出了思考方法和解题要领，因此，希望读者反复学习，对这两种题目达到几乎能够背诵的程度. 总之，学习数学最重要的是要用

逐步积累的学习方法.

为此，也要建议读者反复进行学习. 如果对前面的两种题都能掌握，解"练习"题时就不会感到什么困难. 反之，如果不大会解"练习"题，那就应该认为学习得还不够深刻.

目　录

重要词汇一览表

1. 集　　合

集合，元，元素

把满足某种条件的事物的集体叫做**集合**，把组成集合的各个事物叫做这个集合的**元**或**元素**.

因为集合是事物的集体，所以，可以把它看作是一个事物. 通常用大写字母 $A, B, C, \cdots\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a, b, c, \cdots\cdots$ 表示集合的元素.

如果 a 是集合 A 的元素，可记作

$$a \in A \quad 或 \quad A \ni a$$

属于，包含

这时我们就读作：a **属于** A，A **包含** a，或 a **被** A **包含**. 如果元素 a 不是集合 A 的元素，可记作

$$a \notin A \quad 或 \quad A \not\ni a$$

我们就读作 a **不属于** A，A **不包含** a，或 a **不被** A **包含**.

例如，设奇数的集合为 A，则

$$1 \in A, 2 \notin A, 3 \in A, \cdots\cdots$$

又设实数的集合为 R，则

$$-0.5 \in R, \ \sqrt{2} \in R, 1+2i \notin R$$

集合的条件

在数学中所说的集合如上所述，这里必须指出能够明显辨别所研究的事物是否属于该集合的条件. 例如，

"相当大的数的全体"，"美丽图形的集体"等不能叫做集合.

集合的表示法

表示集合的方法有两种:

(1) 列举法

第一种方法是把集合里的所有元素都列举出来的方法. 例如，研究"6 的正约数的集合"时，因为这个集合是由 4 个元素 1, 2, 3, 6 组成的，所以使用括号{ }表示为:

$$\{1, 2, 3, 6\}$$

因为在这时，不考虑元素之间的顺序，所以也可以表示为:

$$\{1, 3, 2, 6\}$$

(2) 描述法

第二种方法是用确定的条件表示某种事物是否属于这个集合的方法. 例如，研究"6 的正约数的集合"时，用条件"x 是 6 的正约数"，使用{ }表示为

$$\{x \mid x \text{ 是 6 的正约数}\}$$

用条件表示时，除了用语言描述外，还可以用方程或不等式表示. 例如:

集合$\{x \mid x^2-1=0\}$，就是集合$\{-1, 1\}$;

集合$\{x \mid x^2-1<0\}$，就是满足不等式$-1<x<1$ 的全体实数的集合，所以也可以表示为，$\{x \mid -1<x<1\}$. 可是不能用第一种列举所有元素的方法来表示.

条件命题

如上例所说的条件:

"x 是 6 的正约数"，"$x^2-1=0$"，象这样，

含有用 x 表示变数、变量的句子或式子叫做**条件命题**. 关于条件命题以后要详细学习. 设 $f(x)$ 是一个条件命题, 把满足 $f(x)$ 的 x 的集合 (即 $f(x)$ 是真的事物的集合)

$$\{x|f(x)\}$$

真值集合 叫做 $f(x)$ 的**真值集合**.

特别地, 当 $f(x)$ 表示上述方程或不等式时, 就把它的真值集合叫做这个方程或不等式

解集 的**解集**. 例如:

集合 $\{x|x^2-1=0\}$ 的解集是 $\{-1, 1\}$,

集合 $\{x|x^2-1<0\}$ 的解集是

$$\{x|-1<x<1\}$$

提　　要

(1) 所谓集合就是满足某种条件的事物的集体.

(2) $a\in A$ 表示 a 是 A 的元素.

(3) 集合的表示法.

(i) 列举法. (例) 10 以下的质数集合 $\{2, 3, 5, 7\}$

(ii) 描述法. (例) 大于 1 的数的集合 $\{x|x>1\}$

(4) 满足条件命题 $f(x)$ 的集合 $\{x|f(x)\}$ 是 $f(x)$ 的真值集合.

例题 1 在下列问题中, 哪个不能说是集合?

(i) 与二定点 A, B 等距离点的全体.

(ii) 高中学生游泳能手的集体.

(iii) 在石井的班级里, 比石井身高的人的集体.

(iv) 在坐标平面上，满足 $2x+3y=6$ 的点(x, y)的全体.

提示 (i) 在平面上，线段 AB 的垂直平分线是与A, B具有等距离点的全体的集合.（在空间，就成为通过线段 AB 的中点与线段 AB 垂直的平面.）

(ii) 虽然说是游泳能手，但是没有给出能手的标准，所以这些高中生的集体不能叫做集合.

(iii) 因为在石井班级里的人，比石井身长高或低的可以明确判定，所以这些人可以说是集合.

(iv) 因为在坐标平面上，它表示一条直线，所以是集合.

解 因为游泳的能手与不是能手没有标准，所以不能判定某高中生是否属于这个集合，因此(ii)不能说是集合.

例题 2 (1) 试用列举法表示下列集合.

(i) 12 的正约数的集合.

(ii) 20 以下的质数的集合.

(iii) $\{x \mid x^2-16=0\}$

(2) 试将不等式 $x^2-3x+2<0$ 的解集及所在区间，用不等式和数轴表示出来.

提示 (1) (i) 12 的正约数为 1, 2, 3, 4, 6, 12

(ii) 20 以下的质数为 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

(iii) $x^2-16=0$ 的解为 $x=4$ 和 $x=-4$

(2) $x^2-3x+2<0$ 的解为 $1<x<2$

解 (1) (i) $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

(ii) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

(iii) $\{4, -4\}$

(2) $\{x|1<x<2\}$如图的粗线部分.

发展题

(1) 试用列举法表示下列集合.

(i) $\{x|x^2-2x-3=0\}$

(ii) $\{x|x^2-4x+3<0, x$ 是整数$\}$

(iii) $\{(x, y)|x+y=3, xy=2\}$

(2) 试在坐标平面上用图形表示下列集合.

(i) $\{(x, y)|y=x^2-2x\}$

(ii) $\{(x, y)|x-2y<0\}$

要点

(1) (i)因为是 $x^2-2x-3=0$ 的解集, 所以可用列举法写出. (ii)是以$x^2-4x+3<0$的解中整数值为元素, 所以是只有一个元素的集合. **注意** 集合$\{2\}$是只有一个元素的集合, 而数 2 是这个集合的元素, 2 与 $\{2\}$ 不相同.

解 (1) (i) 解 $x^2-2x-3=0$

即$(x+1)(x-3)=0$

$\therefore$ $x=-1, x=3$

于是, 集合为$\{-1, 3\}$

(ii) 解$x^2-4x+3<0$, 即

$(x-1)(x-3)<0$ $\therefore 1<x<3$

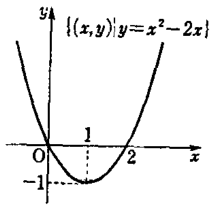
因为 x 是整数, 所以 $x=2$. 于是, 集合为$\{2\}$

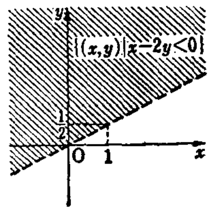
(iii) 解方程组: $x+y=3, xy=2$, 得 $x=1, y=2$, 或 $x=2, y=1$. 于是集合为$\{(1,2), (2,1)\}$

(2) (i), (ii)都是坐标平面上点的集合，而(i)是曲线，(ii)是平面的一部分，即区域。

(2) (i) 集合是左下图的抛物线 $y=x^2-2x$

(ii) 集合是直线 $x-2y=0$ 的上部，为下面右图的阴影部分。





练习（解答在 152 页）

1. 试用列举法表示下列集合.

   (i) $\{x|x^3-x=0\}$　　　　(ii) $\{n|n^2-2n<8,\ n$ 是奇数$\}$

2. 试用坐标平面上的图形表示下列集合.

   (i) $\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$　　(ii) $\{(x,y)|x^2-y^2\leqslant 0\}$

2. 全集、空集和补集

集合与范围

在上节已经说明了集合$\{x|x^2-1=0\}$就是集合$\{1,-1\}$. 现在,就x在正数范围内来研究,则集合$\{x|x^2-1=0\}$就是集合$\{1\}$。

又对集合$\{x|x^4-1=0\}$

- 在复数范围内为$\{1,-1,i,i\}$
- 在实数范围内为$\{1,-1\}$
- 在正数范围内为$\{1\}$

所以一般地,在研究集合时,首先必须明确范围.

全集

当前,研究某问题时,所取得一切事物的集合,叫做**全集**,用U表示. 研究集合时,首先要确定全集U,满足某种条件C的集合$\{x|C\}$,就认为是在U的元素中满足条件C的集合. 因此,当然$\{x|C\}$是U的一部分(在 **3.** 中所讲的子集).

集合$\{x|x^2+1=0\}$在以复数为全集时,就是$\{i,-i\}$,在以实数为全集时就没有元素. 为了使方程$x^2+1=0$在实数范围内也存在解集,我们把没有元素的集合叫做**空集**,用$\varnothing$表示. 空集用列举法表示时,记作

空集

$$\{\ \}$$

例如，一次方程 $ax+b=0$ 的解集，

当 $a\neq0$ 时，只有一个解 $x=-\frac{b}{a}$，因此，解集为

$$\{x|ax+b=0\}=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$$

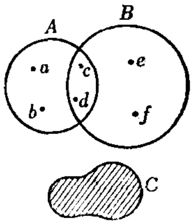
当 $a=0$, $b\neq0$ 时，无解，因此解集为

$$\{x|ax+b=0\}=\varnothing$$

当 $a=0$, $b=0$ 时，由于 x 可为任意值，因此解集为

$$\{x|ax+b=0\}=U$$

一般地，表示集合时，如右图，可用圆或封闭曲线表示．根据情况，可在它的内部记入集合的元素．



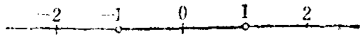
右图表示：

$A=\{a, b, c, d\}$, $B=\{c, d, e, f\}$

而集合 C 不是把元素一一列举出来，而是用阴影表示元素的存在．像这样表示集合的图形叫做**文氏图**或**欧拉图**．用文氏图判别某个元素是否属于那个集合，两个集合之间有什么关系，两个集合有无公共元素等较为方便．

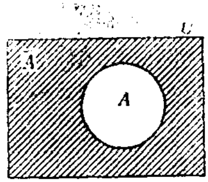
文氏图
欧拉图

集合 $\{x|-1<x<1\}$，用数轴上的区间 $(-1, 1)$ 表示比用文氏图表示容易理解，并且能表示出元素的大小关系或距离，文氏图就表示不出这些关系．



补集

对于集合 A，从全集 U 的元素中取出集合 A 的元素，由剩下的元素所组成的集合，叫做 A 的**补集**．可用 $\bar{A}$, A' 或 A^c（c 是 *complement* 的简写）表示．如果用文氏图表示 $\bar{A}$，如右图的阴影部分．象这样，为了区别全集 U 与其他集合，多用矩形表示全集．



例如，若 $A=\{x \mid x^2-1<0\}$

则 $\bar{A}=\{x \mid x^2-1\geqslant 0\}$

提　　要

（1）**全集 U**　研究某问题时，所取得一切事物的集合．集合，都可以作为由 U 中一部分元素所组成的集合．

（2）**空集 $\varnothing$**　没有元素的集合．

（3）**补集 $\bar{A}$**　表示从全集 U 中取出集合 A 的元素，由剩下的所有元素组成的集合．

例题 3　在从 1 到 15 的自然数中，设质数的集合为 A，3 的倍数的集合为 B，4 的倍数的集合为 C．

（1）全集 U 是什么？

（2）试用文氏图表示 U, A, B, C．

（3）试用列举法表示 $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$，并且指出 $\bar{U}$ 是什么样的集合．

(4) 同时属于集合 $\bar{A},\bar{B},\bar{C}$ 的元素($\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ 的公共元素)是什么?

提示 (1) 全集U是从 1 到 15 的自然数的集合.

(2) $A=\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

$B=\{3, 6, 9, 12, 15\}$

$C=\{4, 8, 12\}$

仔细观察哪些是集合 A, B, C 的公共元素,再画文氏图.

(3) $\bar{A}$ 的元素是从 1 到 15 的自然数中取出A的元素所余的数. $\bar{B},\bar{C}$ 也同样. 其次,$\bar{U}$ 是从 1 到 15 的自然数中取出 U 的元素后所余的数,所以是一个元素也没有的集合.

(4) 仔细观察 $\bar{A},\bar{B},\bar{C}$ 的元素,从中选出公共元素.

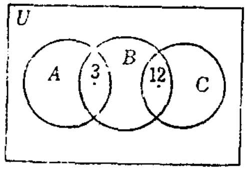
解 (1) 因为全集是从 1 到 15 的自然数的集合, 所以,
$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

(2) 因为

$A=\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

$B=\{3, 6, 9, 12, 15\}$

$C=\{4, 8, 12\}$



所以,文氏图如右图.

(3) $\bar{A}=\{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15\}$

$\bar{B}=\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14\}$

$\bar{C}=\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15\}$

$\bar{U}=\varnothing$

(4) 同时属于 $\bar{A},\bar{B},\bar{C}$ 的元素的集合,由(3)可得:

$\{1, 10, 14\}$

研究　集合A的补集$\bar{A}$的补集是原集合A. 即

$$\bar{\bar{A}}=A$$

所以，集合A和集合$\bar{A}$对于全集U，可以说互为补集.

发展题

(1) 下列集合各为什么集合？

(i) $A=\{x \mid x^2+4<4x\}$

(ii) $B=\{x \mid x^2+4\geqslant 4x\}$

(iii) $C=\{x \mid x^2+4>4x\}$

(iv) $D=\{x \mid x^2+4\leqslant 4x\}$

(2) 在上面的四个集合A, B, C, D中，哪两个互为补集？

(3) 试用坐标平面上的图形表示：集合

$$\{(x, y) \mid (x-y)^2<4\}$$

要点

(1) 可分别解每个不等式，判断x值的范围. 因为研究的是不等式，所以x的值当然要在实数范围内考虑.

解　(1) (i) 由$x^2+4<4x$得

$$(x-2)^2<0$$

因为没有满足这个不等式x的实数值，所以，所求的集合是空集.

$\therefore\quad A=\varnothing$

(ii) 由$x^2+4\geqslant 4x$得

$$(x-2)^2\geqslant 0$$

因为这个不等式对任意的实数x都成立，因此所求的集合是全集.

$\therefore\quad B=U$

(iii) 由$x^2+4>4x$得

$$(x-2)^2>0$$

因为这个不等式对 $x\neq2$ 的所有实数值都成立.

$\therefore\quad C=\{x|x\neq2\}$

(iv) 由 $x^2+4\leqslant4x$ 得

$$(x-2)^2\leqslant0$$

因为这个不等式只能在 $x=2$ 时成立. $\therefore\quad D=\{2\}$

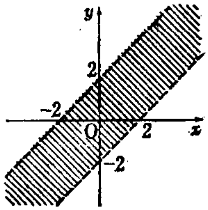
(2) 由(1)得

$$\bar{A}=B,\ \bar{C}=D$$

(3) 将 $(x-y)^2<4$ 变形, 得

$$-2<x-y<2$$

于是, 所求集合如右图的阴影部分.



(2) 集合 $\{x|f(x)>0\}$ 的补集为 $\{x|f(x)\leqslant0\}$. 要注意等号.

(3) $-2<x-y<2$ 是 $-2<x-y$ 与 $x-y<2$ 的公共部分.

练习 (解答在 152 页)

3. 设全集的范围如下, 试用列举法表示集合

$$\{x|x^5-25x=0\}$$

(i) 复数 (ii) 实数 (iii) 有理数 (iv) 正数

4. $\varnothing$ 的补集、U 的补集各是什么集合?

5. 当 $A=\{x|x^3-27>0\}$ 时, 试在数轴上表示出 $\bar{A}$.

3. 子　　集

集合的相等

若两个集合 A, B 是由完全相同的元素组成时，就说 A, B 相等，记作

$$A=B \text{ 或 } B=A$$

这个符号"="，已在 **2.** 中用过，如 $\bar{\bar{A}}=A$ 这是说，根据补集的定义，$\bar{\bar{A}}$ 和 A 是由完全相同的元素组成的.

与此相对的，若集合 A,B 的元素不相同时，叫做 A,B **不相等或相异**. 记作 $A\neq B$ 或 $B\neq A$.

子集

有两个集合 A, B, 如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素时，那么，集合 A 就是集合 B 的**子集**，叫做 A **被** B **包含或** B **包含** A, 记作

$$A\subset B \text{ 或 } B\supset A$$

例如，$A=\{x\,|\,x^2=1\}$, $B=\{x\,|\,x^4=1\}$ 时，则

$$A\subset B$$

真子集

集合 A 是集合 B 的子集，并且 A 和 B 不相等，换句话说，A 是 B 的子集，并且在 B 的元素中，有不是 A 的元素时，就把 A 叫做 B 的**真子集**，即

$$A\subset B \text{ 且 } A\neq B$$

对上边两个集合 $A=\{x\,|\,x^2=1\}$,

$B=\{x|x^4=1\}$，如果全集是复数的集合，则由 $A\subset B$，$A\neq B$ 可知 A 是 B 的真子集；如果全集是实数的集合，则 A 不是 B 的真子集而是子集.（这时就是 $A=B$）

注意 有的书有用 $A\subset B$ 表示 A 是 B 的真子集，而用 $A\subseteqq B$ 表示 A 是 B 的子集的，本书仿照多数专业书的用法，用 $A\subset B$ 表示 A 是 B 的子集.

从子集的定义可知，下列关系成立.

$$A\subset A \quad 或 \quad A\supset A$$

子集和集合的相等

条件命题"若 x 是 A 的元素，则 x 是 B 的元素"用符号→表示为"$x\in A\rightarrow x\in B$"时，由定义得知，对任意 x，若 $x\in A\rightarrow x\in B$，则 $A\subset B$

又若 $A\subset B$，则对于任意 x 必有 $x\in A\rightarrow x\in B$

现在，若 $A=B$，则对于任意 x 有

$x\in A\rightarrow x\in B \qquad \therefore \quad A\subset B$

$x\in B\rightarrow x\in A \qquad \therefore \quad B\subset A$

反之，若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则

$$x\in A\rightarrow x\in B, \quad x\in B\rightarrow x\in A$$

于是，$A=B\rightleftarrows A\subset B$ 且 $B\subset A$

$\left.\begin{matrix}A\subset B\\ B\subset A\end{matrix}\right\}\rightleftarrows A=B$

即若 A 是 B 的子集，B 是 A 的子集则 A 与 B 相等.

$\varnothing$，U 和 A 的关系

其次，因为空集是没有元素的集合，所以不能根据定义判断它是否是其他集合的子集. 因此规定：

空集是任意集合的子集，即 $\varnothing\subset A$

又，设任意的集合 A 的全集为 U 时，显然 $A\subset U$. 因此

$$\varnothing\subset A\subset U,\quad \varnothing\subset U$$

包含关系

像这样对于两个以上的集合之间的包含和被包含的关系叫做集合的**包含关系**. 包含关系有下列性质:

若 $A\subset B$ 且 $B\subset C$, 则 $A\subset C$

提　要

(1) 有两个集合 A, B, 如果集合 A 的任意一个元素都是集合 B 的元素时, 则把 A 叫做 B 的子集, 记作 $A\subset B$. 即对于任意 x, 有 $x\in A\to x\in B\rightleftarrows A\subset B$

(2) 有两个集合 A, B, 如果 $A\subset B$ 且 $A\neq B$, 则把 A 叫做 B 的真子集.

(3) 若 A 是 B 的子集, B 是 A 的子集, 则 A 与 B 相等. 即 $A\subset B$ 且 $B\subset A\rightleftarrows A=B$

例题 4 (1) 试列举集合 $\{a, b, c\}$ 的所有子集.

(2) 设三角形的集合为 U, 等腰三角形的集合为 A, 正三角形的集合为 B, 直角三角形的集合为 C, 等腰直角三角形的集合为 D.

(i) 试用 $\subset$ 表示这些集合的包含关系.

(ii) 试用文氏图表示它们的包含关系.

提示 (1) 可以分别考虑有一个元素的子集和有两个元素的子集. 还要注意, 不能忘记有三个元素的子集, 即, 原集合

也是一个子集；以及没有元素的集合，即空集也是一个子集.

（2）在这个问题中，可将三角形的集合U作为全集来考虑. 从而A, B, C, D都是U的子集. 又因为，正三角形是等腰三角形的特殊情况，所以若x是正三角形，则x必是等腰三角形. 即$x \in B \to x \in A$. 由此得知，集合A, B的包含关系为$B \subset A$

同理，$D \subset C, D \subset A$. 因而集合D是集合A与C的公共部分.

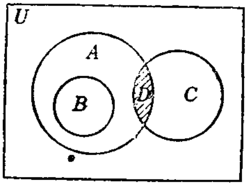
解 （1）就没有元素的($\varnothing$)，有一个元素的，有二个元素的，有三个元素的（原来的集合）分别考虑，子集共有下列8个:

$$\varnothing; \{a\}, \{b\}, \{c\}; \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}; \{a, b, c\}$$

研究 （1）就各种情况的数来研究，可根据元素a被包含或不被包含分为两种，b, c也同样，因此由乘法原理则得

$$2^3 = 8(\text{个})$$

（2）(i) 因为三角形的集合U可以看作是在这种情况下的全集，所以$A \subset U, B \subset U, C \subset U, D \subset U$. 因为正三角形是等腰三角形的特例，所以$B \subset A$，等腰直角三角形是等腰三角形及直角三角形任何一种的特例.



于是，包含关系为:

$$A \subset U, B \subset U, C \subset U, D \subset U$$

$$B \subset A, D \subset C, D \subset A$$

(ii) 注意到上述的包含关系和集合B和C之间没有公共元素，可以画出包含关系的文氏图如右图.

发展题

(1) 试举出集合$\{a, b, c, d\}$的所有子集.

(2) 设两个集合 $A=\{x|-x^2+3x-2<0\}$

$$B=\{x|2x^2-5x+2>0\}$$

试判别 A, B 的包含关系.

(3) 当 $A\subset B$ 时, $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 的包含关系如何?

要点

(1) 不要忘记空集与原集合.

(2) 解各不等式, 并用数轴表示.

解 (1) 子集共有 16 $(=2^4)$ 个 $\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}$

(2) 由 $-x^2+3x-2<0$, 得

$$x^2-3x+2>0$$

$$(x-1)(x-2)>0$$

$\therefore\ x<1$ 或 $x>2$

由 $2x^2-5x+2>0$, 得

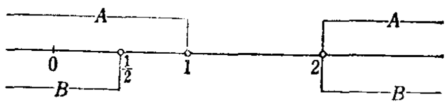
$$(2x-1)(x-2)>0$$

$\therefore\ x<\frac{1}{2}$ 或 $x>2$

于是, $A=\{x|x<1, x>2\}$

$$B=\left\{x\,\middle|\,x<\frac{1}{2}, x>2\right\}$$

$\therefore\ B\subset A$



(3) 除了用文氏图考虑，还有以下方法.

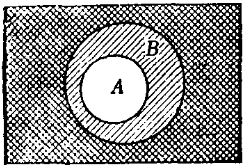
由 $A\subset B$ 得 $x\in A\to x\in B$

$\therefore\quad x\notin B\to x\notin A$

即 $x\in\bar{B}\to x\in\bar{A}$

$\therefore\quad \bar{B}\subset\bar{A}$

(3) 在下图中，因为向右上方倾斜的阴影线表示 $\bar{A}$，向右下方倾斜的阴影线表示 $\bar{B}$，所以 $\bar{B}\subset\bar{A}$



练习 （解答在 152 页）

6. 设 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$

$B=\{(x,y)\mid x^2+y^2<9\}$

$C=\{(x,y)\mid (x-2)^2+y^2<1\}$

试举出 $A,B,C,\bar{A},\bar{B},\bar{C}$ 中，所有每两个集合之间的包含关系.

7. 设 A 为 2 的倍数的集合，B 为 3 的倍数的集合，C 为 4 的倍数的集合，D 为 5 的倍数的集合，E 为 6 的倍数的集合，试用文氏图表示这些集合的包含关系.

8. 试根据空集是任意集合的子集，证明空集只有一个.

4. 交　　集

交集(交)

有两个集合 A, B，把同时属于 A 和 B 的一切元素所组成的集合叫做集合 A 和 B 的**交集**，又叫做**积**或**交**. 记作

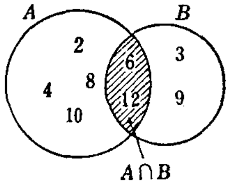
$$A\cap B \text{ 或 } A\cdot B$$

因为符号 $\cap$ 形如帽子，所以读作 cap，或读作 intersection，交等.

例如，设 $A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

$$B=\{3, 6, 9, 12\}$$

则　　$A\cap B=\{6, 12\}$



在此例中，考虑从 1 到12 的整数时，A 是 2的倍数的集合，B 是 3 的倍数的集合，$A\cap B$ 就是 2 与 3 的公倍数的集合.

交换律

由交集的定义，可知下列等式成立.

$$A\cap B=B\cap A$$

这叫做对于交集的**交换律**. 这正如实数乘法的交换律 $ab=ba$ 中的"×"换成"$\cap$".

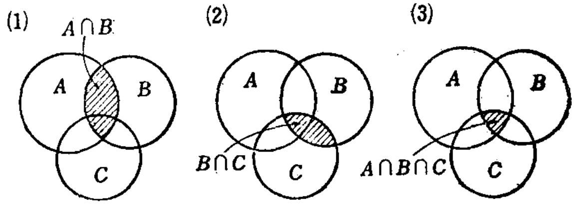
还有下列等式成立.

结合律

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

这叫做对于交集的**结合律**. 结合律的成立，画出文氏图观察是很明显的. 如下页上图不论在

(1)的$A\cap B$和C的公共部分，还是在(2)的A和$B\cap C$的公共部分，结果都成为(3)的阴影部分.



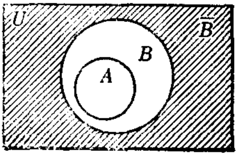
于是，表示为 $(A\cap B)\cap C=A\cap B\cap C$

交集和子集

当A是B的子集时，由文氏图可知下列关系成立.

(1) 若 $A\subset B$，则 $A\cap B=A$

(2) 若 $A\subset B$，则 $A\cap \bar{B}=\varnothing$



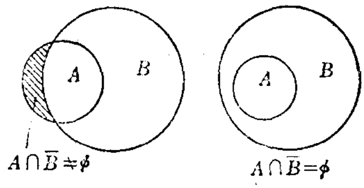
现在来看，这些关系的逆是否也成立.

当 $A\cap B=A$ 时，设A的任意元素为x，则 $x\in A\cap B$. 从而 $x\in B$，即

$$x\in A\to x\in B \quad \therefore\ A\subset B$$

又当 $A\cap \bar{B}=\varnothing$时，因为$A$与$\bar{B}$没有公共元素，设$A$的任意元素为$x$时，则 $x\notin \bar{B}$. 从而 $x\in B$. 即

$$x\in A\to x\in B \quad \therefore\ A\subset B$$



$A\subset B \rightleftharpoons$
$A\cap B=A$
$A\subset B \rightleftharpoons$
$A\cap \bar{B}=\varnothing$

于是(I) $A\subset B \rightleftarrows A\cap B=A$

(II) $A\subset B \rightleftarrows A\cap \bar{B}=\varnothing$

在这里，(II)表明不存在属于A而又不属于B的元素，与A是B的子集是等价的.

等幂律

又由定义可知下列关系成立.

(III) $A\cap A=A$ (这叫做等幂律)

(IV) $A\cap\varnothing=\varnothing\cap A=\varnothing$

$A\cap U=U\cap A=A$

互质

两个集合A和B没有公共元素时，即当

$$A\cap B=\varnothing$$

时，则说A与B**互质**.

提　　要

(1) 属于A又属于B的一切元素所组成的集合，叫做A与B的交集或交，记作$A\cap B$.

(2) 关于交集，有下列等式成立.

交换律　$A\cap B=B\cap A$

结合律　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

等幂律　$A\cap A=A$

(3) 关于集合 A, B，有

$A\subset B \rightleftarrows A\cap B=A$

$A\subset B \rightleftarrows A\cap \bar{B}=\varnothing$

例题5　(1) 在下列关系中，哪一个恒能成立?

(i) $(A\cap B)\subset A$　　(ii) $(A\cap B)\supset A$

(iii) $(A\cap B)\subset B$　　(iv) $(A\cap B)\supset B$

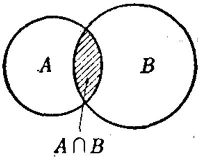
(v) $A\cap\bar{A}=\varnothing$　　(vi) $A\cap\bar{A}=U$

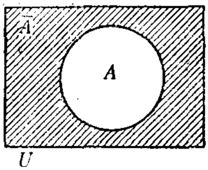
(2) 设　A 为不等式 $2x+3>1$ 的解集，

B 为不等式 $2x+3<5$ 的解集，

这时，不等式 $1<2x+3<5$ 的解集，怎样用 A, B 表示出来？

提示　(1) 可画出文氏图考虑.





(2) 不等式 $1<2x+3<5$ 表示下列两个不等式同时成立.

$$\begin{cases}2x+3>1\\2x+3<5\end{cases}$$

从而，解集是同时满足两个不等式的 x 值全体的集合.

解　(1) 关系式恒能成立的有

(i) $(A\cap B)\subset A$　　(iii) $(A\cap B)\subset B$

(v) $(A\cap\bar{A})=\varnothing$

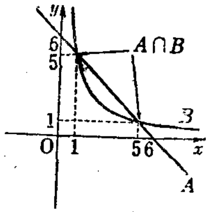
(2) 不等式 $1<2x+3<5$ 的解集是不等式 $2x+3>1$ 的解集与不等式 $2x+3<5$ 解集所共同包含的 x 值的集合，所以可表示为 $A\cap B$.

注意　一般地，当 $A=\{x\mid f(x)\}$，$B=\{x\mid g(x)\}$ 时，则 $A\cap B=\{x\mid x\in A, 且\ x\in B\}$，所以可表示为

$$A\cap B=\{x\mid f(x)且\ g(x)\}$$

研究　(1) 设 $A=\{(x,y)\mid x+y=6\}$, $B=\{(x,y)\mid xy=5\}$

时，则方程$\begin{cases}x+y=6\\xy\quad=5\end{cases}$的解集可表示为$A\cap B$.



如果用坐标平面上的图形表示解集时，则A表示直线，B表示双曲线，$A\cap B$表示直线与双曲线的两个交点的集合$\{(1,5),(5,1)\}$

（2）因为对于交集结合律成立，所以，例如$\{(A\cap B)\cap C\}\cap D$等可以随意改变括号，写成$(A\cap B)\cap(C\cap D)$等.

发展题

（1）试证$A\cap\varnothing=\varnothing$, $\varnothing\cap A=\varnothing$成立.

（2）试讨论下列(i),(ii)是否成立,如果不成立试举一例.

(i) 若$A=\varnothing$或$B=\varnothing$，则$A\cap B=\varnothing$

(ii) 若$A\cap B=\varnothing$，则$A=\varnothing$或$B=\varnothing$

（3）设　$A=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2>1\}$

$B=\{(x,\ y)\,|\,(x-1)^2+y^2<1\}$

试用坐标平面上的图形表示$A\cap B$.

要点

(1) $A\cap\varnothing=\varnothing\rightleftarrows A\cap\varnothing\subset\varnothing$且$A\cap\varnothing\supset\varnothing$

解　(1) 一般地，在两个集合A, B之间，$(A\cap B)\subset B$成立，所以设$B=\varnothing$则$(A\cap\varnothing)\subset\varnothing$，又因为空集是任意集合的子集，所以$\varnothing\subset(A\cap\varnothing)$

$\therefore\quad A\cap\varnothing=\varnothing$

左边应用交换律，得

$\varnothing\cap A=\varnothing$

(2) (i)利用(1)成立可以推证.

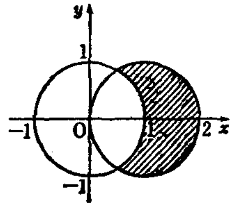
(ii) 可举出当$A\cap B=\varnothing$时,$A\neq\varnothing$,$B\neq\varnothing$的例子.

(3) A与B的公共区域为$A\cap B$

(2) (i) 由(1)可知成立.

(ii) 不成立,例如:若设$A=\{1, 2, 3\}$,$B=\{4, 5, 6\}$,则$A\cap B=\varnothing$,而$A\neq\varnothing$,$B\neq\varnothing$

(3) 集合A表示圆$x^2+y^2=1$的外部,集合B表示圆$(x-1)^2+y^2=1$的内部. 因此,$A\cap B$是它们的公共部分,如右图的阴影部分. 但是,不包含边界线.



练习 (解答在153页)

9. 已知两个集合A, B,试证$A\cap\overline{B}$与$\overline{A}\cap B$互质.

10. 设27, 36, 42的约数的集合分别为A, B, C,试用A, B, C表示27, 36, 42的公约数的集合.

11. 设$A=\{(x, y)\mid x^2-y\leqslant 0\}$,$B=\{(x, y)\mid y\leqslant -x+1\}$
试用坐标平面上的图形表示$A\cap B$

5. 并　　集

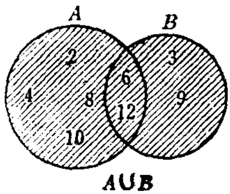
并集(并)　有两个集合 A, B，由至少属于 A 或者属于 B 的一切元素所组成的集合，叫做集合 A 与集合 B 的**并集**，又叫做**和**或**并**，记作

$$A\cup B$$

符号 $\cup$ 形如茶杯，因此读作 cup 或者读作 join，并等.

例如，设 $A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$，$B=\{3, 6, 9, 12\}$，则 $A\cup B=\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$

在此例中，考虑从 1 到 12的整数时 A 是 2 的倍数的集合，B 是 3 的倍数的集合，$A\cup B$ 就是 2 或 3 的倍数的集合.



交换律　由并集的定义，可知下列等式成立.

$$A\cup B=B\cup A$$

这叫做对于并集的**交换律**. 它正如实数的加法 $a+b=b+a$ 中的"+"换成了"$\cup$". 还有下列等式也是成立的.

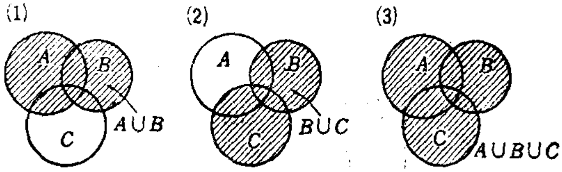
结合律

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$

这叫做对于并集的**结合律**.

结合律的成立，画出文氏图观察是很明显

的. 如下图,不论在(1)的 $A\cup B$ 与 C 的合并部分,还是在(2)的 A 与 $B\cup C$ 的合并部分,结果都成为(3)的阴影部分.



并集和子集

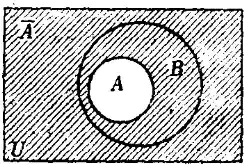
于是,表示为 $(A\cup B)\cup C=A\cup B\cup C$

当 A 是 B 的子集时,由文氏图可知下列关系成立.

(1) 若 $A\subset B$, 则 $A\cup B=B$

(2) 若 $A\subset B$, 则 $\bar{A}\cup B=U$

现在看,这些关系的逆关系是否也成立.



当 $A\cup B=B$ 时,设 A 的任意元素为 x, 则 $x\in A\cup B$, 从而 $x\in B$, 即

$x\in A\to x\in B$ $\quad\therefore\quad A\subset B$

又,当 $\bar{A}\cup B=U$ 时,设 A 的任意元素为 x, 则 $x\notin\bar{A}$. 但因为 $x\in U=\bar{A}\cup B$, 所以 $x\in B$. 即

$x\in A\to x\in B$ $\quad\therefore\quad A\subset B$

于是

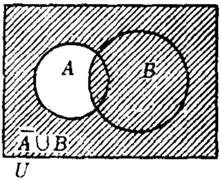
(I) $\boldsymbol{A\subset B\rightleftarrows A\cup B=B}$

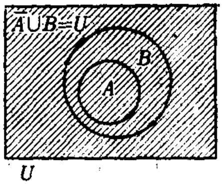
(II) $\boldsymbol{A\subset B\rightleftarrows \bar{A}\cup B=U}$

$A\subset B\rightleftarrows$
$A\cup B=B$

$A \subset B \rightleftarrows$
$\bar{A} \cup B = U$

在(II)中，如果用语言叙述 $\bar{A} \cup B = U$，就是对于所有的元素至少是属于 $\bar{A}$ 或属于 B，即不属于 $\bar{A}$(即属于 A) 的元素必属于 B.





等幂律

再由定义可知，下列关系成立.

(III) $A \cup A = A$(这叫做**等幂律**)

(IV) $A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A,\ A \cup U = U \cup A = U$

提　　要

(1) 由至少属于 A 或属于 B 的一切元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的并集，或并，记作 $A \cup B$.

(2) 关于并集，有下列等式成立.

交换律　$A \cup B = B \cup A$

结合律　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

等幂律　$A \cup A = A$

(3) 关于集合 A, B, 有

$A \subset B \rightleftarrows A \cup B = B$

$A \subset B \rightleftarrows \bar{A} \cup B = U$

例题 6　(1) 在下列关系中，哪一个恒能成立？

(i) $(A \cup B) \subset A$　　(ii) $(A \cup B) \supset A$

(iii) $(A \cup B) \subset B$　　(iv) $(A \cup B) \supset B$

(v) $A \cup \bar{A} = \varnothing$　　(vi) $A \cup \bar{A} = U$

(2) 设方程 $x^2-1=0$ 的解集为 A, 方程 $x^2+1=0$ 的解集为 B 时, 方程 $x^4-1=0$ 的解集, 怎样用 A, B 表示出来?

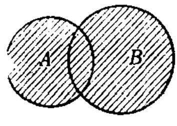
提示 (1) 可画出文氏图考虑.

(2) 方程 $x^4-1=0$

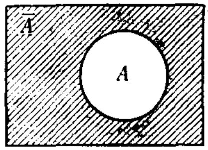
即, $(x^2-1)(x^2+1)=0$

于是, $x^2-1=0$ 或

$x^2+1=0$



$A\cup B$



U

所以, $x^4-1=0$ 的解集是把 $x^2-1=0$ 与 $x^2+1=0$ 的解集合起来的集合. 实际上, $A=\{1, -1\}$, $B=\{i, -i\}$, 所以

$$\{x \mid x^4-1=0\}=\{1, -1, i, -i\}$$

解 (1) 恒能成立的有:

(ii) $(A\cup B)\supset A$　　(iv) $(A\cup B)\supset B$

(vi) $A\cup\bar{A}=U$

(2) 因为 $x^4-1=0$ 是 $(x^2-1)(x^2+1)=0$, 即 $x^2-1=0$, 或 $x^2+1=0$, 所以 $x^4-1=0$ 的根是 $x^2-1=0$ 与 $x^2+1=0$ 的所有的根. 因此, $x^4-1=0$ 的解集可以表示为 $A\cup B$.

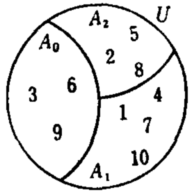
注意 一般地, 当 $A=\{x \mid f(x)\}$, $B=\{x \mid g(x)\}$ 时, 因为 $A\cup B=\{x \mid x\in A$ 或 $x\in B\}$, 所以可表示为 $A\cup B=\{x \mid f(x)$ 或 $g(x)\}$.

研究 例如, 设10以下的自然数的集合为 U, 分为被3整除的数的集合 A_0, 被3除余1的数的集合 A_1 以及被3除余2的数的集合 A_2 时, 即 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$$A_0=\{3, 6, 9\},\quad A_1=\{1, 4, 7, 10\},\quad A_2=\{2, 5, 8\}$$

于是　$U=A_0\cup A_1\cup A_2$

并且$A_0\cap A_1=\varnothing$, $A_0\cap A_2=\varnothing$, $A_1\cap A_2=\varnothing$, 即 A_0, A_1, A_2 两两互质. 这时叫做把 U 划分成三类 A_0, A_1, A_2.



发展题

(1) 试证 $A\cup\varnothing=A$, $\varnothing\cup A=A$ 成立.

(2) 试判别下列(i), (ii)是否成立.

(i) 若 $A=\varnothing$, 且 $B=\varnothing$, 则 $A\cup B=\varnothing$

(ii) 若 $A\cup B=\varnothing$, 则 $A=\varnothing$ 且 $B=\varnothing$

(3) 设 $A=\{(x, y)\mid x-y>0\}$, $A'=\{(x, y)\mid x-y<0\}$

$B=\{(x, y)\mid x+y>0\}$, $B'=\{(x, y)\mid x+y<0\}$

$P=\{(x, y)\mid x^2-y^2>0\}$, $Q=\{(x, y)\mid x^2-y^2<0\}$

怎样用 A, B, A', B' 分别把 P, Q 表示出来? 其中, 坐标平面上的点的坐标(x, y)作为全集.

要点

(1)可考虑$(A\cup\varnothing)\supset A$, $(A\cup\varnothing)\subset A$

(2)两个都成立.

解 (1) 在两个集合 A, B 之间, 因为$(A\cup B)\supset A$ 成立, 所以, 令 $B=\varnothing$, 则 $(A\cup\varnothing)\supset A$, 又设 $x\in A\cup\varnothing$,则由 $x\notin\varnothing$, 得 $x\in A$, 因此$(A\cup\varnothing)\subset A$, $\therefore$　$A\cup\varnothing=A$

在左边利用交换律, 则

$$\varnothing\cup A=A$$

(2) (i) 在(1)中令 $A=\varnothing$, 则 $\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$ 成立.

(ii) 假设不是$A=\varnothing$且$B=\varnothing$,

即 $A\neq\varnothing$，或 $B\neq\varnothing$，则 A, B 中至少有一方，有元素存在，所以 $A\cup B\neq\varnothing$，这与假设矛盾，因此原式成立。

(3)要考虑成为交集与并集的是什么？“且”是与交集相对应的，“或”是与并集相对应的.

(3) $x^2-y^2>0$，即

$$(x+y)(x-y)>0$$

所以

$$\begin{cases} x+y>0 \\ x-y>0 \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} x+y<0 \\ x-y<0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad P=(A\cap B)\cup(A'\cap B')$$

同理 $\quad Q=(A\cap B')\cup(A'\cap B)$

练习 (解答在 153 页)

12. 设 6 的约数的集合为 A，10 的约数的集合为 B，15 的约数的集合为 C，试用列举法表示 $A\cup B$，$A\cup C$

13. 设 $A=\{(x, y)\mid x>y\}$，$B=\{(x, y)\mid x<y\}$，$C=\{(x, y)\mid x=y\}$ 时，试用 A, B, C 表示 $P=\{(x, y)\mid x\geqslant y\}$，$Q=\{(x, y)\mid x\neq y\}$

6. 集合的运算(1)

交换律与结合律

对两个集合 A, B, 可以实行$\cap$, $\cup$的运算, 这同数的计算求积"·"与求和"+"同样, 交换律和结合律等也都成立. 即

$$\boldsymbol{A \cap B = B \cap A,\ A \cup B = B \cup A} \quad \text{(交换律)}$$

$$\boldsymbol{(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)} \quad \text{(结合律)}$$

$$\boldsymbol{(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)}$$

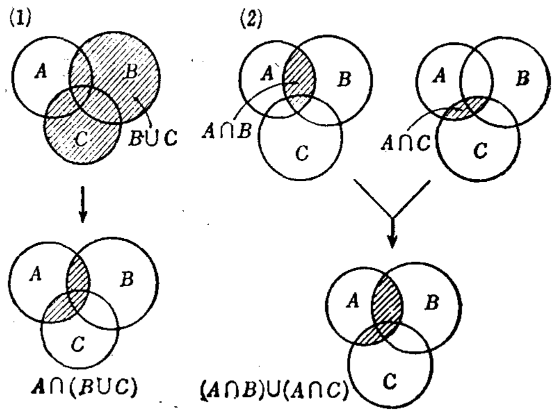
$$\boldsymbol{A \cap A = A,\ A \cup A = A} \quad \text{(等幂律)}$$

分配律

这里, 在关于数的计算成立的分配律

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

中, 将乘号$\times$换成$\cap$, 将加号$+$换成$\cup$, 那么对集合 A, B, C, 下式



$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

是否成立，我们画出文氏图，讨论如下：

在前页图(1)中，先计算 $B\cup C$，再求与 A 的交集．在前页图(2)中，先求 $A\cap B$，$A\cap C$，再求它们的并集．这两种求法所得结果相同．因此

分配律

$$\boldsymbol{A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)}$$

这叫做交对并的分配律．

其次，在数的计算的分配律中，把×号与+号对换所得的等式

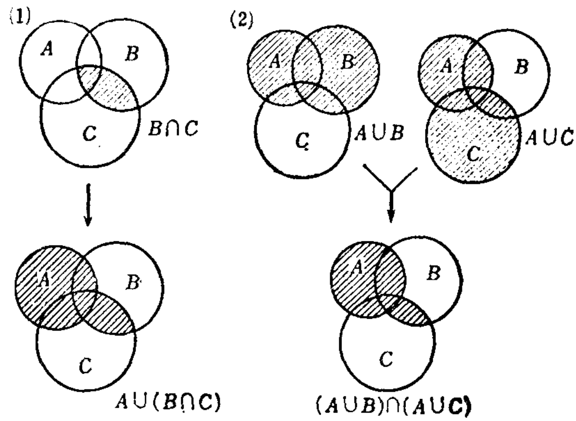
$$\boldsymbol{a+(b\times c)=(a+b)\times(a+c)}$$

是不成立的，但是关于集合与之对应的等式

分配律

$$\boldsymbol{A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)}$$

却是成立的．这叫做并对交的**分配律**，用文氏图(1)，(2)可以验证．



对偶

上边所得的分配律，将第一式里的∩与∪置换便得第二式，将第二式里的∩与∪置换便

得第一式．我们把具有这种关系的两个等式叫做相互**对偶**、关于集合的等式，成对偶的很多．

吸收律

又，下列等式也成立，我们把它叫做**吸收律**．

$A\cap(A\cup B)=A$，$A\cup(A\cap B)=A$（吸收律）

这是因为，若 $P\subset Q$，则 $P\cap Q=P$，$P\cup Q=Q$，因此，根据 $A\subset(A\cup B)$，$(A\cap B)\subset A$，如果用 $P=A$，$Q=A\cup B$，与 $P=A\cap B$，$Q=A$ 分别置换上式中的 P，Q，便可以得出上边的两个等式．这也是相互成对偶的．

提　要

（1）**分配律**　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

（2）**吸收律**　$A\cap(A\cup B)=A$

$A\cup(A\cap B)=A$

例题 7　（1）设 12 的约数的集合为 A，16 的约数的集合为 B，18 的约数的集合为 C，求 $A\cap(B\cup C)$，$(A\cap B)\cup(A\cap C)$，并验证分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ 及 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ 是成立的．

（2）对 $A\cup(A\cap B)$，试应用分配律和等幂律证明吸收律成立．

提示　（1）因为 $A=\{1,2,3,4,6,12\}$，$B=\{1,2,4,8,16,\}$ $C=\{1,2,3,6,9,18\}$，所以，首先把 $B\cup C$，$A\cap B$，$A\cap C$，其次

把 $A\cap(B\cup C)$，$(A\cap B)\cup(A\cap C)$的元素实际列举出来进行验证.

(2) 用分配律、等幂律把 $A\cup(A\cap B)$变形，再应用“若 $P\subset Q$ 则 $P\cap Q=P$”证明.

解 (1) 因为 $A=\{1,2,3,4,6,12\}$，$B=\{1,2,4,8,16\}$，$C=\{1,2,3,6,9,18\}$，所以

$$B\cup C=\{1,2,3,4,6,8,9,16,18\}$$

因此，$A\cap(B\cup C)=\{1,2,3,4,6\}$

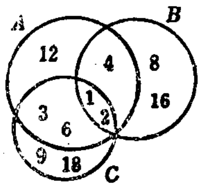
又，$A\cap B=\{1,2,4\}$，$A\cap C=\{1,2,3,6\}$

因此，$(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{1,2,3,4,6\}$

$$\therefore\quad A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

其次，由于 $B\cap C=\{1,2\}$

得 $A\cup(B\cap C)=\{1,2,3,4,6,12\}$



又，$A\cup B=\{1,2,3,4,6,8,12,16\}$

$A\cup C=\{1,2,3,4,6,9,12,18\}$

因此，$(A\cup B)\cap(A\cup C)=\{1,2,3,4,6,12\}$

$$\therefore\quad A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

参考 (1) 画出文氏图如上所示，$\bar{A}\cap B\cap C=\varnothing$

(2) $A\cup(A\cap B)=(A\cup A)\cap(A\cup B)$ （根据分配律）

$=A\cap(A\cup B)$ （根据等幂律）

$=A$ （根据 $A\subset(A\cup B)$）

发展题

(1) 将 $A\cap(A\cup B)=A$ 的左边，利用分配律和等幂律导出 $A\cup(A\cap B)=A$

(2) 证明 $(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)\cap(B\cup C)$

(3) 在集合A的元素中没有集合B的元素的集合，叫做**由A减B的差集或叫做关于A的B的补集**，表示为 $A-B$. 即

$$A-B=A\cap\overline{B}$$

当 A, B 为任意集合时，可把 $A\cup B$ 划分成三个集合

$$A-B,\quad B-A,\quad A\cap B$$

试用文氏图表示出来.

要点

(1) 依次应用分配律、等幂律.

(2) 应用分配律和$(B\cap C)\subset(B\cup C)$

(3) 因为 $A-B, B-A, A\cap B$ 中的任意两个互质（没有公共部分），所以这几个的并集为$A\cup B$.

解 (1)

$$A\cap(A\cup B)=(A\cap A)\cup(A\cap B)$$
$$=A\cup(A\cap B)$$

$\therefore\quad A\cup(A\cap B)=A$

(2) 左边

$=[(A\cap B)\cup(A\cap C)]\cup(B\cap C)$

$=[A\cap(B\cup C)]\cup(B\cap C)$

$=[A\cup(B\cap C)]\cap[(B\cup C)\cup(B\cap C)]$

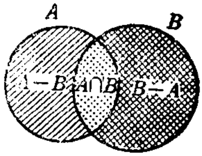
在这个式子里，由于

$(B\cap C)\subset(B\cup C)$，所以

$=(A\cup B)\cap(A\cup C)\cap(B\cup C)$

$=$右边

(3) 在右边文氏图中，因为$A-B$ 可用一重阴影部分表示，$B-$



A可用二重阴影部分表示，$A \cap B$ 可用点的部分表示，所以两两互质，并且它们的并集为 $A \cup B$. 因此，可以划分三类。

练习 （解答在 154 页）

14. 证明下列等式成立.

$$(A-B) \cap (B-A)=\varnothing$$

15. 证明 $A \subset B$ 成立的条件为 $A-B=\varnothing$

即 $$A \subset B \Longleftrightarrow A-B=\varnothing$$

7. 集合的运算(2)

德·摩尔根定律

关于交集、并集的补集，有下列重要等式成立. 这就是所谓关于集合的**德·摩尔根定律**(De Morgan's law).

(I) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

(II) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

这个定律用语言叙述如下:

(I) A, B 的交的补集等于A, B的补集的并.

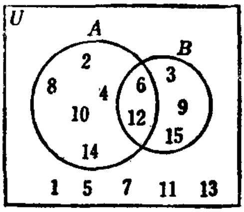
(II) A, B 的并的补集等于 A, B 的补集的交.

列举元素

例如，从 1 到 15 的自然数中，设 2 的倍数的集合为 A，3 的倍数的集合为 B.

则由 $A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$

$B=\{3, 6, 9, 12, 15\}$



得 $A\cap B=\{6, 12\}$

$A\cup B=\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15\}$

从而

$$\overline{A\cap B}=\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15\} \quad ①$$

$$\overline{A\cup B}=\{1, 5, 7, 11, 13\} \quad ②$$

又 $\overline{A}=\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$

$$\bar{B}=\{1,2,4,5,7,8,10,11,13,14\}$$

从而

$$\bar{A}\cup\bar{B}=\{1,2,3,4,5,7,8,9,10,11,13,14,15\} \quad ①'$$

$$\bar{A}\cap\bar{B}=\{1,5,7,11,13\} \quad ②'$$

比较①和①′, ②和②′, 显然下列等式成立.

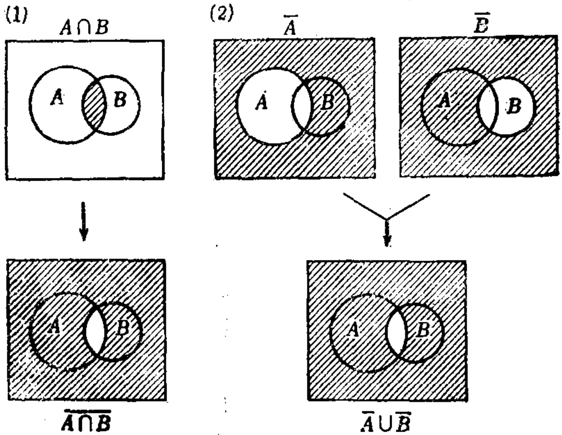
$$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$$

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$$

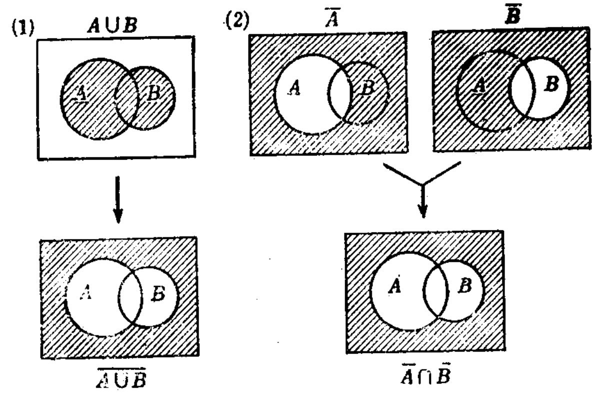
用文氏图的证明

用文氏图也可以验证这个定律是成立的. 下图(1)是由 $A\cap B$ 求 $\overline{A\cap B}$, 图(2)是由 $\bar{A}$, $\bar{B}$求 $\bar{A}\cup\bar{B}$, 由于所得结果完全相同, 因此,

$$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$$



关于 $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$ 也可以由下页文氏图验证。



提　　要

关于集合的德·摩尔根定律:

$$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$$

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$$

例题 8　(1) 以 10 以下的自然数为全集，设质数的集合为 A, 10 的约数的集合为 B 时，

(i) 试用列举法表示 $\bar{A}, \bar{B}$.

(ii) 用列举法分别表示 $\overline{A\cap B}, \bar{A}\cup\bar{B}$，并验证它们相等.

(iii) 同样验证 $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$

(2) 试用德·摩尔根定律证明下列等式.

$$\overline{A\cap B\cap C}=\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$$

提示　(1) 根据 $A=\{2, 3, 5, 7\}, B=\{1, 2, 5, 10\}$, 分别列举集合的元素，用下页的文氏图，是很容易列出的.

(2) $A\cap B\cap C=(A\cap B)\cap C$, 以 $A\cap B$ 作为一个集合，用德·摩尔根定律即可得$(\overline{A\cap B})\cup\bar{C}$，所以再一次用德·摩尔根定律即可证出.

解 (1) 由 $A=\{2,3,5,7\}$, $B=\{1,2,5,10\}$, 得

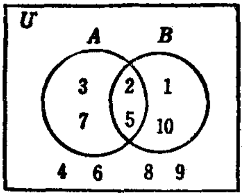
(i) $\bar{A}=\{1,4,6,8,9,10\}$, $\bar{B}=\{3,4,6,7,8,9\}$

(ii) 因为 $A\cap B=\{2,5\}$

所以 $\overline{A\cap B}=\{1,3,4,6,7,8,9,10\}$

又， $\bar{A}\cup\bar{B}=\{1,3,4,6,7,8,9,10\}$

因此 $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$



(iii) 因为 $A\cup B=\{1,2,3,5,7,10\}$

所以 $\overline{A\cup B}=\{4,6,8,9\}$

又， $\bar{A}\cap\bar{B}=\{4,6,8,9\}$

因此 $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$

(2) $\overline{A\cap B\cap C}=\overline{(A\cap B)\cap C}$ (根据结合律)

$=(\overline{A\cap B})\cup\bar{C}$ (根据德·摩尔根定律)

$=(\bar{A}\cup\bar{B})\cup\bar{C}$ (根据德·摩尔根定律)

$=\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$ (根据结合律)

$\therefore$ $\overline{A\cap B\cap C}=\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$

研究 同理 $\overline{A\cup B\cup C}=\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$ 也成立.

发展题

(1) 设 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$, $B=\{(x,y)\mid x+y<1\}$, 试在坐标平面上验证$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

(2) 试用 $A-B=A\cap\bar{B}$, 证明下列等式成立.

$$(A-B)-C=A-(B\cup C)$$

要点

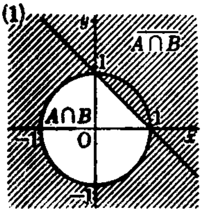
(1) $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$的补集为

$$\bar{A}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\geqslant 1\}$$

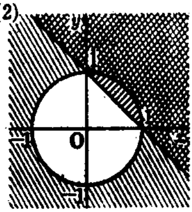
解 (1) 在下图(1)中，$A\cap B$是没有阴影的区域，$\overline{A\cap B}$是有阴影的区域.

又在下图(2)中，因为$\bar{A}$是圆的外部(右下斜线阴影)，$\bar{B}$是直线的上方部分(右上斜线阴影)，所以$\bar{A}\cup\bar{B}$是有阴影的部分. 因此$\overline{A\cap B}$与$\bar{A}$和$\bar{B}$相同. 且包含边界.

(1)



(2)



(2) $A-B=A\cap\bar{B}$

(2) $(A-B)-C$

$=(A\cap\bar{B})\cap\bar{C}$ (差的定义)

$=A\cap(\bar{B}\cap\bar{C})$ (结合律)

$=A\cap(\overline{B\cup C})$

(德·摩尔根定律)

$=A-(B\cup C)$ (差的定义)

练习 (解答在154页)

16. 试证明下列等式.

(i) $\overline{A\cup B\cup C}=\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$

(ii) $(A-B)\cap(A-C)=A-(B\cup C)$

(iii) $(A-B)\cup(A-C)=A-(B\cap C)$

17. 设A,B为任意集合，证明全集U可划分为

$$A\cap B,\ \bar{A}\cap\bar{B},\ A-B,\ B-A$$

8. 集合的图示

集合所研究的范围

集合是"事物"的集体，作为它的"事物(元素)"，到现在为止我们所研究的主要是数（整数、实数），点(或坐标)，图形(三角形、四边形)等，但是，除此以外，只要是逻辑的研究对象的事物，任何事物都可以是集合的研究对象．例如，在一平面上图形旋转的集合、矩阵的集合，以及更具体的各种集合．

文氏图

图示集合的包含关系，一般使用文氏图．例如：在某学校中，设 $A=\{$运动员$\}$

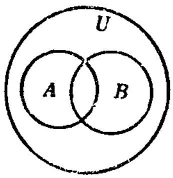
$B=\{$学习委员$\}$

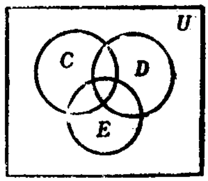
又设 $C=\{2$ 的倍数$\}$

$D=\{3$ 的倍数$\}$

$E=\{5$ 的倍数$\}$

用文氏图表示如下：





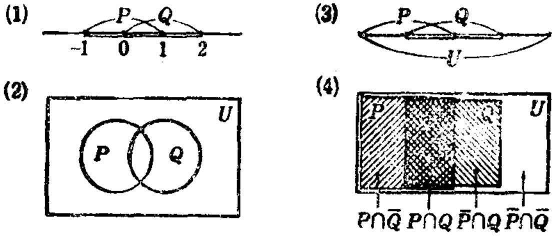
文氏图的线段表示

又设 $P=\{x \mid x^2-1<0\}$

$Q=\{x \mid x^2-2x<0\}$

这些如下页图(1)可用数轴上的区间表示，如用

文氏图表示如图(2).



又,如果用图(3)表示它，也可以看作是在线段上所表示的文氏图. 这时，全集U为无限的直线.

文氏图的矩形表示

上面的关系也可以用如图(4)的矩形来表示. 它可以说是用矩形表示的文氏图. 在图(4)中,全集被分成四个部分,分别为$P\cap\bar{Q}$,$P\cap Q$,$\bar{P}\cap Q$,$\bar{P}\cap\bar{Q}$，由此全集U被划分成四个集合. 从而还可以表示如右图.

文氏图的意义

(5)

	Q	$\bar{Q}$
P	$P\cap Q$	$P\cap\bar{Q}$
$\bar{P}$	$\bar{P}\cap Q$	$\bar{P}\cap\bar{Q}$

由上得知,所谓文氏图只表示集合的包含关系，不表示元素与元素的关系，也不表示元素的个数是有限还是无限的关系. 从这个意义来说，它和用数轴上的区间表示不等式的解有区别.

文氏图和区域

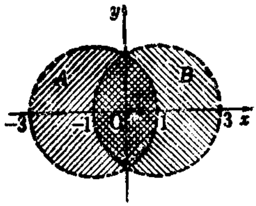
和上述同样，也可以说是区域和文氏图的区别. 例如,设 $A=\{(x,y)\mid(x+1)^2+y^2<4\}$

$B=\{(x,y)\mid(x-1)^2+y^2<4\}$,

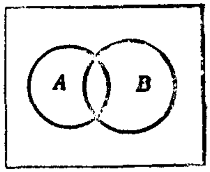
在坐标平面上,它们所表示的区域如下页上图.

它是集合A,B的图示,从图上可以了解A,

B 的包含关系．因此，可以把它看作是文氏图的一种，但是，这时必须注意，全集是无限延展的整个坐标平面．



一般地，文氏图只着眼包含关系，而不考虑量的关系，所以通常如右图那样，可画一个表示全集的外框．



于是研究两个集合 A,B 之间有无公共部分，是否有是 A 的元素而不是 B 的元素等，只要画出这样的图形，就可以充分掌握它们之间的关系．

提　　要

如果用数轴上的区间表示实数，用坐标平面上的区域表示点 (x, y) 的集合，就能在图上表示出集合之间的包含关系．

但，只是这样还不能说是集合的文氏图．

例题 9　(1) 设 $A=\{(x, y) \mid x+y>2\}$

$$B=\{(x, y) \mid x-2y>0\}$$

试画出文氏图，用阴影表示 $P=\{(x, y) \mid 2-x<y<\frac{1}{2}x\}$，并在坐标平面上用阴影线表示 P 的区域．

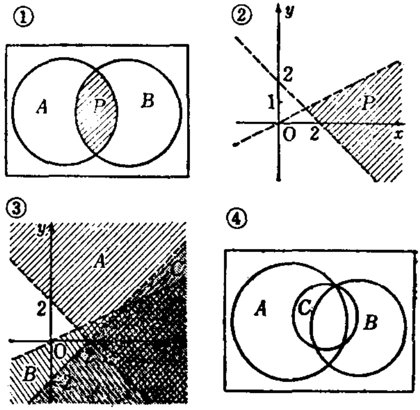
（2）再设 $C=\{(x,y)\mid x-y-2>0\}$，试将 A,B,C 用坐标平面上的区域表示．并用文氏图表示出来．

提示　（1）因为 $2-x<y<\frac{1}{2}x$ 与 $x+y>2$ 且 $x-2y>0$ 同值，所以 P 是 A 和 B 的公共部分，即 $A\cap B$．

又，A 在直线 $x+y=2$ 的上方，B 在直线 $x-2y=0$ 的下方．

（2）C 在直线 $x-y-2=0$ 的下方．直线 $x-y-2=0$ 不通过 $x+y\leqslant 2$ 且 $x-2y\leqslant 0$ 的区域 $\bar{A}\cap\bar{B}$．即 C 包含 $A\cap B$，$\bar{A}\cap B$，$A\cap\bar{B}$ 三个区域的各一部分，但不包含 $\bar{A}\cap\bar{B}$．画文氏图时要注意此点．

解　（1）$2-x<y<\frac{1}{2}x$ 就是 $x+y>2$ 且 $x-2y>0$，所以 $P=A\cap B$，因此，文氏图如下图①，区域为下图②．



（2）A,B,C 在坐标平面上的图示，如上图③，因为区域 C 不包含 $\bar{A}\cap\bar{B}$ 的点，包含 $A\cap B$，$\bar{A}\cap B$，$A\cap\bar{B}$ 的各一部分，所

以 A, B, C 用文氏图表示如前页图④.

注意　对于 $A=\{(x,y)\mid x+y>2\}$的补集为:

$\bar{A}=\{(x,y)\mid x+y\leqslant 2\}$, 所以 A 不包含它的边界直线 $x+y=2$, $\bar{A}$ 包含它的边界直线 $x+y=2$.

发展题

本田同学的班级有 45 人, 戴眼镜的 15 人, 其中男生9人, 还有不戴眼镜的女生 17 人.

(1) 试根据题意列表, 区分男、女, 区分戴眼镜的与不戴眼镜的.

(2) 试用文氏图表示他们的关系.

(3) 本田同学班级的男女生各多少人?

要点

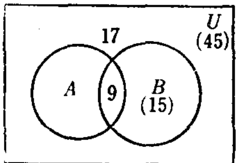
(1)区分男、女, 区分戴眼镜与不戴眼镜的共有 4 组.

(2)设男生集合为A, 戴眼镜学生的集合为B, 则$\bar{A}$, $\bar{B}$ 分别表示剩余学生的集合.

解　(1) 设男生的集合为A, 戴眼镜学生的集合为 B, 列出下表.

性别 男女 \ 眼镜	戴的 B	不戴的 $\bar{B}$	计
男 A	9		
女 $\bar{A}$		17	
计	15		45

(2) 因为女生的集合为 $\bar{A}$, 不戴眼镜学生的集合为 $\bar{B}$, 所以如右文氏图.



(3)边看表边填写表内的空白栏. 求出$\bar{A}\cap B$, $A\cap\bar{B}$即可.

(3) 因为$\bar{A}\cap B$的人数等于从B的人数减去$A\cap B$的人数,所以

$$15-9=6$$

因此, $\bar{A}$的人数等于$\bar{A}\cap B$的人数与$\bar{A}\cap\bar{B}$的人数的和,即

$$6+17=23$$

因而, A的人数等于全体人数减去$\bar{A}$的人数,所以

$$45-23=22$$

答: 男22人,女23人.

练习 (解答在155页)

18. 设$A=\{x|x(x+4)<0\}$, $B=\{x|x^2-4<0\}$,

$C=\{x|(x^2-1)(x^2-9)<0\}$, $P=\{x|-2<x<-1\}$

(1) 将这些集合用数轴上的区间和文氏图表示出来.

(2) 怎样用A, B, C表示P?

9. 集合的元素个数与直积

有限集合的元素的个数

当集合的元素个数为有限时，把这个集合叫做**有限集合**，有限集合 A 的元素个数记作

$$\boldsymbol{n(A)}$$

当给定两个有限集合 A, B 时，因为在并集 $A\cup B$ 的元素中，属于交集 $A\cap B$ 的元素，既包含在 A 里，又包含在 B 里，所以下列关系成立.

$$\boldsymbol{n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)}$$

特别地，当 $A\cap B=\varnothing$ 时，由于 $n(A\cap B)=0$，所以可得

$$\boldsymbol{n(A\cup B)=n(A)+n(B)}$$

例如，$A=\{x|x$ 是 20 以下 2 的倍数$\}$

$B=\{x|x$ 是 20 以下 3 的倍数$\}$

由 $A\cap B=\{6, 12, 18\}$，得

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$=10+6-3=13$$

直积，结合集合

有两个集合 A, B，当

$A=\{a_1a_2, \cdots, a_n\}$，$B=\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$

时，由 A 的任意的元素 a_i 与 B 的任意的元素 b_j 组成一个新的事物(组)(a_i, b_j)，于是就产生一个新事物的集合。这个集合叫做 A, B 的**直积**，或**结合集合**，记作

$$A \times B$$

它的元素的个数为 mn. 例如:

投掷一个骰子出现的"点数"从 1 到 6 共有 6 种. 投掷两个骰子 a, b, "点"的出法从下表可知共有 (1, 1), (1, 2), (1, 3), …, (2, 1), (2, 2) …等 36 种.

a \ b	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

这些点的出法的集合, 可以用 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的直积 $A \times A$ 来表示.

C 有序对

应当注意, 两个骰子没有区别时, 点的出法 (1, 2) 与 (2, 1) 是相同的; 如上表, 两个骰子区别为 a, b, 则点的出法 (1, 2) 与 (2, 1) 是不相同的. 象这样将顺序考虑在内的 (a_i, b_j), 叫做**有序对**.

直积的性质

所谓两个集合的直积, 就是从每个集合中任意取出一个元素所组成的有序对的集合. 因此一般地, 对于两个集合 A, B,

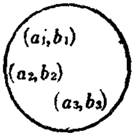
$$A \times B \neq B \times A$$

即，一般地，交换律不成立．例如，$A=(1,2)$，$B=\{a,b\}$时，

$A\times B=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)\}$

$B\times A=\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2)\}$

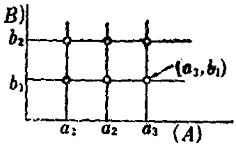
又，A,B 为有限集合时，下列关系显然成立．

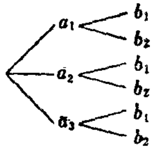


$$n(A\times B)=n(A)\times n(B)$$

直积的图示

因为直积是以有序对(a_i,b_j)为元素的集合，所以可按照以前那样用文氏图表示，但是，还可以如右图，用坐标平面表示（坐标平面，对于实数集合 R，可用$R\times R$ 表示），或者用树图表示，都易于理解．





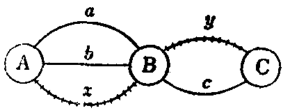
提　　要

（1）设两个有限集合 A，B 的元素的个数分别为 $n(A)$，$n(B)$，则 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

（2）设两个集合 A，B 的任意元素分别为 a_i,b_j，并且取有序对(a_ib_j)时，则把 $A\times B=\{(a_i,b_j)\mid i=1,2,\cdots,j=1,2,\cdots\}$叫做 A,B 的直积．特别地，当 A,B 为有限集合时，$n(A\times B)=n(A)\times n(B)$

例题 10　从 A 市到 B 镇有两条汽车路线 a,b，有一条电车路线 x．又从 B 镇到 C 镇各有一条汽车路线 c 和电车

路线 y.



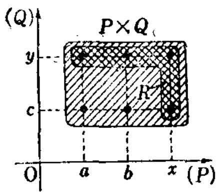
设从 A 市到 B 镇的走法的集合为 P，从 B 镇到 C 镇的走法的集合为 Q. 即 $P=\{a, b, x\}$，$Q=\{c, y\}$

(1) 从 A 市通过 B 镇到 C 镇的走法的集合，怎样用 P, Q 表示？并写出它的元素.

(2) 在(1)的情况下，设至少有一次乘电车的走法的集合为 R，试将 $P\times Q$ 及 R 用图表示出来.

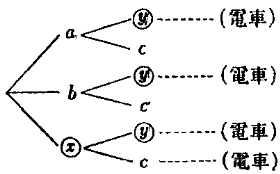
提示 (1) 用 (a, y) 表示从 A 市到 B 镇利用汽车路线 a，从 B 镇到 C 镇利用电车路线 y 的走法，则从 A 市通过 B 镇到 C 镇的走法共有 (a, c), (a, y), (b, c), (b, y), (x, c), (x, y) 6 种，这六种的集合就是集合 P, Q 的直积.

(2) 用坐标平面上的点表示 (a, c) 等，易于理解.



解 (1) 集合 P 与 Q 的直积可用 $P\times Q$ 表示，即，$P\times Q=\{(a, c), (a, y), (b, c), (b, y), (x, c), (x, y)\}$

(2) $P\times Q$ 可用右图中 6 个点的集合表示. 又 $R=\{(x, c), (x, y), (a, y), (b, y)\}$，可用右上图中 4 个点的集合表示.



$3\times 2=6$

研究 (1)中，从 A 市到 C 镇的走法用树图(tree)表示如右下图，很明显有 6 种方法.

参考 对于直积，一般地说，交换律不成立，已如前述. 即 $A\times B\neq B\times A$. 但是结合律 $(A\times B)\times C=A\times(B\times C)$ 成立.

其中元素$((a, b), c)$看作(a, b, c).

发展题

8 的约数为 1, 2, 4, 8, 即 $2^0, 2^1, 2^2, 2^3$. 只取元素的指数表示为$\{0, 1, 2, 3\}$, 并设此集合为 A.

(1) 试将 9 的约数的集合 B, 和上述同样用指数表示出来.

(2) $72=8\times 9$ 的约数的集合, 怎样用 A, B 表示? 并将它的元素列举出来.

要点

(1) 9 的约数的集合为 $(1, 3, 9)$.

(2)因为 $72=2^3\times 3^2$, 所以可用 $2^x\times 3^y$ 的形式表示, 其中$x=0, 1, 2, 3$, $y=0,1,2$.

解 (1) 因为 9 的约数为 $1=3^0$, $3=3^1$, $9=3^2$, 所以 $B=\{0, 1, 2\}$

(2) 因为 $72=2^3\times 3^2$ 的约数可以表示为

$$2^x\times 3^y,\quad \text{其中}\begin{cases}x=0, 1, 2, 3\\ y=0, 1, 2\end{cases}$$

所以约数的集合为 $A\times B$.

把这些元素列举出来为:

$$\begin{aligned}A\times B=\{&(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1,0),\\ &(1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1),\\ &(2, 2), (3, 0), (3, 1), (3, 2)\}\end{aligned}$$

研究 将整数 n 分解成质因数时, 设

$n=p^a\cdot q^b\cdot r^c$ (p, q, r 为质数, a, b, c 为 0 或自然数), 并设 $A=\{0, 1, 2, \cdots\cdots a\}$, $B=\{0, 1, 2, \cdots\cdots b\}$, $C=\{0, 1, 2, \cdots\cdots c\}$, 则 n 的约数的集合可表示为

$$A\times B\times C$$

这时，n 的约数的个数为

$$n(A\times B\times C)=n(A)\times n(B)\times n(C)$$
$$=(a+1)(b+1)(c+1)$$

练习 （解答在155页）

19. 设颜色的集合 $A=\{红，黄，青\}$，形的集合 $B=\{正方形，三角形，圆\}$，试求 $A\times B$.

20. 设 $A=\{0,1\}$，$B=\{-1,0,1\}$，试求 $A\times B$，$B\times A$，并用坐标平面上的图形表示．并由此判定 $A\times B$ 与 $B\times A$ 不相等.

关于集合的各种运算定律小结

现将关于集合的各种常用的定律小结如下：

集合主要是研究下列三种运算.

$\cap$（交），$\cup$（并），$\overline{}$（补集）

在这些集合运算之间，有如下的定律：

（1）**交换律** $A\cap B=B\cap A$

$A\cup B=B\cup A$

（2）**结合律** $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

（3）**分配律** $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

（4）**等幂律** $A\cap A=A$

$A\cup A=A$

（5）**吸收律** $A\cap(A\cup B)=A$

$A\cup(A\cap B)=A$

（6）**补集** $\overline{\overline{A}}=A$

（7）**德·摩尔根定律** $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

特别地，关于全集 U，空集 $\varnothing$，下列关系成立.

(8) **交** $A\cap U=A$, $A\cap\varnothing=\varnothing$

$A\cap\bar{A}=\varnothing$

(9) **并** $A\cup U=U$, $A\cup\varnothing=A$

$A\cup\bar{A}=U$

(10) **补集** $\bar{U}=\varnothing$, $\bar{\varnothing}=U$

对这些关系，$\cap$ 与 $\cup$，U 与 $\varnothing$ 通过置换都相互成对偶.

关于集合的包含关系小结

现将关于集合的包含关系的各种性质，小结如下：

(1) **同一律** $A\subset A$

(2) **传递律** $A\subset B,\ B\subset C\rightarrow A\subset C$

注意 对称律 $A\subset B\rightarrow B\subset A$ 不成立.

(3) **相等的定义** $A\subset B,\ A\supset B\rightleftarrows A=B$

(4) **交** $(A\cap B)\subset A$, $(A\cap B)\subset B$

(5) **并** $(A\cup B)\supset A$, $(A\cup B)\supset B$

(6) **交与并** $(A\cap B)\subset(A\cup B)$

(7) **补集** $A\subset B\rightleftarrows\bar{A}\supset\bar{B}$

(8) **全集与空集**

$\varnothing\subset A\subset U$ （A 为任意集合）

(9) **其它**

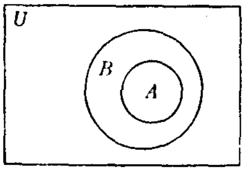
(i) $A\subset B\rightleftarrows A\cap B=A$

$A\subset B\rightleftarrows A\cap\bar{B}=\varnothing$

$A\subset B\rightleftarrows A-B=\varnothing$

(ii) $A\subset B\rightleftarrows A\cup B=B$

$A\subset B\rightleftarrows\bar{A}\cup B=U$



关于集合的运算，对于 $\cup$，$\cap$，$^{-}$，U，$\varnothing$，如前页所述

是对偶的．其次，如果考虑$\subset$和$\supset$的成对，则可知对偶性对集合的包含关系也成立．

例如(i)，因为 $A\subset B\rightleftarrows A\cap B=A$ 成立，所以用$\supset$代替$\subset$，用$\cup$代替$\cap$，有

$$A\supset B\rightleftarrows A\cup B=A$$

成立．即，所得的结果不外是(ii)式．

习　　题 （解答在163页）

——A——

1. 在下列事物的集体中，哪些能构成集合？

(1) 网球能手的全体.

(2) 跑得最快的动物的全体.

(3) 满足 $x^2+1>0$ 的实数 x 的全体.

(4) 满足 $x^2<0$ 的实数 x 的全体.

2. 用有理数 a, b，表示数 $a+b\sqrt{2}$ 的全集为 A.

试判定下列各数是否属于A？

(1) $-\dfrac{2}{3}$　(2) $\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}$　(3) $\sqrt{3}$　(4) $\sqrt{6-2\sqrt{8}}$［日本女大］

3. 将下列集合的元素用列举法表示出来.

(1) 36 的约数中，不是偶数的集合.

(2) $\{n \mid n^2<2n+8, n$ 为整数$\}$

(3) $\{x \mid (x-1)(x-2)(x-3)=0\}$

4. 试判定下列两个集合 A, B 的包含关系.

$A=\{(x, y) \mid x+y \leqslant 1\}$，　$B=\left\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant \dfrac{1}{2}\right\}$　［创价大］

5. 当全集为　$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$，其子集为$A=\{1, 2, 4, 6, 8\}$，$B=\{1, 3, 6, 9\}$时求下列集合.

(1) $A \cup B$，(2) $A \cap B$，(3) $\bar{A} \cup A$，

(4) $\overline{A \cap B}$，(5) $\bar{A} \cup B$　［法政大］

6. 设 $A=\{20$ 的约数$\}$，$B=\{30$ 的约数$\}$，$C=\{45$ 的约数$\}$

试用文氏图表示 A, B, C 并记入各元素.

再求，$A \cap B$, $A \cup C$, $(A \cap C) \cap \bar{B}$

7. 当 $A=\{p, q, r\}$，$B=\{x, y, z\}$时，求直积 $A \times B$

8. 试证明下列等式.

(1) $\overline{(A \cap B) \cup (A \cap C)}=\bar{A} \cup (\bar{B} \cap \bar{C})$

(2) $\overline{A-B}=\bar{A} \cup B$

——B——

9. 当 $A\subset B$, B 与 C 互质时，试证明 A 与 C 也互质.

10. 当两个集合为 A, B 时，试用式子证明 $A\cup B$ 可划分为

$$A-B,\quad B-A,\quad A\cap B$$

11. 填写下列的□.

向 68 个人调查到 A, B, C 三个城市旅行的经验，全体成员至少都到 A, B, C 中的一个城市去过. 并且知道，到 B 和 C 两市，C 和 A 两市，A 和 B 两市去过的人数分别为 21 人，19 人，25人，到 B 或 C，到 C 或 A，到 A 或 B 去过的人数分别为 59 人，56 人，60人. 这时到过 A, B, C 三市的人数分别为□人，□人，□人；A, B, C 三市都到过的人数为□人. [东大—1 次]

12. 在 x, y 平面上，设满足不等式 $|x|+|y|\leqslant a$ 的点 (x, y) 的集合为E.

$$E=\{(x, y)\,|\,|x|+|y|\leqslant a\}\qquad (其中\ a>0)$$

又设满足不等式$\{|x+y|+|x-y|\leqslant 1\}$的点$(x, y)$的集合为 F.

$$F=\{(x, y)\,|x+y|+|x-y|\leqslant 1\}$$

(1) 要使 $E\subseteq F$, a 应为何值?

(2) 要使 $E\supseteq F$, a 应为何值? [学习院大]

13. 设 Z 是整数全体的集合，A 与 B 是 Z 的子集，x, y 分别是 A, B 的元素，就 x 与 y 的所有选法考虑它们的和$z=x+y$. 设所得全部整数 z 的集合为 C.

(1) 试举出 A 与 B 使 $A\cup B\neq Z$ 且 $C=Z$ 的例子.

(2) 试举出 A 与 B 使 $A\cup B=Z$, 且 $C\neq Z$ 的例子. [御茶之水女大]

14. 集合 $M=\{x|x=p^2+q^2, p, q$ 都为整数$\}$的任意两个元素之积仍是集合M的元素. 例如，

$$(1^2+4^2)(2^2+3^2)=10^2+11^2$$

(1) 试证明上述问题的一般性.

(2) 试用两个整数的平方和表示$(4^2+5^2)(3^2+7^2)$. [京都市艺大]

10. 命题及其组成

命题

用语言、符号或式子等表示并且能区别真假的判断叫做**命题**. 例如:

(1) 东京是日本的首都.

(2) 24 是 3 的倍数.

(3) 1+1 比 2 小($1+1<2$)

等, 都是命题, (1)与(2)为真, (3)为假.

对于命题, 主要在于能否区别真假(成立, 或者不成立), 如果不能区别真假, 就不能叫做命题. 例如,

"我想成为鸟"或"他伟大"等, 不能叫做命题.

简单命题

可是, 上面所举(1), (2), (3)三个命题, 都是不能再分解的命题, 象这样的命题叫做**简单命题**, 或**单一命题**.

复合命题

与此相对的, 在数学上迄今所学的许多定律和定理, 一般多是由几个简单命题构成的. 这样的命题叫做**复合命题**或**合成命题**. 例如:

(4) 6 不是质数.

(5) 12 是 2 的倍数, 也是 3 的倍数.

(6) 1 或 -1 比 0 大.

(7) 若 $1=2$, 则 $3=4$.

等，若分别改写成

(4)′ 不是“6 是质数”

(5)′ “12 是 2 的倍数”且“12 是 3 的倍数”.

(6)′ “1 比0 大”或“-1 比 0 大”.

(7)′ 若“$1=2$”，则“$3=4$”

时，则在每个“　”中的是简单命题，上述那些命题可认为是用

“不是”，“且”，“或”，“若…则…”等逻辑词语连结而成的复合命题.

命题的组成

如果用小写字母 a, b, c，…等表示简单命题，则“不是 a”，“a 且 b”，“a 或 b”，“若 a 则 b”都是复合命题．象这样由简单命题构成复合命题或由复合命题构成更复杂的复合命题叫做**组成命题**.

命题逻辑

把研究构成复合命题的简单命题的真假与其复合命题的真假之间关系的领域叫做**命题逻辑**．在命题逻辑中，只是把构成命题的简单命题的真假作为问题，而不涉及命题的内容．例如，

“15 是质数”

确定这类命题的真假是数学的内容（这个判断是假的），这里要研究的，是把重点放在以简单命题的真假为基础，专门从逻辑上确定复合命题的真假上.

逻辑符号　上述四种逻辑的词语，一般用下列逻辑符号表示：

“不是 a”……$\bar{a}$, $\sim a$

“a 且 b”……$a\wedge b$

“a 或 b”……$a\vee b$

“若 a 则 b”……$a\to b$

提　　要

（1）用语言、符号或式子等表示并且能区别真假的判断叫做命题.

（2）在命题中，不能再分解的叫做简单命题．把简单命题用逻辑词语“不是”，“且”，“或”，“若…则…”等连结起来的命题叫做复合命题.

例题 11

（1）讨论下列句子是否是命题.

(i) 信浓河是日本最长的河.

(ii) 富士山是美丽的山吗？

(iii) 请坐火车去.

（2）下列复合命题，包含那些简单命题？

(i) 今天气温是 25°，湿度是 30%.

(ii) 明天是晴天或雨天？

(iii) 平行线不相交.

(iv) 若二次方程的判别式为负，则此二次方程有虚根.

(v) 等腰三角形两底角相等.

提示 （1）能够区别事物真假的判断是命题．因此，由于疑问句和命令句是不能判断真假的句子，所以不能说是命题．

（2）设 a, b 为简单命题，则复合命题为“不是 a”，“a 且 b”，“a 或 b”，“若 a 则 b”等．因此，只考虑给定的句子属于上述的哪一种形式即可．

解 （1）因为命题是能够区别事物的真假的判断，所以(i)是命题，(ii)，(iii)不是命题．

（2）可以把每个命题改写成如下的形式，所以“　”中为简单命题，其中的词语是逻辑词语．

(i) “今天的气温是 25°”且“今天的湿度是 30%”．

(ii) “明天是晴天”或“明天是雨天”．

(iii) 不可能“平行线相交”．

(iv) 若“二次方程的判别式为负”，则“此二次方程的两个根是虚根”．

(v) 若“三角形的两边相等”则“此三角形的两角(等边所对的角)相等”．

发展题

在下列复合命题中，包含哪些简单命题？并且是用哪些词语连结的．

(1) 18 是 6 和 9 的公倍数．

(2) 7 不是 42 的约数．

(3) $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形．

(4) 二个数 2 和 3 的关系是 $3 \geqslant 2$

(5) 平行四边形的对边相等．

要点

仔细分析句子的意义，用

"不是a"

"a且b"

"a或b"

"若a则b"

的哪一种形式或它们的组合形式表示出来.

解 下列" "中是简单命题.

(1) "18是6的倍数"且"18是9的倍数"；是用"且"连结的.

(2) "7不是42的约数"；是用"不是"连结的.

(3) "$\triangle ABC$是直角三角形"且"$\triangle ABC$是等腰三角形"；是用"且"连结的.

(4) 两个数2与3的关系是"$3>2$"或"$3=2$"；是用"或"连结的.

(5) 在四边形$ABCD$中，

若["$AB \parallel CD$"且"$AD \parallel BC$"]

则["$AB=CD$"且"$AD=BC$"]；

是用"若…则…"，"且"连结的.

练习 (解答在155页)

21. 把下列命题看成复合命题时，它们是由哪些简单命题组成的？

(1) 这个蔷薇是红的，那个蔷薇是白的.

(2) 他从新干线去或坐飞机去.

(3) 若是下雨就打伞.

(4) 奇数的平方是奇数.

(5) $2+3\sqrt{5}$不是有理数.

11. 复合命题的真假(1)

否定(不是)

对命题 a，把"不是 a"的命题叫做 a 的否定，记作

$$\bar{a} \text{ 或} \sim a$$

从而，若 a 为真时，则 $\bar{a}$ 为假，若 a 为假时，则 $\bar{a}$ 为真.

真值表

命题为真的用 T(True)，为假的用 F(False)表示，上述命题的真假表示如下表. 把它叫做命题 $\bar{a}$ 的**真假表**或**真值表**.

a	$\bar{a}$
T	F
F	T

连言(且)

对于命题 a, b，象"a 且 b"的命题叫做 a 和 b 的**连言***，记作

$$a \wedge b$$

$a \wedge b$的真假

在此我们来讨论 a，b 的真假与 $a \wedge b$ 的真假的关系. 例如，

a: "中村同学戴眼镜"

b: "中村同学是 15 岁的少年"

$a \wedge b$: "中村同学是戴眼镜的 15 岁的少年"

* 连言也叫做合取.——译者注

当中村同学是戴眼镜的(a 是 T)，又是 15 岁的少年(b 是 T)时，则 $a\wedge b$ 是真的.

当中村同学是戴眼镜的(a 是T)，但不是 15 岁的少年(b 是 F)时，则 $a\wedge b$ 是假的.

当中村同学不戴眼镜(a 是 F)，也不是 15 岁的少年时，则 $a\wedge b$ 是假的.

从此例可知:

$a\wedge b$ 是当 a 与 b 同为真(T)时确定为真(T)，其他情况确定为假(F)的复合命题. 归纳起来，可得下边的真值表.

a	b	$a\wedge b$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

选言（或）

对命题 a, b, 把"a 或 b"叫做命题 a, b 的**选言***. 记作

$$a\vee b$$

$a\vee b$的真假

下面我们来讨论 a, b 的真假与 $a\vee b$ 的真假的关系. 例如,

a: "明天降雨"　b: "明天刮大风"

$a\vee b$: "明天降雨或刮大风"

那么 $a\vee b$ 只有明天不降雨也不刮大风的情况

* 选言也叫做析取. ——译者注

为假(F)，其他情况为真(T)．从此例可知：

$a\vee b$ 是当 a 和 b 均为假(F)时确定为假(F)，其他情况确定为真(T)的复合命题．归纳起来，可得下边的真值表．

a	b	$a\vee b$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

两个命题等价

一般地有两个命题 p，q，当其真值表相同时，即，p 为真时，q 也为真，p 为假时，q 也为假，叫做 p 与 q **等价**或**同值**，记作

$$p=q$$

交换律

由 $a\wedge b$，$a\vee b$ 的真值表，可知下列等式成立．

$a\wedge b=b\wedge a$　　(连言的交换律)

$a\vee b=b\vee a$　　(选言的交换律)

结合律

再有

$(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$ (连言的结合律)

$(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$ (选言的结合律)

也成立．

提　　要

(1) “不是 a”叫做 a 的否定，用 $\bar{a}$ 表示．a 与 $\bar{a}$ 的真

假是相反的.

(2) “a 且 b”叫做 a 和 b 的连言，用 $a\wedge b$ 表示. 当 a, b 同为真时为真，其他情况为假.

(3) “a 或 b” 叫做 a 和 b 的选言，用 $a\vee b$ 表示. 当 a, b同为假时为假，其他情况为真.

例题 12 (1) 把下列句子看作是复合命题时，它们是连言(且)命题，还是选言（或）命题？并用$\wedge$，$\vee$表示出来.

(i) 她很伶俐又很漂亮.

(ii) 他虽然很聪明，然而，是个人主义者.

(iii) 他的朋友有二三人.

(iv) 犯人是 A，是 B 或者是 C.

(2) 试用真值表验证连言的结合律是成立的，即

$$(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$$

提示 (1) 日常使用的语言，既使意义相同也有各种不同的说法，既使同一语句有时也有不同的意义. 因此，应根据每个句子的意义，判断它是连言命题，还是选言命题.

(2) 根据前面的说明作出真值表，加以验证.

解 (1) (i) 连言命题:（她很伶俐）$\wedge$（她很漂亮）

(ii) 连言命题:（他很聪明）$\wedge$（他是个人主义者）

(iii) 选言命题:（他的朋友有两个人）$\vee$（他的朋友有三个人）

(iv) 选言命题:（犯人是 A）$\vee$（犯人是 B）$\vee$（犯人是 C）

(2) 对 a, b, c 讨论 $a\wedge b$，$(a\wedge b)\wedge c$ 及 $b\wedge c$，$a\wedge(b\wedge c)$

可得出下表.

a	b	c	$a\wedge b$	$(a\wedge b)\wedge c$	$b\wedge c$	$a\wedge(b\wedge c)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F
T	F	T	F	F	F	F
T	F	F	F	F	F	F
F	T	T	F	F	T	F
F	T	F	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

由此可知, $(a\wedge b)\wedge c$ 与 $a\wedge(b\wedge c)$的真假相同, 所以可知结合律

$$(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$$

成立.

发展题

(1) 把下列句子看成是复合命题时, 它们是连言命题, 还是选言命题? 并试用$\wedge$, $\vee$表示出来.

(i) 宫崎同学来, 香川同学也来.

(ii) 宫崎同学或香川同学来.

(iii) 天气晴朗, 而风浪高.

(iv) 在 9 时乘电车或火车.

(2) 试把下列的复合命题, 用$\wedge$, $\vee$表示出来.

(i) $-3<0\leqslant 3$

(ii) 2, 3 或 4 是 6 的约数.

要点

(1)正确理解语句的意义.用"且","或"表示出来.

(2) $a\leqslant b$ 是 $(a<b)\vee(a=b)$

解 (1) (i) 连言命题:(宫崎同学来)∧(香川同学也来)

(ii) 选言命题:(宫崎同学来)∨(香川同学来)

(iii) 连言命题:(天气晴朗)∧(风浪高)

(iv) 选言命题:(9时乘电车)∨(9时乘火车)

(2) (i) $(-3<0)\wedge[(0<3)\vee(0=3)]$

(ii) (2 是 6 的约数)∨(3 是 6 的约数)∨(4 是 6 的约数)

研究 在日常用语中,用"a 或 b"时,有时是指只有 a, b 中的任意一方是真的. 例如(1)之(iv).但是,在逻辑学上,至少a, b 有一方是真的中,也包括两方都是真的,都能确定"a 或 b"是真的. 例如(1)之(ii). 因为两个人都来也不受影响. 由于有这样两种用法,所以前者叫做**互斥的选言**,后者叫做**相容的选言**.

练习 (解答在 156 页)

22. 试用 ∧, ∨ 及否定¯表示下列复合命题.

今井同学不会德文也不会法文.

12. 命题的运算

交换律

关于两个命题 a, b 的复合命题

$$a\wedge b,\quad a\vee b$$

交换律成立, 即

$$a\wedge b=b\wedge a,\quad a\vee b=b\vee a$$

结合律

又, 关于三个命题 a, b, c, 结合律也成立:

$$(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$$

$$(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$$

分配律

其次, 关于数的运算定律有分配律 $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$ 成立, 关于集合 $\cap$, $\cup$ 也有分配律

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

成立. 对命题, 关于 $\wedge$, $\vee$ 与集合相同, 也有两个分配律成立. 即

$$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$$

$$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$$

这些运算律的成立, 可用真值表验证.

再次, 与集合同样, 关于命题也有

等幂律

$$a\wedge a=a,\quad a\vee a=a \qquad \text{(等幂律)}$$

及

吸收律

$$a\wedge(a\vee b)=a,\ a\vee(a\wedge b)=a \ \text{(吸收律)}$$

成立．这些运算律的成立，也可用真值表验证．

双重否定

又，命题 a 的否定为 $\bar{a}$，$\bar{a}$ 的否定为 $\bar{\bar{a}}$，

即 $$\bar{\bar{a}}=a$$

又回到原命题．我们把它叫做**双重否定律**．

这个定律的正确性，由下边的真值表可以看出．命题的否定恰好对应于集合的补集．

a	$\bar{a}$	$\bar{\bar{a}}$
T	F	T
F	T	F

最后，关于集合，有下列的德·摩尔根定律．

$$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B},\ \overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$$

德·摩尔根定律

关于命题也有对应的下列等式成立．

$$\overline{a\wedge b}=\bar{a}\vee\bar{b},\ \overline{a\vee b}=\bar{a}\wedge\bar{b}$$

把它叫做关于命题的德·摩尔根定律．

作如下面的真值表，很容易看出有 $\overline{a\wedge b}=\bar{a}\vee\bar{b}$ 成立．

a	b	$a\wedge b$	$\overline{a\wedge b}$	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{a}\vee\bar{b}$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

常用的例子

这个定律的应用，在日常说话中常可以见

到:

$\overline{a\wedge b}$: 不是英语和数学都得满分.

$\bar{a}\vee\bar{b}$: 英语没得满分或数学没得满分.

$\overline{a\vee b}$: 说你的弟弟是小学生或是中学生都是谎话.

$\bar{a}\wedge\bar{b}$: 你的弟弟不是小学生也不是中学生.

命题和运算

如上所述，关于由简单命题作成复合命题的$\wedge$(且), $\vee$(或), $\overline{}$(否定)，有一系列的定律成立. 这些,恰好和运算定律有相同的关系. 因此,可以认为对于命题也能进行运算. 并且,应注意它和集合的运算很相似.

提　　要

关于命题,有下列定律成立.

(1) **交换律**　$a\wedge b=b\wedge a$, $a\vee b=b\vee a$

(2) **结合律**　$(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$

$(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$

(3) **分配律**　$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$

$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$

(4) **等幂律**　$a\wedge a=a$, $a\vee a=a$

(5) **吸收律**　$a\wedge(a\vee b)=a$, $a\vee(a\wedge b)=a$

(6) **双重否定律**　$\bar{\bar{a}}=a$

(7) **德·摩尔根定律**　$\overline{a\wedge b}=\bar{a}\vee\bar{b}$, $\overline{a\vee b}=\bar{a}\wedge\bar{b}$

例题 13　(1) 试证明下列等式成立.

(i) $a\vee(a\wedge b)=a\wedge(a\vee b)$

(ii) $(a\vee b)\wedge(a\vee c)\wedge(a\vee d)=a\vee(b\wedge c\wedge d)$

(iii) $\overline{a\wedge b\wedge c}=\bar{a}\vee\bar{b}\vee\bar{c}$

(2) 复数 $a+bi$ 与 $c+di$ 相等的条件是 $(a=c)\wedge(b=d)$, 求这两个复数不相等的条件. 其中 a, b, c, d 为实数.

提示 (1) (i) 由吸收律得知, 两边同时等于 a.

(ii) 用两次分配律, 即 $(a\vee b)\wedge(a\vee c)$ 应用分配律, 得:

$$(a\vee b)\wedge(a\vee c)=a\vee(b\wedge c)$$

由此, 左边 $=\{a\vee(b\wedge c)\}\wedge(a\vee d)$, 然后, 再用分配律.

(iii) 用两次德·摩尔根定律. 利用 $a\wedge b\wedge c=(a\wedge b)\wedge c$ 的意义.

(2) 复数不相等的条件是 $\overline{(a=c)\wedge(b=d)}$. 对此应用德·摩尔根定律.

解 (1) (i) 由吸收律得两边同时等于 a.

(ii) $(a\vee b)\wedge(a\vee c)\wedge(a\vee d)$

$=\{a\vee(b\wedge c)\}\wedge(a\vee d)$ (分配律)

$=a\vee\{(b\wedge c)\wedge d\}$ (分配律)

$=a\vee(b\wedge c\wedge d)$ (根据结合律)

(iii) $\overline{a\wedge b\wedge c}=\overline{(a\wedge b)\wedge c}$ (根据结合律)

$=\overline{(a\wedge b)}\vee\bar{c}$ (德·摩尔根定律)

$=(\bar{a}\vee\bar{b})\vee\bar{c}$ (德·摩尔根定律)

$=\bar{a}\vee\bar{b}\vee\bar{c}$ (根据结合律)

(2) 二个复数不相等的条件是 $\overline{(a=c)\wedge(b=d)}$

由德·摩尔根定律得

$$(\overline{a=c})\vee(\overline{b=d})$$

即, $$(a\neq c)\vee(b\neq d)$$

另解 (1) (i) $a\vee(a\wedge b)=(a\vee a)\wedge(a\vee b)$ (分配律)

$=a\wedge(a\vee b)$ (等幂律)

参考 因为结合律 $(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$ 成立，所以用 $a\wedge b\wedge c$ 表示. 对 $a\vee b\vee c$ 也是同样的.

发展题

(1) 试证明下列等式.

(i) $(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)$

$=(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)$

(ii) $\overline{(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)}$

$=(\bar{a}\vee\bar{b})\wedge(\bar{b}\vee\bar{c})\wedge(\bar{c}\vee\bar{a})$

(2) 由 $a\vee(a\wedge b)=a$, 用以下方法导出 $a\wedge(a\vee b)=a$: 用 $\bar{a}, \bar{b}$ 分别代换 a, b, 取两边的否定.

要点

(1)(i)利用交换、结合、分配及吸收律，从左边导出右边.

解 (1) (i)

$(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)$

$=\{(b\vee a)\wedge(b\vee c)\}\wedge(c\vee a)$ (交换律)

$=\{b\vee(a\wedge c)\}\wedge(c\vee a)$ (分配律)

$=\{b\wedge(c\vee a)\}\vee\{(a\wedge c)\wedge(c\vee a)\}$ (分配律)

$=\{b\wedge(a\vee c)\}\vee[a\wedge\{c\wedge(c\vee a)\}]$ (交换·结合律)

$=\{b\wedge(a\vee c)\}\vee(a\wedge c)$ (吸收律)

(ii)利用(i)的结果.

$$=(b\wedge a)\vee(b\wedge c)\vee(a\wedge c)$$

(分配律)

$$=(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)$$

(交换律)

(ii) $\overline{(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)}$

$$=\overline{(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)}$$

(由(i))

$$=(\overline{a\wedge b})\wedge(\overline{b\wedge c})\wedge(\overline{c\wedge a})$$

(德·摩尔根定律)

$$=(\bar{a}\vee\bar{b})\wedge(\bar{b}\vee\bar{c})\wedge(\bar{c}\vee\bar{a})$$

(德·摩尔根定律)

(2) 应用德·摩尔根定律.

(2) 在 $a\vee(a\wedge b)=a$ 中, 将a, b 分别用 $\bar{a}$, $\bar{b}$ 代换, 得 $\bar{a}\vee(\bar{a}\wedge\bar{b})=\bar{a}$, 取两边的否定, 得

$\overline{\bar{a}\vee(\bar{a}\wedge\bar{b})}=\bar{\bar{a}}$

$\bar{\bar{a}}\wedge(\overline{\bar{a}\wedge\bar{b}})=a$ (德·摩尔根定律)

$a\wedge(\bar{\bar{a}}\vee\bar{\bar{b}})=a$ (德·摩尔根定律)

$\therefore\quad a\wedge(a\vee b)=a$

练习 (解答在 156 页)

23. 试作真值表, 验证下列等式成立.

(i) $a\wedge(a\vee b)=a$

(ii) $\overline{a\vee b}=\bar{a}\wedge\bar{b}$

24. 试证下列等式成立.

(i) $(a\vee b)\vee(a\vee c)=a\vee b\vee c$

(ii) $\overline{a\wedge(b\vee c)}=\bar{a}\vee(\bar{b}\wedge\bar{c})$

(iii) $\overline{(a\wedge b)\vee(a\wedge c)}=(\bar{a}\vee\bar{b})\wedge(\bar{a}\vee\bar{c})$

13. 复合命题的真假(2)

“若…则…”

如 10. 所述，已知复合命题是由“不是”，“且”，“或”，“若…则…”等所连结的命题，对于“不是”，“且”，“或”已经学过了．下边来研究“若…则…”．

在数学中“….若….则…..”这种形式的命题很多．例如：

“在$\triangle ABC$中，若$AB=AC$则$\angle B=\angle C$”

“若$2+3=5$则$(2+3)^2=5^2$”

蕴涵命题

一般地，把形如“若a则b”的复合命题叫做a和b的**蕴涵命题***，记作

$$a\rightarrow b$$

$a\rightarrow b$的真假

在这里，我们来研究$a\rightarrow b$的真假．

若a为真，b也为真时，则$a\rightarrow b$为真；若

a	b	$a\rightarrow b$
T	T	T
T	F	F
F	T	?
F	F	?

* 在日本蕴涵(原文为内含或含意)命题与假言命题是同义词．——译者注

a 为真，而 b 为假时，则 $a \to b$ 为假，这是易于理解的常识．又，当 a 为假时，多数人会认为 $a \to b$ 没有意义．

然而，如果 $a \to b$ 有时有意义，有时又没有意义，这就不能判断其真假，因而就失去命题的意义．结果，两个命题 a, b 用 $\to$ 连结起来后，有时就不是命题了，这是很不方便的．那么，当 a 为假时，应该怎样理解呢？例如，想想日常中说：

"要学习没有图书馆不行"

这是强调"要学习" $\to$ "就得有图书馆"的说法．但是，

"要学习，没有图书馆"不行．把它符号化，就是

$$\overline{\text{要学习} \wedge \overline{\text{有图书馆}}}$$

因此，如果把"学习"表示为 a，"有图书馆"表示为 b，$a \to b$ 就可看作与 $\overline{a \wedge \overline{b}}$ 的表示相同．

把它一般化，则 $a \to b$ 就定为"若有 a 必有 b"，即"有 a 且有 $\bar{b}$ 是没有的"．

即，定为

$a \to b$ 的意义

$$a \to b = \overline{a \wedge \overline{b}}$$

这时，由于 $\overline{a \wedge \overline{b}} = \overline{a} \vee \overline{\overline{b}} = \overline{a} \vee b$，所以，可作出 $a \to b$ 的真值表如下页表．这与前面所述 a 为真的情况下的真值表相同．

同值

其次，我们研究命题 $a \to b$ 为真且命题 $b \to a$ 也为真的情况．

a	b	$\bar{a}$	$\bar{a}\vee b$ $(a\to b)$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

$a\to b$ 为真，有下列三种情况：

$a:T,\ \ b:T;\ \ a:F,\ \ b:T;\ a:F,\ \ b:F$

$b\to a$ 为真，也有下列三种情况：

$a:T,\ \ b:T;\ \ a:T,\ \ b:F;\ a:F,\ b:F$

因而，$a\to b$，$b\to a$ 都为真，是 a, b 同真，或 a, b 同假两种情况中的一种．这时，记作 $a\rightleftarrows b$，叫做 a 与 b **同值**.

即 $$a\rightleftarrows b=\{(a\to b)\wedge(b\to a)\}$$

这与 **11.** 中所述的同值意义相同．

提　　要

（1）用"若…则…"来连结两个命题 a, b 的复合命题，$a\to b$ 叫做蕴涵命题．即，$a\to b=\overline{a\wedge\overline{b}}$

（2）命题 $a\to b$，只有 a 为真 b 为假时为假的，其它情况均为真．

例题 14　(1)用真值表，讨论下列命题的真假．

(i)　$(a\wedge b)\to a$,　$a\to(a\vee b)$

(ii)　$(a\to b)\to(b\to a)$

（2）试证下列等式成立．

$$\{(c\to a)\wedge(c\to b)\}=\{c\to(a\wedge b)\}$$

提示 (1)(i) 由 a, b 的真(T), 假(F), 作成四个组, 利用 $p \wedge q, p \vee q, p \to q$ 的真假关系, 讨论这个命题的真假.

(ii) 由 $p \to q$ 的真假关系, 作出真值表进行观察.

(2) 用 $p \to q = \overline{p \wedge \overline{q}}$, 并根据交换、结合、分配、德·摩尔根定律等, 把左边变形, 导出右边.

解 (1)(i) 由下列真值表, 可知命题是真的, 与 a, b 的真假无关.

a	b	$a \wedge b$	$(a \wedge b) \to a$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

a	b	$a \vee b$	$a \to (a \vee b)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

(ii) $(a \to b) \to (b \to a)$ 的真值表如下表, 可知当 a 为假, b 为真时, 它为假. 即, 不总为真.

a	b	$a \to b$	$b \to a$	$(a \to b) \to (b \to a)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

参考 对命题 $a \to b$ 来说, $b \to a$ 是逆命题. 就是说 $a \to b$ 为真, $b \to a$ 未必为真, 即 $(a \to b) \to (b \to a)$ 不一定为真.

(2) $\{(c\to a)\wedge(c\to b)\}$

$$=(\overline{c\wedge\overline{a}})\wedge(\overline{c\wedge\overline{b}})=(\overline{c}\vee a)\wedge(\overline{c}\vee b)$$

$$=\overline{c}\vee(a\wedge b)=\overline{c\wedge(\overline{a\wedge b})}=\{c\to(a\wedge b)\}$$

发展题

作出真值表，验证下列等式成立．

(i) $(a\to b)=\{(a\wedge b)\rightleftarrows a\}$

(ii) $(a\rightleftarrows b)=(a\wedge b)\vee(\overline{a}\wedge\overline{b})$

要点

(i) 作$a\to b$的真值表和$\{(a\wedge b)\to a\}\wedge\{a\to(a\wedge b)\}$的真值表．

解 (i) 作 $\{(a\wedge b)\rightleftarrows a\}$ 的真值表如下．

a	b	$a\wedge b$	$(a\wedge b)\to a$	$a\to(a\wedge b)$	$(a\wedge b)\rightleftarrows a$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	T
F	F	F	T	T	T

另外，作 $a\to b$ 的真值表如下表．

a	b	$a\to b$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

(ii) $(a\rightleftarrows b)=(a\to b)\wedge(b\to a)$

$\therefore\quad (a\to b)=\{(a\wedge b)\rightleftarrows a\}$

(ii) $a\rightleftarrows b$, $a\wedge b$, $\overline{a}\wedge\overline{b}$的真值表如下:

a	b	$a\wedge b$	$\bar{a}\wedge\bar{b}$	$(a\wedge b)\vee(\bar{a}\wedge\bar{b})$	$a\to b$	$b\to a$	$a\rightleftarrows b$
T	T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F	T	F
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T	T

$\therefore(a\rightleftarrows b)=(a\wedge b)\vee(\overline{a}\wedge\overline{b})$

练习 (解答在 157 页)

25. 作真值表,验证下列等式成立.

$$(a\to b)=\{(a\vee b)\rightleftarrows b\}$$

26. 讨论下列二个命题是否同值.

$$(a\to b)\to c,\quad a\to(b\to c)$$

14. 恒真命题

恒真命题

命题 $a\to b$ 是根据 a, b 的真假，可以为真，也可以为假，与此相反，$(a\wedge b)\to a$ 和 $a\to(a\vee b)$ 等与 a，b 的真假无关，总为真.

象这样的某复合命题，与组成它的简单命题 $a, b, c, \cdots\cdots$ 的真假无关，总为真时，就说这个复合命题为**恒真**. 或叫做**恒真命题**，用 I 表示.

很明显，下列命题是恒真的. 这由下边的真值表可以看出.

a	$\bar{a}$	$a\to a$	$a\vee\bar{a}$
T	F	T	T
F	T	T	T

同一律

$a\to a$ （同一律）

排中律

$a\vee\overline{a}$ （排中律）

这两个分别叫做**同一律**和**排中律**.

恒假命题

其次，某个复合命题与组成它的简单命题的真假无关，总为假时，就说这个复合命题为**恒假**，或叫做**恒假命题**，用 O 表示. 这时有

$\overline{I}=O,\quad \overline{O}=I$

又，

$$a \wedge \overline{a} = O，从而\overline{a \wedge \overline{a}} = I$$

很明显，它们总为真.

矛盾律

$$\overline{a \wedge \overline{a}} \quad (矛盾律)$$

叫做**矛盾律**. 又

两个命题 a, b 不能同时为真时，即

$$a \wedge b = O$$

叫做 a 与 b 矛盾. 很明显，$a \wedge \overline{a}$ 是矛盾的.

同值和恒真

如前所述，如果两个命题的真值表相同时，两个命题可以说是同值，也可以叙述如下：

$$a = b \text{ 就是} a \rightleftarrows b \text{ 为恒真,}$$

换句话说，

$$a = b \text{ 就是} (a \to b) \wedge (b \to a) = I$$

I和O

关于恒真命题 I 与恒假命题 O，还有下列关系成立. 对于任意命题 a，有

$$a \wedge I = a, \quad a \vee I = I$$

$$a \wedge O = O, \quad a \vee O = a$$

这些，恰好与集合中的全集 U 和空集 $\varnothing$ 之间的关系相对应.

其次，关于命题的运算在 $\wedge$，$\vee$，$\overline{}$ 之间也有对偶关系（$\to$ 可以用 $\wedge$ 与 $\overline{}$ 或 $\vee$ 与 $\overline{}$ 表示）.

恒真的证明

最后，对某命题是否为恒真，即是否是恒真命题，可做如下变形加以检验.

$$(a \wedge b) \to a = \overline{(a \wedge b) \wedge \overline{a}} \quad (定义)$$

$$= (\overline{a \wedge b}) \vee a \quad (德·摩尔根定律,$$

双重否定律)

$$=(\bar{a}\vee\bar{b})\vee a \quad \text{(德·摩尔根定律)}$$

$$=(a\vee\bar{a})\vee\bar{b} \quad \text{(结合律)}$$

$$=I\vee\bar{b} \quad \text{(排中律)}$$

$$=I \quad \text{(I 的性质)}$$

因此, $(a\wedge b)\rightarrow a$ 为恒真.

提　　要

(1) 恒真命题是与组成它的简单命题的真假无关, 总为真的命题.

(2) $a\rightarrow a$(同一律), $a\vee\bar{a}$ (排中律), $\overline{a\wedge\bar{a}}$(矛盾律)为恒真命题.

(3) 两个命题 a, b 是同值, 即 $a=b$ 就是 $a\rightleftarrows b$ 为恒真, 即$(a\rightarrow b)\wedge(b\rightarrow a)$为恒真.

例题 15　关于两个命题 p, q, 当 $p\wedge q=O$时, 则 p, q 叫做相互矛盾.

试证 $a\wedge b$ 与 $\bar{a}\wedge c$ 相互矛盾.

提示　证明$(a\wedge b)\wedge(\bar{a}\wedge c)=O$ 可应用结合律将左边变形, 再应用 $a\wedge\bar{a}=O$

解　$(a\wedge b)\wedge(\bar{a}\wedge c)=\{(a\wedge b)\wedge\bar{a}\}\wedge c$　(结合律)

$$=\{(b\wedge a)\wedge\bar{a}\}\wedge c \quad \text{(交换律)}$$

$$=\{b\wedge(a\wedge\bar{a})\}\wedge c \quad \text{(结合律)}$$

$$=(b\wedge O)\wedge c \quad \text{(矛盾律)}$$

$$=O\wedge c \quad \text{(O 的性质)}$$

$$=O \quad \text{(O 的性质)}$$

于是，$a\wedge b$ 与 $\bar{a}\wedge c$ 矛盾.

例题 16 试证明下列等式.

(1) $a\vee(\bar{a}\wedge b)=a\vee b$

(2) $a\vee(a\wedge b)=a$

提示 (1) 应用分配律将左边变形，再应用 $a\vee\bar{a}=I$

(2) 用 $a\wedge I=a$ 把左边变形为 $(a\wedge I)\vee(a\wedge b)$，再用分配律.

解 (1)
$$\begin{aligned} a\vee(\bar{a}\wedge b)&=(a\vee\bar{a})\wedge(a\vee b) &&\text{(分配律)}\\ &=I\wedge(a\vee b) &&\text{(排中律)}\\ &=a\vee b &&\text{(I 的性质)}\end{aligned}$$

$\therefore\ a\vee(\bar{a}\wedge b)=a\vee b$

(2)
$$\begin{aligned} a\vee(a\wedge b)&=(a\wedge I)\vee(a\wedge b) &&\text{(I 的性质)}\\ &=a\wedge(I\vee b) &&\text{(分配律)}\\ &=a\wedge I &&\text{(I 的性质)}\\ &=a &&\text{(I 的性质)}\end{aligned}$$

$\therefore\ a\vee(a\wedge b)=a$

参考 (2) 是吸收律，可以这样得到证明.

发展题

(1) 讨论两个命题 $a\to b$ 和 $a\to\bar{b}$ 是否矛盾.

(2) 试证明下列复合命题为恒真.

$$\{(a\to b)\wedge(b\to c)\}\to(a\to c)$$

要点

(1)讨论

$(a\to b)\wedge(a\to\bar{b})=O$

解 (1) $(a\to b)\wedge(a\to\bar{b})$

$=(\overline{a\wedge\bar{b}})\wedge(\overline{a\wedge\bar{\bar{b}}})$ (定义)

$=(\bar{a}\vee b)\wedge(\bar{a}\vee\bar{b})$ (德·摩

是否成立.

(2) 用 $a\to b=\overline{a\wedge\bar{b}}=\bar{a}\vee b$变形，再用$a\vee(\bar{a}\wedge b)=a\vee b$

尔根定律)

$=\bar{a}\vee(b\wedge\bar{b})$ (分配律)

$=\bar{a}\vee O$ (矛盾律)

$=\bar{a}$ (O 的性质)

因此，若 $\bar{a}\neq O$，则 $a\to b$ 与 $a\to\bar{b}$ 不矛盾.

(2)

$\{(a\to b)\wedge(b\to c)\}\to(a\to c)$

$=\{(\bar{a}\vee b)\wedge(\bar{b}\vee c)\}\to(\bar{a}\vee c)$ (定义)

$=\overline{\{(\bar{a}\vee b)\wedge(\bar{b}\vee c)\}}\vee(\bar{a}\vee c)$ (定义)

$=\{(a\wedge\bar{b})\vee(b\wedge\bar{c})\}\vee(\bar{a}\vee c)$ (德·摩尔根定律)

$=\{\bar{a}\vee(a\wedge\bar{b})\}\vee\{c\vee(b\wedge\bar{c})\}$ (结合律)

$=(\bar{a}\vee\bar{b})\vee(c\vee b)$ ($p\vee(\bar{p}\wedge q)=p\vee q$)

$=(\bar{a}\vee c)\vee(b\vee\bar{b})$ (结合律)

$=(\bar{a}\vee c)\vee I=I$ (排中律与 I 的性质)

研究 (1) $a\to b$ 与 $a\to\bar{b}$ 象是矛盾的，实际这两个命题并不矛盾.

(2) $\{(a\to b)\wedge(b\to c)\}\to(a\to c)$是表示当 $a\to b$, $b\to c$ 为真时，$a\to c$ 为真的三段论法原理.

练习 (解答在 157 页)

27. 试证明下列复合命题为恒真.

(1) $a \to (a \vee b)$

(2) $\{a \wedge (a \to b)\} \to b$

28. 试证明下列等式.

(1) $(a \vee b) \wedge (\bar{a} \vee b) = b$

(2) $(a \to b) = (\bar{b} \to \bar{a})$

习 题 （解答在 166 页）

——A——

15. 下列语句能否叫做命题？

(1) 两个奇数的乘积是奇数.

(2) 质数是奇数.

(3) 现在所叙述的这个命题是假的.

(4) 今天暖和啊.

16. 把下列命题看作复合命题时，是由哪些简单命题组成的？并用 $\wedge$, $\vee$, $\to$表示出来.

(1) 24 是 3 和 4 的公倍数.

(2) $2+3\sqrt{3}\geqq 0$

(3) 菱形的四边相等.

17. 试证明下列等式成立.

(1) $\overline{(a\vee b)\wedge(a\vee c)}=\bar{a}\wedge(\bar{b}\vee\bar{c})$

(2) $\overline{(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)}=(\bar{a}\wedge\bar{b})\vee(\bar{b}\wedge\bar{c})\vee(\bar{c}\wedge\bar{a})$

18. 试证明下列等式成立.

(1) $a\wedge(\bar{a}\vee b)=a\wedge b$

(2) $(a\wedge b)\vee(\bar{a}\wedge b)=b$

(3) $a\wedge(a\wedge b)=a\wedge b$

——B——

19. 试证明下列复合命题为恒真.

(1) $(a\to b)\to\{(a\wedge c)\to(b\wedge c)\}$

(2) $(a\to b)\to\{(a\vee c)\to(b\vee c)\}$

(3) $\{(a\to b)\wedge(c\to d)\}\to\{(a\wedge c)\to(b\wedge d)\}$

(4) $\{(a\to b)\wedge(c\to d)\}\to\{(a\vee c)\to(b\vee d)\}$

20. 试证命题 $a\to b$ 是与$(a\wedge b)\rightleftarrows a$ 以及和 $(a\vee b)\rightleftarrows b$ 同值，即证明下

列等式成立.

(1) $(a\to b)=\{(a\wedge b)\rightleftarrows a\}$

(2) $(a\to b)=\{(a\vee b)\rightleftarrows b\}$

21. 试证命题 $a\rightleftarrows b$ 是与$(a\wedge b)\vee(\bar{a}\wedge\bar{b})$同值，即证明下列等式成立.

$$(a\rightleftarrows b)=\{(a\wedge b)\vee(\bar{a}\wedge\bar{b})\}$$

22. 当 a, b, c 分别表示“温和的人”，“刚强的人”，“是女子”时，试把“温和而刚强的人是温和的女子或是刚强的男子”用 $a,\ b, c$ 以→的形式表示出来.

再，证明这个复合命题为恒真.

23. 当 a, b, c 分别表示“偶数”，“3 的倍数”，“5 的倍数”时，试把命题

“是偶数又是 3 的倍数，或是 3 的倍数又是 5 的倍数，或是奇数又是 5 的倍数”

与命题

“是偶数又是 3 的倍数，或是奇数又是 5 的倍数”用含有 $a,\ b, c$ 的式子表示出来. 并证明二者同值.

15. 条件命题

命题逻辑

迄今我们已经学了种种命题. 它是把简单命题用一个字母 $a, b, c\cdots\cdots$ 等表示, 并把它们用"不是", "且", "或", "若…则…"等连结起来, 同时讨论了它们之间的各种关系和定律. 这就是**命题逻辑**.

但是, 例如,

x 是 3 的倍数

$x^2=2x+3$

$x+1$ 不比 5 大

等, 都含有变数 x, 在这种情况下, 是不能辨别其真假的. 所以从这个意义来说不能叫做命题. 然而, 当变数 x 是某集合的元素时, 随着每个元素 x 值的确定, 即根据 x 值的不同分别成为某确定的命题, 是可以辨别其真假的. 我们把这样的命题叫做**条件命题**或**命题函数**. 关于条件命题的组成或同值的定义以及表示它们的符号, 和命题的相应情况完全相同.

条件命题

因为数学上的等式, 方程, 不等式等都含有字母, 所以都是条件命题. 我们把迄今所研究的命题和条件命题总括起来简称命题.

其次, 例如, 分析下列的句子.

山田是实干家或是秀才.

山田不是秀才.

因此,山田是实干家.

这里,作为简单命题的"山田是实干家"用 a 表示,"山田是秀才"用 b 表示,则上述句子可用复合命题

$$\{(a\vee b)\wedge\bar{b}\}\to a$$

表示,这个已经学过,与 a, b 的真假无关,是恒真的. 即,所研究的问题与 a, b 的内容无关.因而可以判断上述的句子是正确的.

但是,例如,

数学家是科学家.

科学家有洞察力.

因此,数学家有洞察力.

乍一看觉得是正确的,但在逻辑上是怎么样呢?现在,用 p 表示"数学家是科学家",用 q 表示"科学家有洞察力"用 r 表示"数学家有洞察力",则上述句子成为复合命题

$$(p\wedge q)\to r$$

这不是恒真命题.即在这种情况下,不能判断上述句子是否正确. 为了判断上述句子必须进行逻辑的整理.

主语和谓语

在上述二例中,根本不同之点在于:第一例中 a, b, c 的主语都是"山田",而第二例中,p, r 的主语是"数学家",q 的主语成为 p 的谓语"科

学家”. 象这样主语发生了变化,它又不是指一个事物, 而是表示一类事物. 于是要对第二个例子进行逻辑的整理, 把全人类作为全集来考虑,其中任何一个人用 x 表示. 设

p: 若 x 是数学家,则 x 是科学家.

q: 若 x 是科学家,则 x 有洞察力.

r: 若 x 是数学家,则 x 有洞察力.

我们分别用 a, b, c 表示条件命题: “x 是数学家”,“x 是科学家”,“x 有洞察力”, 则上述句子可表示为

$$\{(a\to b)\wedge(b\to c)\}\to(a\to c)$$

因而是恒真的,可知第二例是正确的.

谓语逻辑

象这样,用 x 表示某集合的元素,由于改为以 x 作为主语的条件命题来研究, 才可以判明其真假的逻辑叫做**谓语逻辑**. 对条件命题的实际用法,看以下的一些实例易于理解.

提　　要

条件命题　用含有某集合元素的字母所表示的句子、语言、式子等, 且依其字母的值而确定的命题叫做条件命题.

例题 17　下列复合条件命题包含哪些简单条件命题? 并且是用哪些词语连结的?

(1) $x+1$ 不等于 5.

(2) 整数 x 是 24 和 36 的公约数.

(3) $x=\pm 3$

(4) 若整数 x 是 6 的倍数，则 x 是 3 的倍数.

提示 因为简单条件命题含有变数 x，所以可用 $a(x)$，$b(x)$，……等表示，复合条件命题就是用“不是”、“且”、“或”、“若…则…”等把这些简单条件命题连结起来的. 使用与命题相同的符号. 表示为:

$$\overline{a(x)},\ a(x)\wedge b(x),\ a(x)\vee b(x);\ a(x)\rightarrow b(x)$$

(1) “$x+1$ 不等于 5”用式子表示就是 $x+1\neq 5$

(2) 因为整数 x 是 24 和 36 的公约数，所以 x 既是 24 的约数，也是 36 的约数.

(3) “$x=\pm 3$”是 $x=3$ 或 $x=-3$

(4) 整数 x 是 6 的倍数时，则 x 也是 3 的倍数.

解 因为每个复合条件命题，都可以改写成下列形式，所以“ ”中的部分是简单条件命题.

(1) 不是“$x+1$ 等于 5”

用词语“不是”连结的.

(2) “整数 x 是 24 的约数”且“整数 x 是 36 的倍数”

用词语“且”连结的.

(3) “$x=3$”或“$x=-3$”

用词语“或”连结的.

(4) 若“整数 x 是 6 的倍数”则“整数 x 是 3 的倍数”

用词语“若…则…”连结的.

参考 使这些条件命题为真的 x 值的集合为

(1) $\{x \mid x\neq 4,\ x\text{ 是复数}\}$

(2) $x=1, 2, 3, 4, 6, 12$，即 $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

(3) $\{3, -3\}$

(4) "x 是 6 的倍数" 为真时， 则 x 的集合为 $x=6$，12，18，……，即 $\{x \mid x=6m, m=1, 2, \cdots\cdots\}$

发展题

下列复合条件命题，包含哪些简单条件命题？并且是用哪些词语连结的？

(1) $x=y=1$

(2) $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ xy=6 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=\pm 3 \\ y=\pm 2 \end{cases}$ （符号同顺）

(4) $x^2 \geqslant 0$

(5) $-3 \leqslant x < 2$

(6) 若 $a^2=b^2$ 则 $a=\pm b$

(7) $1 > x \neq 0$

要点

分析每个式子的意义，用

"不是$a(x)$"

"$a(x)$且$b(x)$"

"$a(x)$或$b(x)$"

"若 $a(x)$ 则 $b(x)$"

的任意一种形式或其组合形式表示出来.

解 下列"　"中是简单条件命题.

(1)"$x=1$"且"$y=1$"

用词语"且"连结的.

(2)"$x^2+y^2=13$" 且"$xy=6$"

用词语"且"连结的.

(3) ("$x=3$"且"$y=2$") 或 ("$x=-3$"且"$y=-2$")

用词语"且"、"或"连结的.

因为方程组是同时成立的意思．所以可用“且”连结．

(4) “$x^2>0$”或“$x=0$”

用词语“或”连结的．

(5) (“$x>-3$”或“$x=-3$”)且“$x<2$”

用词语“或”、“且”连结的．

(6) 若“$a^2=b^2$”则(“$a=b$”或“$a=-b$”)

用词语“若…则…”、“或”连结的．

(7) “$x<1$”且不是“$x=0$”

用词语“且”“不是”连结的．

注意 (7) 也可以表示为

$$0<x<1,\ x<0$$

练习 (解答在158页)

29. 下列复合条件命题，是由哪些简单条件命题组成的？

不等式组$x(x-4)<0,\ (x-1)(x-3)\geqslant 0$ **的解为**

$$0<x\leqslant 1,\quad 3\leqslant x<4$$

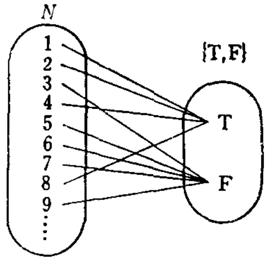
16. 条件命题和真值集合

条件命题

现在研究含有变数 x (以全体自然数所组成的集合 N 为定义域)的条件命题

“x 是 8 的约数”,

这个命题因 x 值的不同,可以为真(T),也可以为假(F). 即,上述条件命题有下列对应关系成立:



$x=1$ 时为 T, $x=2$ 时为 T

$x=3$ 时为 F, $x=4$ 时为 T

$x=5$ 时为 F, $x=6$ 时为 F

$x=7$ 时为 F, $x=8$ 时为 T

$x=9$ 时为 F, ……

就是由集合 N 映射到集合 $\{T, F\}$ 上的映射.

真值集合

这时,如果用 $a(x)$ 表示关于变数 x 的上述条件命题,则使 $a(x)$ 为真(T)时 x 值的集合为 $\{1, 2, 4, 8\}$. 把它叫做上述条件命题的**真值集合**,记作

$$\{x \mid x \text{ 是 } 8 \text{ 的约数}\}.$$

一般地,设全集为 U,当给定含有其元素的条件命题 $a(x)$ 时,就可以确定使 $a(x)$ 为真(T)的 x 值的集合 $A(\subset U)$. 把这个集合叫做**条件命题 $a(x)$ 的真值集合**,记作

$$A=\{x|a(x)\}$$

这就是用条件表示集合的表示法. 因而这个条件就是条件命题.

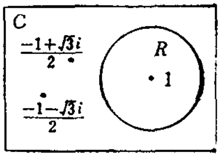
其次, x 使 $a(x)$ 为真(T), 与 $x\in A$ 同值; x 使 $a(x)$ 为假(F), 与 $x\notin A$ 同值.

真值集合和全集

再有, 研究真值集合 $A=\{x|a(x)\}$时, 必须首先确定 x 所取值的全体, 即, **必须预先确定全集U**. 这是因为, 由于U的选取方法不同, 条件命题 $a(x)$的真值集合 A 也随之而异.

例如, 当研究条件命题$a(x)$

$$a(x):x^3-1=0$$



的真值集合时, 设全集为U, 则

当 $U=R=\{$实数$\}$时,

$$A=\{x|x^3-1=0\}=\{1\}$$

当 $U=C=\{$复数$\}$时,

$$A=\{x|x^3-1=0\}=\left\{1,\frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right\}$$

可以看出所得的结果不同.

恒真、恒假条件命题的真值集合

还有, 当 x 为实数时, 条件命题

$$a(x):\ x^2+1>0$$

为恒真. 条件命题

$$b(x):\ x^2+1\leqslant 0$$

为恒假.

设以实数集合 R 为全集 U, 这时真值集合

可分别表示为:

$$\{x|a(x)\}=\{x|x^2+1>0\}=R$$

$$\{x|b(x)\}=\{x|x^2+1\leqslant 0\}=\varnothing$$

由此可知，**一般地恒真(T)的条件命题的真值集合为全集，恒假(F)的条件命题的真值集合为空集**. 因此，真值集合为全集或为空集时，因为其条件命题的真假恒可确定，所以每个条件命题分别为恒真命题、恒假命题. 例如，恒等式和绝对不等式的真值集合为全集，所以它们为恒真的条件命题.

提　要

真值集合　使条件命题 $a(x)$ 为真的 x 值的集合 $\{x|a(x)\}$，叫做 $a(x)$的真值集合. 设全集为 U，当$\{x|a(x)\}=U$ 时，$a(x)$为恒真，当$\{x|a(x)\}=\varnothing$时，$a(x)$为恒假.

例题 18　(1) 试将下列条件命题的真值集合，用适当的方法图示出来.

(i) x 是 3 的倍数. 其中 $x\in\{1, 2, 3, \cdots\cdots, 20\}$

(ii) $x^2<x$，其中 $x\in$\{实数\}

(iii) $x+y=1$, $xy=1$，其中 $x, y\in$\{复数\}

(iv) $x^2+y^2<4$，其中 $x, y\in$\{实数\}

(2) 把下列各集合作为全集时，试将条件命题

$$(x^2-1)(x^4-4)=0$$

的真值集合用元素列举法表示出来.

(i) 整数集合　　　(ii) 有理数集合

(iii) 实数集合　　　(iv) 正实数集合

(v) 复数集合

提示 (1) 用图形表示集合的方法有：画文氏图表示元素，在数轴、平面上或平面坐标上表示等，可从中选用适当的方法表示出来.

(2) 在复数范围，解得 $(x^2-1)(x^4-4)=0$ 的根为 $1, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}i, -\sqrt{2}i$. 从中求出在各种情况下的真值集合即可.

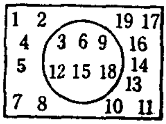
解 (1) (i) $\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

(ii) $\{x \mid 0<x<1\}$

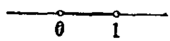
(iii) $\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}, \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\right), \left(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}, \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\right\}$

(iv) $\{(x, y) \mid x^2+y^2<4\}$

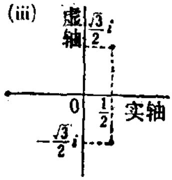
(i)



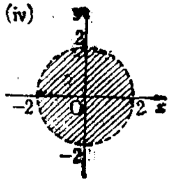
(ii)



(iii)



(iv)



(2) $(x^2-1)(x^4-4)=0$

$(x^2-1)(x^2-2)(x^2+2)=0$

的根为 $x=\pm1, \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}i$，所以

(i) $\{1, -1\}$　　(ii) $\{1, -1\}$

(iii) $\{1, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$　　(iv) $\{1, \sqrt{2}\}$

(v) $\{1, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}i, -\sqrt{2}i\}$

注意 可以认为(1)中(iii)是复数集合 C 的直积集合 $C\times C$ 的元素，(iv)是实数集合 R 的直积集合 $R\times R$ 的元素.

发展题

(1) 求下列条件命题的真值集合，并用适当的方法图示

出来.

(i) $1<x+y<3$ 其中 x, y 为实数

(ii) $4<x^2+y^2<9$ 其中 x, y 为自然数

(2) 设 $A=\{x|x>1\}, B=\{x|x<2\}$

(i) 试用 A, B 表示条件命题 $(x-1)(x-2)<0$ 的真值集合.

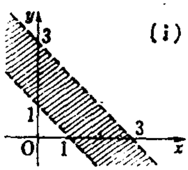
(ii) 试用 A, B 表示条件命题 $(x-1)(x-2)\geqslant 0$ 的真值集合.

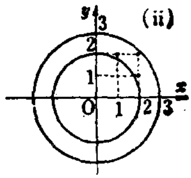
要点

(1)在坐标平面上用区域表示.

解 (1) (i) 因为所求的真值集合为 $\{(x, y)|1<x+y<3\}$

所以在坐标平面上是二直线 $x+y=1, x+y=3$ 所夹的部分. 如下左图.





(ii) 因为所求的真值集合为

$$\{(x, y)|4<x^2+y^2<9, \quad x, y \text{ 是自然数}\}$$

所以在坐标平面上是二个同心圆所夹的部分中坐标都是自然数的点, 从而得

$$\{(1, 2), \ (2, 1), \ (2, 2)\}$$

(2)在数轴上用 A, B 表示 $(x-1)(x-2)>0$

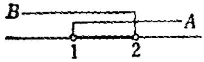
(2) (i) $\{x|(x-1)(x-2)<0\}$

$$=\{x|1<x<2\}$$

$$(x-1)(x-2)\geqslant 0$$

的真值集合.

$$=\{x|x>1\}\cap\{x|x<2\}=A\cap B$$

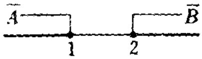


(ii) $\{x|(x-1)(x-2)\geqslant 0\}$

$=\{x|x\leqslant 1,\ x\geqslant 2\}$

$=\{x|x\leqslant 1\}\cup\{x|x\geqslant 2\}$

$=\bar{A}\cup\bar{B}$



练习 (解答在 158 页)

30. 设以 1 到 10 的自然数为全集，当"x 是奇数"，"x 是质数"的真值集合分别为 A, B 时，用 A, B 表示集合 $\{7, 5, 3\}$，试说明这个集合为真值集合的条件命题.

17. 复合条件命题和真值集合

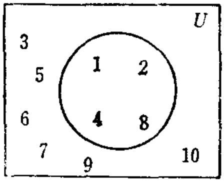
否定

对于条件命题 $a(x)$, 把"不是 $a(x)$"的条件命题叫做 $a(x)$的**否定**, 用 $\overline{a(x)}$或$\sim a(x)$表示.

例如,

$a(x)$: x 是 8 的约数时,则

$\overline{a(x)}$: x 不是 8 的约数.



设以 1 到 10 的自然数为全集时,则

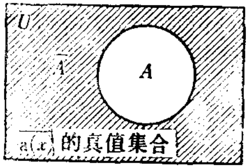
$\{x|a(x)\}=\{x|x$ 是 8 的约数$\}=\{1, 2, 4, 8\}$

$\{x|\overline{a(x)}\}=\{x|x$ 不是 8 的约数$\}=\{3, 5, 6, 7, 9, 10\}$

所以,$\overline{a(x)}$ 的真值集合是 $a(x)$的真值集合的补集,

即 $A=\{x|a(x)\}$时,

$\{x|\overline{a(x)}\}=\bar{A}$



注意 条件命题 $a(x)$和 $\overline{a(x)}$是不相容的. 但是,一般地, 说 $a(x)$和 $b(x)$不相容, 也不限于是否定的(例如, "x 是偶数" 与 "$x=1$"). 就现在所研究的范围, $a(x)$和 $\overline{a(x)}$必须是所有的情形.

连言和选言

其次, 设条件命题 $a(x)$, $b(x)$ 的真值集合

分别为 A, B.

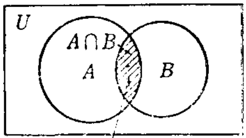
这时，因为 $x \in A$ 与 $a(x)$ 同值，所以

$\boldsymbol{a(x) \wedge b(x)}$

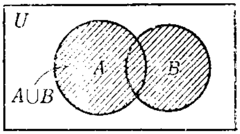
与 $\boldsymbol{x \in A}$ 且 $\boldsymbol{x \in B}$ 同值，

$\boldsymbol{a(x) \vee b(x)}$ **与 $\boldsymbol{x \in A}$**

或　$\boldsymbol{x \in B}$ 同值.



$a(x) \wedge b(x)$ 的真值集合



$a(x) \vee b(x)$ 的真值集合

于是，当 $A=\{x|a(x)\}$，

$B=\{x|b(x)\}$ 时，

$$\{x|a(x) \wedge b(x)\}$$
$$=\{x|(x \in A) \text{ 且 } (x \in B)\}$$
$$=\{x|x \in (A \cap B)\}=A \cap B$$
$$\{x|a(x) \vee b(x)\}=\{x|(x \in A) \text{ 或 } (x \in B)\}$$
$$=\{x|x \in (A \cup B)\}=A \cup B$$

同值

设条件命题 $a(x)$, $b(x)$ 的真值集合分别为 A, B 时，**只限于 $a(x)$ 与 $b(x)$ 的真假一致时，$A=B$.** 这是因为 $a(x)$ 与 $x \in A$, $b(x)$ 与 $x \in B$ 同值；$a(x)$ 的真 (T)、假 (F) 与 $x \in A$ 的真 (T)、假 (F) 一致，所以可知 $a(x)$ 与 $b(x)$ 的真 (T)、假 (F) 一致，就与 $A=B$ 相同.

各种定律

还有，在集合及命题中所学的定律，对于条件命题也同样成立. 这就是说，设条件命题 $a(x), b(x), c(x)$ 的真值集合分别为 A, B, C 时，可知条件命题与其真值集合之间，有下列定律以及与之相对应的集合的关系.

交换律 $a(x)\wedge b(x)=b(x)\wedge a(x)$:

$$A\cap B=B\cap A$$

结合律 $(a(x)\wedge b(x))\wedge c(x)=a(x)\wedge(b(x)\wedge c(x))$:

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

分配律 $(a(x)\wedge(b(x)\vee c(x))=(a(x)\wedge b(x))\vee(a(x)\wedge c(x))$:

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

等幂律 $a(x)\wedge a(x)=a(x)$: $A\cap A=A$

吸收律 $a(x)\wedge(a(x)\vee b(x))=a(x)$:

$$A\cap(A\cup B)=A$$

双重否定律 $\overline{\overline{a(x)}}=a(x)$: $\overline{\overline{A}}=A$:

德·摩尔根定律 $\overline{a(x)\wedge b(x)}=\overline{a(x)}\vee\overline{b(x)}$:

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

在以上的定律中，把$\wedge$与$\vee$，$\cap$与$\cup$交换时，可以导出选言的关系．这些，和所有命题的情况有完全相同的关系．

提　　要

复合条件命题的真值集合 设全集为U的条件命题$a(x)$, $b(x)$的真值集合分别为A, B时，则

$\overline{a(x)}$的真值集合为$\overline{A}$

$a(x)\wedge b(x)$的真值集合为$A\cap B$

$a(x)\vee b(x)$的真值集合为$A\cup B$

例题 19 （1）设以实数集合 R 为全集的二条件命题为

$$a(x):\ x^2-x\leqslant 0 \qquad b(x):\ x^2-x+1\geqslant 0$$

试求下列条件命题的真值集合.

(i) $\overline{a(x)}$ (ii) $a(x)\wedge b(x)$ (iii) $a(x)\vee b(x)$

（2）试作下列条件命题的否定.

(i) $xy=0$ (ii) $x=y=1$

提示 （1）因为全集 U 是实数集合 R，所以可分别求出 $a(x)$，$b(x)$的真值集合：

$$\{x|a(x)\}=\{x|x^2-x\leqslant 0\}=\{x|x(x-1)\leqslant 0\}$$
$$=\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$$
$$\{x|b(x)\}=\{x|x^2-x+1\geqslant 0\}$$
$$=\{x|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant 0\}=R=U$$

（2）应用条件命题的德·摩尔根定律．为此，可将：

(i) “$xy=0$”变形为（“$x=0$”或“$y=0$”）

(ii) “$x=y=1$”变形为（“$x=1$”且“$y=1$”）

解 （1）因为二条件命题为

$$\{x|a(x)\}=\{x|x^2-x\leqslant 0\}=\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$$
$$\{x|b(x)\}=\{x|x^2-x+1\geqslant 0\}=\{x|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant 0\}$$
$$=R=U$$

所以

(i) $\{x|\overline{a(x)}\}=\{x|\overline{0\leqslant x\leqslant 1}\}=\{x|(x<0)\vee(x>1)\}$
$$=\{x|x<0\}\cup\{x|x>1\}$$

(ii) $\{x|a(x)\wedge b(x)\}=\{x|(0\leqslant x\leqslant 1)\wedge(x^2-x+1\geqslant 0)\}$

$$=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}\cap R=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$$

(iii) $\{x\mid a(x)\vee b(x)\}=\{x\mid (0\leqslant x\leqslant 1)\vee(x^2-x+1)\geqslant 0\}$

$$=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}\cup R=R$$

(2) (i) 因为"$xy=0$"的否定是"$x=0$ 或 $y=0$"的否定，

所以得 "$x\neq 0$ 且 $y\neq 0$"

(ii) 因为"$x=y=1$"的否定是"$x=1$ 且 $y=1$"的否定，

所以得 "$x\neq 1$ 或 $y\neq 1$"

发展题

含有二个变数 x, y 的条件命题 $a(x,y), b(x,y)$，为

$$a(x,y):\ y-x^2<1,\qquad b(x,y):\ x-y-1<0$$

时，试求下列条件命题的真值集合并在平面坐标上用图形表示出来.

(i) $\overline{a(x,y)}$　　(ii) $a(x,y)\wedge b(x,y)$

(iii) $a(x,y)\vee b(x,y)$　　(iv) $\overline{a(x,y)}\wedge\overline{b(x,y)}$

要点

在平面坐标上，分别设 A 表示 $y=x^2+1$ 的下方，B 表示 $y=x-1$ 的上方.

注意 $\overline{a(x,y)}$:

$$y-x^2\geqslant 1$$

可根据德·摩尔根定律变形为 $\overline{a(x,y)}\wedge\overline{b(x,y)}$

$$=\overline{a(x,y)\vee b(x,y)}$$

由 $A\cup B=U$,

解　设条件命题 $a(x,y)$，$b(x,y)$ 的真值集合分别为 A, B，则在平面坐标上

$$A=\{(x,y)\mid y-x^2<1\}$$

$$B=\{(x,y)\mid x-y-1<0\}$$

(i) $\overline{a(x,y)}$ 的真值集合为 $\overline{A}$

(ii) $a(x,y)\wedge b(x,y)$ 的真值集合为 $A\cap B$

(iii) $a(x,y)\vee b(x,y)$ 的真值

得 $\overline{A\cup B}=\overline{U}$

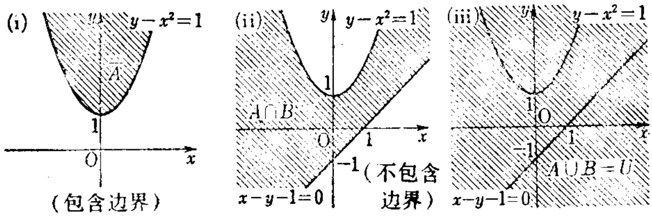
$\therefore\ \overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$

集合为 $A\cup B$

(iv) 由德·摩尔根定律得知

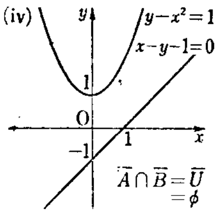
$\overline{a(x,y)}\wedge\overline{b(x,y)}=\overline{a(x,y)\vee b(x,y)}$

所以真值集合为$\overline{A\cup B}$，是(iii)的补集．因此以平面坐标为全集，它们的图形分别如下．



练习 (解答在 158 页)

31. 设以平面坐标为全集，试作下列命题的否定，并将其真值集合用图形表示出来．



(i) $2x+3\geqslant 0$　　　　(ii) $x^2+y^2-4x-2y+1>0$

32. 设条件命题 $a(x,y)$, $b(x,y)$的真值集合分别为$\{(x,\ y)\mid -1\leqslant x+y\leqslant 1\}$, $\{(x,y)\mid -1\leqslant x-y\leqslant 1\}$. 试将条件命题"$a(x,\ y)\wedge b(x,y)$"的真值集合在平面坐标上用图形表示出来，并求出它的面积．

18. 含有“所有”和“存在”的命题

全称命题

在数学上研究的命题(条件命题)中,有“对于所有的 x 有……”或“所有的 x 是……”这样形式的命题. 例如,

“x 取实数值时, $x^2+1>0$”

这个命题详细的叙述是

“若 x 是实数值时, 则对于所有 x, 有 $x^2+1>0$ 成立”

一般地,设全集为 U,条件命题为 $a(x)$ 时,对于 U 的任意元素 x 有如下形式的命题

“对于所有的 x, 有 $a(x)$”可以表示为

“所有的 $x, a(x)$”

或 “$\forall x\in U, a(x)$”或“$\forall x, a(x)$”

全称符号

这叫做**全称命题**. $\forall$ 是**全称符号**, 它是 *all* 第一个字母的倒写. 因而上例的命题可表示为

“$\forall x, x^2+1>0$”

在这里“对于所有的 x”的语句, 在不致误解的情况下多省略不写“所有的”. 例如, 对于条件命题 $a(x)$, $b(x)$, “若 $a(x)$则 $b(x)$”, 即表示为“$a(x)\to b(x)$”时,通常都意味着“对于所有的 $x, a(x)\to b(x)$”.

全称命题和

对于全集 U, “$\forall x, a(x)$”为真时, 是指对于

真值集合 U 的所有元素 x, $a(x)$ 为真的意思．因此，$a(x)$ 的真值集合 A 与全集 U 相同．即

$$\boldsymbol{A}=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})\}=\boldsymbol{U}$$

显然有

$$A=U\text{ 时, }\forall x, a(x)\text{ 为真}$$

$$A\neq U\text{ 时, }\forall x, a(x)\text{ 为假}$$

因而，遇到带有“所有的”语句时“$\forall x, a(x)$”已经不是条件命题，而成了为真或为假的确定的命题，这是要注意的．

存在命题 其次，在命题中，有“……的 x 至少存在一个”或“对某个 x 有……”这样形式的命题．例如，

“对某个 x, 有 $x^2-1<0$”

一般地，“对某个 x, 有 $a(x)$”形式的命题可以表示为

“存在 $x, a(x)$”

或

“$\exists x\in U, a(x)$”或“$\exists x, a(x)$”

存在符号 这叫做**存在命题**．$\exists$ 是**存在符号**，它是exist 的头一个字母的倒写．上例的命题可表示为

“$\exists x, x^2-1<0$”

存在命题和真值集合 对全集 U, “$\exists x, a(x)$”为真，是使 $a(x)$ 为真的 x 存在于 U 中的意思．所以，$a(x)$ 的真值集合 A 不是空集．即

$$A=\{x\mid a(x)\}\neq\varnothing$$

从而，当 $A\neq\varnothing$ 时，$\exists x, a(x)$ 为真，

当 $A=\varnothing$ 时，$\exists x, a(x)$ 为假.

限定符号 **注意** $\forall, \exists$ 统称限定符号.

提　　要

全称命题 对所有的 x，有 $a(x)$. : $\forall x, a(x)$

存在命题 对某个 x，有 $a(x)$. : $\exists x, a(x)$

例题 20 (1) 当 x 为实数时，试说明命题"所有的 x，$x^2+2x+1\geqslant 0$"为真，又，命题"所有的 x，$x+1=0$"为假.

(2) 当 x 为实数时，试说明命题"存在一个 x，$x^2-2x+1>0$"为真，又命题"存在一个 x，$x^2-2x+1<0$"为假.

提示 (1) 两个命题可分别表示为

$$\forall x, x^2+2x+1\geqslant 0; \forall x, x+1=0$$

设它们的真值集合分别为 A, B，对于全集 U，判别 A 与 U，B 与 U 的关系：当 $A=U$ 时，判断该命题为真；而当 $A\neq U$ 时，判断该命题为假.

(2) 两个命题可分别表示为

$$\exists x, x^2-2x+1>0; \qquad \exists x, x^2-2x+1<0$$

设它们的真值集合分别为 C, D，判断 C 与 $\varnothing$，D 与 $\varnothing$ 的关系，当 $C\neq\varnothing$ 时判断命题为真，当 $C=\varnothing$ 时判断命题为假.

解 设实数全体的集合 R 为全集.

(1) 设 $a(x)$：$x^2+2x+1\geqslant 0$，　　$b(x)$：$x+1=0$

的真值集合分别为 A, B，

因为 $A=\{x\mid x^2+2x+1\geqslant 0\}=\{x\mid (x+1)^2\geqslant 0\}=R$

于是，命题 $\forall x, a(x)$为真.

因为 $$B=\{x \mid x+1=0\}=\{-1\} \neq R$$

于是，命题 $\forall x, b(x)$为假.

(2) 设 $c(x)$: $x^2-2x+1>0$, $d(x)$: $x^2-2x+1<0$ 的真值集合分别为 C, D,

因为 $$C=\{x \mid x^2-2x+1>0\}=\{x \mid (x-1)^2>0\}$$
$$=\{x \mid x \neq 1\} \neq \varnothing$$

于是，命题 $\exists x, c(x)$为真.

因为 $$D=\{x \mid x^2-2x+1<0\}=\{x \mid (x-1)^2<0\}=\varnothing$$

于是，命题 $\exists x, d(x)$为假.

[**参考**] 在 $b(x)$中，令 $x=0$，则 $x+1=0$ 不成立. 于是，$\{x \mid b(x)\} \neq U$, $\forall x, b(x)$为假. 象这样说明全称命题为假的例子叫做**反例**. 反例只要举出一个就是充分的.

发展题

试将下列式子所表示的命题改写成语句. 并以实数集合为全集，试判定其真假，对于假的举出反例.

(1) $\forall x, x+1>x$ (2) $\exists x, x^2=x$

(3) $\exists x, x^2+1=-1$ (4) $\forall x, \forall y, x^2+y^2<4$

要点

"所有"的情况，研究 $A=U, A \neq U$

"存在"的情况，研究 $A \neq \varnothing, A=\varnothing$

的关系.

解 (1) $\forall x, x+1>x$，是指"$x+1>x$ 总是成立的". 设实数全体的集合为 R，则这个命题的真值集合为

$$\{x \mid x+1>x\}=\{x \mid 1>0\}=R$$

因此为真.

(2) $\exists x, x^2=x$ 是指"存在有使 $x^2=x$ 成立的 x".

这个命题的真值集合为

$$\{x \mid x^2=x\}=\{x \mid x(x-1)=0\}$$
$$=\{0,1\}\neq\varnothing$$

因此,为真.

(3) $\exists x,\ x^2+1=-1$ 是"存在有 x, 使 $x^2+1=-1$ 成立". 这个命题的真值集合为

$$\{x \mid x^2+1=-1\}$$
$$=\{x \mid x^2+2=0, x\in R\}=\varnothing$$

因此为假.

(4) $\forall x,\ \forall y,\ x^2+y^2<4$ 是指"对所有的 x, y, 都有 $x^2+y^2<4$". 这个真值集合

$$\{(x,y) \mid x^2+y^2<4\}\text{不是}R\times R$$

举一反例.

这是因为只要看一看, 当 $x=y=2$, 便可知 $x^2+y^2<4$ 是不成立的. 所以真值集合不是 $R\times R$, 所以这个全称命题为假.

练习 (解答在 159 页)

33. 试将下列命题用符号 $\forall$ 或 $\exists$ 表示出来.

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}\geqslant 2$ 总成立.　　(2) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=2$

(3) 无论 θ 为何值, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 总成立.

(4) 方程 $x^3+mx+n=0$ 至少有一个实根.

19. 含有“所有”和“存在”命题的复合命题

否定

现在取全集 $U=\{1,2,3\}$，在命题

“所有的 x 是 6 的约数”

中，如果用 $a(x)$ 表示“x 是 6 的约数”，则这个命题可以表示为

$$\forall x, a(x)$$

当 $x=1,2,3$ 时 $a(x)$ 均为真，即

$$\forall x, a(x)=a(1)\wedge a(2)\wedge a(3)$$

从而它的否定为

$$\overline{\forall x,\ a(x)}=\overline{a(1)\wedge a(2)\wedge a(3)}$$

由德·摩尔根定律，得

$$\overline{\forall x,\ a(x)}=\overline{a(1)}\vee\overline{a(2)}\vee\overline{a(3)}$$

由此，表明在 $\overline{a(1)},\overline{a(2)},\overline{a(3)}$ 中至少有一个为真．因此

$$\overline{\forall x,\ a(x)}=\exists x,\ \overline{a(x)}$$

同理，由

$$\exists x, a(x)=a(1)\vee a(2)\vee a(3)$$

的否定，得

$$\overline{\exists x,\ a(x)}=\forall x,\ \overline{a(x)}$$

真值集合和否定

设 $a(x)$ 的真值集合为 A，上述这些事实可表示如下：

$$\overline{\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})}\rightleftarrows\overline{\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}}\rightleftarrows\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{U}\rightleftarrows(\overline{\boldsymbol{A}}$$

$\neq \overline{U}) \rightleftarrows (\overline{A} \neq \varnothing) \rightleftarrows \exists x, \overline{a(x)}$

$\overline{\exists x, a(x)} \rightleftarrows \overline{A \neq \varnothing} \rightleftarrows A = \varnothing \rightleftarrows \overline{A} =$

$\overline{\varnothing} \rightleftarrows \overline{A} = U \rightleftarrows \forall x, \overline{a(x)}$

即

"所有的 x……" 的否定是 "不存在 x……"

"存在 x……" 的否定是 "不是所有 x……"

再者,

$\forall x, \ a(x) \to A = U \to A \neq \varnothing \to \exists x, \ a(x)$

(其中 $U \neq \varnothing$)所以,若"所有的 x……",则"存在 x……"成立.

连言和选言

其次,对于带有"所有的 x","存在 x"的连言及选言命题有下列关系成立. 即

$\forall x(a(x) \wedge b(x))$

$= (\forall x, a(x)) \wedge (\forall x, b(x))$ ①

$\exists x(a(x) \vee b(x))$

$= (\exists x, a(x)) \vee (\exists x, b(x))$ ②

为了证明①, 设 $a(x), b(x)$ 的真值集合分别为 A, B, 对于全集 U, 则

$\forall x(a(x) \wedge b(x)) \rightleftarrows A \cap B = U$

但由 $A \cap B \subset A$, 得 $U \subset A$, 又 $U \supset A$, 所以根据集合相等的定义, 得 $A = U$, 同时 $B = U$

因此, $A \cap B = U \rightleftarrows (A = U) \wedge (B = U)$

$\rightleftarrows (\forall x, a(x)) \wedge (\forall x, b(x))$

对于②可得

$\exists x(a(x) \vee b(x)) \rightleftarrows A \cup B \neq \varnothing$

$$\rightleftarrows (A \neq \varnothing) \vee (B \neq \varnothing)$$
$$\rightleftarrows (\exists x, a(x)) \vee (\exists x, b(x))$$

但一般地应注意:

$$\forall x(a(x) \vee b(x)) \neq (\forall x, a(x) \vee (\forall x, b(x)) \qquad ③$$

$$\exists x(a(x) \wedge b(x)) \neq (\exists x, a(x) \wedge (\exists x, b(x)) \qquad ④$$

其中③式是从右边→左边，④式是从左边→右边导出的. 但是，由于它们不能逆推(参看下面例题)，所以不是同值.

提　　要

(i) 否定

$\overline{\forall x, a(x)} = \exists x, \overline{a(x)}$: $\overline{\text{所有的 } x, a(x)}$ = 不存在 $x, a(x)$

$\overline{\exists x, a(x)} = \forall x, \overline{a(x)}$: $\overline{\text{存在 } x, a(x)}$ = 不是所有的 $x, a(x)$

(ii) $\forall x, a(x) \longrightarrow \exists x, a(x)$: 所有的 x, $a(x) \longrightarrow$ 存在 $x, a(x)$

(iii) $\forall x(a(x) \wedge b(x)) = (\forall x, a(x)) \wedge (\forall x, b(x))$

$\exists x(a(x) \vee b(x)) = (\exists x, a(x)) \vee (\exists x, b(x))$

例题 21　试用集合证明下列命题的等式不成立.

(1) $\forall x(a(x) \vee b(x)) = (\forall x, a(x)) \vee (\forall x, b(x))$

(2) $\exists x(a(x) \wedge b(x)) = (\exists x, a(x)) \wedge (\exists x, b(x))$

提示 设命题 $a(x), b(x)$ 的真值集合分别为 A, B, 使(1), (2)式的左边和右边分别与集合相对应.

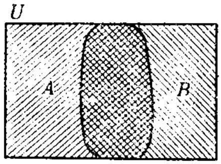
(1) 左边 $=\forall x(a(x)\vee b(x))\rightleftarrows A\cup B=U$

右边 $=(\forall x, a(x))\vee(\forall x, b(x))\rightleftarrows(A=U)\vee(B=U)$

(2) 左边 $=\exists x(a(x)\wedge b(x))\rightleftarrows A\cap B\neq\varnothing$

右边 $=(\exists x, a(x))\wedge(\exists x, b(x))\rightleftarrows(A\neq\varnothing)\wedge(B\neq\varnothing)$

解 设命题 $a(x)$, $b(x)$ 的真值集合分别为 A, B, 全集为 U. 则



$A\cup B=U \nrightarrow (A=U)\vee(B=U)$

(1) $\forall x(a(x)\vee b(x))\rightleftarrows A\cup B=U$

$(\forall x, a(x))\vee(\forall x, b(x))$

$\rightleftarrows(A=U)\vee(B=U)$

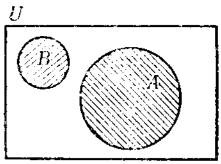
这时, $(A=U)\vee(B=U)\longrightarrow A\cup B=U$ 成立, 反之不成立(参看上图). 因此

$$(\forall x, a(x))\vee(\forall(x), b(x))\not\rightleftarrows\forall x(a(x)\vee b(x))$$

(2) $\exists x(a(x)\wedge b(x))\rightleftarrows A\cap B\neq\varnothing$

$(\exists x, a(x))\wedge(\exists x, b(x))\rightleftarrows(A\neq\varnothing)\wedge(B\neq\varnothing)$

这时, $A\cap B\neq\varnothing\longrightarrow(A\neq\varnothing)\wedge(B\neq\varnothing)$ 成立, 反之不成立. (参看右图). 因此,



$(A\neq\phi)\wedge(B\neq\phi)\nrightarrow A\cap B\neq\phi$

$\exists x(a(x)\wedge b(x))$

$\not\rightleftarrows(\exists x, a(x))\wedge(\exists x, b(x))$

(1), (2)作为等式均不成立.

研究 $\forall x(a(x)\vee b(x))\longrightarrow\exists x(a(x)\vee b(x))$

(其中, $U\neq\varnothing$)成立. 这从以下显然可以看出是成立的.

$$\forall x(a(x)\vee b(x))\rightleftarrows A\cup B=U\longrightarrow A\cup B\neq\varnothing$$
$$\rightleftarrows\exists x(a(x)\vee b(x))$$

发展题

"对 x 的所有实数值，求使 $(ax+b)(ax+c)\geqslant 0$ 成立的条件"的解答如下，其中有错误，找出错误.

解 因为 $(ax+b)(ax+c)\geqslant 0$

所以 $\begin{cases}ax+b\geqslant 0\\ax+c\geqslant 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}ax+b\leqslant 0\\ax+c\leqslant 0\end{cases}$

(i) 对所有 x，为使 $ax+b\geqslant 0$ 且 $ax+c\geqslant 0$，必须

$$a=0\text{ 且 }b\geqslant 0\text{ 且 }c\geqslant 0$$

(ii) 对所有 x，为使 $ax+b\leqslant 0$ 且 $ax+c\leqslant 0$，必须

$$a=0\text{ 且 }b\leqslant 0\text{ 且 }c\leqslant 0$$

因此，由(i)，(ii)可得所求的条件是 $a=0$ 且 $bc\geqslant 0$

要点

命题可用 $\forall x(a(x)\vee b(x))$ 的形式表示.

研究与 $(\forall x,\ a(x))\vee(\forall x,\ b(x))$ 之间的关系.

解 将上式变形用符号表示，则得

$$\forall x((ax+b)(ax+c)\geqslant 0)\quad ①$$
$$=\forall x((ax+b\geqslant 0\wedge ax+c\geqslant 0)\vee(ax+b\leqslant 0\wedge ax+c\leqslant 0))\quad ②$$
$$=\forall x(ax+b\geqslant 0\wedge ax+c\geqslant 0)\vee\forall x(ax+b\leqslant 0\wedge ax+c\leqslant 0)\quad ③$$
$$=\{\forall x(ax+b\geqslant 0)\wedge\forall x(ax+c\geqslant 0)\}\vee\{\forall x(ax+b\leqslant 0)\wedge\forall x(ax+c\leqslant 0)\}\quad ④$$

这时，各式的关系为

$$①\rightleftarrows②\longleftarrow③\rightleftarrows④$$

②与③不同值. 因此, 分为(i), (ii)的地方是错误的.

研究 正确的条件是由 $a^2x^2+a(b+c)x+bc\geqslant 0$, 得到的条件: 当 $a\neq 0$ 时, $b=c$ (因为 $D\leqslant 0$)

或当 $a=0$ 时, $bc\geqslant 0$

练习 (解答在159页)

34. 试写出下列命题的否定.

(1) 所有的质数是奇数.

(2) 使 $x^2+x+1\leqslant 0$ 的实数 x 是存在的.

(3) 不论 m 取任何实数, $x^2-2mx+m-1=0$ 必有实根.

20. 含有“所有”和“若…则…”的命题

全称命题和蕴涵

在数学上经常出现“若 $a(x)$，则 $b(x)$”形式的命题．它不是条件命题，大多是全称命题

“对所有 x（对于任意 x），若 $a(x)$，则 $b(x)$”

即，

$$“\forall x(a(x)\longrightarrow b(x))”$$

这就是已经学过的全称命题

$$“\forall x, p(x)”$$

只是将 $p(x)$ 置换为 $a(x)\longrightarrow b(x)$．

然而，蕴涵条件命题 $a(x)\longrightarrow b(x)$，如在命题里已学过的那样，

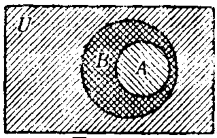
$$a(x)\longrightarrow b(x)=\overline{a(x)\wedge\overline{b(x)}}=\overline{a(x)}\vee b(x)$$

所以，

$$\forall x(a(x)\longrightarrow b(x))=\forall x(\overline{a(x)}\vee b(x))$$

与真值集合之间的关系

现在，设 $a(x)$，$b(x)$ 的真值集合分别为 A，B，则条件命题 $\overline{a(x)}\vee b(x)$ 的真值集合是 $\overline{A}\cup B$，所以对全集 U 有



$\overline{A}\cup B=U$

$$\forall x(\overline{a(x)}\vee b(x))\rightleftarrows\overline{A}\cup B=U$$

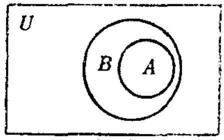
从而

$$\forall x(a(x)\rightarrow b(x))\rightleftarrows\overline{A}\cup B=U$$

成立. 另外, 因为关于集合有下列关系

$$\overline{A}\cup B=U$$

$$\rightleftarrows A\subset B$$



$A\subset B$

$$\therefore\quad \forall x(a(x)\to b(x))\rightleftarrows A\subset B$$

$a(x)\to b(x)$ 和 $A\subset B$

因此, 对 $\forall x(a(x)\to b(x))$ 的真假, 可由 $a(x), b(x)$ 的真值集合 A, B 的包含关系 $A\subset B$ 判断出来.

然而, 如在集合里所学过的那样, 因为真值集合 A, B 之间包含关系 $A\subset B$ 的成立, 是

"满足 $x\in A$ 的所有元素也满足 $x\in B$"

即

"$x\in A\longrightarrow x\in B$"

又, $x\in A$, $x\in B$ 分别与 $a(x)$, $b(x)$ 为真同值, 所以可以认为下列三个命题都是同值的.

"$\forall x, (a(x)\to b(x))$"

"$\{x|a(x)\}\subset\{x|b(x)\}$"

"使 $a(x)$ 为真的所有 x, 必使 $b(x)$ 为真"

条件命题 $a(x)\to b(x)$ 的真假

上述命题"$\forall x, (a(x)\to b(x))$"是全称命题其真假是确定的, 下面我们来研究条件命题的蕴涵"$a(x)\to b(x)$"的真假. 在前面, 已经把用"若…则…"连结的蕴涵命题 "$a\to b$" 定为与"$\overline{a\wedge\overline{b}}$", 即"$\overline{a}\vee b$"同值. 因此, 对于条件命题也定为

$$a(x)\to b(x)=\overline{a(x)}\vee b(x)$$

共真假与命题 $a \to b$ 的真假同样，如下边的真值表.

$a(x)$	$b(x)$	$a(x) \to b(x)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

由此得知，全称命题

$$\forall x(a(x) \to b(x))$$

成立，也包含 $a(x)$ 为 F 的情况，即 $\{x \mid a(x)\} = \varnothing$ 的情况.

显然还有

$$\forall x(a(x) \rightleftarrows b(x))$$

$$\rightleftarrows A \subset B \text{ 且 } A \supset B \rightleftarrows A = B$$

提　　要

设条件命题 $a(x)$, $b(x)$ 的真值集合分别为 A, B, 则

$$\forall x(a(x) \to b(x)) \rightleftarrows A \subset B$$

$$\forall x(a(x) \rightleftarrows b(x)) \rightleftarrows A = B$$

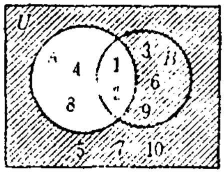
例题 22　若把条件命题"8的约数是 18 的约数"写成蕴涵条件命题 $a(x) \to b(x)$, 即 $\overline{a(x)} \vee b(x)$ 的形式，则 $a(x)$, $b(x)$ 各是何命题？设 10 以下的自然数为全集，求 $a(x)$, $b(x)$ 的真值集合 A, B, 并验证上面条件命题的真值集合为 $\bar{A} \cup B$. 再判别全称命题 $\forall x(a(x) \to b(x))$ 的真假.

提示 求 $a(x)$，$b(x)$的真值集合，并写出 $\bar{A}\cup B$ 的元素. 其次，设$x=1, 2, \cdots\cdots, 10$，判别 $a(x)\to b(x)$的真假，并比较 $a(x)\to b(x)$的真值集合与 $\bar{A}\cup B$

解 所给的条件命题为若"x 是 8 的约数"则"x 是 18 的约数"，所以

$a(x)$："x 是 8 的约数"

$b(x)$："x 是 18 的约数"



从而，$A=\{1, 2, 4, 8\}$，$B=\{1, 2, 3, 6, 9, \}$

$\bar{A}\cup B=\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10\}$

因此，$x=1$："1 是 8 的约数"→"1 是 18 的约数"，这是$(T)\to(T)$为 T.

$x=2$ 也同样.

$x=3$："3 是 8 的约数"→"3 是 18 的约数"，这是$(F)\to(T)$为 T.

$x=6, 9$ 也同样.

$x=4$："4 是 8 的约数"→"4 是 18 的约数"，这是$(T)\to(F)$为 F.

$x=8$ 也同样.

$x=5$："5 是 8 的约数"→"5 是 18 的约数"，这是$(F)\to(F)$为 T.

$x=7, 10$ 也同样.

于是，$a(x)\to b(x)$的真值集合是"1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10"，即 $a(x)\to b(x)$的真值集合与 $\bar{A}\cup B$ 相同.

其次，对 $\forall x(a(x)\to b(x))$，因为 $A\not\subset B$，所以 $\forall x(a(x)\to b(x))$即"所有的 8 的约数是 18 的约数"是假的. 这也可从以

下推导得出，$a(x)\to b(x)$的真值集合 $\bar{A}\cup B=\{1,2,3,5,6,7,9,10\}\neq U$

注意 在这个题目里的“8 的约数是18的约数”是条件命题，但是对于全称命题 $\forall x(a(x)\to b(x))$，有时省略 $\forall x$，也简写成“8 的约数是 18 的约数”.

发展题

试判别下列命题的真假.

（1）若 $x+y<1$，则 $x^2+y^2<1$

（2）若 $x^2<4$，则 $x<2$

（3）若 $x>2$，则 $x\geqslant 2$

（4）$(a(x)\wedge b(x))\longrightarrow a(x)$，$a(x)\longrightarrow(a(x)\vee b(x))$

要点

设真值集合为 A, B，判别$A\subset B$ 的关系.

(1)可用坐标平面上的区域来考虑.

(2), (3) 在坐标轴上考虑.

解 (1) 设

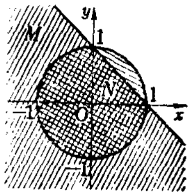
$A=\{(x,y)\,|\,x+y<1\}$

$B=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\}$

如右图所示

$A\not\subset B$

因此，这个命题是假的.



(2) 设 $A=\{x\,|\,x^2<4\}$

$=\{x\,|\,-2<x<2\}$

$B=\{x\,|\,x<2\}$

则 $A\subset B$

因此，这个命题是真的.

(3) 设 $A=\{x\,|\,x>2\}$

$$B=\{x \mid x \geqslant 2\}$$

则 $A \subset B$

因此,这个命题是真的.

(4) 二个集合之间有下列关系.

$(A \cap B) \subset A$

$A \subset (A \cup B)$

(4) 设 $A=\{x \mid a(x)\}$

$$B=\{x \mid b(x)\}$$

则 $\{x \mid a(x) \wedge b(x)\}=A \cap B$

$\{x \mid a(x) \vee b(x)\}=A \cup B$

$\therefore \quad (A \cap B) \subset A, A \subset (A \cup B)$

因此两个命题都是真的.

注意 (1)是省略了"对于所有的x, y,", (2)~(4)都是省略了"对于所有的 x" 的全称命题. 因为不是单纯的条件命题, 而是在句子中包含了条件命题的全称命题. 所以能够判别真假.

练习 (解答在 159 页)

35. 试判别下列命题的真假.

(1) 若 $x^2+x<2$ 则 $x^2-x<2$

(2) 若 $x^2-3x+2<0$ 则 $x^2+3x+2>0$

(3) 若 $x^2+y^2 \leqslant 1$ 则 $x \leqslant 1$

(4) 若 $x+y \geqslant 2$ 且 $(x-1)(y-1) \geqslant 0$ 则 $x \geqslant 1$ 且 $y \geqslant 1$

21. 逆，否，逆否

假设和结论

表示全称命题的“所有的x, $a(x)\to b(x)$”以后省略“所有的x”，用

$$a(x)\to b(x)$$

来表示．这时，把$a(x)$叫做**假设**或**前件**，把$b(x)$叫做**结论**或**后件**．

在上面的命题中，把交换假设$a(x)$与结论$b(x)$的命题，即

$$\boldsymbol{b(x)\to a(x)}$$

逆

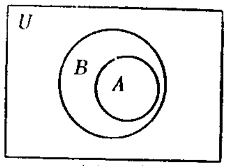
叫做原命题的**逆命题**或简称**逆**．例如，

$$x=y\to x^2=y^2 \qquad ①$$

的逆命题是

$$x^2=y^2\to x=y$$

从这个例题中可以看出原命题为真，但逆命题非真．



a(x)　b(x)

一般地，设条件命题$a(x)$, $b(x)$的真值集合分别为A, B，则

$$(a(x)\to b(x))\Longleftrightarrow A\subset B$$

$$(b(x)\to a(x))\Longleftrightarrow B\subset A$$

逆的真假

虽然$A\subset B$，但不能肯定$B\subset A$．因此，命题$a(x)\to b(x)$为真，不能肯定其逆命题$b(x)\to a(x)$也为真．

注意 命题 $a(x)\to b(x)$ 与它的逆命题 $b(x)\to a(x)$ 都为真时，即真值集合 A, B，有 $A\subset B$ 且 $B\subset A$ 即 $A=B$ 时，由于 $a(x)$, $b(x)$ 为 T 或为 F 的情况相同，所以 $a(x)$ 和 $b(x)$ 同值.

其次，对命题 $a(x)\to b(x)$ 的假设和结论同时否定的命题

$$\overline{a(x)}\to\overline{b(x)}$$

否

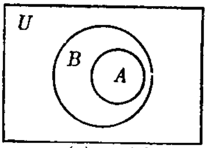
叫做原命题的**否命题**或简称**否**. 例如，①的否命题是

$$x\neq y\to x^2\neq y^2$$

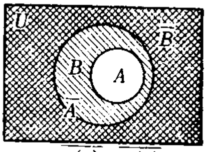
这个例子说明原命题为真，但否命题非真.（反例: $x=1, y=-1$）

否的真假

一般地，设条件命题 $a(x)$, $b(x)$ 的真值集合为 A, B,



$a(x)\to b(x)$
$A\subset B$



$\overline{a(x)}\to\overline{b(x)}$
$\overline{A}\supset\overline{B}$

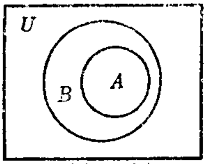
则
$$(a(x)\to b(x))\Longleftrightarrow A\subset B$$
$$(\overline{a(x)}\to\overline{b(x)})\Longleftrightarrow\overline{A}\subset\overline{B}$$

虽然 $A\subset B$，但不能肯定 $\overline{A}\subset\overline{B}$. 因此，命题 $a(x)\to b(x)$ 为真，它的否命题 $\overline{a(x)}\to\overline{b(x)}$ 未必为真.

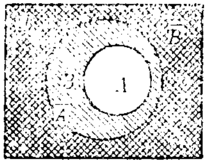
逆否

还有，交换命题 $a(x)\to b(x)$ 的假设和结论并且同时否定的命题

$$\overline{b(x)}\to\overline{a(x)}$$



$a(x)\to b(x)$
$A\subset B$



$\overline{b(x)}\to\overline{a(x)}$
$\overline{B}\subset\overline{A}$

叫做原命题的**逆否命题*** 或简称**逆否**．例如①的逆否命题是

$$x^2\neq y^2\to x\neq y$$

在此例中逆否为真．

逆否的真假

设条件命题 $a(x)$，$b(x)$的真值集合为 A, B, 则

$$(a(x)\to b(x))\Longleftrightarrow A\subset B$$

$$(\overline{b(x)}\to\overline{a(x)})\Longleftrightarrow\overline{B}\subset\overline{A}$$

由于 $A\subset B\Longleftrightarrow\overline{B}\subset\overline{A}$ 成立, 从而, 若命题 $a(x)\to b(x)$为真时, 则它的逆否$\overline{b(x)}\to\overline{a(x)}$也为真．即

$$\boldsymbol{a(x)\to b(x)=\overline{b(x)}\to\overline{a(x)}}$$

提　　要

逆, 否, 逆否的真假

$a(x)\to b(x)$	—逆—	$b(x)\to a(x)$
否	逆否	否
$\overline{a(x)}\to\overline{b(x)}$	—逆—	$\overline{b(x)}\to\overline{a(x)}$

* 逆否命题的原文是对偶命题, 过去也有使用对偶命题的．——译者注

虽然命题为真，但它的逆和否未必为真.

若命题为真，则它的逆否必为真.

例题23 试作出下列命题的逆、否、逆否命题. 并指出其真假. 其中 x, y 的全集是全体实数.

(1) 若 $xy=0$, 则 $x=0$ 或 $y=0$

(2) 若 $x=2, y=3$, 则 $x+y=5$

(3) 若 $x\geqslant 2, y\geqslant 3$, 则 $x+y\geqslant 5$

提示 (1) "$x=0$ 或 $y=0$"的否定是"$x\neq 0$ 且 $y\neq 0$"

(3)因为 $x\geqslant 2, y\geqslant 3$ 是"$x\geqslant 2$ 且 $y\geqslant 3$"的意思，所以，它的否定是"$x<2$或 $y<3$"

解 (1) 原命题"若 $xy=0$, 则 $x=0$ 或 $y=0$"……真

逆："若 $x=0$ 或 $y=0$, 则 $xy=0$"……真

否："若 $xy\neq 0$, 则 $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$"……真

逆否："若 $x\neq 0, y\neq 0$, 则 $xy\neq 0$"……真

(2) 原命题"若 $x=2$ 且 $y=3$, 则 $x+y=5$"……真

逆："若 $x+y=5$, 则 $x=2$ 且 $y=3$"……假 (反例 $x=1, y=4$)

否："若 $x\neq 2$ 或 $y\neq 3$, 则 $x+y\neq 5$"……假 (反例 $x=1, y=4$)

逆否："若 $x+y\neq 5$, 则 $x\neq 2$, 或 $y\neq 3$"……真

(3) 原命题"若 $x\geqslant 2$ 且 $y\geqslant 3$, 则 $x+y\geqslant 5$"……真

逆否："若 $x+y<5$, 则 $x<2$ 或 $y<3$"……真

逆、否(省略)为假.

参考 在(2)的命题中，如果看作是当 $x=2$ 时，“若 $y=3$，则 $x+y=5$”，则其逆为当 $x=2$ 时，“若 $x+y=5$，则 $y=3$”为真. 这是因为，这个命题是以 $\{(2, y)\mid y$ 是实数$\}$ 为全集. 在上述解答中，因为是以 $\{(x, y)\mid x, y$ 是实数$\}$ 为全集，所以由于全集的取法不同，从而原命题的叙述方法及其逆也不同. 象这样明确地确定全集是很重要的.

再有，命题“菱形的对角线互相垂直”的逆，如果以平行四边形为全集，则“在平行四边形中，如果对角线互相垂直，那么此四边形是菱形”为真，但如以所有四边形为全集，那么“在四边形中，若对角线互相垂直，则此四边形是菱形”为假.

发展题

试作出下列命题的逆、否、逆否命题，并判别其真假.

(1) 若 $x=3$，则 $2x-1=5$

(2) 若 $x=0, y=0$，则 $x^2+y^2=0$

(3) 若 $2\leqslant x<3$，则 $x^2-5x+6\leqslant 0$

要点

如果不能确定全集就不能判别其真假. (1)，(3) 很明显，(2) 由于实数与复数的不同，所以解答不同.

解 (1) 命题“若 $x=3$，则 $2x-1=5$”……真

逆：“若 $2x-1=5$，则 $x=3$”……真

否：“若 $x\neq 3$，则 $2x-1\neq 5$”……真

逆否：“若 $2x-1\neq 5$，则 $x\neq 3$”……真

(2) 命题“若 $x=0, y=0$，则 x^2

$+y^2=0$"……真

逆："若 $x^2+y^2=0$，则 $x=0$，$y=0$"

否："若 $x\neq0$ 或 $y\neq0$，则 $x^2+y^2\neq0$"

设实数为全集，则逆，否……真

设复数为全集，则逆，否……假

（反例 $x=1$，$y=i$）

逆否："若 $x^2+y^2\neq0$，则 $x\neq0$ 或 $y\neq0$" ……真

（3）命题"若 $2\leqslant x<3$，则 $x^2-5x+6\leqslant0$" ……真

逆："若 $x^2-5x+6\leqslant0$，则$2\leqslant x<3$" ……假

（反例 $x=3$）

否："若 $x<2$ 或 $x\geqslant3$，则 $x^2-5x+6>0$" ……假

（反例 $x=3$）

逆否："若 $x^2-5x+6>0$，则 $x<2$ 或 $x\geqslant3$" ……真

练习 （解答在 160 页）

36. 试作出下列命题的逆、否、逆否，并判别其真假.

（1）若 $x=y$，则 $xz=yz$

（2）正方形的四边相等.

（3）若 $p>0$，则 x 的二次方程 $x^2+x-p=0$ 有实根.

22. 必要条件，充分条件

必要条件

蕴涵命题 $a(x)\to b(x)$（正确的记法是 $\forall x$: $a(x)\to b(x)$），一般可能为真，也可能为假.

当 $a(x)\to b(x)$ 为真时，并不限于 $a(x)$，$b(x)$ 都为真. 当 $a(x)\to b(x)$ 为真时，若 $b(x)$ 为假，则 $a(x)$ 也为假. 从而，若使 $a(x)$ 为真，必须 $b(x)$ 为真. 因此把 $b(x)$ 叫做使 $a(x)$ 成立的**必要条件**(Necessary condition).

$a(x)$	$b(x)$	$a(x)\to b(x)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

例如，因为命题

"若 x 是 6 的倍数，则 x 是 2 的倍数"为真，所以" x 是 2 的倍数"是使" x 是 6 的倍数"成立的必要条件. 即，使" x 是 6 的倍数"必须是" x 是 2 的倍数(偶数)"

充分条件

其次，当 $a(x)\to b(x)$ 为真时，因为若 $a(x)$ 为真，则 $b(x)$ 必为真，所以要使 $b(x)$ 为真，只

要 $a(x)$ 为真就够了(充分). 于是, 把 $a(x)$ 叫做 $b(x)$ 成立的**充分条件** (sufficient condition). 例如, 上述命题中“x 是6的倍数”是使“x 是 2 的倍数”成立的充分条件. 即, 若使“x 是2的倍数(偶数)”则“x 是 6 的倍数”就是充分的.

综合上述两方面的事实, 可写成下列形式

$a(x) \longrightarrow$	$b(x)$: 真
(充分条件)	(必要条件)

即, 箭头所指的一方是必要条件, 另一方是充分条件.

充要条件

二个蕴涵命题 $a(x)\to b(x)$ 与 $b(x)\to a(x)$ 同时为真时, 从后者可知, $a(x)$ 是使 $b(x)$ 成立的必要条件, 从前者可知, $a(x)$ 是使 $b(x)$ 成立的充分条件. 这时, 就把 $a(x)$ 叫做使 $b(x)$ 成立的**充要条件**. 当然, 这时 $b(x)$ 也是使 $a(x)$ 成立的充要条件. 即, $a(x)$ 与 $b(x)$ 互为充要条件. 换句话说, 就是 $a(x)$ 与 $b(x)$ 同值. 由此可知, 下列三种情况意义相同.

- $a(x)\to b(x)$, $b(x)\to a(x)$ 同时为真.
- $a(x)$ ($b(x)$) 是 $b(x)$ ($a(x)$) 的充要条件.
- $a(x)$ 与 $b(x)$ 同值, ($a(x)\Longleftrightarrow b(x)$)

象第 105 页叙述的那样, 当 $a(x)$ 与 $b(x)$ 同值时, 真值集合相同. 即

$$(a(x)\Longleftrightarrow b(x))\Longleftrightarrow[\{x|a(x)\}=\{x|b(x)\}]$$

例如，由二个命题

"若 x 是 6 的倍数，则 x 是 2 的倍数且 x 是 3的倍数"与

"若 x 是 2 的倍数且 x 是 3 的倍数，则 x 是 6 的倍数"

同时为真可知

"x是 2 的倍数且 x 是3的倍数"是使" x 是 6 的倍数"成立的充要条件.

在数学上，所说的必要条件、充分条件的"必要"、"充分"的意义，与日常用语的必要和充分大致相同，但是有时凭感觉多少也有些差异，所以最好根据 $a(x)\to b(x)$, $b(x)\to a(x)$, $a(x)\Longleftrightarrow b(x)$的真假，用定义判断.

提　　要

(i) 当 $a(x)\to b(x)$为真时，

$b(x)$是 $a(x)$的必要条件，$a(x)$是 $b(x)$的充分条件，

$$\{x|a(x)\}\subset\{x|b(x)\}$$

(ii) 当 $a(x)\Longleftrightarrow b(x)$为真时，

$a(x)$与 $b(x)$互为充要条件，真值集合相同.

例题 24　在下列各组中，命题 A 是使命题 B 成立的什么条件？是"必要"、"充分"、"充要"或"在这些中哪个都不是"中的哪一个？

	[A]	[B]
(1)	$x+2=x^2$	$\sqrt{x+2}=x$

(2) 在$\triangle ABC$中$\angle A>90^\circ$	$\triangle ABC$是钝角三角形
(3) 在$\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$中, $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $\angle A=\angle A'$	$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$
(4) $x^2+y^2<1$	$x^2+y^2<x+\frac{1}{2}$

提示 (1) 可分析: "若$x+2=x^2$, 则$\sqrt{x+2}=x$"是否成立, "若$\sqrt{x+2}=x$, 则$x+2=x^2$"是否成立, 还是两方同时成立, 或者两方都不成立.

解 (1) $(\sqrt{x+2}=x)\to(x+2=x^2)$为真,

$(x+2=x^2)\to(\sqrt{x+2}=x)$为假,

因此是必要条件.

注意 $(x+2=x^2)\to(\sqrt{x+2}=\pm x)$

(2) $(\angle A>90^\circ)\to(\triangle ABC$是钝角三角形$)$为真,

$(\triangle ABC$是钝角三角形$)\to(\angle A>90^\circ)$为假,

因此是充分条件.

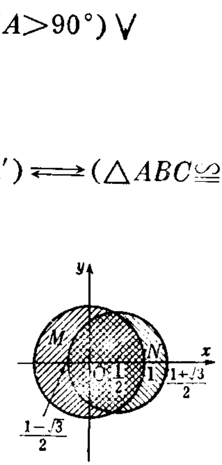
注意 $(\triangle ABC$是钝角三角形$)\to\{(\angle A>90^\circ)\vee(\angle B>90^\circ)\vee(\angle C>90^\circ)\}$

(3) 在$\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$中,

$(AB=A'B', AC=A'C', \angle A=\angle A')\Longleftrightarrow(\triangle ABC\cong\triangle A'B'C')$为真,

因此是充要条件.

注意 这是三角形全等的一个条件.



(4) 令 $M=\{(x, y)\mid x^2+y^2<1\}$

$$N=\left\{(x, y)\mid x^2+y^2<x+\frac{1}{2}\right\}$$

由右图得知，$M\subset N$，$N\subset M$都不成立.

因此 $(x^2+y^2<1)\to\left(x^2+y^2<x+\frac{1}{2}\right)$为假，

$\left(x^2+y^2<x+\frac{1}{2}\right)\to(x^2+y^2<1)$为假，

所以是在这些中哪个都不是.

发展题

a，b 使实数的二次方程 $x^2+2ax+b=0$ 有实根，下列条件是必要条件，还是充分条件？

(1) $2a^2\geqslant b$ (2) $2a\geqslant b+1$

要点

有实根的充要条件是 $D=4a^2-4b\geqslant 0$

分析集合的包含关系，判别是何种条件.

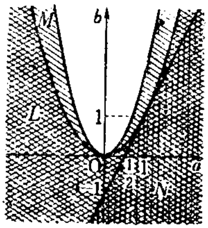
解 为使 $x^2+2ax+b=0$ 有实根的充要条件是判别式 $D\geqslant 0$

即 $\therefore\ \frac{D}{4}=a^2-b\geqslant 0$

设 $M=\{(a,b)\mid 2a^2\geqslant b\}$

$N=\{(a,b)\mid 2a\geqslant b+1\}$

$L=\{(a,b)\mid a^2-b\geqslant 0\}$



由上图可知

$$N\subset L\subset M$$

因此，$(a^2-b\geqslant 0)\to(2a^2\geqslant b)$

$(2a\geqslant b+1)\to(a^2-b\geqslant 0)$

成立，从而

(1) $2a^2 \geqslant b$ 是使 $a^2-b\geqslant 0$ 成立的必要条件.

(2) $2a\geqslant b+1$ 是使 $a^2-b\geqslant 0$ 成立的充分条件.

参考 一般证明(1)时，由 $a^2-b\geqslant 0$，得 $a^2\geqslant b$，$a^2\geqslant 0$

$\therefore\ 2a^2\geqslant a^2\geqslant b \quad \therefore\ 2a^2\geqslant b$

练习 （解答在 161 页）

37. 设条件命题 $a(x)$, $b(x)$ 的真值集合分别为 A, B. 当 $A\subset B$ 成立时，$a(x)$ 是使 $b(x)$ 成立的必要条件，还是充分条件. 其中 $B\not\subset A$.

38. 在下列的 $\boxed{\quad}$ 中适当填入“必要”，“充分”，“不必要也不充分”.

(1) $x=1$ 是使 $x^2-x=0$ 成立的 $\boxed{\quad}$ 条件.

(2) $-4\leqslant x\leqslant 6$ 是使 $|x-1|\leqslant 5$ 成立的 $\boxed{\quad}$ 条件.

(3) $x>2$, $y>3$ 是使 $x+y>5$ 成立的 $\boxed{\quad}$ 条件.

(4) $x=6$ 或 $x=1$ 是使 $\sqrt{x+3}=x-3$ 成立的 $\boxed{\quad}$ 条件.

(5) $x+y\leqslant 1$ 是使 $x^2+y^2\leqslant 1$ 成立的 $\boxed{\quad}$ 条件.

习　题　(解答在 168 页)

——A——

24. 以一切实数为全集,试求下列条件命题的真值集合.

(1) $x^2 \geqslant 0$　(2) $x^2 > 0$　(3) $x^2 \leqslant 0$　(4) $x^2 < 0$

25. 从真值集合的包含关系,判断关于实数 x, y 的下列命题的真假.

(1) $(y=|x|) \to (y^2=x^2)$

(2) $\{(x^2+y^2<1) \wedge (x+y+1<0)\} \to \{(x<0) \wedge (y<0)\}$

(3) $(|x|+|y|>1) \to \{(|x|>1) \vee (|y|>1)\}$

26. 指出下列命题的否定.

(1) $xy>0$ 且 $x+y>0$ 且 $x-y>0$

(2) $x=2$ 或 $x=3$ 或 $x=4$

(3) 关于任意实数 x, $x^2+px>1$

(4) 存在 $x^2+px+1<0$ 成立的 x.

27. 作出下列命题的逆、否、逆否命题. 并指出其真假.

(1) 若 $x^2+y^2=0$, 则 $x=0$ 且 $y=0$

(2) 关于所有 x, 若 $x^2<1$, 则 $x^2+x<6$

(3) 关于所有 x, 若 x 是无理数, 则 $\frac{1}{x}$ 也是无理数.

28. 在下列各组中, 条件命题 A 是使条件命题 B 成立的什么条件? 试用“必要条件”,“充分条件”,“充要条件”,“在这些中哪个都不是”, 作回答. 其中(1),(2)的全集是实数,(3),(4)的全集是整数.

	[A]	[B]
(1)	$x>y$	$x^2>y^2$
(2)	$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x^2+(7-x)^2=25 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$
(3)	x 是 y 的倍数.	y 是 x 的约数.
(4)	x 是 3 的倍数.	xy 是 3 的倍数.
(5)	$\forall x, ax^2+bx+c>0$	$b^2-4ac<0$

(a, b、c 为实数，$a\neq 0$)

——B——

29. 设 p, q 是实数，$f(x)=x^2-px+q$. 有命题"对 x 的任意实数，若 $f(x)>0$, 则 $p^2-4q<0$"

(1) 这个命题在什么样的全集上来考虑？

(2) 用"所有","存在",→改写这个命题.

(3) 试述这个命题的逆命题，并判别其真假.

30. 作出下列命题的逆、否、逆否命题.

(1) $a(x)\to(a(x)\vee b(x))$

(2) $(a(x)\wedge b(x))\to(a(x)\vee b(x))$

(3) $(a(x)\vee b(x))\to(c(x)\wedge d(x))$

31. 在下列各组中，命题 A 是使命题 B 成立的什么条件？试用"必要条件","充分条件","充要条件","在这些中哪个都不是"作回答.

	[A]	[B]
(1)	$\begin{cases} mX+nY=0 \\ m'X+n'Y=0 \end{cases}$ $(mn'\neq m'n)$	$\begin{cases} X=0 \\ Y=0 \end{cases}$
(2)	$x(x^2+1)-(x^3+1)=0$	$x=\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$ (x 是实数)
(3)	$x=0$	$(x+1)(x+2)(x+3)=1\cdot 2\cdot 3$
(4)	$x+3=x^2$	$x\sqrt{x+3}=x^2$

32. 在平面上，设满足 $x>0$ 且 $y>0$ 的点(x, y)的集合为 s. 在下列的条件(1),(2),(3),(4)中，使直线 $ax+by=1$ 与 s 有公共点的充分条件是哪一个？

(1) $ab>0$　(2) $a+b>0$　(3) $a+b>ab$　(4) $a+b<1$

33. 设在 $-\infty<x<+\infty$ 上定义的函数 $f_i(x)$ ($i=1, 2, \cdots, n$)的集合为 M, 命题 A 是"对 x 的某些值，M的任何函数的值都是 0"

(1) 写出否定 A 的命题 B.

(2) M 是三个函数

$$f_1(x)=ax-1,\quad f_2(x)=x^2-2x+b,\quad f_3(x)=x^3+b$$

的集合时，试求使命题 B 成立的实数 a, b 的条件.

23. 推　　理

归纳推理

在自然科学中，使用由一些实验或实际经验，导出一般规律的方法，象这样的方法叫做**归纳推理**．这种方法，对于发现新的规律、性质是有效的，但是不能保证所得到的规律、性质绝对"真"．例如，在 $f(n)=n^2+n+11$ 中，由于 $f(1)=13, f(2)=17, f(3)=23, f(4)=31\cdots\cdots$，因此可推断对自然数 n，$f(n)$是质数．其实当 $n=11$ 时，$f(11)=11^2+11+11=11\times13$ 不是质数，所以上边的结论是不正确的．

演绎推理

与归纳推理相对的，以逻辑为根据，推导出结论的方法，叫做**演绎推理**．例如，由真的命题 a，b 遵循推理的规则得出真的命题 q，叫做由a，b 到 q 的演绎推理或简称推理，用

$$a, b \Longrightarrow q \quad \text{或} \quad \begin{array}{rc} & a \\ & b \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

表示．这里，由 a，b 推导出 q，是指

"若 a，b 都为真，则 q 为真"

因为 a，b 都为真，仅限于 $a\wedge b$ 为真时，所以这时用的命题是

$$a\wedge b\to q$$

因为这个蕴涵命题恒真时，若 $a \wedge b$ 为真，则 q 为真，所以这个推理是正确的推理.

于是一般地，在 $p \to q$ 为真的情况下，p 为真时，q 为真. 即，由 p 推出 q. 由此可知:
若 $p \to q$ 为恒真，则推理 $p \Longrightarrow q$ 是正确的.
若 $p \to q$ 不恒真，则推理 $p \Longrightarrow q$ 就不正确.

注意 $p \to q$ 中的 p 可以为真，也可以为假，但是 $p \Longrightarrow q$ 仅仅限于 $p \to q$ 而 p 为真的情况，所以，推理 $p \Longrightarrow q$ 与蕴涵命题 $p \to q$ 的意义不同.

例如，“对于 $x^2-2mx+m-1=0$，若 $D>0$，则这个二次方程有相异二实根” $(a \to b)$

可是，“$\frac{1}{4}D=m^2-(m-1)=\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$” (a)

因此，“$x^2-2mx+m-1=0$ 有相异二实根” (b)

这个推理因为 $\{(a \to b) \wedge a\} \to b$ 恒真，所以正确.

推理形式有许多种，现仅举出下列几种基本的.

三段论法

(i) **三段论法**

推理 $b \to c, a \to b \Longrightarrow a \to c$

所用的命题是 $\{(b \to c) \wedge (a \to b)\} \to (a \to c)$

(例) 人总是要死的. $b \to c$

苏格拉底是人. $a \to b$

因此，苏格拉底总是要死的. $a \to c$

这个事实也可以用条件命题 $a(x)$: x 为苏格拉底，等. 用上述整理的形式写出来.

双关论法

(ii) **双关论法**

推理 $a \to b, c \to d, a \vee c \Longrightarrow b \vee d$

所用命题是

$$\{(a \to b) \wedge (c \to d) \wedge (a \vee c)\} \to (b \vee d)$$

(例) 假如我说实话，他就成为犯人. $a \to b$

假如我说谎话，我就犯罪. $\bar{a} \to c$

我说实话或说谎话. $a \vee \bar{a}$

结果，他成为犯人或我犯罪. $b \vee c$

提　　要

(1) **归纳推理** 从实验或经验中，导出一般法则的方法.

(2) **演绎推理** 从真的命题，根据逻辑规则导出真的命题的方法.

(i) 基本形式 $a \to b, a \Longrightarrow b$

这个命题正确，表明命题 $\{(a \to b) \wedge a\} \to b$ 恒真.

(ii) 三段论法 $b \to c, a \to b \Longrightarrow a \to c$

(iii) 双关论法 $a \to b, c \to d, a \vee c \Longrightarrow b \vee d$

例题 25 证明下列推理所对应的命题为恒真，并说明推理正确.

(1) $a \to b, a \Longrightarrow b$　　(2) $a \to b, b \to c \Longrightarrow a \to c$

(3) $a \to b, c \to d, a \vee c \Longrightarrow b \vee d$

提示 与各种推理相对应的命题为

(1) $\{(a\to b)\wedge a\}\to b$

(2) $\{(a\to b)\wedge(b\to c)\}\to(a\to c)$

(3) $\{(a\to b)\wedge(c\to d)\wedge(a\vee c)\}\to(b\vee d)$

证明这些命题恒真即可.

解 (1) $\{(a\to b)\wedge a\}\to b=\overline{\{(\bar{a}\vee b)\wedge a\}}\vee b$

$$=\{(a\wedge\bar{b})\vee\bar{a}\}\vee b$$

$$=\{(a\vee\bar{a})\wedge(\bar{b}\vee\bar{a})\}\vee b=\{I\wedge(\bar{a}\vee\bar{b})\}\vee b$$

$$=(\bar{a}\vee\bar{b})\vee b=\bar{a}\vee(\bar{b}\vee b)=\bar{a}\vee I=I$$

因此,这个命题为恒真.

即,推理 $a\to b, a\Longrightarrow b$ 正确.

(2) 不用把命题变形的方法,作出

$$\{(a\to b)\wedge(b-c)\}\to(a\to c)$$

的真值表进行研究,从右表可见是恒真的. 因此推理

a	b	c	$a\to b$	$b\to c$	$(a\to b)\wedge(b\to c)$	$a\to c$	原命题
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

$$a \to b,\ b \to c \Longrightarrow a \to c \text{ 正确.}$$

(3) $\{(a \to b) \wedge (c \to d) \wedge (a \vee c)\} \to (b \vee d)$

$= \overline{\{(\bar{a} \vee b) \wedge (\bar{c} \vee d) \wedge (a \vee c)\}} \vee (b \vee d)$

$= (a \wedge \bar{b}) \vee (c \wedge \bar{d}) \vee (\bar{a} \wedge \bar{c}) \vee (b \vee d)$

$= \{(a \wedge \bar{b}) \vee b\} \vee \{(c \wedge \bar{d}) \vee d\} \vee (\bar{a} \wedge \bar{c})$

$= (a \vee b) \vee (c \vee d) \vee (\bar{a} \wedge \bar{c})$

$= b \vee \{a \vee (\bar{a} \wedge \bar{c})\} \vee (c \vee d) = b \vee (a \vee \bar{c}) \vee c \vee d$

$= b \vee a \vee I \vee d = I$

于是命题恒真.

即,推理 $a \to b,\ c \to d,\ a \vee c \Longrightarrow b \vee d$ 正确.

发展题

判别下列推理的形式,说明其中所用的蕴涵命题,并判别其推理是否正确.

(1) 正方形的对角线相互平分,且其长相等.这个四边形的对角线相互平分,且其长相等.于是,这个四边形是正方形.

(2) 如果不买彩票,就不能中奖.你买了彩票.因而你一定中奖.

要点

分成假设 a 和结论 b,用 $a \to b$ 的形式表示.

解 (1) 设"正方形"为 a,"对角线相互平分且其长相等"为 b,则推理的形式为 $a \to b,\ b \Longrightarrow a$

所用的命题为

$\{(a \to b) \wedge b\} \to a$

$= \overline{\{(\bar{a} \vee b) \wedge b\}} \vee a$

$= \{(a \wedge \bar{b}) \vee \bar{b}\} \vee a$

$$=\bar{b}\vee a=a\vee\bar{b}\neq 1$$

因此，命题不恒真，所以这个推理是不正确的.

（2）设"买彩票"为 a，"中奖"为b，则推理的形式为 $\bar{a}\to\bar{b},a\Longrightarrow b$

所用的命题

$$\{(\bar{a}\to\bar{b})\wedge a\}\to b$$
$$=\overline{\{(a\vee\bar{b})\wedge a\}}\vee b$$
$$=\{(\bar{a}\wedge b)\vee\bar{a}\}\vee b$$
$$=\bar{a}\vee b\neq I$$

因此，命题不恒真，所以，这个推理是不正确的.

注意 （2）是错误的，这从常识来说是很清楚的，但从推理形式来说，(1) 犯的是肯定后件的错误；因为(2)可以表示为 $a\to b$，$\bar{a}\Longrightarrow\bar{b}$，所以说犯的是否定前件的错误.

练习 （解答在 161 页）

39. 研究下列推理形式，回答它所用的蕴涵命题．并判断这个推理是否正确？

当$(m+1)(5m+1)$是 5 的倍数时，求整数m的值时，可知或者$m+1$是 5 的倍数，或者 $5m+1$ 是 5 的倍数．因为 $5m+1$ 不是 5 的倍数，所以，$m+1$ 是 5 的倍数.

24. 论 证 法

证明

根据蕴涵(条件) 命题 $a\to b$ 所含简单命题的内容,运用正确的推理形式,判断该命题为真的过程,叫做证明.

对于 $a\to b$,因为当 a 为假时,命题为真,所以无需证明,因而需要证明的只是,当 a 为真时,b 为真.这就是由 a 推出 b,即判断 $a\Rightarrow b$是正确的.例如证明:

直接证法

$$\{(xy=0)\wedge(y\neq 0)\}\to x=0$$

为真.

$$\{(xy=0)\wedge(y\neq0)\}\Rightarrow\{(x=0)\vee(y=0)\}\wedge(y\neq0) \quad ①$$

$$\{(x=0)\vee(y=0)\}\wedge(y\neq0)\Rightarrow\{(x=0)\wedge(y\neq0)\}\wedge\{(y=0)\wedge(y\neq0)\} \quad ②$$

$$\{(x=0)\wedge(y\neq0)\}\vee\{(y=0)\wedge(y\neq0)\}\Rightarrow\{(x=0)\wedge(y\neq0)\}\vee 0 \quad ③$$

$$\{(x=0)\wedge(y\neq0)\}\vee 0\Rightarrow(x=0)\wedge(y\neq0) \quad ④$$

$$(x=0)\wedge(y\neq0)\Rightarrow(x=0) \quad ⑤$$

$$\therefore\quad \{(xy=0)\wedge(y\neq0)\}\Rightarrow(x=0) \quad ⑥$$

于是,$(xy=0)\wedge(y\neq0)\to(x=0)$

在①~⑥变形中,曾几次运用推理形式

$$a \to b, b \to c \Rightarrow a \to c$$

每次变形，都对用于各推理的命题进行了变换。(②用的是分配律，③用的是排中律($a \wedge \bar{a} = O$)，④用的是O的性质，⑤用的是 $a \wedge b \to a$ 等)

象这样的证明方法，叫做**直接证法**.

间接证法

与此相对的，为了证明 $a \to b$，而证明与此同值的另一命题 $a' \to b'$ 的方法，叫做**间接证法**.

对偶法

(1) 代替命题 $a \to b$，证明和它同值的逆否(对偶)命题 $\bar{b} \to \bar{a}$ 的方法叫做**对偶法**. 例如，

证明 $x^2 \neq y^2 \to x \neq y$ 时，取逆否命题

$$\overline{x \neq y} \to \overline{x^2 \neq y^2} \text{ 即 } x = y \to x^2 = y^2$$

进行证明的方法. 这从等式的性质很容易证明.

反证法

(2) $a \to b$ 的否定为 $\overline{a \to b} = \overline{\bar{a} \vee b} = a \wedge \bar{b}$，由此出发进行推理，如果发生矛盾，则$\overline{a \to b}$ 不真，即可知 $a \to b$ 为真. 象这样证明 $a \to b$ 为真的证明方法，叫做**反证法**.

穷举法

作为反证法的应用，常用的方法有**穷举法**，例如，$x > 0, y > 0$ 时

$$\begin{cases} x > y \to x^2 > y^2 & ① \\ x = y \to x^2 = y^2 & ② \\ x < y \to x^2 < y^2 & ③ \end{cases}$$

成立，以此为基础，在证明这些命题的逆命题时，可用穷举法. 即当 $x > 0, y > 0$ 时，证明

① 的逆命题 $x^2 > y^2 \to x > y$

假设 x 不大于 y，则 $x\leqslant y$

若 $x<y$ 则由③得 $x^2<y^2$

若 $x=y$ 则由②得 $x^2=y^2$

都与假设 $x^2>y^2$ 相矛盾．因此①的逆命题是成立的．②，③可与此同样证明．

象这样“有一组真命题，对于假设的所有情况，结论中任意两个都不相容”时，则各命题的逆命题也是真的．这种推理方法就是穷举法．

提　　要

间接证明法

对偶法　代替 $a\to b$，证明 $\bar{b}\to\bar{a}$ 的方法．

反证法　代替 $a\to b$，对 $a\wedge\bar{b}$ 进行推理，导出矛盾，从而证明 $a\to b$ 为真的证明方法．

穷举法　一组命题 $a_1\to b_1, a_2\to b_2, a_3\to b_3$，为真，$a_1, a_2, a_3$ 是所有的情况，b_1, b_2, b_3 都互不相容时，证明逆命题 $b_1\to a_1, b_2\to a_2, b_3\to a_3$ 都为真的证明方法．

例题 26　(1) 反证法是代替 $a\to b$，证明

$$a\wedge\bar{b}\to O,\quad a\wedge\bar{b}\to\bar{a},\quad a\wedge\bar{b}\to b$$

的方法．试证这些命题都与 $a\to b$ 同值．

(2) (i) 设全集为整数集合，试述命题“如果 x^2 是 3 的倍数，则 x 是 3 的倍数”的逆否命题．再用对偶法证明原命题．

(ii) 试证“若 x，y 是实数，$x+y>2$，则在 x，y 中至少有一个比 1 大”．

提示 (2) (i) $a\to b$ 的逆否命题是$\bar{b}\to\bar{a}$

(ii) 用反证法证明"在 x, y 中至少有一个比 1 大"的否定是"x, y 同时小于 1"。

解 (1) $(a\wedge\bar{b})\to O=\overline{(a\wedge\bar{b})}\vee O$

$$=(\bar{a}\vee b)\vee O=\bar{a}\vee b=a\to b$$

$$(a\wedge\bar{b})\to\bar{a}=\overline{(a\wedge\bar{b})}\vee\bar{a}$$

$$=(\bar{a}\vee b)\vee\bar{a}=\bar{a}\vee b=a\to b$$

$$(a\wedge\bar{b})\to b=\overline{(a\wedge\bar{b})}\vee b$$

$$=(\bar{a}\vee b)\vee b=\bar{a}\vee b=a\to b$$

(2) (i) "若 x^2 是 3 的倍数，则 x 是 3 的倍数"的逆否命题是"若 x 不是 3 的倍数,则 x^2 不是 3 的倍数".

证明：因为全集是整数，x 不是 3 的倍数,所以可令

$$x=3m\pm1\quad(m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

则 $x^2=(3m\pm1)^2=9m^2\pm6m+1=3(3m^2\pm2m)+1$

因为 $3m^2\pm2m$ 是整数,所以，x^2 不是 3 的倍数．因此这个逆否命题为真,所以原命题为真.

(ii) 假设"当 x, y 是实数,$x+y>2$ 时,在 x, y 中至少有一个比 1 大"不成立,则 x, y 都不比 1 大,即

$$x\leqslant1\quad y\leqslant1\quad\therefore\quad x+y\leqslant2$$

这与假设相矛盾．因此,在 x, y 中至少有一个比 1 大．所以这个命题成立.

注意 这个反证法是根据(1)的 $a\wedge\bar{b}\to\bar{a}$

发展题

根据穷举法能否说下列各组命题(都是真的)的逆命题成

立？若是不成立，说明不符合哪些条件.

(1) $\begin{cases} x<-1\to x^2>1 & ① \\ -1<x<1\to x^2<1 & ② \\ x=\pm 1\to x^2=1 & ③ \\ x>1\to x^2>1 & ④ \end{cases}$

(2) 在二次方程中，

$\begin{cases} D>0\to \text{有实根} & ① \\ D<0\to \text{有虚根} & ② \end{cases}$

要点

要根据穷举法证明逆命题成立，必须满足

(i) 找出假设的一切可能的情况；

(ii) 任意二个结论都不相容.

解 (1) 逆命题不成立，因为在四个结论中①与④相容.

(2) 不能判定逆命题成立.

由于两个假设没有包括所有可能情况.

研究 如果把(1)化成下面三个命题，

$\begin{cases} x<-1 \text{ 或 } x>1\to x^2>1 \\ -1<x<1 \qquad\to x^2<1 \\ x=1 \text{ 或 } x=-1\to x^2=1 \end{cases}$

则它的逆命题都成立.

(2) 如果设

$\begin{cases} D>0\to \text{有相异二实根} \\ D=0\to \text{有重根} \\ D<0\to \text{有虚根} \end{cases}$

或 $\begin{cases} D\geqslant 0\to \text{有实根} \\ D<0\to \text{有虚根} \end{cases}$

则它的逆命题也成立.

练习 （解答在 162 页）

40. 试用对偶法证明，如果一次方程 $ax+b=0$ 只有一个根，必须 $a\neq 0$.

41. 试用反证法证明，若整数 m, n 都是奇数，则二次方程 $x^2+mx+n=0$ 没有整数根.

42. 试证明当 a, b 为有理数时，若 $a\sqrt{3}+b\sqrt{5}=0$，则 $a=0, b=0$.

习 题 (解答在170页)

—A—

34. 判别下列各命题的推理形式，指出其推理用的蕴涵命题，并判断其推理是否正确.

(1) 血压高的人早死，你的血压不高，所以你不能早死.

(2) $x^2<1\to-1<x<1$

$y^2<4\to-2<y<2$

$\therefore\quad x^2<1$ 且 $y^2<4\to-1<x<1$ 且 $-2<y<2$

35. 试用反证法证明，在整数 a, b, c 之间，若 $a^2+2b^2=c^2$ 成立，则 b 或 c 是3的倍数.

36. 有半径分别为 r, r'，圆心距为 d 的两个圆.

(1) 若它们互相外离，则 $d>r+r'$

(2) 若外切，则 $d=r+r'$

(3) 若相交，则 $r\sim r'<d<r+r$

(4) 若内切 则 $d=r\sim r'$

(5) 若一个完全在另一个之内，则 $d<r\sim r'$

试证这些关系的逆命题成立. 其中"～"表示 r, r' 中由较大的减去较小的差.

—B—

37. 试用反证法证明，若 p, q，都是正整数，则二次方程

$$x^2+px+q-1=0$$

$$x^2+(p-1)x+q=0$$

没有相同的根.

38. 要用反证法证明，"当 a, b 为奇数时，二次方程 $x^2+ax+b=0$ 的二根都不是整数"，试用下列两种方法证明.

(1) 由根与系数的关系.

(2) 设 $f(x)=x^2+ax+b$ 由给出 x 的值是奇数和偶数.

39. 证明：方程 $x^5-x-1=0$ 无有理数根.

40. 设二次函数 $f(x)=x^2+ax+b$，当 $x=1$，2，3 时，试证其绝对值 $|f(1)|, |f(2)|, |f(3)|$ 中至少有一个值不小于 $\frac{1}{2}$. 其中 a, b 为常数.

练习题解答

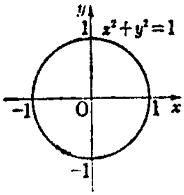
1. (i) 解 $x^3-x=0$, $x(x^2-1)=0$ $\therefore$ $x=0,\ 1,\ -1$

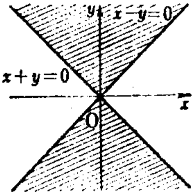
因此得 $\{0,\ 1,\ -1\}$

(ii) 解 $n^2-2n<8$, $n^2-2n-8<0$, $(n-4)(n+2)<0$ $\therefore$ $-2<n<4$, 因为 n 是奇数, 所以 $n=-1, 1, 3$. 因此得 $\{-1, 1, 3\}$

2. (i) $x^2+y^2=1$ 是以原点为圆心, 半径为 1 的圆.

(ii) $\because$ $x^2-y^2\leqslant 0$ $\therefore$ $(x+y)(x-y)\leqslant 0$. 所以, 是由二直线 $x+y=0$, $x-y=0$ 所形成的图形如下图阴影部分(包含边界).





3. $\because$ $x^5-25x=0$ $\therefore$ $x(x^4-25)=0$, $x(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})(x^2+5)=0$

$$\therefore\quad x=0, x=\pm\sqrt{5}, x=\pm\sqrt{5}\,i$$

(i) $\{0, \sqrt{5}, -\sqrt{5}, \sqrt{5}\,i, -\sqrt{5}i\}$

(ii) $\{0, \sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$

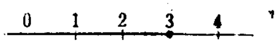
(iii) $\{0\}$

(iv) $\{\sqrt{5}\}$

4. $\overline{\varnothing}=U, \overline{U}=\varnothing$

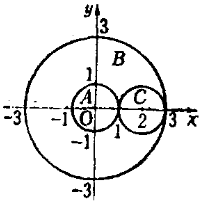
5. $\because$ $x^3-27>0$ $\therefore$ $(x-3)(x^2+3x+9)>0$, $(x-3)\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{4}\right]>0$, 而 $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{4}>0$, 所以 $x>3$, $\therefore$ $A=\{x\,|\,x>3\}$

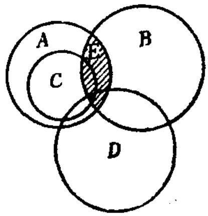
因此, $\overline{A}=\{x\,|\,x\leqslant 3\}$, 即 $\overline{A}$ 是右图数轴上的粗线部分.



6. A, B, C 用平面坐标上的图形表示, 如下页上左图各圆的内部, 由图

形可知 A, B, C 及 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 每两个之间的包含关系为 $A\subset B, C\subset B$, $A\subset\bar{C}$, $\bar{B}\subset\bar{A}$, $\bar{B}\subset\bar{C}$, $C\subset\bar{A}$





7. 在 A, C 之间 $C\subset A$ 成立，并且 E 是 A 和 B 的公共部分. 此外，每两个集合之间无特殊关系. 因此，文氏图如上右图所示.

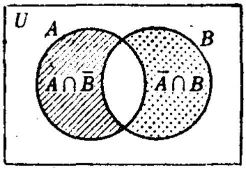
8. 设相异的两个空集为 $\varnothing_1, \varnothing_2$, 由定义可知 $\varnothing_1\subset\varnothing_2$, $\varnothing_2\subset\varnothing_1$, 因而根据与子集相等的关系，得 $\varnothing_1=\varnothing_2$, 这与假设矛盾，所以空集只有一个.

9. $(A\cap\bar{B})\cap(\bar{A}\cap B)=\{(\bar{B}\cap A)\cap\bar{A}\}\cap B=\{\bar{B}\cap(A\cap\bar{A})\}\cap B$

$=(\bar{B}\cap\varnothing)\cap B=\varnothing\cap B=\varnothing$,

因此，$A\cap\bar{B}$ 与 $\bar{A}\cap B$ 互质.

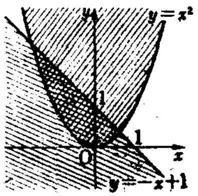
［注意］ 用文氏图表示如右图，则更加明显.



10. 所谓 27, 36, 42 的公约数的集合，就是指既是 27 的约数，也是 36 的约数，又是 42 的约数的集合. 因此，A, B, C 的公共部分就是 $A\cap B\cap C$

［注意］ 实际上 $A\cap B\cap C=\{1, 3\}$

11. 因为集合 A 在抛物线 $y=x^2$ 上及其上方，集合 B 在直线 $y=-x+1$ 上及其下方，所以，$A\cap B$ 是公共部分. 如右图的二重阴影部分和它的边界.



12. ∵ $A=\{1, 2, 3, 6\}, B=\{1, 2, 5, 10\}, C=\{1, 3, 5, 15\}$

∴ $A\cup B=\{1, 2, 3, 5, 6, 10\}, A\cup C=\{1, 2, 3, 5, 6, 15\}$

13. ∵ $x\geqslant y$ 即 $x>y$ 或 $x=y$

$\therefore \quad P=\{(x,y)|x\geqslant y\}=\{(x,y)|x>y$ 或 $x=y\}$

$=\{(x,y)|x>y\}\cup\{(x,y)|x=y\}=A\cup C$

$x\neq y$ 即 $x>y$ 或 $x<y$

$\therefore \quad Q=\{(x,y)|x\neq y\}=\{(x,y)|x>y$ 或 $x<y\}$

$=\{(x,y)|x>y\}\cup\{(x,y)|x<y\}=A\cup B$

14. $(A-B)\cap(B-A)=(A\cap\bar{B})\cap(B\cap\bar{A})=\{(A\cap\bar{B})\cap B\}\cap\bar{A}$

$=\{A\cap(\bar{B}\cap B)\}\cap\bar{A}=(A\cap\varnothing)\cap\bar{A}=\varnothing\cap\bar{A}=\varnothing$

15. 由定义得 $A-B=A\cap\bar{B}$，由 4 的说明（参看 21 页），得

$A\subset B\rightleftarrows A\cap\bar{B}=\varnothing$ 所以 $A\subset B\rightleftarrows A-B=\varnothing$

16. (i) $\overline{A\cup B\cup C}=\overline{(A\cup B)\cup C}$ （∵ 结合律）

$=\overline{(A\cup B)}\cap\bar{C}$ （∵ 德·摩尔根定律）

$=(\bar{A}\cap\bar{B})\cap\bar{C}$ （∵ 德·摩尔根定律）

$=\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$ （∵ 结合律）

(ii) $(A-B)\cap(A-C)=(A\cap\bar{B})\cap(A\cap\bar{C})$ （∵ 差的定义）

$=(A\cap A)\cap(\bar{B}\cap\bar{C})$ （∵ 结合、交换律）

$=A\cap(\bar{B}\cap\bar{C})$ （∵ 等幂律）

$=A\cap(\overline{B\cup C})$ （∵ 德·摩尔根定律）

$=A-(B\cup C)$ （∵ 差的定义）

(iii) $(A-B)\cup(A-C)=(A\cap\bar{B})\cup(A\cap\bar{C})$ （∵ 差的定义）

$=A\cap(\bar{B}\cup\bar{C})$ （∵ 分配律）

$=A\cap(\overline{B\cap C})$ （∵ 德·摩尔根定律）

$=A-(B\cap C)$ （∵ 差的定义）

17. $(A\cap B)\cup(\bar{A}\cap\bar{B})\cup(A-B)\cup(B-A)$

$=(A\cap B)\cup(\bar{A}\cap\bar{B})\cup(A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A})$

$=\{(A\cap B)\cup(A\cup\bar{B})\}\cup\{(\bar{A}\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A})\}$

$=\{A\cap(B\cup\bar{B})\}\cup\{\bar{A}\cap(\bar{B}\cup B)\}$

$=(A\cap U)\cup(\bar{A}\cap U)=A\cup\bar{A}=U$

其次，研究每两个的交集，得

$(A\cap B)\cap(\bar{A}\cap\bar{B})=(A\cap\bar{A})\cap(B\cap\bar{B})=\varnothing\cap\varnothing=\varnothing$

$(A\cap B)\cap(A-B)=(A\cap B)\cap(A\cap\bar{B})=A\cap(B\cap\bar{B})=A\cap\varnothing=\varnothing$

$(A\cap B)\cap(B-A)=(A\cap B)\cap(B\cap\bar{A})=(A\cap\bar{A})\cap B=\varnothing\cap B=\varnothing$

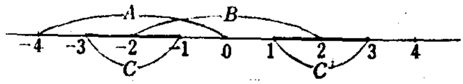
$(\bar{A}\cap\bar{B})\cap(A-B)=(\bar{A}\cap\bar{B})\cap(A\cap\bar{B})=(A\cap\bar{A})\cap\bar{B}=\varnothing\cap\bar{B}=\varnothing$

$(\bar{A}\cap\bar{B})\cap(B-A)=(\bar{A}\cap\bar{B})\cap(B\cap\bar{A})=\bar{A}\cap(B\cap\bar{B})=\bar{A}\cap\varnothing=\varnothing$

$$(A-B)\cap(B-A)=(A\cap\bar{B})\cap(B\cap\bar{A})=(A\cap\bar{A})\cap(B\cap\bar{B})$$
$$=\varnothing\cap\varnothing=\varnothing$$

因此，$A\cap B,\bar{A}\cap\bar{B},A-B,B-A$ 的并集为 U、其中任意两个的交集都是 $\varnothing$. 所以，U 可划分为四个集合. 如作出文氏图就更加明显.

18. (1) 因为 $A=\{x\mid -4<x<0\}$

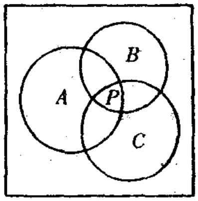


$B=\{x\mid -2<x<2\}$

$C=\{x\mid -3<x<-1$ 或 $1<x<3\}$

$=\{x\mid -3<x<-1\}\cup\{x\mid 1<x<3\}$

所以用数轴表示如右上图. 又因 A,B,C 之间没有包含关系，文氏图如右图.



(2) 因为 P 是 A,B,C 的公共部分，所以 $P=A\cap B\cap C$

19. $A\times B$ 的元素为

(红，正方形)，(红，三角形)，(红，圆)，(黄，正方形)，(黄，三角形)，(黄，圆)，(蓝，正方形)，(蓝，三角形)，(蓝，圆)共有 9 个.

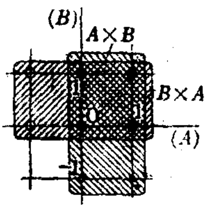
由计算得出 $n(A\times B)=n(A)\times n(B)=3\times3=9$

20. $A\times B=\{(0,-1),(0,0),(0,1),(1,-1),(1,0),(1,1)\}$

$B\times A=\{(-1,0),(-1,1),(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$

如右图(平面坐标上横纵坐标都是整数的点叫做格子点)所示，因此，

$$A\times B\neq B\times A$$



21. 下列各命题是由“　”中的简单命题所组成的.

(1) “这个蔷薇是红色”且“那个蔷薇是白色”.

(2) “他从新干线去”或“他乘飞机去”.

(3) 若“下雨”则“打伞”.

(4) 若“某整数是奇数”则“这个整数的平方是奇数”.

(5) 不是“$2+3\sqrt{5}$ 是有理数”.

22. 这个命题可用否定¯与连言$\wedge$表示.

$$\overline{(今井不会德语)\wedge(今井不会法语)}$$
$$=(\overline{今井会德语})\wedge(\overline{今井会法语})$$

23. (i) 真值表如下.

a	b	$a\vee b$	$a\wedge(a\vee b)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	F
F	F	F	F

$a\wedge(a\vee b)$的真假与 a 的真假完全相同.

$\therefore\ a\wedge(a\vee b)=a$

(ii) 真值表如下所示，因为 $\overline{a\vee b}$ 的真假与 $\bar{a}\wedge\bar{b}$ 的真假完全相同.

a	b	$a\vee b$	$\overline{a\vee b}$	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{a}\wedge\bar{b}$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

$\therefore\ \overline{a\vee b}=\bar{a}\wedge\bar{b}$

24. (i) $(a\vee b)\vee(a\vee c)$

$=a\vee\{b\vee(a\vee c)\}$　　(结合律)

$=a\vee\{(b\vee a)\vee c\}$　　(结合律)

$=a\vee\{(a\vee b)\vee c\}$　　(交换律)

$=a\vee\{a\vee(b\vee c)\}$　　(结合律)

$=(a\vee a)\vee(b\vee c)$　　(结合律)

$=a\vee(b\vee c)$　　(等幂律)

$=(a\vee b)\vee c$　　(结合律)

$=a\vee b\vee c$　　(定义)

(ii) $\overline{a\wedge(b\vee c)}=\bar a\vee\overline{(b\vee c)}$　　(德·摩尔根定律)

$=\bar a\vee(\bar b\wedge\bar c)$　　(德·摩尔根定律)

(iii) $\overline{(a\wedge b)\vee(a\wedge c)}=\overline{(a\wedge b)}\wedge\overline{(a\wedge c)}$　(德·摩尔根定律)

$=(\bar a\vee\bar b)\wedge(\bar a\vee\bar c)$　(德·摩尔根定律)

25. 作出真值表如下.

a	b	$a\to b$	$a\vee b$	$(a\vee b)\to b$	$b\to(a\vee b)$	$(a\vee b)\rightleftarrows b$
T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	F
F	T	T	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T

$\therefore\quad (a\to b)=\{(a\vee b)\rightleftarrows b\}$

26. $(a\to b)\to c=\overline{(a\to b)\wedge\bar c}=\overline{\overline{\overline{(a\wedge\bar b)}}\wedge\bar c}=(a\wedge\bar b)\vee\bar{\bar c}=(a\wedge\bar b)\vee c$

$a\to(b\to c)=\overline{a\wedge\overline{(b\to c)}}=\overline{a\wedge\overline{\overline{(b\wedge\bar c)}}}=\bar a\vee\overline{(b\wedge\bar c)}=\bar a\vee(\bar b\vee c)$

$=\bar a\vee\bar b\vee c$

因此,不能说是同值.

27. (1) $a\to(a\vee b)=\bar a\vee(a\vee b)=(\bar a\vee a)\vee b=I\vee b=I$

即, $a\to(a\vee b)$恒真.

(2) 首先, $a\wedge(a\to b)=a\wedge(\bar a\vee b)=(a\wedge\bar a)\vee(a\wedge b)=O\vee(a\wedge b)$

$$=a\wedge b$$

因此，$\{a\wedge(a\to b)\}\to b=(a\wedge b)\to b=\overline{(a\wedge b)}\vee b=(\bar{a}\vee\bar{b})\vee b$

$$=\bar{a}\vee(\bar{b}\vee b)=\bar{a}\vee I=I$$

即，$\{a\wedge(a\to b)\}\to b$ 恒真.

28. (1) $(a\vee b)\wedge(\bar{a}\vee b)=(a\wedge\bar{a})\vee b=O\vee b=b$

(2) $a\to b=\bar{a}\vee b,\ \bar{b}\to\bar{a}=\bar{\bar{b}}\vee\bar{a}=b\vee\bar{a}=\bar{a}\vee b$

$$\therefore\quad (a\to b)=(\bar{b}\to\bar{a})$$

29. 在“ ”中是简单条件命题，它们之间的词语是连结词语.

若{“$x(x-4)<0$”且[“$(x-1)(x-3)>0$”或“$(x-1)(x-3)=0$”]}

则{[“$x>0$” 且(“$x<1$” 或 “$x=1$”)] 或 [(“$x>3$” 或 “$x=3$”)且 “$x<4$”]}

30. $\because\quad A=\{x\,|\,x$ 是奇数，x 是从 1 到 10 的自然数$\}=\{1,3,5,7,9\}$

$B=\{x\,|\,x$ 是质数，x 是从 1 到 10 的自然数$\}=\{2,3,5,7\}$

$\therefore\quad \{7,5,3\}=\{3,5,7\}=\{1,3,5,7,9\}\cap\{2,3,5,7\}=A\cap B$

因此，条件命题为

“x 是奇数且是质数，其中 x 是由 1 到 10 的自然数”

31. 因为是在平面坐标上考虑，所以

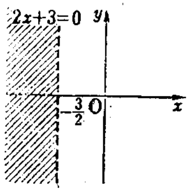
(i) $a(x,y):2x+3\geqslant 0$ 的真值集合为

$\{(x,y)\,|\,2x+3\geqslant 0\}=\left\{(x,y)\,|\,x\geqslant-\dfrac{3}{2}\right\}$

因此，$\overline{a(x,y)}$ 的真值集合为

$$\overline{\{(x,y)\,|\,2x+3\geqslant 0\}}=\overline{\left\{(x,y)\,|\,x\geqslant-\frac{3}{2}\right\}}=\left\{(x,y)\,|\,x<-\frac{3}{2}\right\}$$

如右图阴影部分.



(ii) $b(x,y):x^2+y^2-4x-2y+1>0$ 的真值集合为

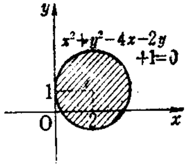
$$\{(x,y)\,|\,x^2+y^2-4x-2y+1>0\}$$
$$=\{(x,y)\,|\,(x-2)^2+(y-1)^2>4\}$$

因此，$\overline{b(x,y)}$的真值集合为

$$\overline{\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2-4x-2y+1>0\}}$$
$$=\overline{\{(x,\ y)\,|\,(x-2)^2+(y-1)^2>4\}}$$

$$=\{(x,y)\mid(x-2)^2+(y-1)^2\leqslant4\}$$

如右图阴影部分.



32. 设 $a(x,y)$, $b(x,y)$的真值集合分别为 A, B, 则

$$A=\{(x,y)\mid-1\leqslant x+y\leqslant1\}$$

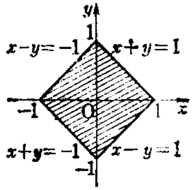
$$B=\{(x,y)\mid-1\leqslant x-y\leqslant1\}$$

所以,条件命题"$a(x,y)\wedge b(x,y)$"的真值集合为

$$\{(x,y)\mid a(x,y)\wedge b(x,y)\}$$

$$=\{(x,y)\mid(-1\leqslant x+y\leqslant1)\text{且}(-1\leqslant x-y\leqslant1)\}=A\cap B$$

如右图所示,其面积为 2.



33. (1) $\forall x,\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\geqslant2\right)$

(2) $\exists x,\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}=2\right)$

(3) $\forall\theta,(\sin^2\theta+\cos^2\theta=1)$

(4) $\exists x,(x^3+mx+n=0$, x 是实数)

34. (1) 某质数不是奇数,或者,有非奇数的质数.

(2) 对于所有的实数 x, $x^2+x-1>0$

(3) $x^2-2mx+m-1=0$ 存在有解为虚根的实数 m. 或,对某实数 m, 方程 $x^2-2mx+m-1=0$ 有虚根.

35. (1) 令 $A=\{x\mid x^2+x<2\}$, $B=\{x\mid x^2-x<2\}$

则由 $x^2+x<2$ 得$x^2+x-2<0$, $(x-1)(x+2)<0$

$$\therefore\quad -2<x<1$$

由 $x^2-x<2$ 得

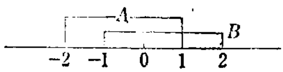
$$x^2-x-2<0,\quad(x+1)(x-2)<0$$

$$\therefore\quad -1<x<2$$

于是,$A=\{x\mid-2<x<1\}$, $B=\{x\mid-1<x<2\}$

$$\therefore\quad A\not\subset B$$

(1)



因此,这个命题为假.

(2) 令 $C=\{x\mid x^2-3x+2<0\}$,

$D=\{x\mid x^2+3x+2>0\}$, 则

$x^2-3x+2<0$, $(x-1)(x-2)<0$ $\quad\therefore\quad 1<x<2$

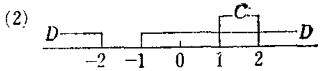
$x^2+3x+2>0$, $(x+1)(x+2)>0$ $\quad\therefore\quad x<-2, x>-1$

于是，$C=\{x\,|\,1<x<2\}$

$$D=\{x\,|\,(x<-2)\vee(x>-1)\}$$
$$=\{x\,|\,x<-2\}\cup\{x\,|\,x>-1\}$$

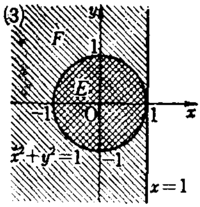
从而，$C\subset D$ 成立，所以，

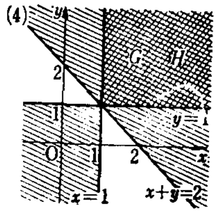
这个命题为真.



(3) 令 $E=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$, $F=\{(x,y)\,|\,x\leqslant 1\}$

在平面坐标上，E,F 如下左图所示. 所以，$E\subset F$ 成立，因此，这个命题为真.





(4) 令 $G=\{(x,y)\,|\,x+y\geqslant 2$ 且 $(x-1)(y-1)\geqslant 0\}$

$$=\{(x,y)\,|\,x+y\geqslant 2\wedge(x-1)(y-1)\geqslant 0\}$$
$$=\{(x,y)\,|\,x+y\geqslant 2\}\cap\{(x,y)\,|\,(x-1)(y-1)\geqslant 0\}$$

$H=\{(x,y)\,|\,x\geqslant 1$ 且 $y\geqslant 1\}$

$$=\{(x,y)\,|\,x\geqslant 1\wedge y\geqslant 1\}$$
$$=\{(x,y)\,|\,x\geqslant 1\}\cap\{(x,y)\,|\,y\geqslant 1\}$$

在平面坐标上，如上右图所示.

因为，$G=H$，所以 $G\subset H$，所以，这个命题为真.

36. (1) 逆："若 $xz=yz$ 则 $x=y$"假(反例，$x=1, y=2, z=0$)

否："若 $x\neq y$ 则 $xz\neq yz$"假(反例，$x=1, y=2, z=0$)

逆否："若 $xz\neq yz$ 则 $x\neq y$"真

(2) 逆："四边相等的四边形是正方形" 假 (反例，菱形)

否："如果不是正方形，那么四边不等" 假 (反例，菱形)

逆否："如果四边不等，那么就不是正方形" 真

［注意］ 不论是以所有的四边形或是以所有的平行四边形为全集，其逆和否均为假. 如果以对角线长相等的所有四边形为全集，则其逆和否均为真. 但是，通常不能把这种特殊情况作为全集. 全集多是由题意来判断的.

(3) 逆："如果 x 的二次方程 $x^2+x-p=0$ 有实根，则 $p>0$" 假

否："若 $p\leqslant 0$，则 x 的二次方程 $x^2+x-p=0$ 没有实根" 假

逆否："如果 x 的二次方程 $x^2+x-p=0$ 没有实根，则 $p\leqslant 0$" 真

37. 当 $A\subset B$ 成立时，$a(x)\to b(x)$ 成立，所以，$a(x)$ 是使 $b(x)$ 成立的充分条件. ($\because$ $B\not\subset A$ $\therefore$ $b(x)\not\to a(x)$)

38. (1) $(x=1)\to(x^2-x=0)$ 为真，$(x^2-x=0)\to(x=1)$ 为假（反例，$x=0$）

(2) $(|x-1|\leqslant 5)\rightleftarrows(-5\leqslant x-1\leqslant 5)\rightleftarrows(-4\leqslant x\leqslant 6)$ 为真

(3) $(x>2, y>3)\to(x+y>5)$ 为真

$(x+y>5)\to(x>2, y>3)$ 为假（反例，$x=1, y=6$）

(4) $\{(x=6)\vee(x=1)\}\to(\sqrt{x+3}=x-3)$ 为假（反例，$x=1$）

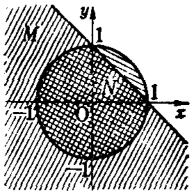
$(\sqrt{x+3}=x-3)\to\{(x=6)\vee(x=1)\}$ 为真

(5) $(x+y\leqslant 1)\to(x^2+y^2\leqslant 1)$ 为假（反例，$x=-1, y=-2$）

$(x^2+y^2\leqslant 1)\to(x+y\leqslant 1)$ 为假 $\left(\text{反例}, x=y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

注意 令 $M=\{(x, y)\mid x+y\leqslant 1\}$

$N=\{(x, y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$



从右图得知 $M\not\subset N$, $N\not\subset M$，因此，(1) 充分 (2) 充分必要 (3)充分 (4) 必要 (5) 不必要也不充分

39. 设"$m+1$ 是 5 的倍数"，"$5m+1$ 是 5 的倍数"分别为 a, b，则推理形式为

$$a\vee b,\ \bar{b}\Rightarrow a$$

于此，所用的命题是 $\{(a\vee b)\wedge\bar{b}\}\to a$

$\{(a\vee b)\wedge\bar{b}\}\to a=\overline{\{(a\vee b)\wedge\bar{b}\}}\vee a=\{(\bar{a}\wedge\bar{b})\vee b\}\vee a$

$$=\{(\bar{a}\vee b)\wedge(\bar{b}\vee b)\}\vee a=\{(\bar{a}\vee b)\wedge I\}\vee a$$
$$=(\bar{a}\vee b)\vee a=(\bar{a}\vee a)\vee b=I\vee b=I$$

因此,命题恒真,所以,这个推理是正确的.

40. 设 $a=0$, 则 $0\cdot x+b=0$, 当 $b\neq 0$ 时无解, 当 $b=0$ 时有无数解. 因此,

若 $a=0$, 则 $ax+b=0$ 不能有唯一解,

于是,取它的逆否命题, 即 $ax+b=0$ 有唯一解, 则 $a\neq 0$

41. 若一个根 α 是整数, 则另一个根 $\beta=-m-\alpha$ 也是整数.

$$\alpha+\beta=-m,\quad \alpha\beta=n$$

由 $\alpha\beta=n=$奇数, 所以, α, β 都是奇数, $\alpha+\beta=-m=$偶数, 这与假设矛盾. 所以, 原方程无整数根(参照习题 38).

42. 假设不是 $a=0$, $b=0$, 则有 $a\neq 0$ 或 $b\neq 0$. 设 $a\neq 0$, 则由

$$a\sqrt{3}+b\sqrt{5}=0 \quad 得 \quad \frac{b}{a}=-\sqrt{\frac{3}{5}},$$

左边是有理数, 右边是无理数, 显然矛盾. 设 $b\neq 0$, 则同样可得 $\frac{a}{b}=-\sqrt{\frac{5}{3}}$是矛盾的. 因为每种情况都相矛盾, 因此, $a=0$, $b=0$

习 题 解 答

1. 构成集合的为(3),(4)

(3)的集合是全体实数,(4)的集合是空集.(1),(2)没有判断元素的标准.

2. (1),(2),(4)是属于集合A的元素.

(1) 是$-\frac{2}{3}+0\cdot\sqrt{2}$

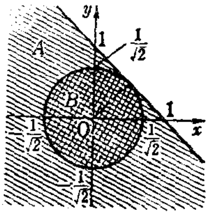
(2) 是将分母有理化得 $1-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

(4) 是开平方 得 $2-\sqrt{2}$

3. (1) $\{1,3,9\}$

(2) $n^2<2n+8$, $(n+2)(n-4)<0$ $\therefore$ $-2<n<4$, 因为n是整数,所以得集合$\{-1,0,1,2,3\}$

(3) $\{1,2,3\}$



4. 两个集合 A,B 在平面坐标上用图形表示出来,如右图所示.

$A\supset B$ (A,B 都包含边界)

5. (1) $A\cup B=\{1,2,3,4,6,8,9\}$

(2) $A\cap B=\{1,6\}$

(3) $\overline{A}=\{3,5,7,9\}$ $\therefore$ $\overline{A}\cup A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}=U$

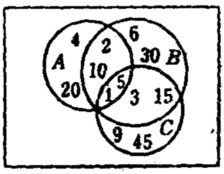
(4) $\overline{A}\cap B=\{3,9\}$ $\therefore$ $\overline{\overline{A}\cap B}=\{1,2,4,5,6,7,8\}$

(5) $\overline{A}\cup B=\{1,3,5,6,7,9\}$

6. 由 $A=\{1,2,4,5,10,20\}$

$B=\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$

$C=\{1,3,5,9,15,45\}$



作出文氏图如右图.

$A\cap B=\{1,2,5,10\}$

$A\cup C=\{1,2,3,4,5,9,10,15,20,45\}$

$(A\cap C)\cap\bar{B}=\varnothing$

7. $A\times B=\{(p,x),(p,y),(p,z),(q,x),(q,y),(q,z),(r,x),(r,y),(r,z)\}$ 是由 9 个元素构成的.

8. (1) $\overline{(A\cap B)\cup(A\cap C)}=\overline{(A\cap B)}\cap\overline{(A\cap C)}$ （德·摩尔根定律）

$=(\bar{A}\cup\bar{B})\cap(\bar{A}\cup\bar{C})$ （德·摩尔根定律）

$=\bar{A}\cup(\bar{B}\cap\bar{C})$ （分配律）

(2) $\overline{A-B}=\overline{(A\cap\bar{B})}$ （差的定义）

$=\bar{A}\cup\bar{\bar{B}}$ （德·摩尔根定律）

$=\bar{A}\cup B$ （补集）

9. 因为 $A\subset B$, 所以 $A\cap B=A$, 因此

$A\cap C=(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)=A\cap\varnothing=\varnothing$ 所以 A 与 C 互质.

10. $(A-B)\cup(B-A)\cup(A\cap B)=(A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A})\cup(A\cap B)$

$=\{(A\cap\bar{B})\cup(A\cap B)\}\cup(B\cap\bar{A})=\{A\cap(\bar{B}\cup B)\}\cup(B\cap\bar{A})$

$=(A\cap U)\cup(B\cap\bar{A})=A\cup(B\cap\bar{A})=(A\cup B)\cap(A\cup\bar{A})$

$=(A\cup B)\cap U=A\cup B$

又, $(A-B)\cap(B-A)=(A\cap\bar{B})\cap(B\cap\bar{A})$

$=(A\cap\bar{A})\cap(B\cap\bar{B})=\varnothing\cap\varnothing=\varnothing$

$(A-B)\cap(A\cap B)=(A\cap\bar{B})\cap(A\cap B)$

$=A\cap(\bar{B}\cap B)=A\cap\varnothing=\varnothing$

$(B-A)\cap(A\cap B)=(B\cap\bar{A})\cap(A\cap B)$

$=(A\cap\bar{A})\cap B=\varnothing\cap B=\varnothing$

于是, $A\cup B$ 可划分成 $A-B$, $B-A$, $A\cap B$

11. 设去 A 市人数用 $n(A)$ 表示, 由题意整理得

$n(A\cup B\cup C)=68$ ①

$n(B\cap C)=21,\ n(C\cap A)=19,\ n(A\cap B)=25$ ②

$n(B\cup C)=59,\ n(C\cup A)=56,\ n(A\cup B)=60$ ③

因为 $n(B\cup C)=n(B)+n(C)-n(B\cap C)$

由②, ⑧得 $n(B)+n(C)=59+21=80$ ④

同理 $n(C)+n(A)=19+56=75$ ⑤

$n(A)+n(B)=25+60=85$ ⑥

由④, ⑤, ⑥得

$$n(A)=40,\ n(B)=45,\ n(C)=35$$

因为 $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$
$-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

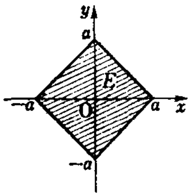
所以 $n(A\cap B\cap C)=68-120+21+19+25=13$

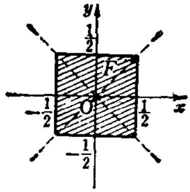
因此，顺次应填写为 40, 45, 35, 13

12. 集合 E, F 所表示的区域，分别包含边界，如下图的阴影部分.

(1) 为使 $E\subseteq F$, 则 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$

(2) 为使 $E\supseteq F$, 则 $a\geqslant 1$





13. (1) 设 $A=\{x|x<0\}, B=\{y|y>0\}$, 则 $A\cup B=\{z|z\neq 0\}\neq Z$

其次，证明 $C=Z$

设 $z\in Z$, 则必存在满足 $z>x$ 的 x, $x\in A$. 对于 x, 令 $z-x=y$, 则由 $y>0$ 得 $z=x+y, x\in A, y\in B$, $\therefore$ $z\in C$, 由此得

$$A=\{-1, -2, -3, \cdots\cdots\}\quad B=\{1, 2, 3, \cdots\cdots\}$$

(2) 设 $A=\{x|x\neq 0\}, B=\{0\}$, 则 $A\cup B=Z$

其次，证明 $C\neq Z$. 设 $0\in C$, 则 $0=x+y$, 设 $x\in A, y\in B$, 则在 $B=\{0\}$ 时 $y=0$, 所以 $x=0$, 这与 $x\neq 0$ 矛盾. 因此 $0\notin C$ $\therefore$ $C\neq Z$

由此得

$$A=\{\pm 1, \pm 2, \cdots\cdots\}\quad B=\{0\}$$

14. (1) 设 $x_1=a^2+b^2, x_2=c^2+d^2$ (a, b, c, d 为整数)

则 $$x_1\in M,\ x_2\in M$$

$$x_1x_2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$$
$$=(ac\mp bd)^2+(bc\pm ad)^2\quad\text{(复号同顺)}$$

因为 $ac\mp bd, bc\pm ad$ 都是整数，所以 $x_1x_2\in M$

(2) 因为 $a=4, b=5, c=3, d=7$

所以 $ac \mp bd=4\cdot3\mp5\cdot7=-23, 47$

因为 $bc \pm ad=5\cdot3\pm4\cdot7=43, -13$

所以 $(4^2+5^2)(3^2+7^2)=23^2+43^2$ 或 47^2+13^2

15. 可以说是命题的有：(1)(真),(2)(假)

对(3)这个命题为真为假都相矛盾,所以,不能判断真假. 因此,不能说是命题.

(4) 是不能够判别真假的句子.

16. (1) (24 是 3 的倍数)$\wedge$(24 是 4 的倍数)

(2) $(2+3\sqrt{3}>0)\vee(2+3\sqrt{3}=0)$

(3) (四边形是菱形)$\rightarrow$(这个四边形的四边相等)

17. (1) $\overline{(a\vee b)\wedge(a\vee c)}=\overline{(a\vee b)}\vee\overline{(a\vee c)}$ (德·摩尔根定律)

$=(\bar{a}\wedge\bar{b})\vee(\bar{a}\wedge\bar{c})$ (德·摩尔根定律)

$=\bar{a}\wedge(\bar{b}\vee\bar{c})$ (分配律)

(2) 因为 $(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)=(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)$ (第 73 页的发展题),所以

$\overline{(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)}$

$=\overline{(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)}$

$=\overline{(a\vee b)}\vee\overline{(b\vee c)}\vee\overline{(c\vee a)}$ (德·摩尔根定律)

$=(\bar{a}\wedge\bar{b})\vee(\bar{b}\wedge\bar{c})\vee(\bar{c}\wedge\bar{a})$ (德·摩尔根定律)

18. (1) $a\wedge(\bar{a}\vee b)=(a\wedge\bar{a})\vee(a\wedge b)$ (分配律)

$=O\vee(a\wedge b)$ (O的性质)

$=a\wedge b$ (O的性质)

(2) $(a\wedge b)\vee(\bar{a}\wedge b)=(a\vee\bar{a})\wedge b$ (分配律)

$=I\wedge b$ (I 的性质)

$=b$ (I 的性质)

(3) $(a\wedge(a\wedge b)=(a\wedge a)\wedge b$ (结合律)

$=a\wedge b$ (同一律)

19. (1) $(a\rightarrow b)\rightarrow\{(a\wedge c)\rightarrow(b\wedge c)\}=(\bar{a}\vee b)\rightarrow\{\overline{(a\wedge c)}\vee(b\wedge c)\}$

$=\overline{(\bar{a}\vee b)}\vee\{\overline{(a\wedge c)}\vee(b\wedge c)\}=(a\wedge\bar{b})\vee(\bar{a}\vee\bar{c})\vee(b\wedge c)$

$$=\{(a\wedge\bar{b})\vee(\bar{a}\vee\bar{c})\}\vee(b\wedge c)$$
$$=\{a\vee(\bar{a}\vee\bar{c})\}\wedge\{\bar{b}\vee(\bar{a}\vee\bar{c})\}\vee(b\wedge c)$$
$$=\{I\wedge(\bar{b}\vee\bar{a}\vee\bar{c})\}\vee(b\wedge c)=(\bar{b}\vee\bar{a}\vee\bar{c})\vee(b\wedge c)$$
$$=\{\bar{a}\vee(\bar{b}\vee\bar{c})\}\vee(b\wedge c)=\{\bar{a}\vee\overline{(b\wedge c)}\}\vee(b\wedge c)=\bar{a}\vee I=I$$

(2) $(a\to b)\to\{(a\vee c)\to(b\vee c)\}=(\bar{a}\vee b)\to\{\overline{(a\vee c)}\vee(b\vee c)\}$
$$=\overline{(\bar{a}\vee b)}\vee\{\overline{(a\vee c)}\vee(b\vee c)\}=(a\wedge\bar{b})\vee(\bar{a}\wedge\bar{c})\vee(b\vee c)$$
$$=\{(a\wedge\bar{b})\vee b\}\vee\{c\vee(\bar{a}\wedge\bar{c})\}=(a\vee b)\vee(c\vee\bar{a})$$
$$=(a\vee\bar{a})\vee(b\vee c)=I\vee(b\vee c)=I$$

(3) $\{(a\to b)\wedge(c\to d)\}\to\{(a\wedge c)\to(b\wedge d)\}$
$$=\{(\bar{a}\vee b)\wedge(\bar{c}\vee d)\}\to\{(\bar{a}\vee\bar{c})\vee(b\wedge d)\}$$
$$=(a\wedge\bar{b})\vee(c\wedge\bar{d})\vee(\bar{a}\vee\bar{c})\vee(b\wedge d)$$
$$=\{\bar{a}\vee(a\wedge\bar{b})\}\vee\{\bar{c}\vee(c\wedge\bar{d})\}\vee(b\wedge d)$$
$$=(\bar{a}\vee\bar{b})\vee(\bar{c}\vee\bar{d})\vee(b\wedge d)$$
$$=\bar{a}\vee\bar{c}\vee\bar{d}\vee\{\bar{b}\vee(b\wedge d)$$
$$=\bar{a}\vee\bar{c}\vee\bar{d}\vee(\bar{b}\vee d)=I$$

(4) $\{(a\to b)\wedge(c\to d)\}\to\{(a\vee c)\to(b\vee d)\}$
$$=\{(\bar{a}\vee b)\wedge(\bar{c}\vee d)\}\to\{(\bar{a}\wedge\bar{c})\vee(b\vee d)\}$$
$$=(a\wedge\bar{b})\vee(c\wedge\bar{d})\vee(\bar{a}\wedge\bar{c})\vee(b\vee d)$$
$$=\{b\vee(a\wedge\bar{b})\}\vee\{d\vee(c\wedge\bar{d})\}\vee(\bar{a}\wedge\bar{c})$$
$$=(b\vee a)\vee(d\vee c)\vee(\bar{a}\wedge\bar{c})$$
$$=\{a\vee(\bar{a}\wedge\bar{c})\}\vee b\vee d\vee c$$
$$=(a\vee\bar{c})\vee b\vee d\vee c=I$$

20. (1) $(a\wedge b)\rightleftarrows a=\{(a\wedge b)\to a\}\wedge\{a\to(a\wedge b)\}$
$$=\{\overline{(a\wedge b)}\vee a\}\wedge\{\bar{a}\vee(a\wedge b)\}$$
$$=\{(\bar{a}\vee\bar{b})\vee a\}\wedge\{(\bar{a}\vee a)\wedge(\bar{a}\vee b)$$
$$=I\wedge\{I\wedge(\bar{a}\vee b)\}$$
$$=\bar{a}\vee b=a\to b$$

(2) $(a\vee b)\rightleftarrows b=\{(a\vee b)\to b\}\wedge\{b\to(a\vee b)\}$
$$=\{\overline{(a\vee b)}\vee b\}\wedge\{\bar{b}\vee(a\vee b)$$

$=\{(\bar{a}\wedge\bar{b})\vee b\}\wedge I=(\bar{a}\vee b)\wedge(\bar{b}\vee b)$

$=(\bar{a}\vee b)\wedge I=\bar{a}\vee b=a\to b$

21. $a\rightleftarrows b=(a\to b)\wedge(b\to a)=(\bar{a}\vee b)\wedge(\bar{b}\vee a)$

$=\{\bar{a}\wedge(\bar{b}\vee a)\}\vee\{b\wedge(\bar{b}\vee a)\}$

$=\{(\bar{a}\wedge\bar{b})\vee(\bar{a}\wedge a)\}\vee\{(b\wedge\bar{b})\vee(b\wedge\bar{a})\}$

$=\{(\bar{a}\wedge\bar{b})\vee O\}\vee\{O\vee(b\wedge a)\}$

$=(\bar{a}\wedge\bar{b})\vee(b\wedge a)=(a\wedge b)\vee(\bar{a}\wedge\bar{b})$

22. 可用$(a\wedge b)\to\{(a\wedge c)\vee(b\wedge\bar{c})\}$表示.

$(a\wedge b)\to\{(a\wedge c)\vee(b\wedge\bar{c})\}=(\bar{a}\vee\bar{b})\vee(a\wedge c)\vee(b\wedge\bar{c})$

$=\{\bar{a}\vee(a\wedge c)\}\vee\{\bar{b}\vee(b\wedge\bar{c})\}=(\bar{a}\vee c)\vee(\bar{b}\vee\bar{c})$

$=(\bar{a}\vee\bar{b})\vee(c\vee\bar{c})=I$

23. 可用$(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(\bar{a}\wedge c)$和$(a\wedge b)\vee(\bar{a}\wedge c)$表示.

$(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(\bar{a}\wedge c)$

$=(a\wedge b)\vee\{(b\wedge c)\wedge(a\vee\bar{a})\}\vee(\bar{a}\wedge c)$

$=\{(a\wedge b)\vee(b\wedge c\wedge a)\}\vee\{(b\wedge c\wedge\bar{a})\vee(\bar{a}\wedge c)\}$

$=(a\wedge b)\vee(\bar{a}\wedge c)$

24. (1) $\{x\mid x^2\geqslant 0\}=U$　　(2) $\{x\mid x^2>0\}=\{x\mid x\neq 0\}$

(3) $\{x\mid x^2\leqslant 0\}=\{0\}$　　(4) $\{x\mid x^2<0\}=\varnothing$

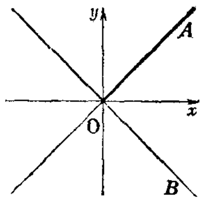
25. (1) 令 $A=\{(x,y)\mid y=|x|\}$, $B=\{(x,y)\mid y^2=x^2\}$, 则

$A=\{(x,y)\mid y=x, x\geqslant 0$ 或 $y=-x, x\leqslant 0\}$

$=\{(x,y)\mid y=x\geqslant 0\}\cup\{(x,y)\mid y=-x\geqslant 0\}$

$B=\{(x,y)\mid (y-x)(y+x)=0\}$

$=\{(x,y)\mid y=x\}\cup\{(x,y)\mid y=-x\}$



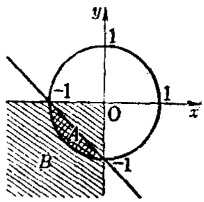
所以, 由右图得 $A\subset B$, 这个命题为真.

(2) $A=\{(x,y)\mid (x^2+y^2<1)\wedge(x+y+1)<0\}$

$=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}\cap\{(x,y)\mid x+y+1<0\}$

$B=\{(x,y)\mid (x<0)\wedge(y<0)\}$

$=\{(x,y)\mid x<0\}\cap\{(x,y)\mid y<0\}$



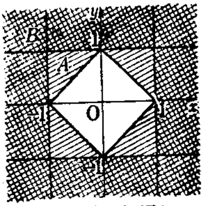
(不包含边界)

所以, 由右图得 $A\subset B$, 这个命题为真.

(3) $A=\{(x,y)\mid |x|+|y|>1\}$

$B=\{(x,y)\mid (|x|>1)\vee |y|>1\}$

$=\{(x,y)\mid |x|>1\}\cup\{(x,y)\mid |y|>1\}$



(不包含边界)

所以，由右图得 $A\not\subset B$，这个命题为假.

26. (1) $xy\leqslant 0$ 或 $x+y\leqslant 0$ 或 $x-y\leqslant 0$

(2) $x\neq 2$ 且 $x\neq 3$ 且 $x\neq 4$

(3) 存在 x，$x^2+px\leqslant 1$

(4) 对于所有的 x，$x^2+px+1\geqslant 0$

27. (1) 逆：若 $x=0$ 且 $y=0$，则 $x^2+y^2=0$

否：若 $x^2+y^2\neq 0$，则 $x\neq 0$ 或 $y\neq 0$

逆否：若 $x\neq 0$ 或 $y\neq 0$，则 $x^2+y^2\neq 0$

当以全体实数为全集时，则上述命题都是真的，当以全体复数为全集时，则因原命题是假的，所以逆和否为真，逆否为假.

(2) 逆：对所有 x，若 $x^2+x<6$，则 $x^2<1$　假

否：对所有 x，若 $x^2\geqslant 1$，则 $x^2+x\geqslant 6$　假

逆否：对所有 x，若 $x^2+x\geqslant 6$，则 $x^2\geqslant 1$　真

(3) 逆：对所有 x，若 $\frac{1}{x}$是无理数，则 x 是无理数. 真

否：对所有 x，若 x 是有理数，则$\frac{1}{x}$也是有理数. 真（其中$\frac{1}{x}$是以存在的实数集合为全集）

逆否：对所有 x，若 $\frac{1}{x}$是有理数，则 x 也是有理数. 真

28. (1)“既不必要也不充分”　(2)“必要条件”

(3)“充要条件”　(4)“充分条件”（整数是全集）

(5)“充分条件”

29. (1) 全集是全体实数的集合 R

(2) 对所有 x，$x\in R$，$f(x)>0\to(p^2-4q<0)$

(3) 对所有 x，$x\in R$，

$(f(x)=x^2-px+q$ 的判别式 $D=p^2-4q<0\to f(x)>0)$　真

30. (1) 逆：$(a(x)\vee b(x))\to a(x)$

否：$\overline{a(x)}\to(\overline{a(x)}\wedge\overline{b(x)})$

逆否：$(\overline{a(x)}\wedge\overline{b(x)})\to\overline{a(x)}$

(2) 逆：$(a(x)\vee b(x))\to(a(x)\wedge b(x))$

否：$(\overline{a(x)}\vee\overline{b(x)})\to(\overline{a(x)}\wedge\overline{b(x)})$

逆否：$(\overline{a(x)}\wedge\overline{b(x)})\to(\overline{a(x)}\vee\overline{b(x)})$

(3) 逆：$(c(x)\wedge d(x))\to(a(x)\vee b(x))$

否：$(\overline{a(x)}\wedge\overline{b(x)})\to(\overline{c(x)}\vee\overline{d(x)})$

逆否：$(\overline{c(x)}\vee\overline{d(x)})\to(\overline{a(x)}\wedge\overline{b(x)})$

31. (1)"必要条件"　　(2)"充要条件"

(3)"充分条件"　　(4)"既不必要也不充分"

32. 直线 $ax+by=1$，因为当 $a\neq0$ 时 x 的截距为 $\frac{1}{a}$，当 $b\neq0$ 时 y 的截距为$\frac{1}{b}$，所以 a,b 当中至少有一个是正的即可. 从而求出不满足"$a\leqslant0$ 且 $b\leqslant0$"(a,b 不同时为 0)的情况即可.

(1) 虽然 $ab>0$，但由于可以取 $a<0,b<0$ 故不适合.

(2) 因为 $a+b>0$，所以至少有一个是正的，因此适合.

(3) $a+b>ab$，不满足 $a\leqslant0,b\leqslant0$，所以至少有一个是正的，因此适合.

(4) 因为 $a+b<1$，满足 $a<0,b<0$，所以不适合. 于是，有公共点的充分条件为(2)，(3)

33. (1)"对于 x 的所有值，属于M的某个函数取不为 0 的值"(不论 x 为何值，属于M的函数全不为 0)

(2) 只有 $x=-\sqrt[3]{b}$ 时，$f_3(x)$为 0，这时，$f_1(x)$或 $f_2(x)$不为 0 是充要条件. 即

$$-a\sqrt[3]{b}-1\neq0 \text{ 或 } (\sqrt[3]{b})^2+2\sqrt[3]{b}+b\neq0$$

然而，同时满足 $-a\sqrt[3]{b}-1=0$，$(\sqrt[3]{b})^2+2\sqrt[3]{b}+b=0$ 的 a，b 不存在. 因此，只要 a,b 为任意实数即可.

34. (1) 设"血压高"为 a，"早死"为 b，则推理的形式为

$$a\to b \qquad \bar{a}\Rightarrow\bar{b}$$

由 $\{(a\to b)\wedge\bar{a}\}\to\bar{b}=\{\overline{(\bar{a}\vee b)\wedge\bar{a}}\}\vee\bar{b}=\{(a\wedge\bar{b})\vee a\}\vee\bar{b}=a\vee\bar{b}$ $\neq I$ 所以，这个推理不正确.

(2) 设“$x^2<1$”，“$-1<x<1$”，“$y^2<4$”，“$-2<y<2$”分别为 a,b,c,d，则推理的形式为

$$a\to b,\quad c\to d\Rightarrow(a\wedge c)\to(b\wedge d)$$

$$\begin{aligned}&\{(a\to b)\wedge(c\to d)\}\to\{(a\wedge c)\to(b\wedge d)\}\\=&\{\overline{(\bar{a}\vee b)\wedge(\bar{c}\vee d)}\}\vee\{\overline{(a\wedge c)}\vee(b\wedge d)\}\\=&(a\wedge\bar{b})\vee(c\wedge\bar{d})\vee(\bar{a}\vee\bar{c})\vee(b\wedge d)\\=&\{\bar{a}\vee(a\wedge\bar{b})\}\vee\{\bar{c}\vee(c\wedge\bar{d})\}\vee(b\wedge d)\\=&(\bar{a}\vee\bar{b})\vee(\bar{c}\vee\bar{d})\vee(b\wedge d)\\=&\{\bar{b}\vee(b\wedge d)\}\vee\bar{a}\vee\bar{c}\vee\bar{d}\\=&\bar{b}\vee d\vee\bar{a}\vee\bar{c}\vee\bar{d}=I\end{aligned}$$

所以，这个推理是正确的.

35. 设不是“b 或 c 是 3 的倍数”，则 b,c 不是 3 的倍数. 令 $b=3b'\pm1$，$c=3c'\pm1$. 再令 $a=3a'\pm r$，则 $r=0,1$

$$\begin{aligned}&a^2+2b^2-c^2\\=&(3a'\pm r)^2+2(3b'\pm1)^2-(3c'\pm1)^2\quad(a',b',c'\text{ 是整数})\\=&(3a''+r^2)+2(3b''+1)-(3c''+1)\quad(a'',b'',c''\text{ 是整数})\\=&3(a''+2b''-c'')+r^2+1\end{aligned}$$

于此，$r^2+1=1$ 或 2，上式不能为 0. 所以 $a^2+2b^2=c^2$ 不成立. 因此，b 或 c 是 3 的倍数.

36. 这些假定包括了对所有可能的情形，而它们的结论又是两两不相容. 因而，由穷举法得知逆命题成立.

37. 设有相同的根为 α，则

$$\alpha^2+p\alpha+q-1=0\qquad\alpha^2+(p-1)\alpha+q=0$$

边边相减，$\alpha-1=0$，$\therefore\ \alpha=1$，代入上式，得

$$1+p+q-1=0\qquad\therefore\ q=-p$$

从而，p,q 不能同时是正数. 因此，没有相同的根.

38. (1) 设二根为 α,β，则

设 α,β 都是整数，则由②得 $\alpha\beta$ 是奇数，由①得 $\alpha+\beta$ 是偶数．这与假定相矛盾．因此，α,β 不能同时为整数．其次，设 α,β 中只有一个是整数，则与①相矛盾．所以，都不是整数．

(2) 设整数根为 x，则 $x^2+ax+b=0$

若 x 是奇数，则 x^2,ax,b 都是奇数，左边是奇数不能为0．

若 x 是偶数，则 x^2,ax 是偶数，b 是奇数，所以，左边是奇数不能为0，因此，不论哪一种情况，都没有整数根．

39. $x\leqslant 0$ 时，左边得负，如果得有理数，则必为正．设 $x=\frac{n}{m}$（m,n 为互质的正整数）时，则

$$\left(\frac{n}{m}\right)^5-\frac{n}{m}-1=0$$

$$\therefore\quad n^5=m^4(n+m)$$

右边是 m 的倍数，左边不能被 m 整除．所以，没有有理数根．

40. 假设 $|f(1)|<\frac{1}{2}$，$|f(2)|<\frac{1}{2}$，$|f(3)|<\frac{1}{2}$，则

$$|1+a+b|<\frac{1}{2},\quad |4+2a+b|<\frac{1}{2},\quad |9+3a+b|<\frac{1}{2}$$

于是，

$$|(1+a+b)-2(4+2a+b)+(9+3a+b)|$$
$$\leqslant|1+a+b|+2|4+2a+b|+|9+3a+b|$$
$$\therefore\quad 2<\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2$$

产生矛盾．所以，$|f(1)|,|f(2)|,|f(3)|$ 之中至少有一个大于 $\frac{1}{2}$．