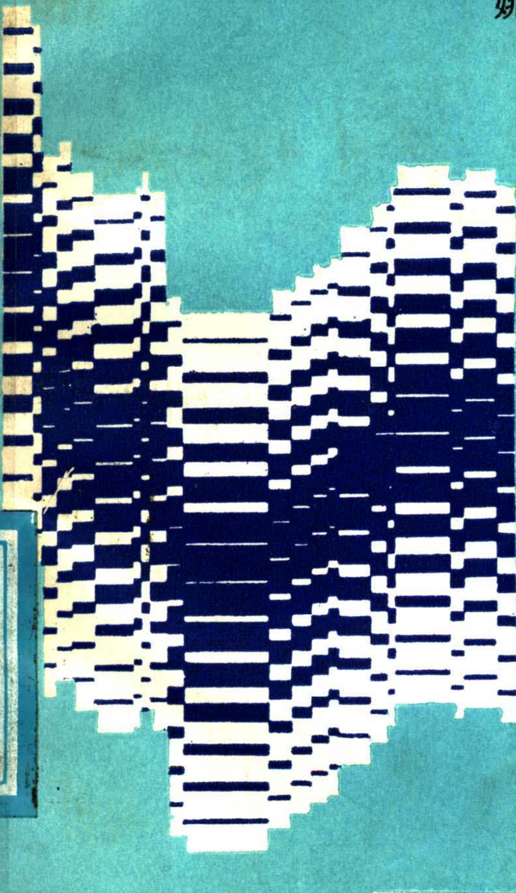
日本新高中数学研究丛书13

新符号问题与整数问题

[日] 占部实 著

姚玉强 译



文化教育出版社

日本新高中数学研究丛书 13

新符号问题与整数问题

[日] 占部实 著
姚玉强 译

文化教育出版社

内容提要

这套丛书，译自日本旺文社出版的新高中数学研究丛书，原书共分十五册，书中除有中学数学传统题材外，还包括了一些较新的内容.

本册内容分为两大部分：新符号问题和整数问题. 新符号问题部分，主要内容有关于论证、集合、整数和新符号等；整数问题部分，主要内容有约数、倍数、p 进制、方程的整数解、不等式的整数解、集合与整数等. 叙述比中学数学教材广泛、深入、易懂，可供中学数学研究人员、中学数学教师、中学学生在研究、教学或自学中参考.

日本新高中数学研究丛书 13

新符号问题与整数问题

[日] 占部实 著

姚玉强 译

*

文化教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京市房山县印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 5.5 字数 110,000

1985 年 4 月第 1 版 1987 年 3 月第 1 次印刷

印数 1—3,000

书号 7057·084 定价 0.82 元

译 者 的 话

这套丛书，译自日本旺文社出版的新高中数学研究丛书，原书共分十五册，我们译出了其中的第二册至第十五册，本册是第十三册．丛书包括了中学数学教材中一些较新的内容．

这套丛书的特点比教材内容，广泛、深入、易懂．对基础知识作了系统整理、归纳概括，重视典型例题的解题方法、解题要点、思考方法的研究，可供我国中学数学教师和高中学生研究参考．

这套丛书是由我院教研部组织辽宁师范学院数学系、沈阳师范学院数学系、沈阳教育学院数学系等单位合译的．本册由沈阳市教育学院姚玉强同志译出，在译出中该院数学系主任张运钧同志在一些问题上曾给予以指导．最后，由我院教研部数学教研室钱永耀、刘占光同志负责审校工作．

由于时间仓促及译者、校者水平所限，缺点错误，恐难避免．希望读者提出宝贵意见．

辽宁教育学院

1982 年 12 月

前　言

现在的数学正从“计算数学”向“思维数学”演变着．其表现之一，即在这次修订教学大纲中，需要复杂计算的问题被大幅度地删掉或减少了，代之以集合、演算和公理系统等需要思考的因素被提到更加重要的地位．

过去，在大学入学试题中，出了大量在教科书中几乎完全没有注意到的新符号问题或整数问题，可以预想，今后这种倾向将不断发展．然而，在实际大学入学考试时，被这类问题所困惑不解的学生又是何等之多．

本书，对于这类新符号问题或整数问题，以数学 I、数学 IIB 为中心，有时加上数学 III，进行广泛的处理．对于这些问题基本上忠实地遵循既使对于预备知识很少的人，也能确切理解，并能指导其应用，这是本书的最大特点．

如同本丛书的所有各册一样，本书也是以

比较广泛，比较深入，比较易懂

为着眼点，对于不擅长数学的人使其容易理解；对于擅长数学的人启发其更加爱好而编写的．即通过

解说——>例题——>发展题——>练习题——>习题

的反复学习，在不知不觉中增强实力．特别地，本书在培养“思维”数学能力的意义上，无疑是最好的参考书．

最后，当本书出版之际，对于中野章先生给予的大力帮助，在此深致谢忱．

著　者

1974 年秋

几点说明

如前言所述，本书是一本独具风格的参考书，它既能使苦于学习数学的人容易理解，又能使擅长数学的人更加爱好。为此，本书编排有如下特点：

划分细目

本书的各部分尽量划分细目，凡披阅所及均能一目了然，在解说时既能配合教科书，又写得

比较广泛，比较深入，比较易懂.

还有，用竖线把版面分成两部分，在页边列出重要项目，以便提高学习效率.

例题——>发展题——>练习题

本书的最大特点是，力求在理解解说的基础上，**反复学习**例题、发展题和练习题，使在**不知不觉中增强解决问题的实际能力**. 虽然从例题到发展题依次提高难度，但在**解法和解法程序中**，指出了思考方法和解法要点，因此希望读者要反复学习，使对这两种问题达到几乎能够背诵的程度. 总之，学习数学最重要的是

要逐步积累学习方法.

为此，建议读者要反复进行学习. 如果对前二者都能完全理解，那么做练习题时就不会感到困难. 反之，如果不大会做练习题，那就应该认为学习的还不够深刻.

习题

分 A, B 两部分. A 的程度相当于例题和发展题, B 中还包含稍难的问题. 因为在高考试题中, 这种程度的问题出的最多, 所以, 对于准备高考的读者, 这是不可缺少的习题集.

虽然常说, 学数学背下来也没有用, 但那是指死记硬背. 本书不提倡单纯的机械记忆, 而是提倡适当地指导数学是"怎样进行思考的", 然后才要求记忆应用范围较广泛的知识. 确信本书的读者, 能真正理解数学, 从而获得广泛应用数学的实际能力.

目 录

新符号问题

整 数 问 题

1. 关于论证部分(1)(有关代数的论证)

归纳 **演绎**

从大量的经验或实验结果出发，推出具有一般性的共同法则的思考方法，叫做**归纳**. 反过来，从已知结论出发，根据逻辑推理得出其他法则的方法，叫做**演绎**.

公理 **公理系统** **体系**

数学是纯属演绎的科学. 在数学理论中，作为推论的原始依据的基本命题，叫做**公理**. 从一些公理推导出一种数学理论，这些公理叫做**公理系统**. 根据公理系统的组成方法不同，而产生不同的理论**体系**. 如果这些体系不存在矛盾，便认为是抛开现象而成立的一种数学理论，这就是现代数学的思考方法. 到现在已经导出了各种不同的公式并利用它们，然而它的原始依据——公理——是什么呢？

计算的基础

I. 等号的性质

(1) $A=A$.

(2) 如果 $A=B$，那么 $B=A$.

(3) 如果 $A=B, B=C$，那么 $A=C$.

II. 运算的基本性质

(1) $A+B=B+A$.

$AB=BA.$ (交换律)

(2) $(A+B)+C=A+(B+C).$

$(AB)C=A(BC).$ (结合律)

(3) $A(B+C)=AB+BC.$ (分配律)

III. 等式的基本性质

(1) 如果 $A=B$,那么 $A+C=B+C$.

(2) 如果 $A=B$,那么 $AC=BC$

等，都可做为公理被采用，这些公理是我们日常处理数的性质或明确规定相等意义的依据.

应用I,II,III,试证明:

"如果$A=B,C=D$,那么$A+C=B+D$."

全等"≡"

与等号有同样性质关系的还有**全等"≡"**. 若用 F、G、H 表示图形,则

(1) $F\equiv F.$

(2) 如果 $F\equiv G$,那么 $G\equiv F$.

(3) 如果$F\equiv G, G\equiv H$,那么 $F\equiv H$.

相似"∽"

关于**相似"∽"**也有上述同样关系成立.

(1) $F\backsim F.$

(2) 如果 $F\backsim G$,那么 $G\backsim F$.

(3) 如果 $F\backsim G, G\backsim H$,那么$F\backsim H$.

等价律

以上所用符号=，≡，∽等，若使用符号～代替，则以上关系可统一成为下面的形式:

(1) $A\sim A.$ (自反律)

(2) 如果 $A \sim B$, 那么 $B \sim A$. (对称律)

(3) 如果 $A \sim B, B \sim C$, 那么 $A \sim C$.

(传递律)

把这三个法则统称为等价律.

数的扩张

对于实数，上述性质 I, II, III 都成立. 以此为基础，关于复数 $X=a+bi, Y=c+di$ 的相等、和与积的定义为

(1) 仅当 $a=c, b=d$ 时, $X=Y$;

(2) $X+Y=(a+c)+(b+d)i$;

(3) $XY=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

可以证明，对于复数，性质 I, II, III 也都成立.

$XY=YX$ 的证明:

由复数积的定义(3)，有

$XY=(ac-bd)+(ad+bc)i$,

$YX=(ca-db)+(cb+da)i$.

可是，因为关于实数 I, II, III 成立，所以

$ac-bd=ca-db, ad+bc=cb+da$.

因此，由复数相等定义(1)，得

$$XY=YX.$$

可以证明其他基本性质也全都成立.

例题 1 对于两个实数 a, b，施行某种运算的结果记作 $a \circ b$. 就这种运算，对于任意实数 a, b，若 $a \circ b=b \circ a$ 时，

则叫做交换律成立，若$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$时，则叫做结合律成立.若把运算$a\circ b$作如下规定时，试分别考察对于交换律、结合律是否成立：

(1) $a\circ b=a-b$. (2) $a\circ b=2(a+b)$.

(3) $a\circ b=a$. (4) $a\circ b=2^a\cdot 2^b$.

解法 根据定义仔细计算是重要的. 例如，在考察交换律时，分别计算$a\circ b$和$b\circ a$，看其结果是否相等. 所谓"**成立**"就是"**对于任意实数成立**"，因此叫做"**恒成立**".

解 (1) $a\circ b=a-b$, $b\circ a=b-a$.

一般地，因为$a-b\neq b-a$，所以$a\circ b\neq b\circ a$.

又 $$(a\circ b)\circ c=(a-b)-c=a-b-c,$$
$$a\circ(b\circ c)=a-(b-c)=a-b+c.$$

一般地，因为$a-b-c\neq a-b+c$，所以$(a\circ b)\circ c\neq a\circ(b\circ c)$.

故对于交换律，结合律都不成立.

(2) $\because$ $a\circ b=2(a+b)$, $b\circ a=2(b+a)=2(a+b)$,

$\therefore$ $$a\circ b=b\circ a.$$

又 $(a\circ b)\circ c=2(a+b)\circ c=2[2(a+b)+c]=4a+4b+2c$,

$a\circ(b\circ c)=a\circ 2(b+c)=2[a+2(b+c)]=2a+4b+4c$.

一般地，$4a+4b+2c\neq 2a+4b+4c$，$\therefore (a\circ b)\circ c\neq a\circ(b\circ c)$.

故对于交换律成立，但对于结合律不成立.

(3) $a\circ b=a$, $b\circ a=b$.

一般地，$\because$ $a\neq b$, $\therefore$ $a\circ b\neq b\circ a$.

又 $(a\circ b)\circ c=a\circ c=a$, $a\circ(b\circ c)=a\circ b=a$,

$\therefore \qquad (a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c).$

故对于交换律不成立，但对于结合律成立.

(4) $\because \quad a\circ b=2^a\cdot 2^b=2^{a+b}, b\circ a=2^b\cdot 2^a=2^{b+a}=2^{a+b},$

$\therefore \qquad a\circ b=b\circ a.$

又 $(a\circ b)\circ c=2^{a+b}\circ c=2^{2^{a+b}+c},$

$a\circ(b\circ c)=a\circ 2^{b+c}=2^{a+2^{b+c}}.$

一般地，$\because \quad 2^{2^{a+b}+c}\neq 2^{a+2^{b+c}},$

$\therefore \qquad (a\circ b)\circ c\neq a\circ(b\circ c).$

故对于交换律成立，但对于结合律不成立.

研究 代数中的论证问题，最重要的是极力避免主观推测. 所谓 $a\circ b=a-b$，就是用 $a\circ b$ 表示 $a-b$ 的运算，同时还必须注意 a 和 b 的顺序. 例如

$5\circ 3=5-3=2$，而不是 $5\circ 3=3-5=-2$.

关于 $a\circ b=2(a+b)$ 也一样，$3\circ 4=2(3+4)=14$，而 $3\circ 4=2(4+3)=14$ 就不正确，我们不能只注意结果. 还有，在解答这些问题时，它的基础在于需要承认实数的交换律、结合律和分配律都成立.

练习 （答案在 136 页）

1. 对于任意实数 a, b, $a\circ b$ 作如下定义:

$$a\circ b=ab+k(a+b)+l\ (k, l \text{ 是实数常数}).$$

试求这个运算 $\circ$ 对于任意实数 a, b, c，满足下列结合律

$$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$$

的充要条件.

2. 对于非负实数 x, y, $x\ominus y$ 作如下定义:

$$x\ominus y=\begin{cases} x-y & (\text{当 } x\geqslant y \text{ 时}),\\ 3x+y+3 & (\text{当 } x<y \text{ 时}).\end{cases}$$

试不用⊖表示下列各式：

(1) $[(x+y)^2 \ominus x^2] \ominus y^2$.

(2) $[(x \ominus y)+y] \ominus x$.

3. 如下定义实数 a, b 间的计算规则 $\circ$：

当 $a \geqslant b$ 时，$a \circ b = a$，当 $a < b$ 时，$a \circ b = b \times b$.（×是实数中的普通乘法.）

试回答下列各问题：

(1) 试根据上述定义计算 $2\circ 3, 4\circ 4, 2\circ(3\circ 1)$.

(2) 对于满足 $x<z<y$ 的任意实数 x, y, z，试判别 $x\circ(y\circ z) = (x\circ y)\circ z$ 是否成立？

(3) 画出 $y=[(1\circ x)\times x]-(2\circ x)$ 的图象．其中，$-2 \leqslant x \leqslant 2$．还有"－"是实数中的普通减法.

例题 2 试正确填写下列的$\square$.

在两个实数 a, b 间，考虑如下运算$*$：

$$a*b=7ab.$$

例如 $2*3=7\times 2\times 3=42, 2*2=7\times 2\times 2=28$．这时：

(1) $3*4=\square$，$(1*2)*3=\square$.

(2) 对于任意实数 x，如果 $a*x=x$，那么 $a=\square$.

(3) 适合 $(x*x)+x-6=0$ 的 x 值是$\square$.

解法 这是给出运算法则计算数值或求方程的解的问题．重要的是应用定义进行正确运算．**把新符号关系换成普通符号关系**，问题就迎刃而解了.

对于任意的实数 x，使 $ax+b=0$ 成立的条件是 $a=b=0$.

解 (1) $3*4=7\times 3\times 4=84$.

$\because$ $1*2=7\times 1\times 2=14$，$\therefore$ $(1*2)*3=7\times 14\times 3=294$.

(2) $\because$ $a*x=x$ 是 $7ax=x$，$\therefore$ $(7a-1)x=0$.

对于任意的 x，使此式成立的条件是 $7a-1=0$，$\therefore a=\frac{1}{7}$.

(3) $(x*x)+x-6=0$, $\quad\therefore\quad 7x^2+x-6=0$,

$(7x-6)(x+1)=0$，故

$$x=-1 \quad \text{或} \quad x=\frac{6}{7}.$$

例题 3 设 $p\vee q$ 表示 p,q 中较大的数，$p\wedge q$ 表示 p,q 中较小的数. 例如，

$$1\vee 2=2,\ 1\wedge 2=1.$$

现在，关于四个不同的实数 a,b,c,d，有下列关系：

$$(a\wedge b)\vee(c\wedge d)=M,$$

$$(a\vee c)\wedge(b\vee d)=N.$$

试比较 M,N 的大小.

解法 若从 a,b,c,d 的大小分别情况来考虑，则必须考虑 $4!=24$ 种情况. 然而只要按顺序正确考虑，问题就能得到解决. 不厌烦细微的劳动，并且认真去做也很必要. 其次，仔细观察 M,N 的组成，把 a 和 d，b 和 c 作为一组来考虑，也可以想出好的方法来.

(1) 若 a 和 d 都比 b,c 大时(4 种).

(2) 若 a 和 d 都比 b,c 小时(4 种).

(3) 其他情形(16 种).

在(1)的情形下，$M=b\vee c$，$N=a\wedge d$，则 $N>M$. 在(2)的情形下，$M=a\vee d$，$N=c\wedge b$，则 $N>M$. 因而，只要判别(3)的情形即可. 在(3)的情形下，可知全都成为 $N=M$. 既使这样，解答还是相当费力的.

若设 $a\wedge b=m$，$c\wedge d=n$，情况如何呢？总共需考虑多少

种情况?

解 若 $a\wedge b=m, c\wedge d=n(m\neq n)$,则

$$M=(a\wedge b)\vee(c\wedge d)=m\vee n. \quad ①$$

另外,因为 $a\geqslant m, b\geqslant m, c\geqslant n, d\geqslant n$,所以

$$a\vee c\geqslant m\vee n, b\vee d\geqslant m\vee n.$$

因而 $$N=(a\vee c)\wedge(b\vee d)\geqslant m\vee n. \quad ②$$

从①,②得 $M\leqslant N$.

练习 (答案在137页)

4. 对于整数 m,n,定义 $m*n=m+n-3mn$.

(1) 试计算 $2*(-3)$ 和 $[(-2)*4]*3$.

(2) 试证明:$(l*m)*n=l*(m*n)$.

(3) 试求满足关系式 $n*n>-10$ 的整数 n.

(4) 对于一切的整数 m,试求满足关系式 $m*a=m$ 的整数 a.

例题4 设 a,b 是任意实数,考虑有序对 (a,b). 关于任意两对 (a,b),(c,d),如下定义和 $(a,b)\oplus(c,d)$ 与积 $(a,b)\otimes(c,d)$:

$$(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d),$$
$$(a,b)\otimes(c,d)=(ac-bd,ad+bc),$$

其中,ac,bd 等是实数积,$a+c$,$ac-bd$ 等的 $+$,$-$ 表示实数的和与差.

(1) 试证关于这样的加法与乘法结合律成立.

(2) 对于任意的 (a,b),试求使 $(a,b)\otimes(x,y)=(a,b)$ 成立的 (x,y).

(3) 如果 $(a,b)\otimes(c,d)=(0,0)$,那么 $(a,b)=(0,0)$ 或 $(c,d)=(0,0)$. 试证明之.

解法 问题中给出了定义，根据它在设问中所具有的形式，正确理解题意比什么都重要. $+$，$-$是实数中的和与差，而$\oplus$，$\otimes$则是实数对的和与积，这是开始定义过的，要正确使用给予的定义. 还要使用好关于实数加法、乘法的交换、结合、分配律.

解 (1) 若表示任意的三个有序对为$(a,b)=\alpha$，$(c,d)=\beta$，$(e,f)=\gamma$时，根据定义得

$$\alpha\oplus\beta=(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d),$$

$$\begin{aligned}(\alpha\oplus\beta)\oplus\gamma&=(a+c,b+d)\oplus(e,f)\\&=(a+c+e,b+d+f)\\&=(a,b)\oplus(c+e,d+f),\end{aligned}$$

其中，

$$(a,b)=\alpha,\ (c+e,d+f)=(c,d)\oplus(e,f)=\beta\oplus\gamma.$$

故加法结合律成立.

$$\alpha\otimes\beta=(a,b)\otimes(c,d)=(ac-bd,ad+bc),$$

$$\begin{aligned}&(\alpha\otimes\beta)\otimes\gamma=(ac-bd,ad+bc)\otimes(e,f)\\&=((ac-bd)e-(ad+bc)f,(ac-bd)f+(ad+bc)e)\\&=(a(ce-df)-b(cf+de),a(cf+de)+b(ce-df))\\&=(a,b)\otimes(ce-df,cf+de)\\&=\alpha\otimes(\beta\otimes\gamma).\end{aligned}$$

故乘法结合律成立.

(2) 因为$(a,b)\otimes(x,y)=(a,b)$，所以

$$(ax-by,ay+bx)=(a,b).$$

因此，$ax-by=a$，$ay+bx=b$.

$$\therefore\quad (x-1)a-yb=0,\ ya+(x-1)b=0.$$

这个关系对于任意实数 a,b 成立的条件是

$$x-1=0, y=0, \therefore \quad x=1, y=0.$$

$$\therefore \qquad (x,y)=(1,0).$$

(3) 因为 $(a,b)\otimes(c,d)=(0,0)$，所以

$$(ac-bd, ad+bc)=(0,0).$$

因此，$ac-bd=0, ad+bc=0$.

把此二式的两边平方后边边相加，得

$$(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=0,$$

$$\therefore \quad (a^2+b^2)(c^2+d^2)=0.$$

因此，$a^2+b^2=0$ 或 $c^2+d^2=0$.

因为 a,b,c,d 是实数，所以 $a=b=0$ 或 $c=d=0$，

即 $(a,b)=(0,0)$ 或 $(c,d)=(0,0)$.

研究 在此可以把有序数对看成复数. **(a,b) 与 $(a+bi)$ 对应**. 即 $(a,0)$ 对应实数 a，$(0,1)$ 对应 i.

$$(0,1)\otimes(0,1)=(0\times0-1\times1, 0\times1+1\times0)$$
$$=(-1,0).$$

因此，有 $i^2=-1$.

练习 (答案在 137 页)

5. 设 a, b 是任意实数，考虑有序对 (a, b). 关于这些有序对与例题 4 中和 $\oplus$ 与积 $\otimes$ 的定义相同. 试回答下列各问题:

(1) 试证乘法交换律成立.

(2) 对于任意的 (a,b)，试求使 $(a, b)\oplus(x,y)=(a, b)$ 成立的 (x,y).

例题 5 在由字母 $a, b, c, \cdots$ 和符号 $\ll$ 组成的古书中发现，字母 $a, b, c, \cdots$ 表示自然数，对于各自然数 a, b，$a \ll b$ 表示一个命题，以及符号 $\ll$ 按下列规则使用：

(i) 对于任意的 a，$a \ll a$；

(ii) 如果 $a \ll b$，$b \ll a$，那么 $a = b$；

(iii) 如果 $a \ll b$，$b \ll c$，那么 $a \ll c$.

关于符号 $a \ll b$ 具有什么意义，A, B, C, D, E, F 六人各自作了如下的推断：

A: $a < b$, B: $a \leqslant b$, C: $a \geqslant b$, D: $0 \leqslant b - a \leqslant 1$, E: $a + b$ 是偶数，F: a 是 b 的约数.

(1) 从六个人的推断中，试选出对符号 $\ll$ 使用规则无矛盾者.

(用 $A \sim F$ 的符号回答。不必说明理由.)

其次，把符号 $\ll$ 根据规则 (i)，(ii)，(iii) 使用时，对于下列各命题，若恒成立时给出证明；若有不成立的情形时给出例子.

(2) 对于任意的 a，$a \ll a^2$.

(3) 如果 $a \ll b$，那么对于任意的 c 有 $a + c \ll b + c$.

(4) 有三个自然数 a, b, c，任取其中两个 x, y，则在关系式 $x \ll y$，$y \ll x$ 中至少有一个成立. 这时，在三个自然数中存在唯一的数 m，使 $m \ll a$，$m \ll b$，$m \ll c$ 成立.

解法 (1) 关于 A，(i) 对于任意的 a，$a < a$ 不成立. (ii) 如果 $a < b$，$b < a$，那么 $a = b$ 不成立. (iii) 成立. 关于 B, C，则对 (i)，(ii)，(iii) 都成立. 关于 D，如果 $0 \leqslant b - a \leqslant 1$，$0 \leqslant c - b \leqslant 1$，那么 $0 \leqslant c - a \leqslant 1$ 不成立. (i)，(ii) 成立. 关于 E，(ii)

当 $a+b$ 是偶数时，如果 $b+a$ 是偶数，那么 $a=b$ 不成立. (i), (iii) 成立. 关于 F, (i), (ii), (iii) 都成立.

(2) 若按 B,C,F 的意义使用符号，则 (i), (ii), (iii) 都成立. 记住这一点很重要. 把 $a \ll b$ 按 $a \geqslant b$ 的意义使用(即按 C 的意义使用)时，可见"对于任意的 a, $a \ll a^2$"不成立.

(3) 把 $a \ll b$ 按 a 是 b 的约数意义使用(即按 F 的意义使用)时，"如果 $a \ll b$，对于任意的 c，那么 $a+c \ll b+c$" 不成立.

(4) 恒成立.

解 (1) B,C,F.

(2) 有不成立的情形.

把 $a \ll b$ 按 $a \geqslant b$ 的意义使用时，(i), (ii), (iii) 都成立.
当 $a>1$ 时，因为 $a^2>a$，所以"对于任意的 a, $a \ll a^2$"不成立.

(3) 有不成立的情形.

把 $a \ll b$ 按"a 是 b 的约数"的意义使用时，(i), (ii), (iii) 都成立.
因为 2 是 4 的约数，有 $2 \ll 4$，但 $2+1 \ll 4+1$ 就不成立了.

(4) 恒成立.

设 a,b,c 是不同的自然数. 对于 a,b，有 $a \ll b$ 或 $b \ll a$.

(a) 当 $a \ll b$ 时，

对于 a,c，有 $a \ll c$ 或 $c \ll a$.

① 若 $a \ll c$，则取 $m=a$ 即可.

② 若 $c \ll a$，由 (iii) $c \ll b$，则取 $m=c$ 即可.

(b) 当 $b \ll a$ 时，

对于 a,c，有 $a \ll c$ 或 $c \ll a$.

① 若 $a \ll c$，由 (iii) $b \ll c$，则取 $m=b$ 即可.

② 若 $c \ll a$，则 $b \ll c$ 或 $c \ll b$.

当 $b \ll c$ 时，取 $m=b$ 即可.

当 $c \ll b$ 时，取 $m=c$ 即可.

对于 a,b,c 中的 m,m'，若

$$m \ll a,\quad m \ll b,\quad m \ll c,$$

$$m' \ll a,\quad m' \ll b,\quad m' \ll c$$

$$m \ll m',\quad m' \ll m,\quad \therefore\quad m=m'.$$

成立，因为 m,m' 在 a,b,c 之中，所以

故适合题意的 m 是唯一的.

2. 关于论证部分(2)(一般论证)

在问题中规定定义，用它论证问题，在问题中说明新的符号，用以考虑所论证的问题。

新符号的例子

这样的问题，在数学I，数学II，数学III中已经出现过。请看下面所举新符号的例子。

$d(P,Q)$

设平面内三个圆为P,Q,R. 用$d(P,Q)$表示两个圆P和Q非共同部分的面积.

$A+B$

对于数轴上两点A,B，用$A+B$表示线段AB的中点，用$A\circ B$表示线段AB的三等分点中靠近A的点.

$A\circ B$

$A(P)$

用符号A,B等表示平面上点的移动，用$A(P)$表示在移动A作用下点P的移动点. 把二个移动A,B按这个顺序继续进行的结果，看作是另一个移动，可用$B*A$表示. 即对点P作$B*A$移动，点$(B*A)(P)$即是点$B(A(P))$.

$(B*A)(P)$

$l(P)$

在坐标平面上，对于异于原点O的点$P(a,\ b)$，不通过O的直线$ax+by=1$，用$l(P)$来表示.

$d(P,Q)$

设$P(x,y),Q(x',y')$是平面上任意的两点时，规定$d(P,Q)=\sqrt{|x-x'|}+\sqrt{|y-y'|}$.

$f(A)$ 用 $f(A)$ 表示正数 A 的整数部分的位数.

$\max(a,b)$ $\max(a,b)$ 表示 a, b 中不是较小的一方的符号.

$f(x,z)$ $f(x,z)$ 表示 x,z 中不是较大的数.

象这样的新符号无论作出多少都是可以的. 现在试考虑关于这些问题的对策.

如何对策?

新符号 $\longrightarrow$ 必须符合定义.

新符号间的关系 $\longrightarrow$ 可写成普通符号间的关系,这是要点.

要求做到,必须正确运用定义,坚持严谨论证的态度.

首先正确掌握符号的意义, 然后尽量使用所学过的知识去解决.

例题 6 在坐标平面上,对于异于原点 O 的点 $P(a,b)$,用 $l(P)$ 表示不通过 O 的直线 $ax+by=1$,试证下列问题:

(1) 取不过原点 O 的任意直线 m 时, 则存在唯一的异于 O 的点 P, 使得 $l(P)=m$.

其次, 若相异的两点 P, Q 都异于原点时, 试证明下列问题:

(2) 两直线 $l(P)$, $l(Q)$ 平行的充要条件是直线 PQ 通过原点.

(3) 直线 PQ 不通过原点 O 时,若两直线 $l(P)$, $l(Q)$ 的交点是 R, 则 R 异于 O, 且 $l(R)$ 与直线 PQ 重合.

解法 (1) **不通过原点O的任意直线可用** $Ax+By+C$

$=0(C\neq 0)$表示.（但 A,B 不同时为 0.）把此式变形为 $px+qy=1$ 便可.

（2）考虑P和Q是相异二点便可. 即二直线重合时可认为平行，不考虑平行的这种情形. 二直线$ax+by=1$与$cx+dy=1$平行的条件就是使$a=ck, b=dk(k\neq 1)$中的 k 存在.

（3）若 $R(u, v)$ 时，则 $l(R)$ 为 $ux+vy=1$. 因为R 在 $l(P), l(Q)$上，所以 $au+bv=1, cu+dv=1$.

解 （1）若直线m的方程为 $Ax+By+C=0$ 时，由于此直线不通过原点，因此 $C\neq 0$. ∴

$$\left(-\frac{A}{C}\right)x+\left(-\frac{B}{C}\right)y=1.$$

因此，若 $l(P)=m$ 时，点 $P\left(-\frac{A}{C}, -\frac{B}{C}\right)$ 是唯一存在的. 因为 A, B不同时为 0，所以点P 异于原点.

（2）对于 $P(a,b), Q(c,d)$，因为 $l(P), l(Q)$

$l(P)$: $ax+by=1$,

$l(Q)$: $cx+dy=1$

是平行的，所以 $a=ck, b=dk(k\neq 1)$. 这时，P, Q 不重合，直线 PQ 通过 O. 它的逆命题也成立.

（3）直线 PQ 不通过O时，从(2)可知 $l(P)$和 $l(Q)$表示不平行的二直线，因而有交点 R.
若R为 $R(u,v)$时，则 $l(R)$: $ux+vy=1$.
因为R在 $l(P), l(Q)$上，所以 $au+bv=1, cu+dv=1$.
这表示 $l(R)$: $ux+vy=1$ 通过两点 $P(a,b)$, $Q(c,d)$. 通过两点的直线只有一条，所以 $l(R)$和直线 PQ 重合.

例题 7 在数轴上把以 A, B 为端点的线段分成 n 等份，在这些分点中，对于距离 A 最近的点：当 $n=2$ 时，用 $A+B$ 表示；当 $n=3$ 时，用 $A\cdot B$ 表示．试回答下列各问题：

(1) 关于任意点 A, B, C, 试给下列各式分别标上符号，若恒成立时用○，否则用×．

(a) $A+B=B+A$.

(b) $A\cdot B=B\cdot A$.

(c) $A+(B+C)=(A+B)+C$.

(d) $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$.

(e) $(A+B)\cdot C=(A\cdot C)+(B\cdot C)$.

(2) 关于任意点 A, B, C 下式恒成立吗？试写出理由．

$$(A\cdot B)+(A\cdot C)=[(A+B)\cdot C]+A.$$

解法 (1) (a)因为 AB 的二等分点是一个，所以无论接近 A 的 $A+B$，或接近 B 的 $B+A$ 是相同的．

(b) 线段 AB 的三等分点中，接近 A 的 $A\cdot B$ 和接近 B 的 $B\cdot A$ 是不同的．若 A, B 的坐标分别是 a, b，则 $A\cdot B$ 的坐标是 $\frac{2a+b}{3}$, $B\cdot A$ 的坐标是$\frac{a+2b}{3}$. 因此，$A\cdot B$ 和 $B\cdot A$ 不同．

(c) 若 A, B, C 的坐标分别是 a, b, c 时，因为 $B+C$ 的坐标是$\frac{b+c}{2}$，所以 $A+(B+C)$ 的坐标是 $\frac{1}{2}\left(a+\frac{b+c}{2}\right)=\frac{2a+b+c}{4}$，而$(A+B)+C$ 的坐标是$\frac{a+b+2c}{4}$. 因此，$(A+B)+C$ 和 $A+(B+C)$是不同的．

(d) 若 A, B, C 的坐标分别是 a, b, c 时，因为 $A\cdot(B\cdot C)$

的坐标是 $\dfrac{2a+\dfrac{2b+c}{3}}{3}=\dfrac{6a+2b+c}{9}$，$(A\cdot B)\cdot C$ 的坐标是 $\dfrac{2\times\dfrac{2a+b}{3}+c}{3}=\dfrac{4a+2b+3c}{9}$，所以 $A\cdot(B\cdot C)$ 和 $(A\cdot B)\cdot C$ 是不同的.

(e) 若 A, B, C 的坐标分别是 a, b, c 时，则 $(A+B)\cdot C$ 的坐标是 $\dfrac{2\times\dfrac{a+b}{2}+c}{3}=\dfrac{a+b+c}{3}$，$(A\cdot C)+(B\cdot C)$ 的坐标是

$$\frac{\dfrac{2a+c}{3}+\dfrac{2b+c}{3}}{2}=\frac{a+b+c}{3},$$

所以这两点是相同的.

(2) 设 A, B, C 的坐标分别是 a, b, c 时，如能求出 $(A\cdot B)+(A\cdot C)$ 的坐标和 $[(A+B)\cdot C]+A$ 的坐标便可.

解 (1) (a)○，(b)×，(c)×，(d)×，(e)○.

(2) 设 A, B, C 的坐标分别是 a, b, c，$A\cdot B$ 的坐标是 $\dfrac{2a+b}{3}$，$A\cdot C$ 的坐标是 $\dfrac{2a+c}{3}$，因而，$(A\cdot B)+(A\cdot C)$ 的坐标是 $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{2a+b}{3}+\dfrac{2a+c}{3}\right]=\dfrac{4a+b+c}{6}$. 又因为 $A+B$ 的坐标是 $\dfrac{a+b}{2}$，所以

$$(A+B)\cdot C \text{ 的坐标是 } \frac{2\times\dfrac{a+b}{2}+c}{3}=\frac{a+b+c}{3}.$$

所以 $(A+B)\cdot C+A$ 的坐标是 $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a+b+c}{3}+a\right)=\dfrac{4a+b+c}{6}$.

$\therefore (A\cdot B)+(A\cdot C)=[(A+B)\cdot C]+A.$

练习 (答案在137页)

6. 对于平面上两点 A, B，用 $A\circ B$ 表示线段的三等分点中接近 A 的点. 这时，试回答下列各问题:
   (1) 若 $(A\circ B)\circ C$ 和 $(B\circ C)\circ A$ 重合时，A, B, C 的位置关系如何?
   (2) 若 $(A\circ B)\circ(C\circ D)$ 和 $(B\circ A)\circ D$ 重合时，A, B, C, D 的位置关系如何?

> **例题 8** 在 xy 平面的点 $P(x, y)$ 中，把 $x\neq 0$ 的点的全体集合记作 G. 对于 G 的任意两点 $P(x, y)$，$Q(x', y')$，把 G 的点 $P*Q$ 定义如下:
>
> $$P*Q=(xx', xy'+y).$$
>
> (1) 对 G 的所有点 P，求满足 $P*E=E*P=P$ 的 G 的点 E.
>
> (2) 对已给 G 的两点 $A(a, b)$，$B(a', b')$，求使 $A*X=B$ 成立的 G 的点 X.

解法 设在(1)中 E 的坐标与在(2)中 X 的坐标为未知数，按定义求出 $P*E$，$E*P$，$A*X$ 等的坐标. 若 E 的坐标为 (α, β)，P 的坐标为 (x, y)，则

$$P*E=(x\alpha, x\beta+y), E*P=(\alpha x, \alpha y+\beta).$$

解这种问题的要点是"正确应用定义".

要注意，无论是点 E，或是点 X，所求的坐标点必须确认是 G 的点.

解 (1) 设 E 的坐标为 (α, β). 对于任意点 $P(x, y)$，由 $P*E=E*P=P$，得

$$(x\alpha, x\beta+y)=(\alpha x, \alpha y+\beta)=(x, y).$$

因而 $x\alpha=x, x\beta+y=y, \alpha y+\beta=y$.

从第一、二式，并注意 $x\neq 0$，得 $\alpha=1, \beta=0$. 它们也满足第三式. 因为点(1,0)是 G 的点，所以 $E(1,0)$.

(2) 设 X 的坐标是 (x, y). 由 $A*X=B$，得

$$(ax, ay+b)=(a', b').$$

$\therefore\ ax=a', \quad ay+b=b'$,

$\therefore\ x=\dfrac{a'}{a}, \qquad y=\dfrac{b'-b}{a}$.

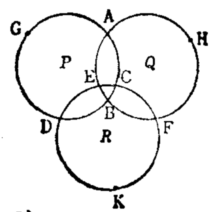
由于 A, B 是 G 的点，则 $a\neq 0, a'\neq 0$. 因而 $\dfrac{a'}{a}\neq 0$，故所求的点是 G 的点.

$$\therefore\quad X=\left(\frac{a'}{a}, \frac{b'-b}{a}\right).$$

例题 9 设 P, Q, R 为平面内的三个圆. 若用 $d(P,Q)$ 表示 P 和 Q 两圆的非共同部分的面积时，根据所给图形，试证

$$d(P,Q)<d(P,R)+d(R,Q).$$

其中，圆 P 和 Q，P 和 R，Q 和 R 的交点分别是 $A, B; C, D; E, F$. 设 G, H, K 分别为 P, Q, R 圆周上的一点.



试画出在

$$d(P,Q)=d(P,R)+d(R,Q)$$

的情形下的 P, Q, R. 圆的大小是任意的.

解法 由定义，$d(P,Q)=AGDE+ACFH+EDB+CBF$.

首先考虑 $d(P,R)$, $d(R,Q)$ 是图的哪个部分，再作 $d(P,R)+d(R,Q)-d(P,Q)$. 其次为使 $d(P,R)+d(R,Q)-d(P,Q)=0$, 只要考虑哪个部分等于 0 即可.

解 由定义,

$d(P,Q)=AGDE+ACFH+EDB+CBF$,

$d(P,R)=AGDE+BDKF+AEC+CBF$,

$d(R,Q)=ACFH+BDKF+AEC+EDB$,

$\therefore\quad d(P,R)+d(R,Q)-d(P,Q)=2(BDKF+AEC)>01$

$\therefore\quad d(P,Q)<d(P,R)+d(R,Q)$.

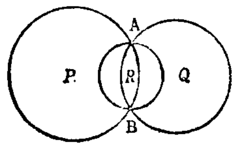
若 $d(P,Q)=d(P,R)+d(Q,R)$ 成立,

则由(1), 有

$BDKF+AEC=0$.

即 $BDKF=AEC=0$ 的情形.

绘出图如右.



练习 (答案在 138 页)

7. 对于平面上任意两点 $P(x,y)$, $Q(x',y')$, 规定

$$d(P,Q)=\sqrt{|x-x'|}+\sqrt{|y-y'|}.$$

设三点为 $A(a,b)$, $B(a',b')$, $C(a'',b'')$ 时, 试证:

$$d(A,B)+d(B,C)\geqslant d(A,C).$$

例题 10 $f(A)$ 表示正数 A 的整数部分的位数.

(1) 对于 $a>b>1$ 的数 a, b, 试决定一个具有下列性质的正数 M: "对于 $x\geqslant M$ 的所有 x, $f(a^x)>f(b^x)$."

(2) 试判别下列命题是否正确:

"对于某正数 N, 如果 $f(3^N)>f(2^N)$, 那么对于 $x\geqslant N$ 的所有 x, $f(3^x)>f(2^x)$."

解法 $f(A)$是什么？是正数A的整数部分的位数．因而，若 $\lg A=n+\alpha$(n是整数，$0\leqslant\alpha<1$)，则$n+1=f(A)$．这个问题就变成了对数问题．

（1）由于决定一个正数M就可以，所以应当选择在一个十分可靠的范围内方行．对于$a>b>1$的两数a,b，使$f(a^x)>f(b^x)$成立的可靠范围，是在$a^x\geqslant 10b^x$情形下选取x．因而，当M满足$a^M=10b^M$时，对于$x\geqslant M$的所有x，显然有$f(a^x)>f(b^x)$成立．

（2）若代N以$2,3,4,\cdots$的值，显然，这个命题是错误的．

解 （1）解$a^x\geqslant 10b^x$，得

$x\lg a\geqslant 1+x\lg b$， $\therefore\ x(\lg a-\lg b)\geqslant 1$.

从$a>b>1$，得$\lg a-\lg b>0$，

$$\therefore\quad x\geqslant\frac{1}{\lg a-\lg b}. \qquad ①$$

如同(1)选取x，很明显有$f(a^x)>f(b^x)$成立，因而取

$$M=\frac{1}{\lg a-\lg b}$$

即可．

（这是$f(a^x)>f(b^x)$的充分条件．）

（2）从$f(3^3)=f(27)=2$，$f(2^3)=f(8)=1$，得

$$f(3^3)>f(2^3).$$

但是，从$f(3^4)=f(81)=2$，$f(2^4)=f(16)=2$，得

$$f(3^4)=f(2^4).$$

所以，这个命题是不成立的．

例题11 用符号 A, B 等表示平面上点的移动，用 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P})$ 表示在移动 $\boldsymbol{A}$ 的作用下点 P 的移动点. 把二个移动 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 按这个顺序继续进行所得的结果，看做是又一个移动，用 $\boldsymbol{B}*\boldsymbol{A}$ 表示. 即对点 P 作 $\boldsymbol{B}*\boldsymbol{A}$ 移动，设点 $(\boldsymbol{B}*\boldsymbol{A})(\boldsymbol{P})$ 是点 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}))$.

这时，对下列(1)，(2)中所述问题是否正确？如果正确，试说明理由；如果不正确，试举出一个不成立的例子.

(1) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是不同的平行移动，则对于任意的点 $\boldsymbol{P}$，$(\boldsymbol{B}*\boldsymbol{A})(\boldsymbol{P})$ 和 $(\boldsymbol{A}*\boldsymbol{B})(\boldsymbol{P})$ 是相同的.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 是不同的中心对称移动，则对任意的点 P, $(\boldsymbol{B}*\boldsymbol{A})(\boldsymbol{P})$ 和 $(\boldsymbol{A}*\boldsymbol{B})(\boldsymbol{P})$ 是相同的. 中心对称移动，是关于对称中心把各点 P 向与 P 对称位置的移动.

解法 用符号表示点的移动，是判别符号运算的交换律是否成立的问题. 用坐标或向量考虑较为合适.

(1) 若把平行移动用一个向量来表示，则施行两个平行移动，就是求两个向量的和. 因为向量和交换律成立，所以问题的结论是正确的. 掌握了这一点，作解答即可.

(2) 点 (x,y) 以点 (a,b) 为中心作对称移动，则得点 $(2a-x,2b-y)$，将这点再以点 (c,d) 为中心作对称移动，得点 $(2c-(2a-x),2d-(2b-y))=(2c-2a+x,2d-2b+y)$.

若作与上述相反的顺序移动时，则得点 $(2a-2c+x,2b-2d+y)$. 故问题的结论不正确. 关于(2)，由于举出一个反例即可，所以，可设如同 $(x,y)=(1,1)$, $(a,b)=(0,0)$, $(c,d)=(1,0)$ 的简单情况即可说明.

解 (1)正确.

(理由)设 **A** 是向 x 轴方向平移 a，向 y 轴方向平移 b 的平行移动，**B** 是向 x 轴方向平移 c，向 y 轴方向平移 d 的平行移动. 设 $(\mathbf{B}*\mathbf{A})(\mathbf{P})=\mathbf{Q}$，$(\mathbf{A}*\mathbf{B})(\mathbf{P})=\mathbf{Q}'$. 若 $\vec{u}=(a, b)$，$\vec{v}=(c,d)$，$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$，则

$$\overrightarrow{OQ}=(\vec{p}+\vec{u})+\vec{v}=(\vec{p}+\vec{v})+\vec{u}=\overrightarrow{OQ'}.$$

因此，$(\mathbf{B}*\mathbf{A})(\boldsymbol{P})$ 和 $(\mathbf{A}*\mathbf{B})(\boldsymbol{P})$ 相同.

(2) 不正确.

(反例)设 **A** 为以原点为中心的点对称移动，**B** 为以点 $(0,1)$ 为中心的点对称移动. 设 $P(1,1)$，则 $(\mathbf{B}*\mathbf{A})(\mathbf{P})=(3, 1)$，而 $(\mathbf{A}*\mathbf{B})(\mathbf{P})=(-1,1)$.

研究 判别(2)不正确的理由.

设 **A** 是以点 (a,b) 为对称中心的点对称移动，**B** 是以点 (c,d) 为对称中心的点对称移动. 令 $\mathbf{A}(\mathbf{P})=\mathbf{Q}$，$(\mathbf{B}*\mathbf{A})(\mathbf{P})=\mathbf{R}$，$\mathbf{B}(\mathbf{P})=\mathbf{Q}'$，$(\mathbf{A}*\mathbf{B})(\mathbf{P})=\mathbf{R}'$. 若 $\vec{u}=(a, b)$，$\vec{v}=(c, d)$，$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$，则

$$\overrightarrow{OQ}=2\vec{u}-\vec{p},\ \overrightarrow{OR}=2\vec{v}-\overrightarrow{OQ}=2(\vec{v}-\vec{u})+\vec{p},$$

$$\overrightarrow{OQ'}=2\vec{v}-\vec{p},\ \overrightarrow{OR'}=2\vec{u}-\overrightarrow{OQ'}=2(\vec{u}-\vec{v})+\vec{p}.$$

如果 $\vec{u}\neq\vec{v}$，从 $\vec{v}-\vec{u}\neq\vec{u}-\vec{v}$，那么 $\overrightarrow{OR}\neq\overrightarrow{OR'}$.

因此，$(\mathbf{B}*\mathbf{A})(\mathbf{P})$ 和 $(\mathbf{A}*\mathbf{B})(\mathbf{P})$ 通常是不相同的.

例题 12 设四个数 a,b,c,d 满足下列条件:

(1) a,b,c,d 互不相同.

(2) a,b,c,d 中任意两数的积，如 a^2，ab 等，都是 a,b,c,d 中的一个.

(3) x, y, z 表示 a, b, c, d 中的任意数时，如果 $x \neq y$，那么 $xz \neq yz$.

这时，证明下列(i)，(ii)，(iii)，并回答(iv)。

(i) a, b, c, d 任意一个都不为零.

(ii) 设 a, b, c, d 中的任意一个为 x，则 x, x^2, x^3, x^4, x^5 中有相等的. 又，a, b, c, d 中某一个是 1 吗？

(iii) 若 x 是 a, b, c, d 中的任意一个，则使 $xy = 1$ 的 y，必在 a, b, c, d 中.

(iv) 试举出一个这样四个数的例子.（不要证明）

解法 与数和构造有关的论证问题，如果考虑不当，处理上就会遇到困难. 用所给的条件(1)～(3)证明(i)～(iii)，显见是简单的. (iv)不容易考虑到. 在实数范围内满足条件的数的集合是不存在的.

(i) 设 $A = \{a, b, c, d\}$ 时，如果 $0 \in A$，那么可推出矛盾.

(ii) 若 $x \in A$，从条件(2)知 x^2, x^3, x^4, x^5 都属于 A. 因为 A 的元素是四个，所以这五个数中必有相等的. 假定 $x^m = x^n$.

(iii) 若 $x \in A$，则 xa, xb, xc, xd 互不相等，且任意一个都属于 A.

(iv) 设 $a = 1, b^2 = 1, c^2 = b$ 求四个数.

解 (i) 设 $A = \{a, b, c, d\}$. 如果 $0 \in A$，那么 $0 \cdot a = 0 \cdot b$. 这与条件(3)矛盾. $\therefore 0 \overline{\in} A$. 因此，$a, b, c, d$ 中任意一个都不为零.

(ii) 若 $x \in A$，由条件(2)得 $x^2 \in A$，同理 $x^3 = x \cdot x^2 \in A$，$x^4 = x \cdot x^3 \in A$，$x^5 = x \cdot x^4 \in A$. 因为 A 有四个元素，所以 x, x^2, x^3, x^4, x^5 中必有相等的. 现设 $x^m = x^n$（$m > n$，$2 \leqslant m \leqslant 5$，$1 \leqslant n \leqslant 4$），

则

$$x^n(x^{m-n}-1)=0.$$

由于$x^n\in A$,从(1)得 $x^n\neq 0$.

因而 $x^{m-n}=1$,且 $x^{m-n}\in A$, $\therefore 1\in A$.

因此,a,b,c,d 中的某一个是 1.

(iii) 设 $x\in A$, 从条件(3)得 xa,xb,xc,xd 互不相等, 且任意一个都属于 A.

因而,它们中必有一个与 A 的元素 1 相等.

因此, A 中必存在 y,使 $xy=1$.

(iv) ± 1, $\pm i$.

练习 (答案在 139 页)

8. 关于取实数值的函数 $f(x)$, $g(x)$, 规定下列 (A), (B):
   $(A)\ g(x-y)=g(x)g(y)+f(x)f(y)$; $(B)\ f(-1)=-1, f(0)=0, f(1)=1$. 这时,
   (1) 试证 $[f(x)]^2+[g(x)]^2=g(0)$.
   (2) 试求 $g(0), g(1), g(2)$ 的值.
   (3) 设 n 是大于 2 的整数时, 试求 $[f(x)]^n+[g(x)]^n$ 的最大值及这时 $f(x), g(x)$ 的值.

3. 关于集合部分

集合的思想被广泛地应用于数学的各个部分. 在新符号问题中，有关集合的论证问题很多. 对于集合的基础知识归纳如下:(参考“新高中数学研究丛书　集合与逻辑”)

相等
($A=B$)

如果两个集合 A, B 由相同的元素组成，则叫做 A 与 B 相等. 即“A 的任意元素是 B 的元素，且 B 的任意元素也是 A 的元素时，则叫做 **A 与 B 相等**. 这就是说“对于任意的 x，如果 $x\in A$，那么 $x\in B$；且如果 $x\in B$，那么 $x\in A$.”

子集合

设 A，B 是任意的两个集合. 如果 A 的每个元素都是 B 的元素，那么称 A 是 B 的子集合(子集). 即“对于任意的 x，如果 $x\in A$，那么必须 $x\in B$”的情形，称 A 是 B 的**子集合**. 根据定义明显有，任意的集合 B 总是自身的子集. 在集合 B 的子集中，不等于 B 的子集叫做 B 的**真子集合**(真子集).

真子集合
($A\subseteq B$)
($A\subset B$)

为区别起见，把 A 是 B 的子集，记作 $A\subseteq B$. A 是 B 的真子集，记作 $A\subset B$.

由问题中涉及的全部元素所组成的集

全集合

合，叫做**全集合**(全集)．记作U.

空集合

不含任何元素的集合，叫做**空集合**(空集)．记作$\varnothing$.

补集合

设集合A是全集的子集．从全集元素中取出集合A的所有元素，把余下的元素所组成的集合，叫做集合A的**补集合**(补集).

并集合

$(A\cup B)$

设A,B是两个集合，由至少属于A，B之一的所有元素所组成的集合，叫做A与B的**并集合**(并集).

$A\cup B=B\cup A$, $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$成立.

$A\subset B\Longleftrightarrow A\cup B=B$, $A\subset B\Longleftrightarrow\overline{A}\cup B=U$很重要.

交集合

$(A\cap B)$

设A,B是两个集合，由A,B的共同元素所组成的集合，叫做A与B的**交集合**(交集).

$A\cap B=B\cap A$, $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$成立.

$A\subset B\Longleftrightarrow A\cap B=A$, $A\subset B\Longleftrightarrow A\cap\overline{B}=\varnothing$是重要的法则.

其他部分知识的重要性

在新符号问题上，理解了符号意义，掌握了集合的基本知识后，其他部分的一般知识就比较重要了.

例题13 设绝对值小于1的全体实数的集合为S. S中的新运算$*$定义如下:

$$a*b=\frac{a+b}{1+ab}.$$

(1) 证明:如果 a 与 b 属于 S,那么 $a*b$ 也属于 S.

(2) 证明:结合律 $(a*b)*c=a*(b*c)$ 成立.

解法 (1) 集合 S 为 $S=\{x|-1<x<1\}$. 因而,若证明 $a*b$ 属于 S,只要证明满足 $-1<a*b<1$ 即可. 换言之,这个问题就是"当 $-1<a<1$, $-1<b<1$ 时,试证 $-1<\frac{a+b}{1+ab}<1$ 成立". 要证明 $-1<\frac{a+b}{1+ab}<1$,只要证明$\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)^2<1$ 即可.

(2) 正确应用定义计算 $(a*b)*c$ 和 $a*(b*c)$,指出它们相等即可. 但若着眼于对称性,没必要从两方面作计算.

解 (1) 因为 $|a|<1$, $|b|<1$,所以

$$1-\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)^2=\frac{1-a^2-b^2+a^2b^2}{(1+ab)^2}$$

$$=\frac{(1-a^2)(1-b^2)}{(1+ab)^2}>0.$$

$$\therefore\ \left(\frac{a+b}{1+ab}\right)^2<1,\ \therefore\ -1<\frac{a+b}{1+ab}<1.$$

故 $a*b$ 属于 S.

(2) $$(a*b)*c=\frac{a+b}{1+ab}*c=\frac{\frac{a+b}{1+ab}+c}{1+\frac{a+b}{1+ab}\cdot c}=\frac{a+b+c+abc}{1+bc+ca+ab}.$$

因为此式关于 a, b, c 对称,所以 $(a*b)*c=a*(b*c)$.

研究 (1) 也可以按下列方法来作. 设 b 是定数, a 是变数, 则

$$f(a)=a*b=\frac{a+b}{1+ab},\quad \therefore\ f'(a)=\frac{1-b^2}{(1+ab)^2}>0,$$

所以 $f(a)$ 是增函数．因为 $f(-1)=-1$，$f(1)=1$，所以当 $-1<a<1$ 时，有 $-1<f(a)<1$．

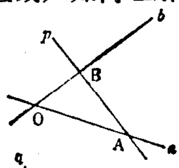
例题 14 已知平面上直线的集合为 S．两点 A，B 或重合，或直线 AB 属于 S 时，这两点 A，B 的关系用 $A\approx B$ 表示．

当 S 满足下列两个条件时，试证 S 包含平面上所有的直线．

（1）S 至少包含一组相交的二直线．

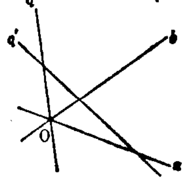
（2）关于三点 A,B,C，如果 $A\approx B$，$B\approx C$，那么 $A\approx C$．

解法 首先，切实理解 $A\approx B$ 的意义．其次，牢记集合 S 满足二个条件．所谓 S 包含平面上所有的直线，如何理解才合适呢？要点是把所有的直线如何分类．

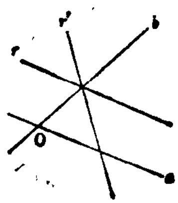


解 根据条件(1)，S 包含相交于 O 的两直线 a,b．

(i) 设任意直线 p 与 a，b 相交于 0 以外的点，p 与 a，b 的交点分别为 A,B．因为 $O\approx A$，$O\approx B$，从(2)得 $A\approx B$．故直线 AB，即直线 p 包含在 S 内．



(ii) 设 q 是过点 O 的任意直线，作过 q 上一点且与 a,b 相交（异于 q）的直线 q'，由(i)可知，q' 包含在 S 内．$a\in S,q'\in S$，因为 q 和 a、q' 都相交，并且不通过 a 与 q' 的交点，由(i)得 $q\in S$．



(iii) 设 r 为平行于 a 的任意直线，过 r, b 的交点引与 a 相交(异于 b)的直线 r'，由(i)得 $r' \in S$. 由(ii)得 $r \in S$.

(iv) 平行于 b 的任意直线，与(iii)同理可证也包含在 S 内. 根据(i)～(iv)，S 包含平面上所有的直线.

例题 15 在从 1 到 n 的正整数集合 $S=\{1,2,3,\cdots,n\}$ 中，用 $K(n,r)$ 表示满足下列两个条件(a)，(b)的 S 的子集个数：

(a) 由 r 个元素构成；

(b) 不包含连续的整数.

例如，$n=6$, $r=3$ 时，由于在集合 $\{1,2,3,4,5,6\}$ 的子集中，满足上述条件的是 $\{1,3,5\}$，$\{1,3,6\}$，$\{1,4,6\}$，$\{2,4,6\}$ 的四个，所以 $K(6,3)=4$.

这时，在下列 $\boxed{\quad}$ 中填上正确的数：

(1) $K(5,2)=\boxed{\quad}$.

(2) 在满足上述条件 S 的子集中，若考虑含有 n 的子集个数和不含有 n 的子集个数，则下式成立：

$K(n,r)=K(\boxed{\quad}, r-1)+K(n-1,\boxed{\quad})$.

(3) 试完成关于 $K(n,r)$ 的右边的数值表.

n \ r	1	2	3	4	5	6
1		/	/	/	/	/
2			/	/	/	/
3				/	/	/
4					/	/
5						/
6			4			

解法 这个问题是，给定一个有限的自然数的集合时，求满足某种条件的子集的个数问题.

(1) 由 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 中的两个元素组成的子集个数为 $C_5^2=10$(个)，由于其中连续的有四个：$\{1,2,\}$，$\{2,3\}$，$\{3,4\}$，

$\{4,5\}$，故 $K(5,2)=10-4=6$，或适合正确规则条件的子集是 6 个.

(2) 因为包含 n 就不能包含 $n-1$，所以，从

$$1,2,3,\cdots,\ n-2$$

中取不连续的 $(r-1)$ 个元素的子集个数为 $K(n-2,r-1)$ 个.
又，不包含 n 的，从

$$1,2,3,\cdots,\ n-1$$

中取不连续的 r 个元素的子集的个数为 $K(n-1,r)$ 个.

因而，$K(n,\ r)=K(n-2,\ r-1)+K(n-1,r)$. 注意 $K(n,r)$ 中 $n\geqslant r$.

(3) 用在(2)中得到的公式逐次计算便可. 其中 $K(n,1)=n$.

当 $n>1$ 时，明显有 $K(n,n)=0$.

解 (1) 6. (2) $n-2,r$.

(3) 右表.

$n \backslash r$	1	2	3	4	5	6
1	1	/	/	/	/	/
2	2	0	/	/	/	/
3	3	1	0	/	/	/
4	4	3	0	0	/	/
5	5	6	1	0	0	/
6	6	10	4	0	0	0

例题 16 考虑下列集合：

$$S=\{a+b\sqrt{5}\mid a,b\ 是整数\},$$

这里用 $S=\{r\mid P\}$ 表示满足条件 P 的元素 r 的集合 S.

(1) 试证 S 的元素 $1-\sqrt{5}$ 和 $3+\sqrt{5}$ 互相整除.

(2) 试证 S 中不存在 $1-\sqrt{5}$ 的倒数.

(3) 证明：$a+b\sqrt{5}$ 在 S 中有倒数的充要条件是 $a^2-5b^2=\pm 1$.

解法 (1) 计算

$(1-\sqrt{5})\div(3+\sqrt{5})$ 及 $(3+\sqrt{5})\div(1-\sqrt{5})$，

如果指出其结果为 $a+b\sqrt{5}$ (a, b 是整数)形便可.

(2) 把$\frac{1}{1-\sqrt{5}}$有理化，整理成 $p+q\sqrt{5}$ 形时，如果证明 p或 q 不是整数便可.

(3) 把$\frac{1}{a+b\sqrt{5}}$变为 $m+n\sqrt{5}$ 形，求出 m, n都是整数的条件便可.

解 (1) $\frac{1-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=\frac{(1-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}=\frac{8-4\sqrt{5}}{4}$

$$=2-\sqrt{5}.$$

$$\frac{3+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}=\frac{(3+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}$$

$$=\frac{8+4\sqrt{5}}{-4}=-2-\sqrt{5}.$$

$2-\sqrt{5}$, $-2-\sqrt{5}$ 都是 S 的元素，所以$1-\sqrt{5}$与$3+\sqrt{5}$在 S 中互相整除.

(2) $\frac{1}{1-\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{5}$，不是 S 的元素.

(3) 当 a、b 是整数时，为使$\frac{1}{a+b\sqrt{5}}=\frac{a-b\sqrt{5}}{a^2-5b^2}$是 S 的元素，可令$\frac{a}{a^2-5b^2}=m$, $\frac{b}{a^2-5b^2}=n$. 则所求的充要条件为 m, n 都是整数.

$$m^2-5n^2=\frac{a^2-5b^2}{(a^2-5b^2)^2}=\frac{1}{a^2-5b^2}.$$

因为 m^2-5n^2 是整数，所以$\frac{1}{a^2-5b^2}$也是整数. 因此，$a^2-5b^2=\pm1$.

反之，当 $a^2-5b^2=\pm1$ 时，m，n 为整数．因此，所求的条件为 $a^2-5b^2=\pm1$.

例题 17 试回答下列(1)，(2)：

(1) 设由各项 a_n 是"0 或正整数"的无穷数列 $\{a_n\}$ 的全体所组成的集合为 S. 对于 S 的两个不同的元素 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，若对于 $a_n\neq b_n$ 最小的 n，$a_n<b_n$ 成立，则定义 $\{a_n\}\ll\{b_n\}$. 这时，如果 $\{a_n\}\ll\{b_n\}$，则对于 S 的任何元素 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，使

$$\{a_n\}\ll\{c_n\}\ll\{b_n\}$$

成立的 S 的元素 $\{c_n\}$ 恒存在吗？如果存在，试给出证明；如果不存在，试举出一组 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的例子.

(2) 在把(1)的"0 或正整数"换成"0 或 1"情形下，试回答关于和(1)同样的问题.

解法 这个集合是由数列组成的集合．定义了数列相互间的大小.

$\{a_n\}\ll\{b_n\}$，即对于 $a_n\neq b_n$ 最小的 n，有 $a_n<b_n$ 成立.
正确理解这一点是重要的．在这种问题中，关键是抓住问题的意义.

这样规定大小的方法叫做字典式．这种定义大小的意义，与实数集合或整数集合是相同的．(1)中正如实数集合，如果 $a<b$，那么必然存在 c 使 $a<c<b$. 对于(2)，如同整数集合，当 $a<b$ 时，a 与 b 之间不一定能取得出 c.

解 (1) 当 $\{a_n\}\ll\{b_n\}$ 时，使 $\{a_n\}\ll\{c_n\}\ll\{b_n\}$ 成立的 $\{c_n\}$ 恒存在．因为，当

$a_1=b_1, a_2=b_2, \cdots, a_{n-1}=b_{n-1}, a_n<b_n, \cdots$ 时，假设

$c_1=a_1, c_2=a_2\cdots, c_{n-1}=a_{n-1}, c_n=a_n, c_{n+1}=a_{n+1}+1,$
$c_k(k\geqslant n+2)$任意选取，从定义可得$\{a_n\}\ll\{c_n\}$，$\{c_n\}\ll\{b_n\}$.

（2）不一定存在.

例如，考虑

$\{a_n\}$: 0, 1, 1, 1, …（第二项以下都是1.）

$\{b_n\}$: 1, 0, 0, 0, …（第二项以下都是0.）

则$\{a_n\}\ll\{b_n\}$.

这里为使$\{a_n\}\ll\{c_n\}$成立，必须 $c_1=1$. 而设 $c_1=1$ 时，$\{c_n\}\ll\{b_n\}$不成立.

例题 18 对于$m\leqslant l$ 的两数 l, m，满足不等式$m\leqslant x\leqslant l$的所有数 x 的集合 S，满足条件

"x 属于S时，x^2也属于 S". 这时，

（1）试证 $0\leqslant l\leqslant 1$.

（2）试证$m=1$ 或$m\leqslant 0$.

（3）$m=1$ 时，S是什么样的集合？

（4）$m\neq 1$ 时，对于所给数 $l\,(0\leqslant l\leqslant 1)$，试确定$m$的取值范围.

解法 把关于集合S的条件，作为不等式的命题处理. 从$S=\{x\mid m\leqslant x\leqslant l\}$，条件"$x$ 属于S时，x^2也属于S"是"关于满足 $m\leqslant x\leqslant l$ 的任意 x，$m\leqslant x^2\leqslant l$ 也成立"，即 $m\leqslant x\leqslant l\Rightarrow m\leqslant x^2\leqslant l$.

（1）假设 $x=l$.

（2）假设 $x=m$.

（3）当 $m=1$ 时，由 $m\leqslant l\leqslant 1$ 得 $l=m=1$，因而 $S=\{1\}$，

即 S 是仅由 1 组成的集合.

(4) 考虑 $m\leqslant x^2\leqslant l$ 的 x 的集合.

解 (1) 从条件 $m\leqslant x\leqslant l\Longrightarrow m\leqslant x^2\leqslant l$.

取 $x=l$, 则 $l^2\leqslant l$,

$\therefore\quad l(l-1)\leqslant 0,\qquad \therefore\quad 0\leqslant l\leqslant 1.$ ①

(2) 取 $x=m$, 由于 $m^2\in S$, 则 $m\leqslant m^2$,

$\therefore\quad m(m-1)\geqslant 0,\ \therefore\quad m\leqslant 0$ 或 $m\geqslant 1$.

如果设 $m>1$, 则 $l>1$, 这与①矛盾.

$\therefore\quad m=1$ 或 $m\leqslant 0$.

(3) 当 $m=1$ 时, 由 $m\leqslant l$ 和①, 得 $l=1$.

所以 S 是仅由 1 组成的集合.

(4) 如果 $m\neq 1$ 时, 那么 $m\leqslant 0$.

特别地, 因为 m^2 属于 S, 所以 $m^2\leqslant l$.

$$\therefore\quad (m+\sqrt{l})(m-\sqrt{l})\leqslant 0.$$

因为 $m-\sqrt{l}\leqslant 0$, 所以 $m+\sqrt{l}\geqslant 0$.

$$\therefore\quad m\geqslant -\sqrt{l}.$$

因此, m 的范围是 $-\sqrt{l}\leqslant m\leqslant 0$.

练习 (答案在 139 页)

9. 设 S 是满足下列条件的数(不限于实数)的集合:

(a) S 不包含 1. (b) 若 a 包含于 S, 则 $\frac{1}{1-a}$ 也包含于 S.

(1) 集合 S 包含 2 时, 则 S 必定包含其他两数. 求出这两个数.

(2) 证明: 若 a 包含于 S, 则 $1-\frac{1}{a}$ 也包含于 S.

(3) 在集合 S 中, 有没有元素的个数是一个的? 如果有, 试把它都求出来, 并将那个元素用极形式表示.

习　题（答案在 145 页）

—— A ——

1. 当 x, y 是有理数时，把 $\sqrt{2}x+y$ 记作 $\langle x, y\rangle$. 这时，试回答下列各问题：

(1) 试计算 $\langle 1,1\rangle\times\langle 1,-1\rangle$ 的值.

(2) 试用 $\langle x, y\rangle$ 的形式表示 $\langle a, b\rangle\times\langle c, d\rangle$.

(3) 试用 $\langle x,y\rangle$ 的形式表示 $\langle a,b\rangle\div\langle c,d\rangle$. (其中, c,d 不同时为 0.)

2. 在含有 0 的数集合中，考虑满足下列公理关系 $\mapsto$：

(a) 在任意两数 a, b 之间，$a\mapsto b$, $a=b$, $b\mapsto a$ 中仅有一个关系成立；

(b) 如果 $a\mapsto b, b\mapsto c$, 那么 $a\mapsto c$;

(c) 如果 $a\mapsto b$, 那么对于任意的 c, 有 $a+c\mapsto b+c$;

(d) 如果 $a\mapsto b, c\mapsto 0$, 那么 $ac\mapsto bc$. 这时，试回答下列问题：

(1) 由 $0,1,-1$ 构成的集合中，关系 $\mapsto$ 是怎样确定的？

(2) 由 $0,1,-1,i$ 构成的虚数集合中，试证关系 $\mapsto$ 不能确定.

3. 对于正整数 m 和 n, 把 m 的倍数并且是 n 的约数的正整数全体集合记作 $P(m,n)$.

(1) 试举出全部 $P(3,48)$ 的元素.

(2) $P(m,n)$ 为非空集合时，m 和 n 之间有什么样关系？

(3) $P(l,m+n)\cap P(m,l+n)$ 为非空集合时，试证：

(a) $P(l,n)$ 不是空集合.　　(b) $l=m$.

4. 设 $x>0, f(x)=\max(0,\log x)$, 对数的底是 e 或 10.

完成下列(1), (2), (3)式是等式或不等式，并给出证明. $\max(a,b)$ 表示 a, b 中不是较小的一方的符号.

(1) $f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)\ \boxed{}\ \log x$.

(2) $f(xy)\ \boxed{}\ f(x)+f(y)$.

(3) $f(x+y)\ \boxed{}\ f(x)+f(y)+\log 2$.

—B—

5. 查阅有关某岛的文献，获悉此岛过去的城镇与道路有以下五种情况:

(a) 至少有两个城镇;

(b) 对于任意两个城镇，只有一条道路通过它们;

(c) 在两条道路交叉处必有一个城镇;

(d) 没有通过所有城镇的道路;

(e) 对于每一条道路 g，在 g 所不通过的城镇只有一条与 g 不相交的道路.

由上述五项事实出发，试依次证明下列三个事实:

(1) 任何一个城镇至少有两条道路通过.

(2) 任何一条道路至少通过一个城镇.

(3) 这个岛上，至少有四个城镇.

6. 对于任意的实数 x，给出实数值函数 $f(x)$. 设满足条件 $f(x)=x$ 的 x 集合为 M，满足条件 $f(f(a))=x$ 的 x 集合为 N.

(1) 试证 $M\subset N$ (M是N的子集).

(2) 证明: 如果 $f(x)$是 x 的增函数，那么$M=N$.

7. 设 λ, μ 是正实数. 对于以实数 x_1, y_1 为分量的向量 $\vec{a}=(x_1, y_1)$ 和以实数 x_2, y_2 为分量的向量 $\vec{b}=(x_2, y_2)$，定义$\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle$和$\|\vec{a}\|$如下:

$$\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle=\lambda x_1x_2+\mu y_1y_2,\quad \|\vec{a}\|=\sqrt{\langle\vec{a}, \vec{a}\rangle}.$$

这时，试回答下列(1)，(2):

(1) $\vec{a}=(x_1, y_1)$，$\vec{b}=(x_2, y_2)$，$\vec{c}=(x_3, y_3)$ 是向量，k 是实数时，下列等式(a)～(c)是否成立? 试回答理由.

(a) $\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle=\langle\vec{b}, \vec{a}\rangle$.

(b) $\langle k\vec{a}, \vec{b}\rangle=\langle\vec{a}, k\vec{b}\rangle=k\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle$.

(c) $\langle\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}\rangle=\langle\vec{a}, \vec{c}\rangle+\langle\vec{b}, \vec{c}\rangle$.

(2) $\vec{a}, \vec{b}$ 是向量，k 是实数时，试证下列等式:

$$k\|\vec{a}\|^2+(1-k)\|\vec{b}\|^2=\|\overrightarrow{ka}+(1-k)\vec{b}\|^2+k(1-k)\|\vec{a}-\vec{b}\|^2.$$

4. 关于整数部分

和整数有联系的问题，也常采用新符号．下面举出几个有代表性的例子．

$x<y$ (A) 对于非 0 的整数 x,y，当 y 被 x 整除时，记作 $x<y$．

$x\sim y$ 当 $x<y$，$y<x$ 同时成立时，记作 $x\sim y$．

(m,n) (B) 对于自然数 m,n，(m,n)表示一个自然数，定义如下：当$m=1,n=1$ 的情形，$(1,1)=3$，其他情形，(m,n)表示与$(m,1)$，$(m,2)$，$\cdots$，$(m,n-1)$，$(1,n)$，$(2,n)$，$\cdots$，$(m-1,n)$等互不相等的最小的自然数．

$f(n)$ (C) $f(n)$ 表示与自然数 n 互素且不超过 n 的自然数的个数．

$T(n)$ (D) $T(n)$表示 n 的约数个数；$S(n)$表示 n的所有约数的和．

$S(n)$

$R(n)$ (E) $R(n)$表示自然数 n 除以 7 时的剩余．

$\phi(n)$ (F) $\phi(n)$表示自然数列中从小的数第 n 个素数．

$a\approx b$ (G) 关于两个整数 a,b，当 $a-b$ 被 3 整除时，记作 $a\approx b$．

$M(3)$

切实理解定义

(H) $M(3)$表示3的倍数.

以上采用的种种符号，它们在所有的问题中都有说明. 因而，**同样的符号，根据问题用法不同的情况是很多的**. 重要的是，新的符号在问题中是代表什么意思. 因此，**必须牢固地掌握定义**.

关于整数问题的要点，将在后半部分的整数问题项下叙述. 下面仅写出在这里要用到的问题的要点.

约数的个数

若正整数N可以用素数幂的积

$$N=p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdot\cdots\cdot p_r^{n_r}$$

的形式表示时，那么N的正约数可表示为

$$p_1^{m_1}\cdot p_2^{m_2}\cdot\cdots\cdot p_r^{m_r}(0\leqslant m_1\leqslant n_1,$$

$0\leqslant m_2\leqslant n_2,\cdots,0\leqslant m_r\leqslant n_r)$的形式，共有

$(n_1+1)(n_2+1)\cdots(n_r+1)$个.

例如，360的约数个数是:

从$360=2^3\cdot 3^2\cdot 5$，得$4\times 3\times 2=24$(个).

互素

(自然数的个数)

p,q(但$p\neq q$)是素数时，在小于pq的自然数中与pq互素的自然数有多少个?

在与pq非互素的整数中，

以p为因数的有：$p,2p,3p,\cdots,qp$,

以q为因数的有：$q,2q,3q,\cdots,pq$,

合起来共有$(p+q-1)$个. 所以在小于pq的自然数中与pq互素的自然数有$pq-(p+q-1)=(p-1)(q-1)$个.

整除和等价律

$a-b$ 被 3 整除时，记作 $a\sim b$，则有

(1) $a\sim a$.

(2) 如果 $a\sim b$，那么 $b\sim a$.

(3) 如果 $a\sim b, b\sim c$，那么 $a\sim c$.

同样，**两数的差是偶数时**，记作 $a\sim b$，那么上述(1)，(2)，(3)成立.

$|a-b|<10$时，能否写成 $a\sim b$？

(1) 因为$|a-a|=0<10$，所以"$a\sim a$"成立.

(2) 因为$|a-b|<10$时，$|b-a|<10$，所以"如果 $a\sim b$，那么 $b\sim a$"成立.

(3) 因为$|a-b|<10$，$|b-c|<10$时，$|a-c|<10$未必成立，所以"如果$a\sim b, b\sim c$，那么$a\sim c$"不成立.

还有，**a 与 b 平行**（a 与 b 重合或无公共点时，定义为平行）时，记作 $a\sim b$，那么(1)，(2)，(3)成立.

整数的分组

任意的整数可表示为 $2n$ 或 $2n+1$（n 为整数）的形式.（$2n$ 和 $2n-1$ 也可以.）

或表示为 $3n-1, 3n, 3n+1$（n 为整数）的形式.

象这样，可以把整数分成任意组.

例题 19 对于非 0 的整数 x、y，y 被 x 整除时，记作 $x<y$. 这时，试回答下列问题:

(1) 试就下列(a)，(b)分别举出不成立的例子:

(a) $x<y$ 且 $y<x$ 时，$x=y$.

(b) $x<y$，$x=y$，$y<x$ 之中至少有一个成立.

(2) $x<y$ 和 $y<x$ 同时成立时，记作 $x\sim y$. 若 $x<1364$的整数 x 的个数为 n 时，试求出 $n\sim m$ 的全部整数 m.

解法 (1) (a)如果 y 被 x 整除且 x 被 y 整除，那么 $x=y$. 这样问题的反例有：1 和-1，2 和-2，3 和-3，…等. 关于(b)，因为是"至少一个成立"的反例，所以应举出三个都不成立的例子. 考虑 2 和 3，$x<y$，$x=y$，$y<x$都不成立. 3 和 4 也可以.

(2) $x<1364$ 的 x 个数，由于 $1364=2^2\times11\times31$，得$3\times2\times2=12$，再考虑负数，则有 $12\times2=24$(个).

1364 的约数个数，通常回答是 12 个. 但"1364被 x 整除"的整数 x 的个数必须是 24 个.

解 (1) (a) $x=1, y=-1$. (b) $x=3, y=2$.

(2) $x<y$，就是 y 被 x 整除，即使 $y=px$ 的整数 p 存在. 同理，$y<x$，使 $x=qy$的整数 q 存在.

从 $y=px$，$x=qy$，得 $y=pqy$.

因为 $y\neq0$，所以 $pq=1$. $\therefore p=q=1$ 或 $p=q=-1$.

因而，$x\sim y$ 时，$x=y$ 或 $x=-y$(其中 $x\neq0$)

因为 $1364=2^2\times11\times31$,

所以 $x<1364$ 的整数 x 的个数 n 为，$n=3\cdot2\cdot2\times2=24$.

$n\sim m$，$24\sim m$ 的整数 m 是 24 和-24.

(答) 24，-24.

例题 20 关于两个整数 a, b, $a-b$ 被 3 整除时, 记作 $a\approx b$.

(1) 试证: 如果 $a\approx b$, $b\approx c$, 那么 $a\approx c$.

(2) 试证: 如果 $a\approx b$, $a'\approx b'$, 那么 $aa'\approx bb'$.

(3) 试证: 整数 a 不被 3 整除时, 对于任意的整数 b, 存在满足 $ax\approx b$ 的整数 x.

解法 $a\approx b \Longleftrightarrow a-b$ 被 3 整除 $\Longleftrightarrow a-b=3m$ (m 是整数), 把关系 $\approx$ 用普通符号的关系写出即可.

(1) $a-b=3m$, $b-c=3n$ (m, n 是整数) 时, $a-c$ 可以写成 $3N$ (N 是整数) 的形式.

(2) $a-b=3m$, $a'-b'=3m'$ (m, m' 是整数) 时, $aa'-bb'$ 可以写成 $3N$ (N 是整数) 的形式.

(3) 分成 $a\approx 1$, $a\approx 2$ 的情形, 利用 (2).

解 如果 $a\approx b$, $b\approx c$, 那么 $a-b=3m$, $b-c=3n$ (m, n 是整数). 把二式边边相加, 得

$$a-c=3(m+n) \qquad (m+n \text{ 是整数}).$$

$$\therefore \quad a\approx c.$$

(2) 如果 $a\approx b$, $a'\approx b'$, 那么 $a-b=3m$, $a'-b'=3m'$ (m, m' 是整数).

$$\therefore \quad a=b+3m, a'=b'+3m'.$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad aa'-bb' &= (b+3m)(b'+3m')-bb' \\ &= 3(bm'+b'm+3mm').\end{aligned}$$

因为 $bm'+b'm+3mm'$ 是整数, 所以 $aa'\approx bb'$.

(3) 因为 a 不被 3 整除, 所以 $a=3k+1$ 或 $a=3k+2$ (k

是整数).

(a) $a=3k+1$(k 是整数)时,$ax-b=3kx+x-b$.

因此,设 l 是整数,若 $x=b+3l$,则

$$ax-b=3kx+3l=(3\text{ 的倍数}).$$

所以使 $ax\approx b$ 成立的整数 x 存在.

(b) $a=3k+2$(k是整数)时,则

$$ax-b=3(k+1)x-x-b.$$

因此,设 l 是整数,若 $x=-b+3l$,则

$$ax-b=3(k+1)x-3l=(3\text{的倍数}).$$

所以使 $ax\approx b$ 成立的整数 x 存在.

例题 21 $f(n)$表示与自然数 n 互素且不超过 n 的自然数的个数. 设 p,q是不同的两个素数时,试证下列等式:

$$f(pq)=(p-1)(q-1).$$

并利用这个等式,试求满足 $f(pq)=3p+q$的素数p,q($p\neq q$).

解法 所谓两个自然数互素,就是它们的最大公约数是1. 例如3和4,8和11等互素. 与 $15(=3\times5)$ 互素且不超过15的自然数,是从1到15的自然数中,去掉3的倍数3,6,9,12,15和5的倍数5,10,15,余下的数1,2,4,7,8,11,13,14. 注意这种情形对于15来说是重复的. $15-(5+3-1)=8$个.

p,q 的不定方程 $(p-1)(q-1)=3p+q$ 可变形为$(p-2)(q-4)=7$. 由此可知 $p-2$,$q-4$ 是7的因数. 又因为 p,q 是素数,所以可求出 p,q.

解 因为 p,q 是素数，所以与 pq 非互素的整数，就是以p或q为因数且小于 pq 的自然数，即

以 p 为因数的有：$p, 2p, 3p, \cdots, qp$（q 个），

以 q 为因数的有：$q, 2q, 3q, \cdots, pq$（p 个），

因为 pq 公用，所以共有 $(p+q-1)$ 个.

因此，小于 pq 且与 pq 互素的自然数的个数是

$$
\begin{aligned}
f(pq) &= pq-(p+q-1) \\
&= (p-1)(q-1).
\end{aligned}
$$

其次，设 $f(pq)=3p+q$，则

$$(p-1)(q-1)=3p+q.$$

$$\therefore \quad pq-4p-2q+1=0,$$

$$\therefore \quad (p-2)(q-4)=7.$$

因为素数 p 不小于 2，所以 $p-2\geqslant 0$. 因此，$p-2, q-4$是正整数.

$$p-2=1, q-4=7 \text{ 或 } p-2=7, q-4=1.$$

$$\therefore \quad p=3, q=11 \text{ 或 } p=9, q=5.$$

因为 9 不是素数，所以要求的素数 p,q 是 $p=3$, $q=11$.

例题 22 $R(n)$表示自然数 n 除以 7 时的余数. 这时，证明等式

$R(n_1n_2)=R\{R(n_1)R(n_2)\}$（$n_1, n_2$ 是任意的自然数）

成立，并计算 $R(3^{10})$和 $R(3^{100})$.

解法 若自然数 A除以自然数 B时的商数为q，余数为r，则

$$A=BQ+r \quad (r<B)$$

成立．也就是说，若 n_1, n_2 除以 7 时的商数分别为 q_1, q_2，则 $n_1=7q_1+R(n_1)$，$n_2=7q_2+R(n_2)$ 成立．其次，计算 n_1n_2，把它的结果变为 $7P+Q$ 的形式．

求 $R(3^{10})$，首先计算 $R(3^2)$，$R(3^4)$ 等，再利用证明过的等式即可．

解 若 n_1, n_2 除以 7 时的商数分别为 q_1, q_2，则

$$n_1=7q_1+R(n_1),\ n_2=7q_2+R(n_2).$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad n_1n_2&=49q_1q_2+7q_1R(n_2)\\&\quad+7q_2R(n_1)+R(n_1)R(n_2)\\&=7[7q_1q_2+q_1R(n_2)+q_2R(n_1)]\\&\quad+R(n_1)R(n_2).\end{aligned}$$

因为 $7q_1q_2+q_1R(n_2)+q_2R(n_1)$ 是非负的整数，所以 n_1n_2 除以 7 时的余数与 $R(n_1)R(n_2)$ 除以 7 时的余数相等．

$$\therefore\quad R(n_1n_2)=R[R(n_1)R(n_2)].$$

利用这个结果，有

$$\begin{aligned}&R(3^2)=R(9)=2,\\&R(3^4)=R[R(3^2)R(3^2)]=R(4)=4,\\&R(3^6)=R[R(3^2)R(3^4)]=R(8)=1,\\\therefore\quad &R(3^{10})=R[R(3^4)R(3^6)]=R(4)=4.\end{aligned}$$ （答）

其次，由于 $100=6\times16+4$，则 $3^{100}=(3^6)^{16}\cdot3^4$．

因为 $R(3^6)=1$，所以 $R[(3^6)^{16}]=1$．又 $R(3^4)=4$，

$$\therefore\quad R(3^{100})=R[R(3^6)^{16}\cdot R(3^4)]=R(4)=4.$$ （答）

研究 若 $R(n_1)R(n_2)$ 除以 7 时的商数为 q，根据题意，得 $R(n_1)R(n_2)=7q+R[R(n_1)R(n_2)]$．利用这个结果和 $n_1=7q_1$

$+R(n_1)$，$n_2=7q_2+R(n_2)$，得 $n_1n_2=7[7q_1q_2+q_1R(n_2)+q_2R(n_1)+q]+R[R(n_1)R(n_2)]$. [ ]内的数是整数，且 $0\leqslant R[R(n_1)R(n_2)]<7$. 因为 $R[R(n_1)R(n_2)]$是整数，这就是n_1n_2除以 7 时的余数.

例题 23 对于自然数 m，n，(m,n)表示一个自然数，定义如下：当 $m=1$，$n=1$ 的情形，$(m,n)=3$，其他情形，(m,n)表示与 $(m,1)$，$(m,2)$，$\cdots(m,n-1)$，$(1,n)$，$(2,n)$，$\cdots(m-1,n)$等互不相等的最小的自然数.

(1) m,n 的值分别从 1 到4 变化时，把(m,n)所表示的自然数填入右表从上数第 m 行、从左数第 n 列的格中，试完成此表.

(2) 试证自然数 k 为 3 以上时，$(k,k)=1$.

$m \backslash n$	1	2	3	4
	3			
2				
3				
4				

解法 (1) 因为(1,2)是与 (1,1)=3 不相等的最小自然数，所以是1. 因为(1,3)是与(1,1)=3 和(1,2)=1 不相等的最小自然数，所以是2. 因为(1,4)是与(1,1)，(1,2)，(1,3)不相等的最小自然数，所以是4. 因为(2,1)是与(1,1) 不相等的最小自然数，所以是 1. 象这样应用定义计算便可.

(2) 关于向右下方向的对角线对称.

$m \backslash n$	1	2	3	4
1	3	1	2	4
2	1	2	3	5
3	2	3	1	6
4	4	5	6	1

解 (1) 如右表.

(2) 从(m,n)的定义，(1)的表从$(1,1)=3$开始，关于向右下方向的对角线对称. 于是，对于任意的行、任意的列决不会出现相等的数. 当$k=3$时，$(3,3)=1$. 现设

$$(3,3)=(4,4)=\cdots=(k-1,k-1). \quad ①$$

由于数表的对称性，关于对角线上的(k,k)，考虑从第k行开始的$(k-1)$个数

$$(k,1),(k,2),(k,3),\cdots(k,k-1), \quad ②$$

与这些不相等的最小自然数表示为$(k,\ k)$. ②中的数顺次是第一列、第二列、…、第$(k-1)$列的数，从$(2,1)=(1,2)=1$及①，由于从这些列直到$(k-1)$列中都出现1，所以在第k行的②中不存在1. 故$(k,k)=1$.

例题 24 $\Phi(n)$表示自然数列中从小的数第n个素数.

(1) 试求满足$\Phi(x)+\Phi(x+1)=\Phi(2x+1)$的一个自然数.

(2) 试求$\sum\limits_{r=1}^{n}\Phi(r)$. 其中，$\Phi(n)<100<\Phi(n+1)$.

解法 素数从小的开始依次是2，3，5，7，11，13，17，……因而，$\Phi(1)=2$，$\Phi(2)=3$，$\Phi(3)=5$，$\Phi(4)=7$，……**素数中只有一个偶数. 2以外的素数全都是奇数.**

求100以下的素数时，写出从1到100的数，首先消去1. 其次留下2，消去2以后的所有2的倍数. 留下3，消去3以后的所有3的倍数. 留下5，消去5以后的所有5的倍数. ……这样继续做下去即可.

解 (1) 素数中偶数只有2. 因而，当$x>1$时，$\Phi(x)$，$\Phi(x+$

1), $\Phi(2x+1)$ 都是奇数.

所以 $\Phi(x)+\Phi(x+1)=\Phi(2x+1)$ 不成立. 因而, 满足此式的自然数是 $x=1$.

这时, $\Phi(x)=\Phi(1)=2$, $\Phi(x+1)=\Phi(2)=3$, $\Phi(2x+1)=\Phi(3)=5$.

(2) $\Phi(25)=97$,

$\Phi(26)=101$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

$\therefore \quad n=25.$

$$\sum_{r=1}^{25}\Phi(r)=2+3+5+7+11+13+17+19+23+29+31+37+41+43+47+53+59+61+67+71+73+79+83+89+97=1060.$$

<**注意**> 虽然 $\Phi(n)$ 等非常抽象, 然而若认真研究一下, 还是比较简单的. 把素数按从小到大的顺序排列时, 不过是表示第 n 个素数的符号而已. 切实理解符号的意义 (问题中给出定义的) 是非常重要的. 至于后半部分, 没有特殊好的方法, 就是把从 1 到 100 之间的素数全都挑选出来.

例题 25 设大于 1 的整数 n 素因数分解为 $n=p_1^{e_1}\cdot p_2^{e_2}\cdot\cdots\cdot p_k^{e_k}$, 其中, $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是不同的素数, $e_1, e_2, \cdots, e_k$ 是正整数. 试就 n 的约数的个数 $T(n)$ 与 n 的全部约数的和 $S(n)$, 证明下列关系式:

(1) $T(n)\geqslant 2^k$.

(2) $S(n)\geqslant 2^{k+1}-1$.

解法 (1) n 的约数的个数为 $(1+e_1)(1+e_2)\cdots(1+e_k)$ 个. 由 $e_1\geqslant1, e_2\geqslant1, \cdots e_k\geqslant1$, 得 $T(n)\geqslant2^k$.

(2) n 的约数的和为 $(1+p_1+p_1^2+\cdots+p_1{}^{e_1})(1+p_2+p_2^2+\cdots+p_2{}^{e_2})\cdots(1+p_k+p_k^2+\cdots+p_k{}^{e_k})$. 设这个值为 P, 则可变形为

$$p\geqslant(1+p_1)(1+p_2)\cdots(1+p_k)\geqslant3^k.$$

这里若能证明 $3^k\geqslant2^{k+1}-1$ 就可以了. 于此可用数学归纳法证明.

解 (1) n 的约数(也包含 1 和 n)的个数为

$$T(n)=(1+e_1)(1+e_2)\cdots(1+e_k).$$

因为 $e_1\geqslant1, e_2\geqslant1, \cdots, e_k\geqslant1$, 所以

$T(n)\geqslant2^k$. (仅当 $e_1=e_2=\cdots e_k=1$ 时, 等号成立.)

(2) n 的约数和 $S(n)$ 为

$$S(n)=(1+p_1+p_1^2+\cdots+p_1{}^{e_1})(1+p_2+p_2^2+\cdots+p_2{}^{e_2})\cdots(1+p_k+p_k^2+\cdots+p_k^{e_k})\geqslant(1+p_1)(1+p_2)\cdots(1+p_k)\geqslant3^k.$$

可是 $$3^k\geqslant2^{k+1}-1 \qquad ①$$

成立. 因为 $k=1$ 时, $3^1\geqslant2^2-1$ 成立.

假设 k 时成立, 两边同乘以 3, 得

$$3^{k+1}\geqslant3\cdot2^{k+1}-3. \qquad ②$$

这里 $(3\cdot2^{k+1}-3)-(2^{k+2}-1)=2^{k+1}-2>0$,

$$\therefore\quad 3\cdot2^{k+1}-3>2^{k+2}-1. \qquad ③$$

从②, ③得, $3^{k+1}>2^{k+2}-1$,

所以把①中的 k 换成 $k+1$ 也成立.

因而 $S(n)\geqslant2^{k+1}-1$.

（仅当 $k=1, p_1=2$ 时，等号成立．）

例题 26　对于自然数 $n, p, f_p(n)$ 表示 n^p 用十进制书写时的个位数．其中，自然数是指 1, 2, 3, ……．

（1）当 n 在全体自然数变动时，试求 $f_2(n)$ 的全部取值．

（2）对于全体自然数，试证 $f_5(n)=f_1(n)$ 成立．

（3）n 在全体自然数变动时，试求 $f_{100}(n)$ 的全部取值．

解法　（1）$f_2(n)$ 就是 n^2 的个位数．

（2）应用 n^5-n 是 10 的倍数．（参考 69 页）

（3）应用 $n^r(n^5-n)$，即 $n^{r+5}-n^{r+1}$ 是 10 的倍数．因为 $f_{r+5}(n)=f_{r+1}(n)$，所以可把 $f_{100}(n)$ 的 100 递次减 4．

解　（1）关于自然数 n，$n=10q+r$（q, r 是整数，$0\leqslant r\leqslant 9$）时，因为 $n^2=10(10q^2+2qr)+r^2$，所以 $f_2(n)=f_2(r)$．

因而，$f_2(n)$ 的取值是 0, 1, 4, 5, 6, 9．

（2）
$$\begin{aligned} n^5-n &= n(n-1)(n+1)(n^2+1) \\ &= n(n-1)(n+1)[(n^2-4)+5] \\ &= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) \\ &\quad +5n(n-1)(n+1). \end{aligned}$$

因为第一项是连续 5 个整数的积，所以含有 2 和 5 的因数，因而是 10 的倍数．因为 $n(n-1)(n+1)$ 是 2 的倍数，所以第二项是 10 的倍数．

因而 n^5-n 是 10 的倍数．故 n^5 与 n^1 的个位数相同，即 $f_5(n)=f_1(n)$ 成立．

（3）因为 n^5-n 是 10 的倍数，所以 $n^r(n^5-n)=n^{r+5}-$

n^{r+1} 也是 10 的倍数．因而 n^{r+5} 与 n^{r+1} 的个位数相同．

$$\therefore \quad f_{r+5}(n)=f_{r+1}(n)\text{（其中 } r \text{ 是非负的整数）}.$$

因而

$$f_{100}(n)=f_{96}(n)=f_{92}(n)=\cdots=f_8(n)=f_4(n).$$

所以 n^{100} 的个位数与 n^4 的个位数相同．

从(1)知，n^2 的个位数是 0，1，4，5，6，9．

因此，$n^4=(n^2)^2$ 的个位数是 0，1，5，6．

例题 27 （1）在整数集合中，

(a) 如果 $a\in A$，那么 $ka\in A$（k 是任意整数）；

(b) 如果 $a_1\in A, a_2\in A$，那么 $a_1+a_2\in A$

的性质成立时，试依次证明下列(i)～(iii)成立．其中，A 至少含有一个正整数．

(i) 如果 $a_1\in A$，$a_2\in A$，那么 $a_1-ka_2\in A$（k 是任意整数）．

(ii) 若属于 A 中最小的正整数为 m，则属于 A 的任意整数 a 除以 m 所得余数为 0．

(iii) A 是 m 的倍数全体的集合．

（2）设 x, y 取任意整数值变化时，$18x+30y$ 的值集合为 A．关于集合 A，试回答下列问题：

(i) 试证(1)的(a)，(b)性质成立．

(ii) A 是什么集合？

解法 （1）(i) 如果 $a_2\in A$，那么 $-ka_2\in A$．因为 $a_1\in A$ 及 $-ka_2\in A$，所以 $a_1+(-ka_2)\in A$．用(a)，(b)即可．

(ii) 设 a 除以 m 时的商为 q，余数为 r，则

$$a=mq+r \quad (0\leqslant r<m).$$

$$\therefore \quad r=a-mq.$$

因而,由(i)得 $r\in A$. 然后考虑 r 与 m 的条件即可.

(iii) 从 m 的倍数必属于 A 和 A 的元素必是 m 的倍数这两方面证明.

(2) (i) 集合 A 是 $18x+30y$ 形的整数的全体的集合. 因而, 如果 $a\in A$, 那么 a 可表示为 $18x+30y$ 形. 这时,指出 ka 也能表示为 $18X+30Y$ 形就可以了.

又,如果 $a_1\in A, a_2\in A$, 那么 a_1, a_2 可表示为 $18x_1+30y_1$, $18x_2+30y_2$ 的形式. 这时,指出 a_1+a_2 也能表示为 $18X+30Y$ 形就可以了.

(ii) 指出 A 的所有元素都是 6 的倍数, 以及 A 的元素中最小的正整数是 6 即可.

解 (1) (i) 因为 $a_2\in A$, 根据 (a), 得 $(-k)a_2\in A$. 因为 $a_1\in A$, $-ka_2\in A$, 根据 (b), 得 $a_1+(-ka_2)\in A$.

$$\therefore \quad a_1-ka_2\in A.$$

(ii) 设 a 除以 m 时的商为 q, 余数为 r, 则

$$a=mq+r \quad (0\leqslant r<m).$$

因而 $r=a-mq$.

因为 $a\in A, m\in A$, q 是整数, 所以由(i)得 $a-mq\in A$, $\therefore r\in A$. 因为 A 的元素中最小的是 m, $0\leqslant r<m$, 所以 $r=0$.

(iii) 设 k 是任意整数时.

因为 $m\in A$, 由 (a) 得 $km\in A$.

所以 m 的倍数全都包含于 A 内. ①

反之, 因为 A 的任意元素 a, 可表示为 $a=km$, 所以

A 的元素全都是 m 的倍数. ②

从①，②得知，A是m的倍数的全体的集合.

（2）（i）集合A是$18x+30y$（x, y是任意整数）形的整数集合. 因而，如果$a \in A$，那么存在整数x, y，使$a=18x+30y$.

设k是任意的整数，则

$$ka=18kx+30ky=18(kx)+30(ky).$$

因为kx, ky是整数，所以$ka \in A$. 因此，(a)成立.

其次，如果$a_1 \in A, a_2 \in A$，那么

存在整数x_1, y_1, x_2, y_2，使$a_1=18x_1+30y_1$，$a_2=18x_2+30y_2$.

$$\therefore \quad a_1+a_2=18(x_1+x_2)+30(y_1+y_2).$$

因为x_1+x_2, y_1+y_2是整数，所以$a_1+a_2 \in A$. 因此，(b)成立.

（ii）如果$a \in A$，那么$a=18x+30y$.

因为$18x+30y=6(3x+5y)$，所以a是6的倍数.

因此，A的元素全都是6的倍数.

其次，因为$6=18\times 2+30\times(-1)$，所以6是$A$的元素.

因此，A的元素中最小的正数是6.

所以，由(1)的证明结果，可得

A是6的倍数的全体的集合.

5. 新符号——为了简化的符号

用新符号处理集合或论证问题是很多的，然而单纯为了简化而使用的新符号，虽然不是大量的，但也比较多．这种情形也是重在牢固掌握问题中所述新符号的意义．**用普通符号表示新符号后，，余下的仅是计算了．**下面举例说明新的符号：

$((\ ))$ (A) 对于任意的整数 n，$n=3p+k$ (k 取 $0,1,2$ 的任意值，p 是整数)表示时，定义符号 $((\ ))$ 为 $((n))=k$．

$[a,b,c]$ (B) 设 a,b,c 为实数．符号 $[a,b,c]$ 表示 $[a,b,c]=(a-b)(a-c)$．

$[a,b,c]$ (C) a,b,c 为三个数时，符号 $[a,b,c]$ 表示一个分数：以最初的一个数、最初的两个数、三个数的和之积做分母，以 1 做分子，即

$$[a,b,c]=\frac{1}{a(a+b)(a+b+c)}.$$

$n(p,q)$ (D) 设 p,q 为整数．$n(p,q)$ 表示满足关于 x 的不等式 $x^2-2px+q<0$ 的整数 x 的个数．

$f(n)$ (E) $f(n)$表示满足 $0\leqslant x\leqslant n$，$0\leqslant y\leqslant x^3$

的整数 x、整数 y 为坐标的点 (x,y) 的个数.

$f_n(x)$ (F) n 是自然数时，定义函数 $f_n(x)$ 如下：$f_n(x)=(1-x+x^2)^n$.

$Min\{a,b\}$ $Max\{a,b\}$ $M(r)$ (G) $Min\{a, b\}$ 表示 a, b 中非较大的数. $Max\{a,b\}$ 表示 a, b 中非较小的数.

(H) 设 $f(x)=x^3-6x^2+8$，当 $0\leqslant x\leqslant r$ 时，把 $|f(x)|$ 的最大值记作 $M(r)$.

a_n (I) 对于自然数 n，在 $n<x<n+1$ 范围内，把使 $2^{x-1}-0.5$ 的值为整数的 x 值的个数记作 a_n.

$f(x)\circ g(x)$ (J) 对于 x 的函数 $f(x)$, $g(x)$，用 $f(x)\circ g(x)$ 表示积分 $\int_0^x f(x-t)g(t)dt$.

例题 28 设 a, b, c 为三个实数. 符号 $[a, b, c]$ 表示 $[a,b,c]=(a-b)(a-c)$.

(1) 试证 $[a,b,c]+[b,c,a]=[a,b,b]$ 成立.

(2) 试用普通算式表示 $[a,b,b]+4[c,a,b]$，并分解因式.

(3) 已知 $[a,b,c]+[b,c,a]+[c,a,b]=0$，试求 $[a,b,b]+4[c,a,b]$ 的值.

解法 将新符号关系 $\longrightarrow$ 换成普通符号关系. 将 $[a,b,c]\longrightarrow$ 换成 $(a-b)(a-c)$.

(1) 这个问题就是，证明 $(a-b)(a-c)+(b-c)\times(b-$

$a)=(a-b)^2$. 由计算左边，推导出右边.

(2) 是把$(a-b)^2+4(c-a)(c-b)$分解因式的问题. 首先展开，再利用 $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2$.

(3) 是当$(a-b)(a-c)+(b-c)(b-a)+(c-a)(c-b)=0$时，求$(a-b)^2+4(c-a)(c-b)$的值问题. 可利用(2).

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$
$$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2].$$

a,b,c 为实数时，利用 $a^2+b^2+c^2=0$，则 $a=b=c=0$.

解 (1) 左边$=(a-b)(a-c)+(b-c)(b-a)$

$$=(a-b)[(a-c)-(b-c)]=(a-b)^2$$
$$=右边.$$

(2) 原式$=(a-b)^2+4(c-a)(c-b)$

$$=a^2-2ab+b^2+4c^2-4bc-4ac+4ab$$
$$=a^2+b^2+4c^2+2ab-4bc-4ca$$
$$=(a+b-2c)^2.$$

(3) 从条件得 $(a-b)(a-c)+(b-c)(b-a)+(c-a)(c-b)=0$.

$\therefore\ (a-b)^2+(c-a)(c-b)=0$. ($\because$ 由(1))

$\therefore\ a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$.

$\therefore\ \frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=0$.

由于 a,b,c 是实数，所以 $a=b=c$. ①

由(2)得 $[a,b,b]+4[c,a,b]=(a+b-2c)^2$

$=0$. ($\because$ 由①)

例题 29 设 a, b, c 为三个数. 符号$[a, b, c]$表示一个分数:以最初的一个数,最初的两个数、三个数的和之积做为分母,以 1 做分子,即

$$[a,b,c]=\frac{1}{a(a+b)(a+b+c)}.$$

(1) 试用普通算式表示$[a,b,c]+[a,c,b]+[b,a,c]+[b,c,a]+[c,a,b]+[c,b,a]$.

(2) 试化简(1)式. 其中,设 a, b, c 都不为 0,任两个数的和,任三个数的和也都不为 0.

解法 **新符号⟶切实应用定义.**

(1) 重要的是正确理解定义. 按$[a,b,c]$的意义把它换成普通算式即可.

(2) 首先提取公因式. 把余下的适当地两两结合计算即可.

解 (1)
$$\frac{1}{a(a+b)(a+b+c)}+\frac{1}{a(a+c)(a+c+b)}+\frac{1}{b(b+a)(b+a+c)}+\frac{1}{b(b+c)(b+c+a)}+\frac{1}{c(c+a)(c+a+b)}+\frac{1}{c(c+b)(c+b+a)}.$$

(2)
$$\text{上式}=\frac{1}{a+b+c}\left[\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{a(a+c)}+\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{b(b+c)}+\frac{1}{c(a+c)}+\frac{1}{c(b+c)}\right]$$
$$=\frac{1}{a+b+c}\left[\frac{a+b}{ab(a+b)}+\frac{b+c}{bc(b+c)}+\frac{a+c}{ac(a+c)}\right]$$

$$=\frac{1}{a+b+c}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$$

$$=\frac{1}{a+b+c}\cdot\frac{a+b+c}{abc}$$

$$=\frac{1}{abc}.$$

例题30 设 p, q 是整数, $n(p,q)$ 表示满足关于 x 的不等式

$$x^2-2px+q<0$$

的整数 x 的个数. 试回答下列各问题:

(1) 试求 $n(5,10)$.

(2) 试求满足 $n(5,q)=5$ 的 q 值.

解法 (1) 满足 $x^2-10x+10<0$的整数 x 的个数为$n(5, 10)$. 解这个不等式,找出在此范围内整数 x 的个数.

(2) 满足 $x^2-10x+q<0$ 的整数 x 的个数是 5. 若 $x^2-10x+q=0$ 的两个实数根为 $\alpha,\beta(\alpha<\beta)$,则 $x^2-10x-q<0$的解为

$$\alpha<x<\beta.$$

因为在此范围内整数 x 是 5 个, 所以 q 是可以求出的. 这里利用数轴较好,或利用 $y=x^2-10x+q$ 的图象.

解 (1) 把 $p=5, q=10$ 代入不等式, 得 $x^2-10x+10<0$.

$\therefore$ $5-\sqrt{15}<x<5+\sqrt{15}$, $\therefore$ $1.1\cdots<x<8.8\cdots$.

由 x 是整数,得 $x=2,3,4,5,6,7,8$. $\therefore$ $n(5,10)=7$.

(2) 由题意,考虑 $x^2-10x+q<0$.

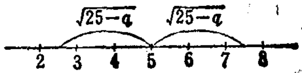
这个不等式的解为$5-\sqrt{25-q}<x<5+\sqrt{25-q}$.

在此范围内整数 x 的个数是 5 的条件为

$$2<\sqrt{25-q}\leqslant 3,$$

$\therefore\ 4<25-q\leqslant 9,$

$16\leqslant q<21.$



由 q 是整数，得 $q=16,17,18,19,20.$

研究 设 $f(x)=x^2-10x+q.$

考虑图象如右图.（下凸，轴为 $x=5.$）

使 $n(5,q)=5$ 的条件为

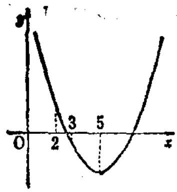
$$f(2)\geqslant 0 \text{ 且 } f(3)<0.$$

$(f(7)<0$ 且 $f(8)\geqslant 0$ 也可.)

$\therefore\ q-16\geqslant 0$ 且 $q-21<0.$

因此 $16\leqslant q<21,$

$\therefore\ q=16,17,18,19,20.$



例题 31 对于任意实数 x，取满足 $n\leqslant x<n+1$ 的整数 n，定义符号[ ]为$[x]=n$.

还有，对于任意的整数 n，$n=3p+k$（k 取 0，1，2 的任意值，p 是整数）表示时，定义符号(( ))为$((n))=k$. 根据这两个符号定义，试求

$$(([-0.5]))+(([18.9]))$$

的值.

解法 因为$-1\leqslant -0.5<0$，所以$[-0.5]=-1$. 因为$18\leqslant 18.9<19$，所以$[18.9]=18$. 其次，因为 $-1=3\times(-1)+2$，所以$((-1))=2$. 因为 $18=3\times 6+0$，所以$((18))=0$.

解 $(([-0.5]))+(([18.9]))=((-1))+((18))$

$$=2+0=2.$$

例题 32 设 a 是正整数，对于任意实数 x，试证

$$a[x]\leqslant[ax]$$

成立. 其中，对于实数 t，符号$[t]$表示不超过 t 的最大整数.

解法 对于任意实数t，可用$t=[t]+\alpha(0\leqslant\alpha<1)$表示. 牢固地掌握$[t]$的意义是重要的. 例如，$[3.8]=3$，$[-4.2]=-5$. **当 $t>0$时，$[t]$表示 t 的整数部分；当 $t<0$ 时，$[t]$表示小数部分进上去的值.**

解 对于任意实数 x 仅有一种表示方法，即

$$x=n+\alpha(n=[x],0\leqslant\alpha<1).$$

对于正整数 a，$ax=an+a\alpha$.

如果 $0\leqslant a\alpha<1$，那么$[ax]=an$.

另由 $a[x]=an$，$\therefore$ $[ax]=a[x]$.

如果 $a\alpha\geqslant1$，那么$[ax]>an$.

另由 $a[x]=an$，$\therefore$ $[ax]>a[x]$.

因此，一般有 $a[x]\leqslant[ax]$.

例题 33 $\mathrm{Max}\{a,b\}$表示实数a，b 中非较小的数. 例如，$\mathrm{Max}\{2,3\}=3$，$\mathrm{Max}\{4,4\}=4$. 当 $F(x)$为 x 的函数时，定义$F^+(x)=\mathrm{Max}\{0,F(x)\}$.

(1) 当 $f(x)=x^3-3x^2-6x+8$ 时，试画出函数 $y=f^+(x)$ 的图象.

(2) 当 $g(x)=-3x^2+6x+9$ 时，试求$\int_{-3}^{3} g^+(x)dx$.

(3) 关于上面的 $f^+(x)$, $g^+(x)$, 试求 $\int_{-3}^{3} f^+(x)\cdot g^+(x)dx$.

解法 (1) $f^+(x)$表示 0 与 $f(x)$中非较小的数. 解 $f(x)\geqslant 0$，得$-2\leqslant x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant 4$.

因而

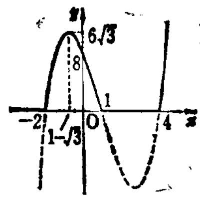
$$f^+(x)=\begin{cases}0, & (x\leqslant -2, 1\leqslant x\leqslant 4).\\ f(x). & (-2\leqslant x\leqslant 1, 4\leqslant x).\end{cases}$$

(2) 当 $x\leqslant -1$, $x\geqslant 3$ 时, $g^+(x)=0$; 当 $-1\leqslant x\leqslant 3$ 时, $g^+(x)=g(x)$.

(3) 考虑当$-3\leqslant x\leqslant 3$ 时，$f^+(x)\cdot g^+(x)$如何？在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上, $f^+(x)\cdot g^+(x)=f(x)\cdot g(x)$, 在其他区间上, $f^+(x)\cdot g^+(x)=0$.

解 (1) $f(x)=x^3-3x^2-6x+8$

$=(x+2)(x-1)(x-4)$.



$f'(x)=3(x-1-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{3})$.

当$x=1-\sqrt{3}$时，$f(x)$有极大值$6\sqrt{3}$.

$$f^+(x)=\begin{cases}0, & (x\leqslant -2, 1\leqslant x\leqslant 4 \text{ 时.})\\ f(x). & (-2\leqslant x\leqslant 1, x\geqslant 4 \text{ 时.})\end{cases}$$图象如右上图.

(2) $g^+(x)=\begin{cases}0, (x\leqslant -1, x\geqslant 3 \text{ 时.})\\ g(x). \ (-1\leqslant x\leqslant 3 \text{ 时.})\end{cases}$

$\therefore \int_{-3}^{3} g^+(x)dx=\int_{-1}^{3}(-3x^2+6x+9)dx$

$$=\Big[-x^3+3x^2+9x\Big]_{-1}^{3}=32.$$

(3) $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f^+(x)\cdot g^+(x)=f(x)g(x)$，在其他区间上为0.

$$\therefore\int_{-3}^{3}f^+(x)g^+(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^3-3x^2-6x+8)\ (-3x^2+6x+9)\,dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(15x^4-87x^2+72)\,dx$$

$$=2[3x^5-29x^3+72x]_0^1=92.$$

习　　题（答案在149页）

——A——

8. 试填出下列空白：

$M(3)$表示3的倍数时，则对于任意整数a可用$M(3)$，$M(3)+1$，或$\boxed{\quad}$中的一个表示．因而，a^2可用$\boxed{\quad}$或$\boxed{\quad}$中的一个表示．因此，设两个整数为b，c时，若b^2，c^2可以同时为$\boxed{\quad}$，则b^2+c^2可以表示为$\boxed{\quad}$．所以$a^2=b^2+c^2$不成立．因此，如果$a^2=b^2+c^2$成立，那么b，c中至少有一个为$\boxed{\quad}$．

9. 球面上画有n个大圆，任何三个大圆都没有公共点．设这n个大圆分割球面的部分数为$f(n)$．

(1) 试求$f(2)-f(1)$，$f(3)-f(2)$．

(2) 试用n的式子表示$f(n)-f(n-1)$．

(3) 试用n的式子表示$f(n)$．

10. 设$f(x)=x^3-6x^2+8$，在$0\leqslant x\leqslant r$上，把$|f(x)|$的最大值记作$M(r)$时，试求积分$\int_0^5 M(r)\,dr$．

11. 对于自然数n，在$n<x<n+1$范围内，把使$2^{x-1}-0.5$的值为整数的x值的个数记作a_n时，试回答下列各问题：

(1) 试用n的式子表示a_n．

(2) 试求$S_n=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{2}{a_2}+\dfrac{3}{a_3}+\cdots+\dfrac{n}{a_n}$．

(3) 试求$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$．

12. 整数a，b除以2所得的余数相等时，且只有这时，记作$a\equiv b$．试证：

如果$a\equiv 1$，$b\equiv 1$，那么

$$\frac{ab-1}{2}\equiv\frac{a-1}{2}+\frac{b-1}{2}.$$

—B—

13. 对于x的函数$f(x)$, $g(x)$,用$f(x)\circ g(x)$表示积分

$$\int_0^x f(x-t)g(t)dt.$$

(1) 试证$f(x)\circ g(x)=g(x)\circ f(x)$.

(2) $f(x)=x$, $g(x)=\sin x$时,试求$f(x)\circ g(x)$.

14. $f(n)$表示以满足$0\leqslant x\leqslant n$, $0\leqslant y\leqslant x^3$的整数$x$、整数$y$为坐标的点$(x,y)$的个数.

(1) 当n为0或正整数时,试求$f(n)$.

(2) 试求无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2-n+2}{f(n)}$的和.

15. $f(x)$为定义在全体实数上的连续函数, $g(x)$具有连续的导函数并且是定义在全体实数上的函数时,规定$\langle f(x),g(x)\rangle$和$\langle D(f(x)),g(x)\rangle$如下:

$$\langle f(x),g(x)\rangle=\int_0^\pi f(x)g(x)dx,$$

$$\langle D(f(x)),g(x)\rangle=\langle f(x),-g'(x)\rangle$$

这时,试回答下列(1),(2):

(1) 当$f(x)=x^2$, $g(x)=\cos 2x-1$时,试求$\langle D(f(x),g(x)\rangle$.

(2) 如果$g(0)=g(\pi)=0$,那么$\langle Df(x), g(x)\rangle=\langle f'(x),g(x)\rangle$成立吗? 试回答这个问题并说明理由.

16. $\{x\}$表示$n-\frac{1}{2}\leqslant x<n+\frac{1}{2}$的整数$n$. 这时,试画出函数$y=|x-\{x\}|$的图象.(设$-1.5\leqslant x\leqslant 3.5$)

17. 对于指数函数e^x,定义函数$\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=\mathrm{sh}x$, $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=\mathrm{ch}x$,分别叫做双曲正弦和双曲余弦. 对于这些函数,试导出与三角函数公式:

$$\sin^2x+\cos^2x=1,$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$

相应的公式.

6. 约数　倍数

商和余数

a 为任意整数时，对于正整数 b，存在整数 q, r，使

$$a=qb+r \quad (0\leqslant r<b),$$

并且仅有这一种表达形式.

例如，14 除以 3 时，$14=4\cdot3+2$，

-10 除以 8 时，$-10=(-2)\cdot8+6$.

象这样，满足 $0\leqslant r<b$ 的整数仅有一个.

整数的分类

整数可以分为偶数和奇数，即被 2 整除（余数为 0）的数…$2k$，和除以 2 余 1 的数…$2k+1$（或 $2k-1$）. 这样，由除以 2 时的余数可以把全体整数分为两类.

同样，由除以 3 时的余数可以把全体整数分为三类.

被 3 整除的数　…$3k$，

除以 3 余 1 的数…$3k+1$，

除以 3 余 2 的数…$3k+2$（或$3k-1$）.

象这样，根据除以某自然数的余数把全体整数集合分类的思考方法是很重要的.

约数、倍数

对于两个整数 a, b（其中 $b\neq0$），若$a=bq$ 的 q 存在时，则叫 a 是 b 的**倍数**，b 是 a 的约

数.

公约数 若正整数 d 是两个非零整数 a,b 的约数时，则叫 d 是 a,b 的**公约数** 又，正整数 g 具有下列性质时，则叫 g 是 a,b 的**最大公约数**:

最大公约数

(a) g 是 a,b 的公约数;

(b) 如果 d 是 a,b 的公约数，那么 d 是 g 的约数.

最大公约数的存在 对于任意两个非零的整数 a, b, 有最大公约数 g 存在. 并且 存在 满足 $g=ax+by$ 的 x,y.

互素 若两个非零的整数 a,b 的最大公约数是 1 时，则把 a,b 叫做**互素**.

互素的条件 a, b 互素的充要条件是: 1 能表示为

$$1=ax+by \quad (x,y \text{ 是整数}).$$

定理 **设 a,b 是所给的整数, x, y 是整数时，则**

$$ax+by$$

例题 **所表示的最小正整数为 a,b 的最大公约数.**

象 $12x+18y$(x, y 是整数) 形的整数集合，实际上与 6 的倍数集合是相等的.

素数 大于 1 的正整数 p，不存在 p 本身及 1 以外的约数时，叫做**素数**.

(素数) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, …

重要定理 其次，列举几个定理如下:

① a 与 b 互素时，如果 bc 被 a 整除，那

么 c 必被 a 整除.

② 如果整数积 ab 被素数 p 整除，那么 a,b 中至少有一个必被 p 整除.

③ 如果素数 p 是 $a_1a_2\cdots a_n$ 的约数，那么 p 必为 a_1 或 $a_2\cdots$或 a_n 中之一的约数.

④ 任意正整数 $a(\geqslant 2)$ 可以分解为素数的积.而且，除了顺序外这种表示法只有一种.

欧几里得辗转相除法

〔关于最大公约数的计算方法定理〕

设 a,b 是正整数，取满足 $a=bq+r(0\leqslant r<b)$ 的整数 q,r. 这时，

(a) 如果 $r=0$，那么 $(a,b)=b$.

(b) 如果 $0<r<b$，那么 $(a,b)=(b,r)$.

其中，符号 (a,b) 表示 a 与 b 的最大公约数.

最大公约数

最小公倍数

设 A,B 的最大公约数为 G，最小公倍数为 L. 若 $A=aG,B=bG$，则

(a) a,b 互素;

(b) $L=abG=aB=bA, AB=GL$.

连续整数的积

$n(n+1)$ 是 2 的倍数.

$n(n+1)(n+2)$ 是 6 的倍数.

例题 34 试证下列问题:

(1) 连续两个整数的积被 2 整除.

(2) 连续三个整数的积被 6 整除.

(3) 如果 n 为整数，那么 n^5-n 是 30 的倍数.

解法 (1) 设连续的两个整数为 n，$n+1$．因为一般的整数 n 可表示为 $2k$ 或 $2k+1$ 的形式，所以在 $n(n+1)$ 中可分别令 $n=2k, n=2k+1$(其中，k 是整数)．

(2) 可以设连续三个整数为 n，$n+1, n+2$，也可以设为 $n-1, n$，$n+1$．因为由(1)可知，$N=(n-1)n(n+1)$ 被 2 整除，所以指明 N 被 3 整除即可．

可分别令 $n=3k, n=3k+1, n=3k-1$．

(3) 由(2)可知，$n^5-n=n(n-1)(n+1)(n^2+1)$ 是 6 的倍数．可分别令 $n=5k, 5k\pm1, 5k\pm2$．

解 (1)连续两个整数的积为 $N=n(n+1)$，分别令 n 为 $2k$ 或 $2k+1$．

$$\begin{cases}\text{当 } n=2k \text{ 时}, N=2k(2k+1)=(2\text{ 的倍数}),\\ \text{当 } n=2k+1 \text{ 时}, N=2(2k+1)(k+1)=(2\text{ 的倍数}).\end{cases}$$

所以 $N=n(n+1)$ 能被 2 整除．

(2) 在 $N=(n-1)n(n+1)$ 中，分别令 $n=3k, 3k\pm1$．

$$\begin{cases}\text{当 } n=3k \text{ 时}, N=3k(3k-1)(3k+1)=(3\text{ 的倍数}),\\ \text{当 } n=3k+1 \text{ 时}, N=3k(3k+1)(3k+2)=(3\text{ 的倍数}),\\ \text{当 } n=3k-1 \text{ 时}, N=3k(3k-1)(3k-2)=(3\text{ 的倍数}).\end{cases}$$

由(1)可知，N 是 2 的倍数．因而 N 是 6 的倍数．

(3) 由(2)可知，$N=n^5-n=n(n-1)(n+1)(n^2+1)$ 是 6 的倍数．因而若能指明 N 是 5 的倍数即可．

$$\begin{cases}\text{当 } n=5k \text{ 时}, N\text{ 是 5 的倍数}.\\ \text{当 } n=5k+1 \text{ 时}, n-1\text{ 是 5 的倍数，所以 } N\text{ 是 5 的倍数}.\\ \text{当 } n=5k-1 \text{ 时}, n+1\text{ 是 5 的倍数，所以 } N\text{ 是 5 的倍数}.\\ \text{当 } n=5k\pm2 \text{ 时}, n^2+1=5(5k^2\pm4k+1)\text{ 是 5 的倍数，}\\ \text{因而 } N\text{ 是 5 的倍数}.\end{cases}$$

所以N是 30 的倍数.

发展题

如果 p 是大于 5 的素数，试证 p^4-1是240 的倍数.

解法程序

240 的约数是什么？

从 $240=2^4\times3\times5$ 可知，它是

2^4的倍数
且 3 的倍数
且 5 的倍数

解 由于 $240=2^4\times3\times5$，若能证明

$$N=p^4-1=(p-1)(p+1)(p^2+1)$$

是 2^4, 3, 5 各自的倍数便可.

(i) N是 3 的倍数.

因为 p 是大于 5 的素数，所以 p 可表示为 $3k+1$ 或 $3k-1$ 的形式. $p=3k\pm1$ 时，因为$(p-1)(p+1)$是 3 的倍数，所以N是 3 的倍数.

3 的倍数⇒可设$p=3k$, $3k\pm1$，但不得$p=3k$.

(ii) N 是 5 的倍数.

因为不能有$p=5k$，所以可设$p=5k\pm1$, $5k\pm2$.

因为

当 $p=5k\pm1$ 时，$(p-1)(p+1)$是 5 的倍数.

当 $p=5k\pm2$ 时，$p^2+1=5(5k^2\pm4k+1)$是 5 的倍数.

所以无论哪种情况，N 都是 5 的倍数.

2 的倍数⇒可设$p=2k$, $2k+1$. 但不得$p=2k$.

(iii) N 是 2^4 的倍数.

因为不能有 $p=2k$，所以可设 $p=2k+1$.

$$\text{这时，}N=2k(2k+2)(4k^2+4k+2)$$
$$=2^3\cdot k(k+1)(2k^2+2k+1).$$

连续两个整数的积是 2 的倍数

因为 $k(k+1)$是 2 的倍数，所以N是 2^4 的倍数.

由 (i), (ii), (iii) 可知，N是 $3\times5\times2^4=240$的倍数.

练习 （答案在140页）

10. 试证下列问题：

(1)⑱奇数的平方如果除以8时，则必余1.

(2) 如果n为整数，那么n^3-n是6的倍数.

(3) 连续三个奇数的平方和加1，能被12整除，但不能被24整除.

(4) 一个正整数与它的3次幂除以6时，所得的余数相等.

> **例题35** 如果n是自然数，试证下式的值还是自然数：
> $$\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}.$$

解法 考虑通分后的分子．若分子能被2，3，5整除，则也能被$2\times3\times5=30$整除．这表明所给的数只能是整数．显然，所给的数为正的.

任意整数可以用$3k$，$3k+1$，$3k-1$中的一种形式表示，也可以用$5k$，$5k\pm1$，$5k\pm2$中的一种形式表示.

如果一个整数能被两个素数a，b整除，那么该数也能被ab整除. （把"两个素数"换成"互素的两个整数"也可以.）

解 $$\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}=\frac{1}{30}(6n^5+15n^4+10n^3-n)$$

$$=\frac{1}{30}n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1).$$

令$N=n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)$．因为$n\geq1$，所以$N>0$.

(i) 因为$n(n+1)$为连续两个整数的积，所以是2的倍数．因而N是2的倍数.

(ii) n 可用 $3k$, $3k\pm1$ 中的一种形式表示(k 是整数).

当 $n=3k$ 时,N 是 3 的倍数.

当 $n=3k-1$ 时,因为 $n+1$ 是 3 的倍数,

所以 N 是 3 的倍数.

当 $n=3k+1$ 时,因而 $6n^3+9n^2+n-1=6(3k+1)^3$

$$+9(3k+1)^2+3k=3[2(3k+1)^3+3(3k+1)^2+k]$$

是 3 的倍数,所以 N 是 3 的倍数.

从而可知,N 是 3 的倍数.

(iii) n 可用 $5k, 5k\pm1, 5k\pm2$ 中的一种形式表示.

当 $n=5k, 5k-1$ 时,因为 $n(n+1)$ 是 5 的倍数,所以 N 是 5 的倍数.

当 $n=5k+1$, $5k\pm2$ 时,因为 $6n^3+9n^2+n-1$ 是 5 的倍数,所以 N 是 5 的倍数.

从而可知,N 是 5 的倍数.

由 (i), (ii), (iii) 得,N 是 $2\times3\times5=30$ 的倍数,并且 $N>0$,所以原式为自然数.

发展题

当 n 是正整数时,$n(n-1)(n+1)$ 是 6 的倍数. 依此试求

$$n^6-2n^4+7n^2-6n+17$$

除以 12 时的余数.

解法程序

设所给的数为 N 时,变形

$N=12Q+R$

解 设 $N=n^6-2n^4+7n^2-6n+17$.

设 $f(n)=n^6-2n^4+7n^2-6n$,

从 $f(1)=0$ 可知,$f(n)$ 有因式 $n-1$.

$f(n)=n(n^5-2n^3+7n-6)$

$(0 \leqslant R \leqslant 12)$

的形式

如果N能用$n^2(n-1)^2(n+1)^2$，$6n(n-1)$ 与 17 的和表示，则其第一项、第二项为12的倍数.

$$= n(n-1)(n^4+n^3-n^2-n+6).$$

设 $g(n)=n^4+n^3-n^2-n+6$

$$= n^3(n+1)-n(n+1)+6$$

$$= n(n^2-1)(n+1)+6$$

$$= n(n-1)(n+1)^2+6.$$

$$\therefore \quad f(n)=n^2(n-1)^2(n+1)^2 + 6n(n-1).$$

$$\therefore \quad N=n^2(n-1)^2(n+1)^2+6n(n-1) +17.$$

$$\begin{cases} n^2(n-1)^2(n+1)^2 \text{ 能被 } 6^2=36 \text{ 整除}, \\ 6n(n-1) \text{ 能被 } 12 \text{ 整除}. \end{cases}$$

因而，$n^2(n-1)^2(n+1)^2+6n(n-1)$能被 12 整除.

$\therefore$ 可写作 $N=12k+17$. (k：整数)

$$\therefore \quad N=12(k+1)+5.$$

N除以12 时的余数与17除以12 时的余数相等.

从而，N除以 12 时的余数与 17 除以 12 时的余数 5 相等.

练习 （答案在 140 页）

11. n 为正整数时，试证 $n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n$ 能被 3 整除.

12. （1）奇数可以表示为连续整数的平方差.

（2）连续整数的立方差是奇数.

（3）连续整数的立方差可用另外连续整数的平方差表示，即对于任意整数 m，证明满足 $(m+1)^3-m^3=(n+1)^2-n^2$ 的整数 n 存在.

例题 36 试回答下列各问题:

(1) 113 除以某正整数时的余数为 11. 试求该某数.

(2) 104, 146 除以某正整数时的余数都是 20. 试求该某数.

(3) 试求和是 1824, 最小公倍数是 3420 的两个正整数.

解法 (1) 设所求的整数为 n, 则 $113=nq+11(0\leqslant 11<n$, q 是整数). 只要求出满足这个等式的 n 即可.

(2) $104=nq_1+20$, $146=nq_2+20$, 因而 n 必须为 84, 126 的公约数, 其中大于 20 的是所求的.

(3) **设两个整数为 a, b, 令其最大公约数为 g, 则 $a=a'g$, $b=b'g$. 从而, a', b' 互素, 最小公倍数为 $a'b'g$.**

解 (1) 设所求的正整数为 n, 由题意得

$$113=nq+11(0\leqslant 11<n,\ q\text{ 是正整数}).$$

因而 $nq=102$, 所以 n 为 102 的约数.

因为 $102=2\times 3\times 17$, 所以 102 的约数为 1, 2, 3, 6, 17, 34, 51, 102. 其中大于 11 的为 17, 34, 51, 102.

(2) 设所求正整数为 n, 则 $104=nq_1+20$, $146=nq_2+20$. (其中 q_1, q_2 为正整数, $n>20$.)

因而 $\qquad nq_1=84, \quad nq_2=126.$

所以 n 必须是 84 和 126 的公约数.

由于 84 和 126 的公约数为它们最大公约数 $42=2\times 3\times 7$ 的约数, 即 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42.

其中大于 20 的为 21 和 42.

(3) 设两个整数 a,b,其最大公约数为 g, 则 $a=a'g, b=b'g$. 因为 a', b' 互素,最小公倍数为 $a'b'g$,所以

$$a+b=(a'+b')g=1824=2^5\cdot3\cdot19,$$

$$a'b'g=3420=2^2\cdot3^2\cdot5\cdot19.$$

其中,因为$a'+b'$ 与 $a'b'$ 互素, 所以 g 为 1824 和 3420 的最大公约数. $\therefore g=2^2\cdot3\cdot19=228$. 因此,$a'+b'=8$, $a'b'=15$.
因为可设 $a'\leqslant b'$,所以 $a'=3, b'=5$.

$$\therefore\ a=a'g=684, b=b'g=1140.$$

发展题

在除以 3 余 2 ,除以 5 余 3 ,除以 7 余 4 ,除以 11 余 8 的正整数中,试求其最小的一个.

解法程序	**解** 由问题的条件,得
用式子表示条件.	$$\begin{cases} n=3a+2, & ① \\ n=5b+3, & ② \\ n=7c+4, & ③ \\ n=11d+8, & ④ \end{cases}$$ (其中 a,b,c,d 是正整数)
由①,②,④ 抓住 d 是15的倍数. 另外,从$d<105$决定d.	由①,④得 $11d=3(a-2)$, 因而d 是 3 的倍数. 由②,④得 $11d=5(b-1)$,因而 d 是 5 的倍数. 因此,d 是 15 的倍数.
求出 n. (作为必要条件) 以满足③ 的数作为答案.	另外,从 d 为小于 $3\times5\times7=105$ 的整数考虑,(*) d 必须是

$d=15,30,45,60,75,90$ 中的一个.

因而 n 必须是

$n=173,338,503,668,833,998$ 中的一个.

其中满足③的仅仅是 998.

<注意> (*) 设 n 为小于 $3\times5\times7\times11=1155$ 的整数即可. 原因是, 设 $n\geqslant1155$, 则 n 除以 1155 时, $n=1155p+n_1(0<n_1<n)$, n_1 也满足问题的条件. 因而, n 不是满足问题条件的最小正整数.

练习 (答案在 141 页)

13. 有自然数 x, 除以 3 余 2, 除以 4 余 3, 除以 5 余 4, 除以 6 余 5. 试求满足这些条件的 x 中最小的一个.
14. 试证自然数 n 和 n^2+2 的公约数(1 除外)只有 2 个.
15. 试求最大公约数为 54, 最小公倍数为 1944 的两个正整数.

例题 37 $a,b,a-b$ 都不能被 3 整除时,

试证 a^3+b^3 必能被 9 整除,

其中, a,b 为整数.

解法 由除以 3 时的余数, 把全体整数分为三类. 即设 k 为整数, 则可分为 $3k,3k+1,3k+2$ (或 $3k-1$) 三类.

因为 a 不能被 3 整除, 所以 $a=3m+1$ 或 $a=3m+2$. 又, 因为 b 不能被 3 整除, 所以 $b=3n+1$ 或 $b=3n+2$. 其中, 考虑 a,b 组合的 4 种情形, 因为 $a-b$ 不能被 3 整除, 所以去掉 $a=3m+1$, $b=3n+1$ 和 $a=3m+2$, $b=3n+2$ 的情形. 即考虑两种情形便可.

解 因为 a 是不能被 3 整除的整数，所以可设

(i) $a=3m+1$ 或(ii) $a=3m+2$(m 为整数).

同理可设 b 为 $b=3n+1$ 或 $b=3n+2$(n 为整数) 可是，因为 $a-b$ 也不能被 3 整除，所以必须是:

(i)的情形为 $a=3m+1, b=3n+2$;

(ii)的情形为 $a=3m+2, b=3n+1$.

(i)的情形

$$\begin{aligned}a^3+b^3&=(3m+1)^3+(3n+2)^3\\&=(27m^3+27m^2+9m+1)+(27n^3+54n^2\\&\quad+36n+8)\\&=9(3m^3+3m^2+m+3n^3+6n^2+4n+1).\end{aligned}$$

因为( )内为整数，所以 a^3+b^3 能被 9 整除.

(ii)的情形

$$\begin{aligned}a^3+b^3&=(3m+2)^3+(3n+1)^3\\&=9(3m^3+6m^2+4m+3n^3+3n^2+n+1).\end{aligned}$$

因为( )内为整数，所以 a^3+b^3 能被 9 整除.

由(i),(ii)可知，$a, b, a-b$ 不能被 3 整除时，a^3+b^3 必能被 9 整除.

例题 38 试回答下列各问题:

(1) 试分别求出正整数的平方除以 4 及除以 8 时的余数.

(2) x, y, z 是正整数时，如果 $x^2+y^2=z^2$，试证 x 或 y 是4 的倍数.

解法 (1) 被整数 p 除的算法，根据 p 可以把余数分为

不同情形.

正整数 n 可以表示为 $4m, 4m\pm1, 4m+2$ (m 为整数)的形式. 用此形式分别计算 n^2.

(2) 用反证法为宜. “x 或 y 是 4 的倍数”的否定为“x 不是 4 的倍数, y 也不是 4 的倍数”. 考虑等式两边除以 4 或 8 时的余数即可.

解 (1) 正整数 n 可以表示为 $4m$, $4m\pm1, 4m+2$(m 为整数)的形式.

$$(4m)^2=8\cdot 2m^2, (4m\pm1)^2=8(2m^2\pm m)+1,$$

$$(4m+2)^2=8(2m^2+2m)+4=4[2(2m^2+2m)+1].$$

因而,除以 4 时的余数: 当 n 是偶数时, 为 0; 是奇数时, 为 1 .

除以 8 时的余数: 当 n 是 4 的倍数时, 为 0; 是奇数时, 为 1; 是非 4 的倍数的偶数时, 为 4.

(2) 设 x, y 都不是 4 的倍数.

x, y 都是奇数时, x^2+y^2 除以 8 时的余数为 2. x, y 是奇数和(非 4 的倍数)偶数时, x^2+y^2 除以 8 时余 5, 而 z^2 除以 8 时的余数不为 2 也不为 5 .

其次, x, y 都是非 4 的倍数的偶数时,

$$\begin{aligned}x^2+y^2&=(4m+2)^2+(4n+2)^2\\&=16(m^2+n^2+m+n)+8\end{aligned}$$

为 8 的倍数, z 为 4 的倍数. 但是, 这时 x^2+y^2, z^2 除以 16 时的余数分别为 8, 0, 不合理.

因此, x 或 y 为 4 的倍数.

练习 （答案在142页）

16. 设m是自然数．试证命题A“如果m是偶数，那么m^2也是偶数”成立．并叙述命题A的逆命题，证明它也成立．

> **例题39** （1）要使两个连续自然数a，$b(a<b)$的和等于一个自然数c的平方，试举出这样两组a,b,c的例子．
>
> （2）一般地，说明以如上的a,b,c为三边的三角形，是什么样的三角形？试证明之．

解法 （1）根据题意得$2a+1=c^2$．因为a为自然数，所以$2a+1$为3以上的奇数．因而，c为大于1的奇数．故对于c代入3,5,7等即可．

（2）注意“一般性”．仅仅判别关于(1)中求得a，b，c的值不行．把三角形的三边长用文字表示时，三角形的形状能够判明的有等腰三角形或直角三角形．

解 （1）因为自然数$a,b(a<b)$是连续的，所以

$$b=a+1.$$

又，关于a,b,c，由题意，得

$$a+b=c^2,\quad \therefore\quad 2a+1=c^2.$$

因为a是自然数，所以$2a+1$是3以上的奇数．因而，c是大于1的奇数．

令$c=3$时，$a=4$，$\therefore\quad b=5$.

令$c=5$时，$a=12$，$\therefore\quad b=13$.

（答）　$a=4, b=5, c=3;$

　　　$a=12, b=13, c=5.$

（2）
$$\left.\begin{aligned}a+b=c^2\\ b=a+1\end{aligned}\right\}\quad \therefore\quad c^2=2a+1.$$

因而　　$a^2+c^2=a^2+(2a+1)=(a+1)^2$.

$$\therefore\quad a^2+c^2=b^2.$$

因此，这是以 b 为斜边的直角三角形。

另解

$$\begin{cases} a+b=c^2, \\ a-b=-1. \end{cases}$$

边边相乘，得

$$a^2-b^2=-c^2.$$

$$\therefore\quad a^2+c^2=b^2.$$

因此，这是以 b 为斜边的直角三角形.

发展题

满足 $a^2+b^2=c^2$ 的三个正整数 a、b、c 叫做毕达哥拉斯数*). 当 a,b,c 是毕达哥拉斯数时，试回答下列各问题:

(1) 当 $\dfrac{b+c}{a}=t$ 时，把 $a:b:c$ 表示为 t 的整式比.

(2) a,b,c 的最大公约数是 1，$100\geqslant a+b+c\geqslant 50$，试举出这样两组毕达哥拉斯数的例子.

解法程序

关于 b,c 解:

$$\begin{cases} a^2+b^2=c^2, \\ \dfrac{b+c}{a}=t. \end{cases}$$

解　(1) 由 $\dfrac{b+c}{a}=t$，得 $b=at-c$.

代入 $a^2+b^2=c^2$ 整理，得

$$(t^2+1)a^2=2act,$$

$$\therefore\quad c=\frac{t^2+1}{2t}a.$$

$$\therefore\quad b=at-\frac{t^2+1}{2t}a=\frac{t^2-1}{2t}a.$$

---

*) 我国叫做勾股数.　　译者

$$\therefore \quad a:b:c = a:\frac{t^2-1}{2t}a:\frac{t^2+1}{2t}a$$

$$= 2t:(t^2-1):(t^2+1)$$

……(答)

对于 t 代入数值，如果合于条件即可.

(2) 在(1)的 $a:b:c$ 式中，

令 $t=6$，则 $a:b:c=12:35:37$，

令 $t=7$，则 $a:b:c=7:24:25$.

三个数 12，35，37 及 7，24，25 分别为毕达哥拉斯数，且最大公约数为 1，和在 50 与 100 之间.

(答) (a,b,c) 为 $(7,24,25)$ 和 $(12,35,37)$.

研究 例题 39 和这个发展题都是关于勾股数的问题.指出了其中一些特殊情形的求法.

在例题 39 中，若对 c 代入 3，5，7，9，……时，也可以求出任何数组. 在发展题中，若对 t 代入 2，3，4，……即可. t 不是整数也可以. 例如 $t=2.5$ 时，$a:b:c=20:21:29$.

勾股数的一般公式如下：

$$\left.\begin{array}{l} a^2+b^2=c^2 \\ \left(\begin{array}{l} a,b,c \\ \text{两两互素} \end{array}\right) \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=2xy,\ b=x^2-y^2,\ c=x^2+y^2. \\ \left(\begin{array}{l} x,y\text{中的一个为偶数，另一个为奇数，} \\ x,y\text{互素，}x>y>0. \end{array}\right) \end{array}\right.$$

7. p进制

十进制

通常，凡是整数都是用十进制表示的，如62，235，508，4971等. 它们的意义是，这些整数分别表示

$6\times10+2$，$2\times10^2+3\times10+5$，$5\times10^2+8$，$4\times10^3+9\times10^2+7\times10+1$.

p 进制

设 p 是给定的正整数时，对于任意的正整数 N 可以表示为

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{a}_k\boldsymbol{p}^{k-1}+\boldsymbol{a}_{k-1}\boldsymbol{p}^{k-2}+\boldsymbol{a}_{k-2}\boldsymbol{p}^{k-3}+\cdots+\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{p}^2+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{p}+\boldsymbol{a}_1$$

（其中 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 为 $0, 1, 2, \cdots, p-1$ 中的一个，$a_k\neq0$.）

的形式. 这种情形，称 k 是**用 p 进制表示N 的位数**.

二进制

在二进制中只用 0 和 1 表示.（$p=2$的情形）例如，因为正整数43（十进制）可表示为

$$43=1\times2^5+0\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+1\times2+1,$$

所以二进制时为 101011.

十进制的 1，2，3，4，5，……分别相当于二进制的 1，10，11，100，101，110，…….

三进制

三进制的 2102 为十进制的

$$N=2\times3^3+1\times3^2+0\times3+2=65.$$

用三进制表示正整数 32(十进制)时，因为

$$\begin{aligned}32&=27+5=27+3+2\\&=1\times3^3+1\times3+2,\end{aligned}$$

故得1012.

(参照右边计算)

$$\begin{array}{r|l}3 & 32\\ \hline 3 & 10\cdots 2\\ \hline 3 & \ \ 3\cdots 1\\ \hline & \ \ 1\cdots 0\end{array}$$

应用

由整数用十进制书写的各位数字所组成的问题，可以表示为 $10^3a+10^2b+10c+d$ 等考虑较为方便．五进制等情形，也可以表示为 $5^2a+5b+c$ 等.

定理

如果用十进制表示的整数，其各位数字的和能被3整除，那么这个整数也能被3整除.

如果某正整数是 11 的倍数，那么此数的偶数位的数字和与奇数位的数字和的差是 0 或是11的倍数.

例题 40 (1) 把用十进制表示的整数 200，640，4298，用五进制表示.

(2) 把用三进制表示的 21012，11002，用十进制表示.

(3) 把用十进制表示的整数 128，用七进制和九进制表示.

解法 (1) 要把 200 化成五进制，应首先寻找满足 $5^x\leqslant 200$ 的最大整数 x．因为 $5^3=125$，$5^4=625$，所以 $x=3$．$200=5^3+75$，再对 75 变形，可同样反复进行，得 $200=5^3+3\cdot5^2$.

(2) 把 21012 化成十进制，令 $N=2\times3^4+1\times3^3+1\times3+2$ 便可.

(3) 把 128 化成七进制时，因为 $7^2=49$，$7^3=343$，所以就 $7^2<128$ 考虑. $128\div7^2=2$ 余 30，因而 $128=2\times7^2+30$. 其次，就 30 考虑.

解 (1) $200=5^3+3\cdot5^2$. (答)1300.

$640=5^4+15=5^4+3\cdot5$ (答)10030.

$$\begin{aligned}4298&=5^5+1173\\&=5^5+5^4+548\\&=5^5+5^4+4\cdot5^3+48\\&=5^5+5^4+4\cdot5^3+5^2+23\\&=5^5+5^4+4\cdot5^3+5^2+4\cdot5+3.\end{aligned}$$

因而，4298 表示成五进制为 114143.

5 | 200
5 | 40 …0
5 | 8 …0
1 …3

5 | 640
5 | 128 …0
5 | 25 …3
5 | 5 …0
1 …0

5 | 4298
5 | 859 …3
5 | 171 …4
5 | 34 …1
5 | 6 …4
1 …1

(2) 设把三进制的 21012 表示成十进制为 N，则

$N=2\times3^4+1\times3^3+1\times3+2=194$.

其次，因为三进制的 11002 为

$$1\times3^4+1\times3^3+2=110,$$

所以十进制为110.

(3) $128=2\cdot7^2+30=2\cdot7^2+4\cdot7+2$.

因而，128 用七进制表示为 242.

又，$128=9^2+47=9^2+5\cdot9+2$.

因而，128 用九进制表示为 152.

(参照右边计算)

7 | 128
7 | 18 …2
2 …4

9 | 128
9 | 14 …2
1 …5

例题 41 （1）把三进制的二数 1212，2012 的和与积，用三进制表示.

（2）把(1)的二数的差（从大的减去小的），用三进制表示.

（3）把三进制的 102020 除以 2 的商和余数，用三进制表示.

解法 **全部化成十进制计算**，再将其结果化成三进制的即可．三进制的直接计算，可以参考下面的研究.

解 （1）把三进制的 1212 化成十进制时，由 $1\times3^3+2\times3^2+1\times3+2$，得 50．同理，2012 化成十进制时，为 59.

因为 $50+59=109$，$50\times59=2950$，所以把它们化成三进制的即可.

因为 $109=3^4+3^3+1$，所以化成三进制为 11001．　（和）

因为 $2950=3^7+3^6+3^3+2\cdot3+1$，所以化成三进制为 11001021．　（积）

（2）三进制的 1212，2012 化成十进制分别为 50，59，其差为 $59-50=9$．把 9 化成三进制即可.

因为 $9=1\times3^2+0\times3+0$，所以 9 为三进制的 100.

（3）三进制的 102020 化成十进制为

$$N=1\times3^5+2\times3^3+2\times3=303.$$

$303\div2=151$ 余 1．再把 1 和 151 化成三进制.

因为 $151=3^4+2\cdot3^3+3^2+2\cdot3+1$，所以三进制为 12121.

（答）商 12121，余数 1.

研究 上面的解答是全部化成十进制计算，再将结果化成三进制的．这样固然可以．但是，如用象右边的三进制九九表计算尤为简单．

（加法九九表）

╲	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

（乘法九九表）

╲	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

$$\begin{array}{r} 1\,2\,1\,2 \\ +)\ 2\,0\,1\,2 \\ \hline 1\,1\,0\,0\,1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\,0\,1\,2 \\ -)\ 1\,2\,1\,2 \\ \hline 1\,0\,0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,2\,1\,2 \\ \times)\ 2\,0\,1\,2 \\ \hline 1\,0\,2\,0\,1 \\ 1\,2\,1\,2 \\ 1\,0\,2\,0\,1 \\ \hline 1\,1\,0\,0\,1\,0\,2\,1 \end{array}$$

$$2\,\underline{|\,1\,0\,2\,0\,2\,0}$$
$$\quad 1\,2\,1\,2\,1\cdots 1$$

发展题

有一个正整数，用七进制表示时是三位，用十一进制表示仍然是三位，但数字的顺序恰好相反．试用十进制表示这个整数．

解法程序

七进制的 xyz 是十进制的

$7^2x+7y+z.$

十一进制的 zyx 是十进制的

$11^2z+11y+x.$

解 设这个整数 N 用七进制表示时各位数字从左到右顺次为 x,y,z，且

$1\leqslant x\leqslant 6,\ 0\leqslant y\leqslant 6,\ 1\leqslant z\leqslant 6.$

由题意，得

$$N=7^2x+7y+z=11^2z+11y+x.$$

$$\therefore\quad y=12x-30z=6(2x-5z).$$

不定方程

$$px=qy$$

(p,q互素)

$\Longrightarrow x$为q的倍数，y为p的倍数.

因而，y为6的倍数. 因为$0\leqslant y\leqslant 6$，所以

$$y=0 \text{ 或 } y=6.$$

即

$$① \begin{cases} y=0, \\ 2x-5z=0, \end{cases}$$

$$\text{或}② \begin{cases} y=6, \\ 2x-5z=1. \end{cases}$$

①的情形，因为$2x=5z$，所以x是5的倍数.

因为$1\leqslant x\leqslant 6$，所以$x=5$. $\therefore z=2$.

因此，用十进制表示$N=5\cdot 7^2+0\cdot 7+2$

$$=247.$$

注意 x,y,z 的范围，求出它们.

②的情形，由$5z=2x-1$，得知奇数$2x-1$为5的倍数.

因为$1\leqslant 2x-1\leqslant 11$，所以

$2x-1=5$，$\therefore x=3$. $\therefore z=1$.

因此，十进制$N=3\cdot 7^2+6\cdot 7+1$

$$=190.$$

（答）247 和 190.

练习 （答案在142页）

17. 回答下列问题：

(1) 把八进制的27用二进制表示.

(2) 八进制是三位整数，化成二进制时是几位？

(3) 八进制是n位整数，化成二进制时是几位？

18. 某正整数 n 用十一进制表示和用十三进制表示时都是二位，但数字的排列恰好相反．试把此正整数 n 用十进制表示．

例题 42　有一个 4 位的正整数 A．试证：如果 A 的奇数位数字的和与偶数位数字的和之差是 11 的倍数时，那么 A 是11 的倍数．若把“4 位”换为“5 位”时，结果如何？

解法　设 4 位的正整数 A 为 $xyzu$，则 $A=1000x+100y+10z+u$（其中 x,y,z,u 为 $1\leqslant x\leqslant 9$，y,z,u 为 0 以上 9 以下的整数）．如果 $x+z$ 和 $y+u$ 的差是 11 的倍数，就说 A 是 11 的倍数．考虑把 A 变形．

5 位的情形，设 $B=10000x+1000y+100z+10u+v$ 即可．

解　设 $A=1000x+100y+10z+u$．其中 x,y,z,u是满足 $1\leqslant x\leqslant 9,0\leqslant y,z,u\leqslant 9$ 的整数．

$$\begin{aligned}A&=(91\times 11-1)x+(9\times 11+1)y+(11-1)z+u\\&=11(91x+9y+z)+[(y+u)-(x+z)].\end{aligned}$$

因而，如果 $x+z$ 和 $y+u$ 的差是 11 的倍数，那么 A 是 11 的倍数．

又，设 $B=10000x+1000y+100z+10u+v$．其中 x,y,z,u,v 是满足 $1\leqslant x\leqslant 9,0\leqslant y,z,u,v\leqslant 9$ 的整数．

$$\begin{aligned}B&=(909\times 11+1)x+(91\times 11-1)y+(9\times 11+1)z\\&\quad+(11-1)u+v\\&=11(909x+91y+9z+u)+[(x+z+v)-(y+u)].\end{aligned}$$

因而，如果奇数位数字的和与偶数位数字的和之差是 11 的倍数，那么 5 位的正整数 B 是 11 的倍数．

例题 43 某正整数的个位数字的 5 倍，与消去此数的个位数字的得数(例如，消去 986 的 6，得 98)之差是 17 的倍数时，试证原数也是 17 的倍数.

解法 设这个整数为 N，若 N 是 n 位数，则 $N=a_n\cdot 10^{n-1}+a_{n-1}\cdot 10^{n-2}+\cdots+a_2\cdot 10+a_1$(其中，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是从 0 到 9 的整数，$a_n\neq 0$). 个位数字是 a_1，消去个位数字所得的整数为$a_n\cdot 10^{n-2}+a_{n-1}\cdot 10^{n-3}+\cdots+a_3\cdot 10+a_2$. 若此数为$N_0$，则 $N=10N_0+a_1$. 另一方面，考虑 N_0-5a_1 为 17 的倍数即可.

解 设正整数 N 为 n 位数. 表示为

$$N=a_n\cdot 10^{n-1}+a_{n-1}\cdot 10^{n-2}+\cdots+a_2\cdot 10+a_1$$

(其中，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是从 0 到 9 的整数，$a_n\neq 0$).

消去整数 N 的个位数字 a_1，得整数 N_0. 由

$$N_0=a_n\cdot 10^{n-2}+a_{n-1}\cdot 10^{n-3}+\cdots+a_3\cdot 10+a_2,$$

则
$$N=10N_0+a_1. \qquad ①$$

另一方面，根据条件，由N_0-5a_1 是 17 的倍数，所以$N_0-5a_1=17K$(K 是整数). $\therefore N_0=17K+5a_1$. 把它代入①，得

$$N=10(17K+5a_1)+a_1=170K+51a_1$$
$$=17(10K+3a_1).$$

因此，N 为 17 的倍数.

例题 44 设 a, b, c, d, e, f 都是从 0 到 9 的数字. 6位整数 $abcdef$ $(10^5a+10^4b+10^3c+10^2d+10e+f)$ 的 2 倍是 6 位整数 $cdefab(10^5c+10^4d+10^3e+10^2f+10a+b)$，试求出整数$abcdef$.

解法 把6位整数不做正常的表示如下：用x表示2位整数ab，用y表示4位整数$cdef$，则6位整数$abcdef$可表示为10^4x+y.

解 若用x表示2位整数ab，用y表示4位整数$cdef$，则6位整数$abcdef$可表示为10^4x+y，6位整数$cdefab$可表示为10^2y+x.

因而，根据题意得$10^2y+x=2(10^4x+y)$.

$\therefore 2857x=14y$.

这里，因为14与2857互素，所以x是14的倍数，y是2857的倍数．在这样的整数x,y组中，使x是2位，y是4位整数的，有$x=14, y=2857$；$x=28, y=5714$；$x=42$，$y=8571$三组．

因此，所求6位整数是142857，285714，428571.

练习 （答案在143页）

19. 要使百位、十位、个位数字分别为a,b,c的3位整数是11的倍数，$a-b+c$为如何的数是充要的呢？

20. 三位整数的个位、十位及百位数字的和为6，颠倒这个数的数字所得的数与原数之差为198．试求原数．

习　　题（答案在154页）

——A——

18. 试证下列问题：

(1) 如果 m, n 是整数，那么 m^3n-mn^3 是6的倍数.

(2) 如果 n 是奇数，那么 n^3-n 是24的倍数.

(3) 如果 n 是不能被3整除的奇数，那么 n^2-1 是24的倍数.

(4) 连续三个正整数的三次幂的和是9的倍数.

19. 试回答下列问题：

(1) 在从100到300的偶数中，试求除以15和除以27时的余数都是11的数.

(2) 三个数87, 38, 122同除以整数 m，所得余数同为数 q. 试求数 m 和 q.

20. N 是除以3时余数为2的自然数. 如果 N 是两个自然数 p 和 q 的积，那么 p 与 q 的和被3整除. 试证明之.

21. 如果 a 和 b 互素，那么 $a+b$ 和 ab 也互素. 试证明之.

22. 已知 a, b 是不同的正整数.

(1) x, y 在一切整数中变化时，则所有 $ax+by$ 是此种形式的最小正整数 d 的倍数. 试证明之.

(2) 试证 d 是 a, b 的最大公约数.

23. 已知 k 是正整数. 在满足不等式 $k^2<n<(k+2)^2$ 的整数 n 中，能被 $k(k+1)$ 整除的有几个？

24. 下列论断如果是正确的，试给出证明；如果是错误的，举出不成立的例子.

"有实数 a, b, c, d. 如果 $a-b$ 和 $c-d$ 分别是 e 的整数倍，那么 $ac-bd$ 是 e 的整数倍。"

25. n 是自然数时，如果 2^n-1 是素数，那么 n 也是素数. 试证明之.

26. 把三进制的数210110用十进制的记数法表示，是 $\boxed{}$

—B—

27. (1) 任意正整数 n 可以表示为

$$n=r_0+3r_1+3^2r_2+\cdots+3^p\cdot r_p.$$

(p 是根据 n 而定的非负整数，$r_0, r_1, r_2, \cdots, r_p$ 是 0, 1, 2 中的一个)

这种表示方法叫做 n 的三进展开．试求 97 的三进展开．

(2) $97=s_0+3s_1+3^2s_2+\cdots+3^q\cdot s_q$.

(q 是正整数，$s_0, s_1, s_2, \cdots, s_q$ 是 1, 0, −1 中的一个)

试求 $s_0, s_1, s_2, \cdots, s_q$.

(3) 使用 $1g, 3g, 9g, 27g$, $81g$ 五个砝码和两个盘的天平，试研究能量多少种重量．其中，砝码放在哪一个盘里都可以．

28. 正整数 p, k 满足 $p^k-p^{k-1}=4$ 时，试求 p, k 的值．

29. 某正数 N 用五进制表示时，整数部分是 2 位的循环小数 $xy.\dot{z}$．又 $N-1$ 用七进制表示时，整数部分是 2 位的循环小数 $zy.\dot{x}$．试求 x, y, z.

30. 设 3 位自然数的百位、十位、个位数字分别是 a, b, c．就此数和把此数的数字顺序倒过来所得的数之差，回答下列问题．其中 $a-2\geqslant c>0$.

(1) 试证差是 9 及 11 的倍数．

(2) 试证差的十位数字是 9．并用 a, c 表示百位和个位数字．

(3) 差的百位和个位数字的和是多少？

8. 方程的整数解

整数解的求法

求方程的整数解，首先是向普通式变形，然后根据**整数的条件**限定解数，给出答案．普通方程是未知数的个数和方程的个数相等，特别在求整数解的问题中，方程的个数经常是比未知数的个数少 1．在这种情况下，考虑**整数解**，再利用问题所给的其他**条件**，求出解答．

下面给出几个典型的例题：

典型的例题

(1) 试求方程

$$xy-x-3y-2=0$$

的整数解．

(a) 把原式变形为$(x-3)(y-1)=5$，利用整数条件．

(b) 关于 y 解

$$y=\frac{x+2}{x-3}=1+\frac{5}{x-3}.$$

然后利用整数 $x-3$ 是 5 的约数，便可求解．

(1)′ 试求方程

$$\log_2(x+y)+\log_2(x-y)=5$$

的正整数解．

如果去掉对数符号,则归结为(1)的形式.

(2) 试求方程组

$$\begin{cases} x+y+z=100, \\ 27x+8y+5z=800 \end{cases}$$

的正整数解.

两个方程的情形，可就两个未知数求解.

这时,下列性质是重要的:"整数的积 ab 能被整数 c 整除,如果 a 和 c 互素,那么 b 能被 c 整除."

(3) 试求方程

$$x^2-xy+3y^2=15$$

的整数解.

利用方程 $x^2-xy+(3y^2-15)=0$ 有实根的条件. 从必要条件出发逐步往充分条件靠近.

(注)用实根条件不能很好解出时，可利用有理根的条件.

(4) 方程 $x^2+(p-6)x+p=0$ $(p\neq 0)$ 的二根都是整数时,试求出此二根.

(a) 利用判别式 $D=m^2$ (m 是 $m>0$ 的整数).

(b) 利用根与系数关系,消去 p.

关于具体的问题,请看下面的解说.

例题 45 (1) 试求满足方程 $xy-2x+3y-12=0$ 的所有整数 x,y 的数组.

(2) 试求满足 $\frac{a-b}{ab}+\frac{1}{6}=0$ 的所有正整数 a,b 的数组.

(3) 试求下列关于 x,y 的方程的所有整数解:

$$2xy-3x-y=6.$$

解法 (1) 两边加上适当的整数,使左边可以分解因式. 或解出 y,把分式(假分数形式)化为带分数形式. 然后,考虑 x,y 是整数便可解出.

(2) 解出 b. 或去掉分母后两边加上 -36, 把左边分解因式. 要注意正整数的条件.

(3) 把方程两边 2 倍后加上 3, 变形为 $(2x-1)(2y-1)=15$. 或解出 y.

解 (1) 从 $xy-2x+3y-12=0$ 得 $(x+3)(y-2)=6$. 因为 x,y 是整数,所以

$$\begin{cases}x+3=\pm1,\\y-2=\pm6;\end{cases}\qquad\begin{cases}x+3=\pm6,\\y-2=\pm1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+3=\pm2,\\y-2=\pm3;\end{cases}\qquad\begin{cases}x+3=\pm3,\\y-2=\pm2.\end{cases}$$

符号同序. 解这 8 个方程组,得 x,y 的数组 $(x,\ y)$ 为: $(-2,8)$, $(-4,-4)$, $(3,3)$, $(-9,1)$, $(-1,5)$, $(-5,-1)$, $(0,4)$, $(-6,0)$.

(2) 解出 b, $b=\frac{6a}{6-a}=-6+\frac{36}{6-a}$. 于此,因为 a,b 是正整数,所以 $1\leqslant a\leqslant5$, $6-a$ 是 36 的约数. $\therefore a=2,3,4,5$. 因

而，$(a,b)=(2,3),(3,6),(4,12),(5,30)$.

(3) 两边同乘以 2，得 $4xy-6x-2y=12$，两边再同加上 3，把左边分解因式，得 $(2x-1)(2y-3)=15$. 因为 x,y 是整数，所以

$$\begin{cases}2x-1=\pm1,\pm3,\pm5,\pm15,\\ 2y-3=\pm15,\pm5,\pm3,\pm1.\end{cases}$$（符号同序）

解此 8 个方程组，得

$$\begin{cases}x=8,3,2,1,0,-1,-2,-7,\\ y=2,3,4,9,-6,-1,0,1.\end{cases}$$

（顺序相同的为一组）

例题 46 试求满足下列方程组的所有正整数组：

$$\begin{cases}x+y+z=100,\\ 27x+8y+5z=800.\end{cases}$$

解法 暂且把 x 看成常数，就 y,z 解之．（解二元一次方程组）．即把 y,z 用 x 表示．得出 $z=\frac{19}{3}x$，但要注意，因为 x,z 是整数，所以 x 能被 3 整除．令 $x=3m$（m 是整数），再进一步求解即可．

解 变原方程为

$$\begin{cases}y+z=100-x, & ①\\ 8y+5z=800-27x. & ②\end{cases}$$

由①×8－②得 $3z=19x$. ③

因为 x,z 是整数，由③左边的形可知，$19x$ 能被 3 整除．因为 19 与 3 互素，所以 x 能被 3 整除．因为 $x>0$，可令 $x=3m$（m 是正整数）．

这时，由③得 $z=19m$，因而由①得 $y=100-22m$. 因为

$y>0$，所以 $100-22m>0$．$\therefore 1\leqslant m\leqslant 4$．

当 $m=1$ 时，$x=3, y=78, z=19$；

当 $m=2$ 时，$x=6, y=56, z=38$；

当 $m=3$ 时，$x=9, y=34, z=57$；

当 $m=4$ 时，$x=12, y=12, z=76$．

研究 求 $x:(y-100):z$ 也能解出．（有看透式子的能力！！）

把原式变形为 $\begin{cases} x+(y-100)+z=0 & ① \\ 27x+8(y-100)+5z=0 & ② \end{cases}$

由此可求出 $x:(y-100):z$．

从②－①×5 得 $22x+3(y-100)=0$，

$\therefore\quad 22x=3(100-y)$． ③

从①×27－②得 $19(y-100)+22z=0$，

$\therefore\quad 19(100-y)=22z$． ④

从③和④得 $\dfrac{x}{3}=\dfrac{100-y}{22}=\dfrac{z}{19}(=k)$．

于是，$x=3k, 100-y=22k, z=19k$，其中 k 是正整数．由 $y>0$，得 $k\leqslant 4$，即 $k=1,2,3,4$．以下解法同上．

◎ 要领：**这类问题，或就两个文字解之，或考虑求出比值解之．**

发展题

关于 x,y 的下列方程组，如果有整数解时，试求出它的解．

$$\begin{cases} x+ky=10, & ① \\ kx-y=10k+2. & ② \end{cases}$$

解法程序

就 x, y 解之. 从③, ④得出k的条件?

解 当 $y=0$ 时, 由①得 $x=10$, 这时由于②不成立, $\therefore y\neq 0$.

因而, 由①得 $k=\dfrac{10-x}{y}$, 因此, k 是有理数.

抓住k是有理数, 由于x 是整数, 利用③求出k的值.

从①, ②求得 x,y 为:

$$x=\frac{10k^2+2k+10}{k^2+1}=10+\frac{2k}{k^2+1}, \quad ③$$

$$y=-\frac{2}{k^2+1}. \quad ④$$

明确 k的值以后, 便可从③与④求出 x, y.

但是, 因为 $(k^2+1)^2-(2k)^2=(k^2-1)^2\geqslant 0$, 所以 $|k^2+1|\geqslant|2k|$,

$$\therefore \quad -1\leqslant\frac{2k}{k^2+1}\leqslant 1.$$

因此, 从③ 可得, x 是整数的条件为 $\dfrac{2k}{k^2+1}$等于 -1, 或 0 或 1, 即 $k=-1, 0, 1$.

因此, 从③, ④得

$$\begin{cases}x=9,\\ y=-1;\end{cases} \qquad \begin{cases}x=10,\\ y=-2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=11,\\ y=-1.\end{cases}$$

研究 上述解答比较困难, 是否还有其他解法?

关于 x,y 为整数的这个条件, 对于 k 也可做不出任何推

断. k 是整数、有理数或无理数不定，这时消去 k 比较合适. 从①，② 消去 k，得 $y^2+2y+(x-10)^2=0$，要使 y 是整数，则判别式必须为正或为 0，$\therefore\ 1-(x-10)^2\geqslant 0$，由此可知，$x$ 等于 9，10，11. 从而也可求出 y. 因为这是必要条件，所以需要检查求出的 x,y 数组是否适合原式.

练习 (答案在 143 页)

21. x，y 为整数，当 $xy=x+y$ 时，试求 x 和 y 的值.

22. 如果有 100 日元、10 日元、5 日元的硬币共 40 枚，合计金额是2000 日元，那么每种硬币的枚数是多少？

例题 47 试求满足方程 $x^2-y^2=60$ 的所有正整数 x，y 的数组.

解法 把左边分解因式，化为 $pq=60$ 的形式. 求出满足此式的整数 p,q. 注意下列各点：

(1) $\boldsymbol{x,y}$ **是整数** $\Longrightarrow \boldsymbol{x+y}$，$\boldsymbol{x-y}$ **是整数**(逆不成立).

(2) $\boldsymbol{x,y}$ **是整数** $\Longleftrightarrow \boldsymbol{x+y,x-y}$ **同是偶数或同是奇数.**

解 从 $x^2-y^2=60$ 得 $(x+y)(x-y)=60$. 如果 x，y 是整数，那么 $x+y,x-y$ 是整数. (必要条件)

因为 $x>0,y>0$，所以 $x+y>0,x+y>x-y$. 从而求得

$x+y$	60	30	20	15	12	10
$x-y$	1	2	3	4	5	6

解这些方程组，选取 x,y 是正整数的数组：

$$x=16,\ y=14;\ x=8,\ y=2. \qquad \text{(答)}$$

注意 $x+y$ 和 $x-y$ 的 6 组值中，同时为偶数的，或同时为奇数的只有 30 和 2，10 和 6 两组. 从这两组即可求出答案.

例题 48 试求满足方程 $x^2-xy+3y^2=15$ 的所有整数 x, y 的数组.

解法 因为左边不能分解因式，所以要想其他方法. 选取从必要条件逐步向充分条件逼近的方法.

整数解$\Longrightarrow$有理数解$(D=m^2)\Longrightarrow$实数解$(D\geqslant 0)$.

解 从 $x^2-xy+3y^2=15$ 得 $x^2-yx+(3y^2-15)=0$. …①
因为 x 必须是实数，所以 $D=y^2-4(3y^2-15)\geqslant 0$.

解得

$$-2.2\cdots\leqslant y\leqslant 2.2\cdots.$$

因为 y 是整数，得 $y=-2,-1,0,1,2$ (这是必要条件).

把 y 的值代入 D (只选取适合条件的):

当 $y=-2$ 时，$x=1$，-3；当 $y=2$ 时，$x=3$，-1；当 $y=-1$ 时，$x=3$，-4；当 $y=1$ 时，$x=4$，-3.

当 $y=0$ 时，$D=60$，因为不是完全平方数，故舍去.

(x,y) 是 $(\pm1,\mp2)$，$(\pm3,\pm2)$，$(\pm3,\mp1)$，$(\pm4,\pm1)$.（符号同序）

例题 49 已知二次方程 $x^2+(p-5)x+p=0$ 的二根同时是整数. 试求出此二根.

解法 使用实根条件. $D=(p-5)^2-4p=p^2-14p+25\geqslant 0$，能解出 p 的范围，但是还确定不了 p. 有理数的条件怎样呢？用 $D=m^2$（判别式是完全平方数）进一步缩小范围就可以了. 还有，作为另解，利用根与系数关系的方法.

解 $x^2+(p-5)x+p=0$,

$$\therefore \quad x=\frac{-(p-5)\pm\sqrt{(p-5)^2-4p}}{2}.$$

要使 x 是整数，$D=(p-5)^2-4p$ 必须是完全平方数．（必要条件）．又因为二根是整数，所以它们的积 p 是整数．令 $D=m^2$（m 是整数，$m>0$），得

$$(p-5)^2-4p=m^2, \quad \therefore \quad (p-7)^2-m^2=24.$$

因而 $\quad (p-7+m)(p-7-m)=24.$

于此，$p-7+m$ 和 $p-7-m$ 同为偶数，或同为奇数．而且 $p-7+m>p-7-m$.

$$\therefore \quad \begin{cases} p-7+m=12, 6, -2, -4, \\ p-7-m=2, 4, -12, -6. \end{cases}$$

解这些方程组，适合题意的为

(a) $p=14, \quad m=5$; $\qquad$ (b) $p=12, \quad m=1$;

(c) $p=0, \quad m=5$; $\qquad$ (d) $p=2, \quad m=1$.

$$(答) \quad \begin{cases} p=14, \quad m=5 \text{ 时}, x=-2, -7; \\ p=12, \quad m=1 \text{ 时}, x=-3, -4; \\ p=0, \quad m=5 \text{ 时}, x=0, 5; \\ p=2, \quad m=1 \text{ 时}, x=1, 2. \end{cases}$$

另解 设 $x^2+(p-5)x+p=0$ 的二个整数根为 α, β（$\alpha\leqslant\beta$）.

从根和系数关系得 $\alpha+\beta=5-p$，$\alpha\beta=p$．由此二式消去 p．（消去没给条件的 p 的方法）

$$\alpha\beta+\alpha+\beta=5, \quad \therefore \quad (\alpha+1)(\beta+1)=6.$$

因而，

$$\begin{cases} \alpha+1=1, 2, -6, -3, \\ \beta+1=6, 3, -1, -2. \end{cases}$$

所以得 $\alpha=0,\beta=5$; $\alpha=1,\beta=2$; $\alpha=-7,\beta=-2$; $\alpha=-4$, $\beta=-3$.

例题50 若方程 $x^3-9x^2+6x+a=0$ 有三个整数根，试求出所有 a 值.

解法 设三个整数根为 α,β,γ，从根与系数的关系得 $\alpha+\beta+\gamma=9$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=6$，由此消去 γ 并按 β 整理，得 $\beta^2+(\alpha-9)\beta+(\alpha^2-9\alpha+6)=0$. 因为 β 是整数，所以 $D=(\alpha-9)^2-4(\alpha^2-9\alpha+6)$ 必须是完全平方数. 以后，由 $a=-\alpha\beta\gamma$ 即可确定 a.

解 设 $x^3-9x^2+6x+a=0$ ①

的一个整数根为 α，则

$$\alpha^3-9\alpha^2+6\alpha+a=0. \qquad ②$$

①－②得 $(x^3-\alpha^3)-9(x^2-\alpha^2)+6(x-\alpha)=0$,

$$\therefore\quad (x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2-9x-9\alpha+6)=0.$$

因此，

$$x^2+(\alpha-9)x+(\alpha^2-9\alpha+6)=0 \qquad ③$$

必有二个整数根. 因而

$$D=(\alpha-9)^2-4(\alpha^2-9\alpha+6)=3[28-(\alpha-3)^2]$$

必须是整数的完全平方.（是必要条件）

因为 $0\leqslant(\alpha-3)^2\leqslant28$，所以 $(\alpha-3)^2=1,16,25$.

$$\therefore\quad \alpha=-2,-1,2,4,7,8.$$

代入③，当 $\alpha=-2$ 时，$x^2-11x+28=0$，$\therefore\quad x=4,7$;

当 $\alpha=-1$ 时，$x^2-10x+16=0$，$\therefore\quad x=2,8$;

当 $\alpha=2$ 时，$x^2-7x-8=0$，$\therefore\ x=-1,8$；

当 $\alpha=4$ 时，$x^2-5x-14=0$，$\therefore\ x=-2,7$；

当 $\alpha=7$ 时，$x^2-2x-8=0$，$\therefore\ x=-2,4$；

当 $\alpha=8$ 时，$x^2-x-2=0$，$\therefore\ x=-1,2$.

从而

$$a=-\alpha(\alpha^2-9\alpha+6)=-\alpha\beta\gamma.$$

于此，β,γ 是③的二根，因此，α,β,γ 是①的三根.

因此，

$$a=16,56.$$

注意 $f(x)=x^3-9x^2+6x+a$，

$\therefore$ $f'(x)=3(x^2-6x+2)$，当 $x=3\pm\sqrt{7}$ 时，$f(x)$ 有极值. 在 $3-\sqrt{7}<x<3+\sqrt{7}$ 的范围内必有一个整数根. $x=1,2,3,4,5$ 都可能是整数根.

研究 关于不定方程的整数解

关于不定方程解法的一般理论是很难的. 通常研究的都是比较容易的.

(1) 一次不定方程

例如，象 $37x+49y=1$，系数是整数，未知数是一次的方程，叫做**一次不定方程**. 还有，找出满足此方程的所有整数过程，叫做**解不定方程**.

[定理] 1. 设 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是非 0 整数时，则一次不定方程 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$ 有解的充要条件为，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ **的最大公约数是 b 的约数.**

[定理]2. 设一次不定方程 $ax+by=c$ 的一个解为 (x_0, y_0)，则所有的解为:

$$x=x_0-\frac{b}{(a,b)}N,\ y=y_0+\frac{a}{(a,b)}N \quad (N=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots\cdots),$$

其中,(a,b)表示 a 与 b 的最大公约数.

(例) 对于 $6x+8y=12$,

因为$(6,8)=2$, 2 是 12 的约数,所以此不定方程有解.

由于 $x_0=2, y_0=0$ 是一个解,则所有解为

$$x=2-\frac{8}{2}N=2-4N,$$

$$y=0+\frac{6}{2}N=3N(N\text{ 是整数}).$$

(2) 二次不定方程

关于求二次以上的不定方程的解是很困难的. 未知数是二个的情形, 也是在极特殊的情形才能确定出来.(参考例题45,47,48)

下列形式的不定方程是整数论中重要的、有趣味的内容.

$$x^2-my^2=1(m\text{ 是非平方的正整数}) \qquad ①$$

把这个方程叫做 ***Pell* 方程**. $x=\pm1, y=0$ 是此方程的解.并且,可以证明这个形的方程必有正整数解.

[**定理**] 设 *Pell* 方程①的一个整数解是 x_1, y_1, 则由

$$x_n+y_n\sqrt{m}=(x_1+y_1\sqrt{m})^n$$

确定的 $x_n, y_n(n=1,2,3,\cdots\cdots)$也满足①式.

[**定理**] 在 *Pell*方程①的正整数解(x,y)中,设 y 最小的一个为(x_1,y_1). 由 $(x_1+y_1\sqrt{m})^n=x_n+y_n\sqrt{m}$决定$(x_n,y_n)$时, 则它是①的所有正整数解.

例题 51 在下列的$\boxed{}$中，试填上适当的数或式．并叙述(a)～(e)“ ”中问题的理由．

考虑方程 $$x^2-3y^2=1,\qquad ①$$

求满足此方程的整数组 (x,y)．(以下把方程的整数解简称为解．)为了作好准备，首先应明确下列问题：

(a)“设 a，b，c，d 是整数．如果 $a+b\sqrt{3}=c+d\sqrt{3}$，那么 $a=c$，$b=d$．”

其次，从方程① 明显看出，如果 (x,y) 是解，那么 $(x,-y)$，$(-x,y)$，$(-x,-y)$ 也是解．因而，主要是求 (x,y) 同时非负的解．为此可令

$$(2+\sqrt{3})^n=x_n+y_n\sqrt{3}\qquad ②$$

作为求解手段．(x_n，y_n 为非负的整数，$n=0,1,2,\cdots\cdots$)由(a)得 $x_0=1,y_0=0;x_1=2,y_1=1;$ ③

$$x_2=\boxed{},y_2=\boxed{};x_3=\boxed{},y_3=\boxed{}.$$

另外，比较 $(2+\sqrt{3})^2$ 和 $(2-\sqrt{3})^2$，$(2+\sqrt{3})^3$ 和 $(2-\sqrt{3})^3$ 等，一般地说，

$$(2-\sqrt{3})^n=x_n-y_n\sqrt{3}\ (n=0,1,2,\cdots\cdots)\qquad ④$$

利用②和④，$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$，因为

$$1=(2+\sqrt{3})^n(2-\sqrt{3})^n=x_n^2-3y_n^2,$$

可知②中确定的 (x_n,y_n) 是方程①的解．特别地，x，y 有一个是 0 的非负解，即 $x=1,y=0$，也就是③中的 (x_0,y_0)．

其次，求 (x_{n-1},y_{n-1}) 和 (x_n,y_n) 的关系 $(n\geqslant1)$．

$$x_n+y_n\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^n=(x_{n-1}+y_{n-1}\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$$
$$=\boxed{}.$$

所以 $$x_n=\boxed{},y_n=\boxed{}.$$

因而，从 (x_0,y_0) 出发，依次求出非负解 (x_1,y_1)，

(x_2, y_2)，……，(x_n, y_n)，……并且 $y_1<y_2<y_3<\cdots\cdots$. 从以上可见非负解很多，这些非负解有什么意义呢？现取任意的正解为 (x, y)，$(x>0, y>0)$.

(b) “设 $x'=2x-3y$，$y'=2y-x$ 时，则 (x', y') 也是解.”

(c) “而且 $x>x'>0$，$y>y'\geqslant 0$.”

(d) “以后，从任意的正解 (x, y) 出发，求出(b)中的 (x', y')，逐次推导，可得③所给的非负解 (x_0, y_0).

(e) “从而，任意非负解 (x, y) 为由②所确定 (x_n, y_n) $(n=0,1,2,\cdots\cdots)$ 中的一个.”

解 $\boxed{}$ 中依次为 7，4，26，15，$2x_{n-1}+3y_{n-1}+(x_{n-1}+2y_{n-1})\sqrt{3}$，$2x_{n-1}+3y_{n-1}$，$x_{n-1}+2y_{n-1}$.

(a) 的理由：$a+b\sqrt{3}=c+d\sqrt{3}$ $(a,b,c,d$ 为整数$)$ $\therefore$ $a-c=(d-b)\sqrt{3}$. 左边 $a-c$ 为整数，因而 $d-b=0$（若 $d-b\neq 0$，矛盾），$\therefore a-c=0$，因而 $a=c$，$b=d$.

(b) 因为 (x, y) 是解，所以 $x^2-3y^2=1$. $\therefore$ $x'^2-3y'^2=(2x-3y)^2-3(2y-x)^2=x^2-3y^2=1$. 因此，$(x', y')$ 也是解.

(c) $\because (2x)^2-(3y)^2=4(1+3y^2)-9y^2=4+3y^2>0$，$\therefore (2x+3y)(2x-3y)>0$. 由于 $2x+3y>0$，则 $2x-3y>0$. $\therefore$ $x'>0$.

且 $(2y)^2-x^2=4y^2-(1+3y^2)=y^2-1\geqslant 0$. 同理可证 $y'\geqslant 0$.

$x-x'=3y-x>2y-x=y'\geqslant 0$，$\therefore x>x'>0$. 同理，$y>y'\geqslant 0$.

(d) 由任意的正解 (x, y)，用(b)的方法可得解 (x', y')，满足 $x>x'>0$，$y>y'\geqslant 0$. 按照 x 是正，y 是非负，且都减少，得 (x', y'). 因而，这个方法用到有限次便可终止. 所以，可达到 $x>0$ 且 $y=0$ 的解 (x_0, y_0).

(*e*) 设任意的非负解为(x,y)，按照(*d*)用到n次达到解(x_0,y_0). $\therefore$ $(x+\sqrt{3}y)(2-\sqrt{3})^n=x_0+\sqrt{3}y_0$ $(n=0, 1, 2,\cdots.)$

$$\therefore \quad x+\sqrt{3}y=(x_0+\sqrt{3}y_0)(2+\sqrt{3})^n, x_0=1, y_0=0.$$

$$\therefore \quad x+\sqrt{3}y=(2+\sqrt{3})^n=x_n+y_n\sqrt{3}.$$

$$\therefore \quad x=x_n, y=y_n \ (n=0,1,2,\cdots\cdots).$$

因此，任意非负解(x,y)是②所确定的(x_n,y_n) $(n=0,1,2,\cdots\cdots)$中的一个.

9. 不等式的整数解

思考方法

不等式的整数解，按照式的变形限定解的范围. 或按照所给的其他条件也可以限定解的范围.

利用数轴、坐标平面

当有一个未知数的时候利用数轴；有二个未知数的时候利用坐标平面来考虑比较容易. 只凭计算过于烦琐时，多选用坐标平面上的区域，进行推测.

应用题

在应用题中，关于整数解的问题比较多. 表面上不引人注目，但是，由于人数、个数、户数等都是整数，因此，自然是属于整数解的问题.

例题 52 (1) 试求使下列不等式同时成立的 x 的整数值:

$$\begin{cases}(x-1)(2x+1)\geqslant 0, & ①\\ 6x^2+5x-50<0, & ②\end{cases}$$

(2) 试求下列不等式组的正整数解:

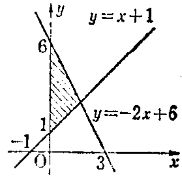
$$\begin{cases}2x+y<6, & ①\\ y-x\geqslant 1. & ②\end{cases}$$

解法 (1) P 且 Q 的范围$\longrightarrow P$ 的范围和 Q 的范围的公共部分.

（2）利用 $A>B, C>D \longrightarrow A+C>B+D$，推出 x 或 y 即可. 或在坐标平面上考虑区域.

解 （1）从①得 $x\leqslant -0.5$ 或 $x\geqslant 1$，从②得 $(2x-5)(3x+10)<0$，$\therefore -\frac{10}{3}<x<2.5$. 因此，公共部分为 $-\frac{10}{3}<x\leqslant -0.5$ 或 $1\leqslant x<2.5$. 满足这些的整数值 x 为 -3，-2，$-1, 1, 2$.

（2）从②得 $x-y\leqslant -1$. 把它与 $2x+y<6$ 边边相加，得 $3x<5$. 满足此式的正整数 x 的值为 $x=1$. 这时，从①，②得 $2\leqslant y<4$，满足此式的正整数 y 的值为 $y=2, 3$. 因而，$x=1$，$y=2$；$x=1, y=3$.（如果利用右图，则容易理解.）



发展题

试求同时满足下列不等式 x, y 的整数值组：

$$\begin{cases} 1<x+5y<5, & ① \\ -1<2x+7y<3. & ② \end{cases}$$

解法程序

可在坐标平面上作出①，②的图象.

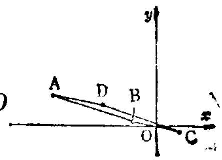
$y>-\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}$，

$y<-\frac{1}{5}x+1$，

$y>-\frac{2}{7}x-\frac{1}{7}$，

$y<-\frac{2}{7}x+\frac{3}{7}$.

解 如右图. 设满足原式的点 (x, y) 的存在区域是 $\square ABCD$ 的内部. 其中，



$$A\left(-\frac{40}{3}, \frac{11}{3}\right),\ B(-4, 1),$$

$$C\left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}\right),\ D\left(-\frac{20}{3}, \frac{7}{3}\right).$$

因此，满足这个区域的点的纵坐标为

求出 x 或 y 的范围. 此题先求出 y 的范围较好.

$$-\frac{1}{3}<y<\frac{11}{3}.$$

在此范围内的整数值 y 为0, 1, 2, 3. 对于这些值,再从①,②求 x 的范围.

对于 $y=0$, 1, 2, 3, 分别求出 x 的整数值.

当 $y=0$ 时, $1<x<5$, $-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$.

满足这些 x 的整数值不存在.

当 $y=1$ 时, $-4<x<0$, $-4<x<-2$.

满足这些 x 的整数值为 -3.

当 $y=2$ 时, $-9<x<-5$, $-\frac{15}{2}<x<-\frac{11}{2}$.

满足这些 x 的整数值为 -7 和 -6.

当 $y=3$ 时, $-14<x<-10$, $-11<x<-9$.

满足这些 x 的整数值不存在.

从以上可知, (x,y) 为 $(-3, 1)$, $(-6,2)$, $(-7,2)$.

练习 (答案在 143 页)

23. 三个正整数 x, y, z 满足

$$x+2y+3z=10, \ 2x>3y$$

时,试求 $x^2+y^2+z^2$ 的值.

例题 53 某次马拉松大会有 A, B, C, D 四个大学的选手参加. 选手中, A, B 两大学合计 16 名, B, C 两大学合计 20 名, C, D 两大学合计34 名. 并且选手的人数是按 A, B, C, D 大学的顺序参加的. 试求各大学的选手人数.

解法 设四个大学的选手人数分别为 x,y,z,u, 则

$$x+y=16,\quad y+z=20,\quad z+u=34.$$

这样只得三个方程. 仅有这些条件解不出. 这里有用的是, **所有未知数都是正整数**, 并且**对所得的值, 给出限制**. 另外, 问题的条件给出"人数按 A,B,C,D 的顺序参加的". 即 $x<y<z<u$ 或 $x>y>z>u$. 由直观可知, 人数不可能依次减少. 但从式子上看是不容易说明的.

一般地, 关于求未知数取整数值的问题, 利用不等式很有效.

解 设 A,B,C,D 四个大学的选手人数分别为 x,y,z, u 时, 根据题意, 有

$$\begin{cases} x+y=16, & ① \\ y+z=20, & ② \\ z+u=34. & ③ \end{cases}$$

从①, ②得 $x+y<y+z$, $\therefore\quad x<z$.

因而 $$x<y<z<u. \qquad ④$$

由①和 $x<y$, 得 $16-y<y$, $\therefore\quad 8<y$.

由②和 $y<z$, 得 $y<20-y$, $\therefore\quad y<10$.

因而 $8<y<10$, 满足此式的 y 为 $y=9$.

把这个值代入①, ②, 得 $x=7, z=11$.

因而从③得　$u=23$.

这些值满足④.（答）A 7 人，B 9 人，C 11 人，D 23 人.

例题 54　试求满足不等式 $ab+1\leqslant abc\leqslant bc+ca+ab+1$ 的所有自然数 a,b,c 的数组. 其中 $a>b>c$.

解法　这个问题不容易思考. 观察 $ab+1\leqslant abc$，当 $c=1$ 时不成立. $c>1$ 时成立. 但是，仅有这些条件还不够. 可以按着三个字母 a,b,c 中的某一个字母进行整理. 关于 c 整理较好.

解
$$ab+1\leqslant abc, \quad ①$$
$$abc\leqslant bc+ca+ab+1. \quad ②$$

从①得　$ab(c-1)\geqslant 1$，因为 a,b,c 是自然数，所以 $c-1\geqslant 1$.

$$\therefore\quad c\geqslant 2. \quad ③$$

由条件 $a>b>c$，从③得 $a>b\geqslant 3$. ④

从②得　$(ab-a-b)c\leqslant ab+1$.

并且 $ab-a-b=(a-1)(b-1)-1$，由④可知为正.

因而，如果利用③，则

$$2(ab-a-b)\leqslant(ab-a-b)c\leqslant ab+1.$$

$\therefore\quad ab-2a-2b\leqslant 1$，$\therefore\quad (a-2)(b-2)\leqslant 5$.

由④，因为 $a-2>b-2\geqslant 1$，所以

$$\begin{cases}a-2=2,3,4,5,\\ b-2=1,1,1,1.\end{cases}$$

因为 $b=3$，所以 $c=2$，因而 (a,b,c) 为

$(4,3,2)$，$(5,3,2)$，$(6,3,2)$，$(7,3,2)$.

例题 55 开展销会，某日成年人和儿童共 230 人入场，收入场费和销货款共 11300 日元．儿童少于成年人，但多于成年人的一半．入场费成年人为 20 日元，儿童为 10 日元，销货价格均为每个 500 日元．求成年人和儿童各有几人？并且，销售货物多少个？

解法 人数、个数都是正整数．这个条件很重要．

解 设成年人为 x 人，则儿童为 $(230-x)$ 人，设销售货物的个数为 y，则

$$20x+10(230-x)+500y=11300.$$

$$\therefore \qquad x+50y=900. \qquad ①$$

根据题意，有 $\dfrac{x}{2}<230-x<x$，

$$\therefore \qquad 115<x<\frac{460}{3}. \qquad ②$$

从①得 $x=50(18-y)$．所以 x 是 50 的倍数．

因而，从②得 $x=150$，$\therefore$ $230-x=80$．

从①得

$$y=\frac{900-150}{50}=15.$$

（答）成年人 150 人，儿童 80 人，销货数 15 个．

10. 集合和整数问题

有限集合元素的个数

整数问题和集合的思考有着深刻的联系．这里所处理的问题，都是并集、交集等元素的个数．下列定理是重要的．

公式

$n(A)$为集合A的元素的个数

A，B 是由有限个元(元素)组成的集合(有限集合)时，则

① $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$.

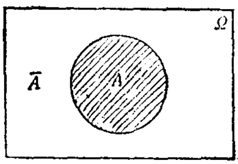
② $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)$
$-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)$
$+n(A\cap B\cap C)$.

例题

举几个例．设从 1 到 100 的整数为全集 Ω，即 $\Omega=\{x|1\leqslant x\leqslant 100, x$ 是整数$\}$.

$n(A)$

(1) $A=\{x|x$ 是 3 的倍数$\}$ 时，试求 $n(A)$ 及 $n(\overline{A})$.



(解)从 1 到 100 之间 3 的倍数为 3，6，9，…，99 共 33 个．

$\therefore\quad n(A)=33$，$n(\overline{A})=100-33=67$.

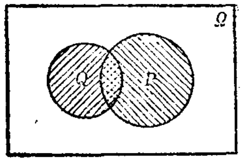
$n(P\cap Q)$
$n(P\cup Q)$

(2) $P=\{x|x$ 是 2 的倍数$\}$，

$Q=\{x|x$ 是 3 的倍数$\}$

时，试求 $n(P\cap Q)$ 及 $n(P\cup Q)$.

(解)集合 $P\cap Q$ 为被 2 且被 3 整除的数的集合，即 $P\cap Q=\{x|x$ 是 6 的倍数$\}$.



$$\therefore\quad n(P\cap Q)=16.$$

又，因为 $n(P)=50, n(Q)=33$，所以 $n(P\cup Q)$
$=n(P)+n(Q)-n(P\cap Q)$
$=50+33-16=67.$

命题与集合

设命题 p, q 的真值集合分别为 P, Q.

① 命题"p 与 q"的真值集合为 $P\cap Q$.

p: x 是 2 的倍数. P: 2 的倍数集合.
q: x 是 3 的倍数. Q: 3 的倍数集合.
p 且 q: x 是 2 和 3 的倍数.
$P\cap Q$: 6 的倍数集合.

② 命题"p 或 q"的真值集合为 $P\cup Q$.

③ 命题"如果 p，那么 q"为真时，则 P 和 Q 之间有 $P\subset Q$ 的关系.

例题 56 从 1 到 100 的整数中，用符号 A 表示 3 的倍数集合，用符号 B 表示 5 的倍数集合时，则下列符号所表示的集合分别有多少个元素？

(1) $A\cap B$. (2) $A\cup B$.

解法 $A=\{3,6,9,\cdots,99\}, B=\{5,10,15,\cdots,100\}$.

集合 $A\cap B$ 为被 3 且被 5 整除的数集合，即 15 的倍数集合.

$A\cap B=\{15,30,45,\cdots,90\}$. 集合 $A\cup B$ 为被 3 或被 5 整除的数集合. **被 3 或被 5 整除的数⟹①被 3 整除不被 5 整除的数;②被 5 整除不被 3 整除的数;③被 3 且被 5 整除的数.**

解 由于 A 的元素为 3 的倍数,可记作 $3m$(m 是整数). 根据题意, $1\leqslant 3m\leqslant 100$, $\therefore\ 1\leqslant m\leqslant 33$. 因此, $n(A)=33$.

同理, B 的元素可记作 $5n$(n 是整数), $\therefore\ 1\leqslant n\leqslant 20$. $\therefore\ n(B)=20$.

(1) 因为 $A\cap B$ 的元素是 15 的倍数, 所以可记作 $15k$ (k是整数)形式.

根据题意, $1\leqslant 15k\leqslant 100$, $\therefore 1\leqslant k\leqslant 6$, $\therefore n(A\cap B)=6$.

(2) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$$=33+20-6=47.$$

例题 57 设全体正整数的集合为 N. $A\sim F$ 分别为 N 的元素中满足下列条件的全体的集合:

A: 100 以下的数. D: 5 的倍数.

B: 偶数. E: 6 的倍数.

C: 3 的倍数. F: 10 的倍数.

这时,试回答下列(1)～(4):

(1) 从 $A\sim F$ 中选取一个适当的集合, 分别记入下列的$\boxed{}$中:

$$B\cap C=\boxed{},\ \boxed{}\subset D.$$

(2) 写出 $A\cap E\cap F$ 的全部元素.

(3) 除 $A\cup B\cup C$ 的元素外, 写出 N 的元素中第三个小的数.

(4) $(C\cup D)\cap A$ 的元素个数是多少?

解法 (1) 由于 B 为 2 的倍数集合，C 为 3 的倍数集合，因而 $B\cap C$ 为 6 的倍数集合.

其次，$P\subset Q$ 就是说"所有 P 的元素都是 Q 的元素". 因为 D 是 5 的倍数集合，所以 D 包含所有的 10 的倍数. 因为"所有 10 的倍数都是 5 的倍数"为真，所以 $F\subset D$.

(2) $E\cap F$ 为 6 的倍数，且为 10 的倍数集合. 因而，是 6 和 10 的最小公倍数 30 的倍数集合. 因此，$A\cap E\cap F$ 是 100 以下的正整数中且为 30 的倍数集合.

(3) 除 $A\cup B\cup C$ 的元素外，N 的元素从小的数依次为 101, 103, 107, …

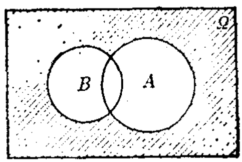
(4) A 中含有 3 的倍数的个数为 33，含有 5 的倍数的个数为 20，又，含有它们共同整数(15 的倍数)的个数为 6，因此，所求的个数为 $33+20-6=47$.

解 (1) E,F. (2) 30, 60, 90. (3) 107. (4) 47.

例题 58 适当地填出下列$\boxed{}$中的数.

不被 6 和 8 整除的四位自然数有$\boxed{}$个？

解法 设四位自然数的集合为 Ω. 在 Ω 的元素中，设 6 的倍数集合为 A，8 的倍数集合为 B. 所求的个数为右图的斜线部分的个数. 在 Ω 的元素中，从全体减去被 6 整除或被 8 整除的整数的个数即为所求.



解 设四位整数的集合为 Ω. 因为 Ω 的元素从 1000 到 9999，所以 $n(\Omega)=9000$. 在 Ω 的元素中，设被 6 整除的整数集合为 A，被 8 整除的整数集合为 B.

A 的个数为 $1000\leqslant 6m\leqslant 9999$，$\therefore 167\leqslant m\leqslant 1666$，$\therefore n(A)=1500$.

B 的个数为 $1000\leqslant 8n\leqslant 9999$，$\therefore 125\leqslant n\leqslant 1249$，$\therefore n(B)=1125$.

$A\cap B$ 的个数为被 6 且被 8 整除的整数，即被 24 整除的整数个数，所以 $1000\leqslant 24k\leqslant 9999$，从而 $n(A\cap B)=375$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad n(A\cup B)&=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\\&=1500+1125-375=2250.\end{aligned}$$

因而，所求的个数为 $n(\Omega)-n(A\cup B)=9000-2250=6750$.

例题 59 有若干个不同的正整数. 其中，被 2 整除的有30 个，被 3 整除的有 35 个，被 4 整除的有 10 个，被 6 整除的有 8 个，被 12 整除的有 3 个. 这时，下列(1)，(2)各有多少个？

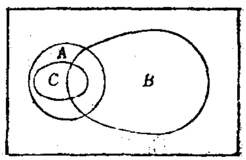
(1) 被 2 或被 3 整除的数.

(2) 被 2 整除，但不被 3 和 4 整除的数.

解法 设被 2 整除、被 3 整除、被 4 整除、被 6 整除、被 12 整除的数的集合分别为 A,B,C,D,E.

因为 4 的倍数为 2 的倍数，所以 $C\subset A$.

因为被 2 和 3 整除的数为 6 的倍数，所以 $A\cap B=D$.



因为被 4 和 6 整除的数为 12 的倍数，所以 $C\cap D=E$.（又 $B\cap C=E$.）参考右图，抓住 A,B,C,D,E 的关系很重要.

解 设被 2,3,4,6,12 整除的数集合分别为 A, B,C,D, E. 则 $C\subset A, A\cap B=D, C\cap D=E$ 成立.

(1) 因为 $n(A)=30$, $n(B)=35$, $n(A\cap B)=n(D)=8$, 所以

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$=30+35-8=57.$$

(2) 在 $A\cap B=D\subset A, C\subset A$ 中,

因为 $n(C)=10, n(D)=8, n(C\cap D)=n(E)=3$, 所以

$$n(C\cup D)=n(C)+n(D)-n(C\cap D)$$
$$=10+8-3=15.$$

这个数为被 2 整除的数中被 3 或被 4 整除的数的个数. (注意 $C\cup D=C\cup(A\cap B)$.)

因而,所求的个数为,从 $n(A)=30$ 减去 $n(C\cup D)=15$ 就可以了,即 15 个.

另解 $n(A)-n(D)=30-8=22$ 是被 2 整除不被 3 整除的数的个数. 并且 $n(C)-n(E)=10-3=7$ 是被 2 整除的整数中,被 4 整除不被 3 整除的数的个数. 故所求的个数是 $22-7=15$(个). (参考上图)

例题 60 设用 m^2+3n^2 (m, n 是整数)形式表示的数的集合为M时,试回答下列各问题:

(1) 证明 3,7,13 是M的元素.

(2) 证明 5,10 不是M的元素.

(3) 证明M的任意两个元素的积还是M的元素.

(4) 证明M的任意两个元素的和常常不是M的元素.

解法 (1) 把 3,7,13 分别使用整数 m, n 作 m^2+3n^2 形的变形即可. 先决定 n 容易.

(2) 设 $5=m^2+3n^2$(m,n 是整数),引出矛盾即可.

(3) 若能把$(a^2+3b^2)(c^2+3d^2)$变成 p^2+3q^2 形即可.

(4) 使用(1),(2)的结论,举出反例即可.

解 (1) 因为 $3=0^2+3\cdot1^2, 7=2^2+3\cdot1^2, 13=1^2+3\cdot2^2$, 所以 3,7,13 是$M$的元素.

(2) 若 5 是M的元素,则

$$5=m^2+3n^2 \quad (m,n\text{ 是整数}).$$

$\therefore \quad 3n^2\leqslant5, \quad \therefore \quad n^2\leqslant\frac{5}{3}$. 因为 n 是整数,所以$|n|\leqslant1$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{如果 } n=0\text{, 那么 } 5=m^2.\\ \text{如果 } n=\pm1\text{, 那么 } 5=m^2+3.\end{array}\right\}\text{这些都与 } m \text{ 是整数矛盾.}$$

因此, 5 不能写成 m^2+3n^2 的形式,即它不是M的元素.

其次,若 10 是M的元素,则

$$10=m^2+3n^2 \qquad (m,n\text{ 是整数}).$$

$\therefore \quad 3n^2\leqslant10, \quad \therefore \quad n^2\leqslant\frac{10}{3}$. 因为 n 是整数,所以$|n|\leqslant1$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{如果 } n=0\text{, 那么 } 10=m^2.\\ \text{如果 } n=\pm1\text{, 那么 } 10=m^2+3\end{array}\right\}\text{都不合理.}$$

因此,10 不是M的元素.

(3) 对于M的两个元素 a^2+3b^2, c^2+3d^2,

$(a^2+3b^2)(c^2+3d^2)=(ac+3bd)^2+3(ad-bc)^2$.

因此,积$(a^2+3b^2)(c^2+3d^2)$是M的元素.

(4) 从(1)得,3,7 是M的元素, 从(2)得 $3+7=10$ 不是M的元素.

例题 61 m, n, p, q 取整数值变化时，设 $12m+8n$ 形的所有整数集合为M，$20p+16q$ 形的所有整数集合为 N. 试证明M和N相等.

解法 $M=\{x \mid x=12m+8n; m, n \text{ 是整数}\}$,

$N=\{y \mid y=20p+16q; p, q \text{ 是整数}\}$

时，证明 $M=N$，能证明下列两点即可. ①**属于M的任意元素必须属于N**；($12m+8n$ 形的整数必能表示成 $20p+16q$ 形)②**属于N的任意元素必须属于M**. ($20p+16q$ 形的整数必能表示成 $12m+8n$ 形)

那么，只要使 $12=20\times3+16\times(-3)$，$8=20\times2+16\times(-2)$ 及 $20=12+8, 16=8\times2$ 就可以了.

此外，可参考习题 22 及 68 页的定理.

解 若设 $x \in M$，则存在 m, n，使 $x=12m+8n$(m, n 是整数). 这时，

$$x=[20\times3+16\times(-3)]m+[20\times2+16\times(-2)]n$$
$$=20(3m+2n)+16(-3m-2n)$$

于此，因为 $3m+2n$，$-3m-2n$ 是整数，所以 $x=20p+16q$(p, q 是整数)形. $\therefore$ $x \in N$.

反之，若 $y \in N$，则存在 p, q，使 $y=20p+16q$(p, q 是整数). 这时，

$$y=(12+8)p+(8\times2)q=12p+8(p+2q).$$

于此，因为 $p, p+2q$ 是整数，所以 $y=12m+8n$(m, n 是整数)形. $\therefore y \in M$. 故 $M=N$.

练习 (答案在 144 页)

24. 设由两个整数的平方差组成的全体整数的集合为M. 例如 $21=5^2-2^2$,所以 21 是M的元素.

(1) 试证明全体的奇数是M的元素.

(2) 偶数 n 为M的元素的充要条件是,n 必被 4 整除.

11. 和其他领域的联系

整数条件的利用很重要

在其他领域中，涉及整数的问题是很多的. 这些问题，整数条件起很大作用. 忘记整数条件就不能得到正确的解答.

这从二次方程、二次函数、不等式、对数、数列、复数等问题中是容易看出的. 根据下列例题，理解整数条件在哪些方面应用和如何应用.

例题 62 设 a 是给定的正整数时，试求下列关于 x 的二次式 $f(x)$ 的值为最小的 x 的整数值 n:

$$f(x)=(a+2)x^2-2(a^2-1)x+1.$$

解法 当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$ 取最小值. 那么，怎样求 $f(x)$ 的值为最小的 x 的整数值最好呢？如果 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 是整数值，则即为所求. 其他情形，应该求出与 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 最接近的整数值.

解 因为

$f(x)=(a+2)\left(x-\dfrac{a^2-1}{a+2}\right)^2-\dfrac{(a^2-1)^2}{a+2}+1, a+2>0$，所

以在 x 取全体实数值的情形下，当 $x_0=\dfrac{a^2-1}{a+2}$时有最小值，$|x-x_0|$选取越小值越好.

但是，$x_0=\dfrac{a^2-1}{a+2}=a-2+\dfrac{3}{a+2}$，其中，$a-2$ 是整数，且 $0<\dfrac{3}{a+2}\leqslant 1$. 因此与 x_0 最近的整数为

$\dfrac{3}{a+2}<\dfrac{1}{2}$，即 $a>4$ 时为 $a-2$.

$\dfrac{3}{a+2}=\dfrac{1}{2}$，即 $a=4$ 时为 $a-2$ 或 $a-1$.

$\dfrac{3}{a+2}>\dfrac{1}{2}$，即 $a<4$ 时为 $a-1$.

（答）　$a=1,2,3$ 时，$n=a-1$；

$a=4$ 时，$n=2$ 或 3；

$a\geqslant 5$ 时，$n=a-2$.

例题63　a,b,c 是整数，如果当 $x=0$，$x=1$ 时，二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 是奇数，试证二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 没有整数根.

解法　a,b，c 是整数，因为 $f(0)=c$ 和 $f(1)=a+b+c$ 是奇数，所以 $a+b$ 是偶数. 然后使用反证法.

解　因为 a,b,c 是整数，且 $f(0)=c$，$f(1)=a+b+c$ 是奇数，所以 $a+b$ 是偶数.

现在，设 $ax^2+bx+c=0$ 有整数根 α，则

$$\alpha(a\alpha+b)=-c.$$

于此，因为 c 是奇数，所以 α 和 $a\alpha+b$ 都是奇数.

但是，$a\alpha+b=a(\alpha-1)+(a+b)$，因为 $\alpha-1$ 和 $a+b$ 是偶数，所以 $a\alpha+b$ 是偶数. 这是不合理的.

所以 $ax^2+bx+c=0$ 没有整数根.

例题 64 设常用对数 $\lg x_1$, $\lg x_2$, $\lg x_3$, $\lg x_4$, $\lg x_5$ 是连续的正整数，当

$$(\lg x_4)^2<(\lg x_1)(\lg x_5)$$

时，试求 x_1 的最小值.

解法 连续的正整数是什么呢？从小到大？还是从大到小？必须研究这两种情形.

解 设 $\lg x_i=X_i(i=1,2,3,4,5)$. 由于 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 是连续的正整数，则当

(1) $X_1=N, X_2=N+1, X_3=N+2, X_4=N+3, X_5=N+4$（$N$ 是正整数）时，$(N+3)^2<N(N+4)$, $\therefore 2N<-9$. 与所设矛盾.

(2) $X_1=N, X_2=N-1$, $X_3=N-2, X_4=N-3$, $X_5=N-4$（N 是 5 以上的整数）时，因为 $X_4^2<X_1X_5$，所以

$$(N-3)^2<N(N-4). \quad \therefore \quad 9<2N.$$

因为 N 是 $N\geqslant5$ 的整数，所以满足 $9<2N$ 的 N 最小值是 5.

$$\therefore \quad \lg x_1=5, \quad \therefore \quad x_1=10^5.$$

例题 65 两个正整数 x, y 的对数尾数和为 1，x^2y 的对数首数为 3. 试求满足条件的所有正整数组 (x,y).

解法 $\lg x, \lg y$ 的尾数和为 1，即 $\lg x+\lg y$ 是整数. $\lg x^2y$

的首数为 3，即 $3\leqslant \lg x^2y<4$. 在 $\lg x+\lg y=n$ 时，明确 n 的可能取值便可. 但也不要忘记 x,y 是正整数.

解 因为 $\lg x,\lg y$ 的尾数和为 1，所以 $\lg x+\lg y$ 是整数. 现在，设 $\lg x+\lg y=n$（n 是整数），则

$$\lg xy=n,\ xy=10^n. \qquad ①$$

因为 x,y 是正整数，所以 n 为 $n\geqslant 0$ 的整数.

又，因为 $\lg x^2y$ 的首数为 3，所以 $3\leqslant \lg x^2y<4$.

$$\therefore\quad 10^3\leqslant x^2y<10^4. \qquad ②$$

由①，②得 $\quad 10^{3-n}\leqslant x<10^{4-n}$. ③

因此 $4-n\geqslant 1$， $\therefore\quad n\leqslant 3$. 又因为 $x\leqslant xy$，从①，③得

$$3-n\leqslant n,\ \therefore\quad n\geqslant 1.5. \text{ 因而 } n=2 \text{ 或 } n=3.$$

（1）当 $n=2$ 时，$xy=100,\ 10\leqslant x<100$.

因为 x 是 100 的约数，所以 $x=10,20,25,50$.

这时，y 的值为 $y=10,5,4,2$.

（2）当 $n=3$ 时，$xy=1000,\ 1\leqslant x<10$.

因为 x 是 1000 的约数，所以 $x=1,2,4,5,8$.

这时，y 的值为 $y=1000,500,250,200,125$.

由于尾数和为 1，分别确定(1)，(2)的值. 求得 (x,y) 的组为 $(20,5),(25,4),(50,2),\ (2,500),(4,\ 250),\ (5,200),\ (8,125)$.

例题 66 试求同时满足下列二式的 x,y 的整数值.

$$2\lg(x-1)-\lg(x+y)=1,\ \lg x+\lg(x+5y)<2.$$

解法 首先把方程的两边变形. 然后集中考虑用不等式来解.

在真数为正的条件下，把给出的等式变形，得$(x-1)^2=10(x+y)$. 从x和y是整数的条件，得$(x-1)^2$是10的倍数，因而$x-1$是10的倍数. 由此，得$x=10n+1$(n是正整数). 把它代入$(x-1)^2=10(x+y)$,关于y做同样考虑.

解 $$2\lg(x-1)-\lg(x+y)=1, \quad ①$$

$$\lg x+\lg(x+5y)<2. \quad ②$$

因为真数为正,所以$x-1>0, x+y>0, x>0, x+5y>0$.

在这个条件下,由①,②得

$$\lg\frac{(x-1)^2}{x+y}=\lg 10, \lg x(x+5y)<\lg 100.$$

所以

$$(x-1)^2=10(x+y), \quad ③$$

$$x(x+5y)<100. \quad ④$$

因为x, y是整数，所以$x-1, x+y$是整数. 因而从③得$(x-1)^2$是10的倍数,即$x-1$是10的倍数. 因此,设

$$x=10n+1(n\text{是整数}). \quad ⑤$$

因为$x>1$,所以 $$n\geqslant 1. \quad ⑥$$

把⑤代入③,得$100n^2=10(10n+1+y)$.

$$\therefore \quad 10n(n-1)=y+1. \quad ⑦$$

因而$y+1$是10的倍数. 因此,可设

$$y=10m-1(m\text{是整数}). \quad ⑧$$

把此式代入⑦,得 $$m=n(n-1). \quad ⑨$$

由⑥得$m\geqslant 0$. 把⑤,⑧代入④,得

$$(10n+1)[10n+1+5(10m-1)]<100.$$

$$\therefore \quad \left(n+\frac{1}{10}\right)\left(n+5m-\frac{4}{10}\right)<1. \quad ⑩$$

从⑥得　$n+\frac{1}{10}>1$, 从⑩得　$n+5m-\frac{4}{10}<1$,

$\therefore$　$n+5m<1+\frac{4}{10}$. 因为 $m\geqslant 0$，所以 $n=1, m=0$.

代入⑤,⑧,得　　$x=11, y=-1$.

> **例题 67**　把大于 1 的整数 n 素因数分解为 $p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k}$. 其中 m_1, m_2, $\cdots m_k$ 是正整数, $p_1, p_2, \cdots p_k$ 是素数, 且 $p_1<p_2<\cdots<p_k$. 这时，试证下列不等式:
>
> (1) $p_k\geqslant k+1$. (2) $n>k^2$.

解法　p_1 是 2 以上的数, 即 $p_1\geqslant 2$. 根据条件，因为 $p_1<p_2<\cdots<p_k$, 所以 $p_2\geqslant 3, p_3\geqslant 4\cdots\cdots$成立.

因为 m_1, m_2, $\cdots$, m_k 是正整数，所以 $n=p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k}\geqslant p_1p_2\cdots p_k$ 成立.

解　(1) 因为整数 n 大于 1, 所以 k 为正整数. 因此，在 p_1 是素数, 对于整数 p_1, p_2, $\cdots$, p_k, 当 $p_1<p_2<\cdots<p_k$ 成立时, 证明 $p_k\geqslant k+1$ 成立就够了.

因为 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是整数, $p_1<p_2<\cdots<p_k$, 所以

$$p_k-p_{k-1}\geqslant 1, p_{k-1}-p_{k-2}\geqslant 1, \cdots, p_2-p_1\geqslant 1.$$

把这些式子边边相加, 得 $p_k-p_1\geqslant k-1$.

$\therefore$　　　　$p_k\geqslant k-1+p_1$.

因为 p_1 是素数，所以 $p_1\geqslant 2$. $\therefore p_k\geqslant k-1+2$, $\therefore$　$p_k\geqslant k+1$.

(2) 因为 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 是正整数, 所以

$$n=p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k}\geqslant p_1p_2\cdots p_k.$$

从①的结论, 得 $p_1\geqslant 2, p_2\geqslant 3, \cdots, p_k\geqslant k+1$.

$$\therefore\ n \geqslant 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(k+1) \geqslant k(k+1).$$

因为 $k\geqslant 1$，所以 $n>k^2$.

例题 68 把下列的$\square$中填上适当的数.

设全体正奇数从小到大依次为 a_1, a_2, a_3, …如果设其全体集合为M，那么在M中的加减乘除中，对于①$\square$的运算可以自由进行.

一般地，如果 $a_m a_n = a_k$，则 $k=$②$\square$. 满足$k=mn+10$ 的 m, n 值组(其中 $m\leqslant n$)是③$\square$. 又 $m+n=25$(其中 $m\leqslant n$)时，m, n 的值组当④$\square$时，k 为最大.

解法 设 a, b 是奇数时，$a+b$, $a-b$ 是偶数，ab 是奇数，$a\div b$ 是奇数或分数.

因为 $a_m=2m-1$, $a_n=2n-1$, $a_k=2k-1$，代入 $a_m a_n=a_k$，便可求出 k. (用 m, n 表示 k).

解 (1) 乘法.

(2) 因为 $a_m=2m-1$, $a_n=2n-1$, $a_k=2k-1$，所以

$$(2m-1)(2n-1)=2k-1.\quad \therefore\quad k=2mn-m-n+1.$$

(3) 从 $k=mn+10$，得 $2mn-m-n+1=mn+10$.

$$\therefore\quad mn-m-n-9=0,\ \therefore\quad (m-1)(n-1)=10.$$

因为 $m\leqslant n$，所以

$$\begin{cases} m-1=1, \\ n-1=10; \end{cases} \text{或} \quad \begin{cases} m-1=2, \\ n-1=5. \end{cases}$$

$$\therefore\quad m=2, n=11; m=3, n=6.$$

(4) $m+n=25$ 时，$k=2mn-(m+n)+1=2mn-24$. 当 $m+n$ 为一定时，因为当$|m-n|$最小时 mn 的值最大，所以 m

$=12, n=13$ 时，mn 为最大，此时 k 为最大.

例题 69 已知两个自然数 $m, n(m<n)$. 试回答下列问题:

(1) 满足不等式 $m^2<x<n^2$ 的整数有多少个?

(2) 满足不等式 $y^2<x<n^2$ 的整数组 (x,y) 有多少组?

解法 (1) 满足条件的整数最小的是 m^2+1，最大的是 n^2-1.

(2) 从(1)得，满足 $y^2<x<n^2$ 的整数组为 (n^2-y^2-1) 组.

解 (1) 因为 $x=m^2+1, m^2+2, \cdots, n^2-1$，所以个数为

$$(n^2-1)-m^2=n^2-m^2-1(\text{个}).$$

(2) 根据(1)，满足 $y^2<x<n^2$ 的整数 (x, y) 组(视 y 为定数)为 (n^2-y^2-1) 组. 因为满足 $y^2<n^2$ 的整数 y 为 $0, \pm1, \pm2, \cdots, \pm(n-1)$，因而，所求的组数为

$$n^2-1+2\sum_{y=1}^{n-1}(n^2-y^2-1)$$

$$=n^2-1+2n^2(n-1)-\frac{n(n-1)(2n-1)}{3}-2(n-1)$$

$$=(2n-1)(n^2-1)-\frac{n(n-1)(2n-1)}{3}$$

$$=\frac{(n-1)(2n-1)(2n\quad 3)}{3}.$$

例题 70 有 1000 个正整数 $a_1, a_2, \cdots a_{1000}$, $a_1=a_2=1$, $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n=3,4,\cdots1000)$
时，其中如下列的整数分别有多少个? 试说明理由.

(1) 偶数. (2) 3 的倍数. (3) 6 的倍数.

解法 （1）由 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$, $a_{n+3}=a_{n+2}+a_{n+1}$，边边相加，得 $a_{n+3}=2a_{n+1}+a_n$. 所以，如果 a_n 是偶数，那么 a_{n+3} 也是偶数.

（2）同理，只要导出 $a_{n+4}=3a_{n+1}+2a_n$ 即可. 从此式可知，如果 a_n 是 3 的倍数，那么 a_{n+4} 也是 3 的倍数.

（3） 6 的倍数能被 2 和 3 整除，即是 2 和 3 的倍数.

解 根据题意，有 $a_1=a_2=1, a_3=2, a_4=3, a_5=5, a_6=8$. ①

（1）因为 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$, ②

$a_{n+3}=a_{n+2}+a_{n+1}$, ③

由②+③，得 $a_{n+3}=2a_{n+1}+a_n$.

所以，如果 a_n 是偶数，那么 a_{n+3} 也是偶数；如果 a_n 是奇数，那么 a_{n+3} 也是奇数.

由①，a_n 是偶数的号数 n 为

$$n=3+3m \quad (m=0,1,2,\cdots).$$

因为 $n\leqslant 1000$, $3+3m\leqslant 1000$. $\therefore$ $m\leqslant 332$.

因此，偶数是 333 个.

（2）$a_{n+4}=a_{n+3}+a_{n+2}$. ④

由②×2+③+④，得 $a_{n+4}=3a_{n+1}+2a_n$ ⑤

所以，如果 a_n 是 3 的倍数，那么 a_{n+4} 也是 3 的倍数；如果 a_n 不是 3 的倍数，那么 a_{n+4} 也不是 3 的倍数.

由①得，a_n 是 3 的倍数的号数 n 为

$$n=4+4p(p=0,1,2,\cdots).$$

因为 $n\leqslant 1000$，所以 $4+4p\leqslant 1000$，$\therefore$ $p\leqslant 249$.

因此，3 的倍数为 250 个.

(3) 因为6的倍数为2的倍数和3的倍数，所以

$$n=3+3m=4+4p.$$

$$\therefore \quad 3(1+m)=4(1+p).$$

因而 $1+m=4k$. $\therefore$ $n=12k(k=1, 2, 3, \cdots)$. 由 $12k\leqslant 1000$,得 $k\leqslant 83$. 因此，6的倍数为83个.

例题71 m是正整数时，在曲线 $y=x^2-4x+2m+3$ 和直线 $y=2mx$ 所围部分(包含周界)含有的点(a,b)中，试求a,b都是整数的点的总数.

解法 $y=x^2-4x+(2m+3)$和$y=2mx$交点的横坐标为$x=1$和$x=2m+3$. 研究直线$x=1$, $x=2$, $\cdots$, $x=2m+3$上且在图形内的整数点即可.

解 曲线$y=x^2-4x+(2m+3)$和直线$y=2mx$交点的横坐标为$x^2-4x+(2m+3)=2mx$的实数根.

$$\therefore \quad x=1, x=2m+3.$$

因而，在图形内a,b都是整数的点(a,b)的总数为

$$\sum_{k=1}^{2m+3}[2mk-(k^2-4k+2m+3)+1]$$

$$=\sum_{k=1}^{2m+3}[-k^2+2(m+2)k-2(m+1)]$$

$$=-\frac{1}{6}(2m+3)(2m+4)(4m+7)+(m+2)(2m+3)$$

$$\times(2m+4)-2(m+1)(2m+3)$$

$$=\frac{1}{3}(2m+3)(2m^2+3m+4).$$

例题 72 关于任意两个自然数 m, n(其中，$m \geqslant 2$)，n^m 表示连续 n 个奇数的和. 试用 m 和 n 表示它的最小项.

解 从奇数 a 开始的连续 n 个奇数和为

$$\frac{n}{2}[2a+2(n-1)]=n(a+n-1).$$

如果此和与 $n^m(m \geqslant 2)$ 相等，那么 $n(a+n-1)=n^m$.

$$\therefore \quad a=n^{m-1}-n+1=n(n^{m-2}-1)+1$$
$$=n(n-1)(n^{m-3}+n^{m-4}+\cdots\cdots+1)+1.$$

因为 $n(n-1)$ 是 2 的倍数，所以 a 是奇数.

即，给定奇数 $a=n^{m-1}-n+1$，从 a 开始的 n 个奇数和为 n^m.

(答) $n^{m-1}-n+1$.

习　　题 (答案在 159 页)

—— A ——

31. 满足 $3x+5y=463$ 的 x,y 正整数值组有多少个?

32. 试回答下列问题:

(1) 试求满足 $xy=2x+3y-4$ 的整数 x,y 的值组.

(2) x,y 是正整数，且 $xy=x+3y+2$. 试求 x 和 y 的值.

33. 试回答下列问题:

(1) 试求满足 $\lg(2x-1)-\lg x+\lg y=1$ 的整数 x,y.

(2) 解 $\log_2(x+y)+\log_2(x-y)=5$. 其中 x,y 都是正整数.

(3) x,y 是正整数，具有最大公约数 3, 且满足 $3^{(10x^2-11xy+3y^2+1)}=\log_2 8$. 试求 x,y.

34. 对于曲线 $x^2-y^2=105$ 上的点 (x,y), 在坐标 x,y 都是正整数的点中，x 最小时的点是(,), x 最大时的点是(,).

35. 试求下列方程的整数解:

$$x^2-2xy-2x+2y+6=0.$$

36. 二次方程 $x^2-21x+5p=0$ 的二根是正整数时，试确定 p 的整数值.

37. A, B 两种水果各买了 900 日元，A 种比 B 种多 5 个. 如果交换 A 种和 B 种的个数，那么货款总额要多 30 日元. 问两种水果每个价格是多少?

—— B ——

38. 能表示成两个整数平方和的数的全体叫做 M. M 中的任意两个数的积仍然是 M 中的数. 例如 $(1^2+4^2)(2^2+3^2)=10^2+11^2$.

(1) 对千上述论断，试给出一般地证明.

(2) 把 $(4^2+5^2)(3^2+7^2)$ 表示成两个整数的平方和.

39. 在全体正整数集合中，设 $R[r]$ 表示除以 5 时余数是 r 的全体整数

集合，试就 5 个集合 $R[0]$，$R[1]$，$R[2]$，$R[3]$，$R[4]$，回答下列问题：

(1) 设 a,b 分别属于 $R[2]$，$R[3]$的整数，积 ab 属于上述集合哪一个？

(2) c 是不被 5 整除的整数时，试证 $c,2c,3c,4c,5c$ 分别属于上述的不同集合.

40. 试证方程 $x^5-x-1=0$ 没有有理数根.

41. 设 x,y 同时为整数.

(1) 试求满足 $y=\frac{1}{8}x^2+4$ 及 $10<x+y<100$ 的(x,y)的组数.

(2) 若满足 $y=\frac{1}{8}x^2+4$ 及$|xy|\leqslant a$ 的(x,y)的组数是 7 时，试求 a 的最小值.

练 习 答 案

1. $(a\circ b)\circ c=[ab+k(a+b)+l]\circ c$

$$=[ab+k(a+b)+l]c+k[ab+k(a+b)+l+c]+l. \quad ①$$

$a\circ(b\circ c)=a\circ[bc+k(b+c)+l]$

$$=a[bc+k(b+c)+l]+k[a+bc+k(b+c)+l]+l. \quad ②$$

从①=②得 $k^2(a-c)+k(c-a)+l(c-a)=0.$

$$\therefore \quad (a-c)(k^2-k-l)=0.$$

由于 a,c 是任意实数，可设 $a\neq c$，则 $k^2-k-l=0$.

反之，由于 $(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$ 成立，故所求条件为 $k^2-k-l=0$.

2. (1) 由于 $x\geqslant0, y\geqslant0$，则 $(x+y)^2\geqslant x^2$.

$$\therefore \quad (x+y)^2\ominus x^2=(x+y)^2-x^2=2xy+y^2.$$

又由 $2xy+y^2\geqslant y^2$，则

$$(2xy+y^2)\ominus y^2=2xy+y^2-y^2=2xy.$$

(2) $x\geqslant y\geqslant0$ 时，原式 $=x\ominus x=x-x=0$. $0\leqslant x<y$ 时，$(x\ominus y)+y$ $=3x+y+3+y=3x+2y+3$. 由于此式大于 x，所以

原式 $=3x+2y+3-x=2x+2y+3$.

3. (1) $2\circ3=3^2=9, 4\circ4=4, 2\circ(3\circ1)=3^2=9$.

(2) $x\circ(y\circ z)=x\circ y=y^2$.

$$(x\circ y)\circ z=y^2\circ z=\begin{cases}y^2 & (y^2\geqslant z\text{ 时}),\\ z^2 & (y^2<z\text{ 时}).\end{cases}$$

因为 $z<y$ 时，$z\leqslant y^2$ 未必成立，所以等式不恒成立.

(3) $$1\odot x=\begin{cases}1\cdots(-2\leqslant x\leqslant1\text{ 时}),\\ x^2\cdots(1<x\leqslant2\text{ 时}).\end{cases}$$

$$2\circ x=2 \quad (\text{因为}-2\leqslant x\leqslant2).$$

因此，$$y=\begin{cases}x-2 & (-2\leqslant x\leqslant1),\\ x^3-2 & (1<x\leqslant2).\end{cases}$$

图象省略.

4. (1) $2*(-3)=2+(-3)-3\cdot2\cdot(-3)=17.$

$[(-2)*4]*3=[(-2)+4+24]*3=26*3=-205.$

(2) $(l*m)*n=(l+m-3lm)*n$

$=(l+m-3lm)+n-3(l+m-3lm)n$

$=l+m+n-3lm-3mn-3nl+9lmn.$ ①

$l*(m*n)=l*(m+n-3mn)$

$=l+(m+n-3mn)-3l(m+n-3mn)$

$=l+m+n-3lm-3mn-3nl+9lmn.$ ②

从①②得 $(l*m)*n=l*(m*n).$

(3) 因为 $n*n>-10$, 所以 $n+n-3n^2>-10$.

$$\therefore\quad 3n^2-2n-10<0.$$

$$\therefore\quad -1.5\cdots\cdots=\frac{1-\sqrt{31}}{3}<n<\frac{1+\sqrt{31}}{3}=2\cdot1\cdots\cdots$$

由 n 是整数, 得 $n=-1,0,1,2.$

(4) 因为 $m*a=m$, 所以 $m+a-3ma=m$.

$$\therefore\quad a(1-3m)=0.$$

由于此式对于一切整数 m 成立, 所以 $a=0$.

5. (1) 设任意的两组为 $(a,b)=\alpha,\ (c,d)=\beta$.

$\alpha\otimes\beta=(a,b)\otimes(c,d)=(ac-bd,ad+bc).$

$\beta\otimes\alpha=(c,d)\otimes(a,b)=(ca-db,cb+da).$

其中, $ac-bd=ca-db,\ ad+bc=cb+da,$

$$\therefore\quad \alpha\otimes\beta=\beta\otimes\alpha.$$

(2) 从 $(a,b)\oplus(x,y)=(a,b)$, 得

$$(a+x,b+y)=(a,b).$$

$\therefore\quad a+x=a,\quad b+y=b.$

$\therefore\quad x=y=0.$

$\therefore\quad (x,y)=(0,0).$

6. (1) 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$ 时, 根据定义,

$$A\circ B\text{的 }x\text{ 坐标}=\frac{1}{3}(2x_1+x_2),$$

$$(A\circ B)\circ C\text{ 的 }x\text{ 坐标}=\frac{1}{3}\left(2\times\frac{2x_1+x_2}{3}+x_3\right)$$

$$=\frac{1}{9}(4x_1+2x_2+3x_3). \qquad ①$$

同理，$(B\circ C)\circ A$ 的 x 坐标 $=\frac{1}{9}(4x_2+2x_3+3x_1)$. ②

对于 y 坐标有相同的形式成立.

因此，$(A\circ B)\circ C$ 和 $(B\circ C)\circ A$ 重合时，由①，②得

$$4x_1+2x_2+3x_3=4x_2+2x_3+3x_1.$$

$$\therefore\quad 2x_2=x_1+x_3. \qquad ③$$

同理可得 $2y_2=y_1+y_3$. ④

根据③，④可知，B 是线段 AC 的中点.

(2) 设 $D(x_4,y_4)$ 时，则

$$(A\circ B)\circ(C\circ D)\text{的 }x\text{ 坐标}$$

$$=\frac{1}{3}\left(2\times\frac{2x_1+x_2}{3}+\frac{2x_3+x_4}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{9}(4x_1+2x_2+2x_3+x_4). \qquad ⑤$$

由(1) $(B\circ A)\circ D$ 的 x 坐标

$$=\frac{1}{9}(4x_2+2x_1+3x_4). \qquad ⑥$$

对于 y 坐标有相同的形式成立.

因此，$(A\circ B)\circ(C\circ D)$ 和 $(B\circ A)\circ D$ 重合时，由⑤，⑥得

$$4x_1+2x_2+2x_3+x_4=4x_2+2x_1+3x_4.$$

$\therefore\quad \frac{x_1+x_3}{2}=\frac{x_2+x_4}{2}$. 同理可得

$$\frac{y_1+y_3}{2}=\frac{y_2+y_4}{2}.$$

所以线段 AC 的中点与线段 BD 的中点重合.

7. $\because\quad (a-a')+(a'-a'')=a-a''$,

$\therefore\quad |a-a'|+|a'-a''|\geqslant|a-a''|$.

因此，$\sqrt{|a-a'|+|a'-a''|}\geqslant\sqrt{|a-a''|}$.

但是，$\sqrt{|a-a'|}+\sqrt{|a'-a''|}\geqslant\sqrt{|a-a'|+|a'-a''|}$，

所以 $\sqrt{|a-a'|}+\sqrt{|a'-a''|}\geqslant\sqrt{|a-a''|}$.

同理可证 $\sqrt{|b-b'|}+\sqrt{|b'-b''|}\geqslant\sqrt{|b-b''|}$.

边边相加，得

$$d(A,B)+d(B,C)\geqslant d(A,C).$$

8. (1) 设(A)中 $x=y$，则 $g(0)=[g(x)]^2+[f(x)]^2$.

(2) 设(A)中 $x=y=0$，则 $g(0)=[g(0)]^2+[f(0)]^2$.

由(B)，因为 $f(0)=0$，代入上式，得

$$[g(0)]^2=g(0) \qquad ①$$

设 $g(0)=0$，则从(1)得 $[f(x)]^2+[g(x)]^2=0$，

$$\therefore\quad f(x)=0.$$

因而，$f(1)=0$，此与(B)矛盾. $\therefore\quad g(0)\neq0$.

因此，由(1)得 $g(0)=1$. （答）

在(1)中令 $x=1$，则 $g(0)=[g(1)]^2+[f(1)]^2$.

$$\therefore\quad 1=[g(1)]^2+1,\quad\therefore\quad g(1)=0. \qquad \text{（答）}$$

在(1)中令 $x=1,y=-1$，则

$$g(2)=g(1)g(-1)+f(1)f(-1)=0-1=-1. \qquad \text{（答）}$$

(3) 由 $[f(x)]^2+[g(x)]^2=1$，得 $|f(x)|\leqslant1$，$|g(x)|\leqslant1$.

因而，$[f(x)]^n\leqslant[f(x)]^2$，$[g(x)]^n\leqslant[g(x)]^2$，

$\therefore\quad [f(x)]^n+[g(x)]^n\leqslant[f(x)]^2+[g(x)]^2=1$.

因此，当 $f(x)=0$，$g(x)=\pm1$ 或 $f(x)=\pm1$，

$g(x)=0$ 时，$[f(x)]^n+[g(x)]^n$ 的最大值为 1.

9. (1) 因为 $2\in S$，得 $\frac{1}{1-2}=-1\in S$. 因为 $-1\in S$，得

$$\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}\in S. \qquad \text{（答）}-1,\frac{1}{2}.$$

(2) 因为 $a\in S$，得 $\frac{1}{1-a}\in S$.

$$\therefore\quad \frac{1}{1-\dfrac{1}{1-a}}=1-\frac{1}{a}\in S.$$

(3) 如果S的元素是一个,假定它是a,则

$$a=\frac{1}{1-a},\quad \therefore\quad a^2-a+1=0.$$

$$\therefore\quad a=\frac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}=\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right).$$

(符号同序)

对于此a,由$a=\dfrac{1}{1-a}$,得$\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-a}}=1-\dfrac{1}{a}=a$,

满足条件.(答)$\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{3}\right)$.(符号同序)

10. (1) 奇数可以表示为$2n+1$(n是整数).

$$(2n+1)^2=4n^2+4n+1=4n(n+1)+1.$$

因为$n(n+1)$是连续两个整数积,所以是2的倍数.

因此,$(2n+1)^2=8m+1$.

所以奇数的平方除以8时余1.

(2) $n^3-n=n(n^2-1)=n(n-1)(n+1)=(n-1)n(n+1)$.

因为这是连续三个整数的积,所以是6的倍数.

(3) 设连续的三个奇数是$2n-1,2n+1,2n+3$. 则

$$\begin{aligned}N&=(2n-1)^2+(2n+1)^2+(2n+3)^2+1\\&=12n^2+12n+12=12(n^2+n+1),\end{aligned}$$

其中,$n^2+n+1=n(n+1)+1$,$n(n+1)$是偶数.

所以,n^2+n+1是奇数.

因而,N被12整除,但不能被24整除.

(4) n^3, n除以6时余数相等,与n^3-n被6整除是等价的. 因此只要证明n^3-n是6的倍数就可以了。

由(2)可知,n^3-n是6的倍数.

11. $n^3+\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{1}{2}n=\dfrac{1}{2}(2n^3+3n^2+n)$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1).$$

设 $N=n(n+1)(2n+1)$，因为 $n(n+1)$ 是两个连续整数的积，所以是 2 的倍数．故 N 是 2 的倍数．

正整数 n 可用 $n=3m, 3m+1, 3m+2$ 的形式表示．

当 $n=3m$ 时，N 被 3 整除．

当 $n=3m+1$ 时，$2n+1=3(2m+1)$，N 被 3 整除．

当 $n=3m+2$ 时，$n+1=3(m+1)$，N 被 3 整除．

因为 N 被 2 和 3 整除，所以被 2×3 整除．因而 $\frac{N}{2}$ 被 3 整除，即 $n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n$ 被 3 整除．

12. (1) 奇数可用 $2n+1$ 表示．因为 $2n+1=(n+1)^2-n^2$，所以任意奇数确实可用连续整数 $n, n+1$ 的平方差表示．

(2) 连续整数可用 $n, n+1$ 表示．

$$(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1=3n(n+1)+1,$$

其中，因为 $n(n+1)$ 是 2 的倍数，所以 $3n(n+1)$ 是偶数．

故 $3n(n+1)+1$ 是奇数．

(3) 设连续整数为 $m, m+1$．

$$\begin{cases}(m+1)^3-m^3 \text{ 为奇数．} (\because\ (2))\\ \text{奇数可用连续整数的平方差表示．} (\because\ (1))\end{cases}$$

所以，连续整数的立方差可用另外的连续整数的平方差表示．

13. 因为 $x+1$ 是 2 以上的自然数，且被 3, 4, 5, 6 整除，所以是 3, 4, 5, 6 的公倍数．

这些数中，最小的是它们的最小公倍数 60．

因此，$x+1=60$，$\therefore\ x=59$．

14. 设 n 和 n^2+2 的公约数为 d，则 $n=dq$，$n^2+2=dq'$（q，q' 是正整数）．从两式中消去 n，得 $d^2q^2+2=dq'$．

$$\therefore\ dq'-d^2q^2=2,\ \therefore\ d(q'-dq^2)=2.$$

因为 d 是正整数，所以必须有 $d=2, q'-dq^2=1$ 或 $d=1, q'-dq^2=2$．所以 n 和 n^2+2 的公约数除 1 以外只有 2．

15. 设二数 a,b 的最大公约数为 g，则 $a=a'g$，$b=b'g$，a'，b' 互素．由 $g=54$，$a'b'g=1944$，得 $a'b'=36$．

设 $a'\leqslant b'$ 互素，求得 a'，b' 为

$$a'=1, b'=36 \text{ 和 } a'=4, b'=9 \text{ 二种}.$$

因此，$A=54$，$B=1944$ 或 $A=216$，$B=486$．

(答)54 和 1944 或 216 和 486

16. 如果 m 是偶数，那么可表示为 $m=2n$（n 是自然数）的形式．

因此，$m^2=(2n)^2=2\cdot 2n^2$，所以 m^2 为偶数．

逆命题是"如果 m^2 是偶数，那么 m 也是偶数．"

如果自然数 m 是奇数，那么可表示为 $m=2n-1$（n 是自然数）的形式．由于

$$m^2=(2n-1)^2=2(2n^2-2n)+1,$$

则 m^2 为奇数．所以考虑对偶性，如果 m^2 是偶数，那么 m 也是偶数．

17. (1) 八进制的 27 化成十进制，得 $2\times 8^1+7\times 8^0=23$．十进制的 23 化成二进制时，从 $1\times 2^4+0\times 2^3+1\times 2^2+1\times 2^1+1\times 2^0$，得 10111．

(另解)因为 $8=2^3$，所以八进制的 10 化成二进制得 1000，八进制的 2，7 分别表示二进制的 10，111．因而，八进制的 27 化成二进制的为 10111．

(2) 八进制的 3 位整数 N，有

$$8^2\leqslant N<8^3, \quad \therefore \quad 2^6\leqslant N<2^9.$$

因而，N 为二进制的 7 位、8 位、或 9 位数．

(3) 与(2)同理，

$$\because \quad 8^{n-1}\leqslant N<8^n, \quad \therefore \quad 2^{3(n-1)}\leqslant N<2^{3n}.$$

因而，N 表示成二进制的为

$$(3n-2)\text{位、}(3n-1)\text{位、或 }3n\text{ 位}.$$

18. 设 n 表示成十一进制时的各位数字从左到右依次是 a,b，则

$$1\leqslant a\leqslant 10, \quad 0\leqslant b\leqslant 10.$$

因为表示成十三进制的为 ba，所以 $1\leqslant b\leqslant 12$，$0\leqslant a\leqslant 12$．

因而，$1\leqslant a\leqslant 10$，$1\leqslant b\leqslant 10$．

这些数表示成十进制的为 $n=11a+b, n=13b+a$.

$$\therefore\quad 5a=6b.\ \text{因而}\ a=6, b=5.$$

$\therefore\quad n=11\times6+5=71.$

19. 使 $N=100a+10b+c$ 是 11 的倍数的条件，由 N 可以变形为 $N=11(9a+b)+(a-b+c)$，得 $a-b+c$ 是 11 的倍数.

20. 设原数为 $100a+10b+c$(a 为从 1 到 9, b, c 为从 0 到 9 的整数). 根据题意,

$$(100a+10b+c)-(100c+10b+a)=198. \qquad ①$$

或 $$(100c+10b+a)-(100a+10b+c)=198. \qquad ②$$

从①得 $99(a-c)=198$, $\therefore\quad a-c=2.$ ①′

同理，从②得 $a-c=-2.$ ②′

另一方面，根据条件，得 $a+b+c=6.$ ③

从①′和③得 $b=8-2a.$

从条件得 $a=2, b=4, c=0$; $a=3, b=2, c=1$; $a=4, b=0, c=2$.

从②′和 3 得 $b=4-2a.$

从条件得 $a=1, b=2, c=3$; $a=2, b=0, c=4$.

所以要求的数是 240, 321, 402, 123, 204.

21. $xy-x-y=0$, $\therefore\quad (x-1)(y-1)=1$. 因为 $x-1, y-1$ 为整数，所以同为 1 或同为 -1. 因此 $x=2, y=2$; $x=0, y=0$.

22. 设 100 日元，10 日元，5 日元分别为 x 枚，y 枚，z 枚，则

$$x+y+z=40, \qquad ①$$

$$100x+10y+5z=2000. \qquad ②$$

从②得 $$20x+2y+z=400. \qquad ②'$$

从②′−①得 $19x+y=360$, $\therefore\quad 19x=360-y$.

这里，因为 $1\leqslant y\leqslant 38$，所以 $322\leqslant 19x\leqslant 359$. $\therefore\quad 16.9\cdots\leqslant x\leqslant 18.8\cdots$. 因为 x 是整数，所以 $x=17, 18$.

设 $x=17$，则 $y=37, z=-14$. 设 $x=18$，则 $y=18, z=4$

符合题意的为 100 日元 18 枚，10 日元 18 枚，5 日元 4 枚.

23. $x+2y+3z=10$, ① $2x>3y$. ② 因为 $x, y, z\geqslant 1$，从①得 $z=1, 2$.

当 $z=1$ 时，①，②分别为 $x+2y=7, 2x>3y$.

所以 $x=5, y=1$，$\therefore \quad x^2+y^2+z^2=27$.

当 $z=2$ 时，从 $x+2y=4, 2x>3y$ 得

$$x=2, y=1. \quad \therefore \quad x^2+y^2+z^2=9.$$

24. (1) 奇数可以表示为 $2n+1$(n 是整数)的形式. 在

$$2n+1=(n+1)^2-n^2$$

中，因为 $n+1, n$ 是整数，所以 $2n+1$ 是M的元素.

(2) 偶数可以表示为 $2m$(m是整数) 的形式. 设 $n=2m$ 是M的元素，则

$$n=2m=x^2-y^2=(x+y)(x-y). \quad (x, y \text{ 是整数})$$

因为$(x+y)+(x-y)=2x$ (偶数)，所以 $x+y, x-y$ 同为偶数或同为奇数. 因为$(x+y)(x-y)=2m$(偶数)，所以 $x+y$，$x-y$ 同为偶数.

因此，令 $x+y=2p, x-y=2q$(p, q 是整数)，则

$$n=(x+y)(x-y)=4pq \text{ 是 4 的倍数.}$$

反之，n 是 4 的倍数 ($n=4k$) 时，$n=4k=(k+1)^2-(k-1)^2$，

$\therefore \quad n \in M$.

习 题 答 案

1\. (i) $\langle 1,1\rangle\times\langle 1,-1\rangle=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1.$

(ii) $$\begin{aligned}\langle a,b\rangle\times\langle c,d\rangle&=(\sqrt{2}a+b)(\sqrt{2}c+d)\\&=\sqrt{2}(ad+bc)+(2ac+bd)\\&=\langle ad+bc,2ac+bd\rangle.\end{aligned}$$

(iii) $$\begin{aligned}\langle a,b\rangle\div\langle c,d\rangle&=\frac{\sqrt{2}a+b}{\sqrt{2}c+d}\\&=\sqrt{2}\cdot\frac{bc-ad}{2c^2-d^2}+\frac{2ac-bd}{2c^2-d^2}\\&=\left\langle\frac{bc-ad}{2c^2-d^2},\ \frac{2ac-bd}{2c^2-d^2}\right\rangle.\end{aligned}$$

2\. (1) 若 $0\rightarrowtail 1$,则由(c)得 $-1\rightarrowtail 0$. (设 $c=-1$)

由(d)得 $\quad 0\rightarrowtail -1$. (设 $c=-1,-1\rightarrowtail 0$)

这是相互矛盾的.

由于 0 与 1 不同,从(a)得 $1\rightarrowtail 0$,因而,从(c)得 $0\rightarrowtail -1$.

所以 $\quad 1\rightarrowtail 0\rightarrowtail -1$.

(2) 设 $i\rightarrowtail 0$,从(d)得 $-1\rightarrowtail 0$(设 $c=i\rightarrowtail 0$).

这与(1)矛盾. 因此 $0\rightarrowtail i$,从而 $-i\rightarrowtail 0$, 所以由(d)得 $-1\rightarrowtail 0$. (设 $c=-i\rightarrowtail 0$). 这也与(1)矛盾.

因为 i 与 0 不同,则 $i=0$ 也不成立. 因而,关系 $\rightarrowtail$ 不能确定.

3\. (1) $P(3,48)$是 3 的倍数且 48 的约数的正整数全体的集合.

$$\therefore\quad P(3,48)=\{3,6,12,24,48\}.$$

(2) $P(m,n)$不是空集合则与"m 的倍数等于 n 的约数"等价. 对此,所求的充要条件是"m 是 n 的约数".

(3) $P(l,m+n)\cap P(m,l+n)$的一个整数 a, 是 l 及 m 的倍数且是 $m+n$ 及 $l+n$ 的约数. 也就是说,因为 a 既是 l 的倍数,又是 $l+n$ 的约数,所以 l 是 $l+n$ 的约数. 因而 l 是 n 的约数.

$$\therefore \quad P(l,n)\neq\phi.$$

又，由题意 $P(l,m+n)\neq\phi$，而且由 l 是 n 的约数，得 l 是 m 的约数．同理，由 a 既是 m 的倍数，又是 $m+n$ 的约数，则 m 是 $m+n$ 的约数，因而 m 是 n 的约数．但由题意 $P(m,\ l+n)\neq\phi$，从而得 m 是 l 的约数．所以，l 是 m 的约数，m 是 l 的约数．$\therefore \quad l=m.$

4. 由 $f(x)=\max(0,\log x)$，得

$$\begin{cases} x\geqslant 1 \text{ 时}, f(x)=\log x, \\ 0<x\leqslant 1 \text{ 时}, f(x)=0. \end{cases}$$

(1) ＝(证明)(i) $x\geqslant 1$ 时，由 $0<\dfrac{1}{x}\leqslant 1$，得

$$f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=\log x.$$

(ii) $0<x\leqslant 1$ 时，由 $\dfrac{1}{x}\geqslant 1$，得

$$f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=0-\log\frac{1}{x}=\log x.$$

因而，恒有 $f(x)-f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\log x.$

(2) $\leqslant$(证明)(i) $x,y\geqslant 1$ 时，$xy\geqslant 1$.

$$\therefore \quad f(xy)=\log xy=\log x+\log y=f(x)+f(y).$$

(ii) $x\geqslant 1, 0<y\leqslant 1, xy\geqslant$ 时，

$$f(xy)=\log xy=\log x+\log y\leqslant\log x.$$

另一方面，$f(x)+f(y)=\log x$，$\therefore \quad f(xy)\leqslant f(x)+f(y).$

(iii) $0<x\leqslant 1, y\geqslant 1, xy\geqslant 1$ 时，

与(ii)同理，可得 $f(xy)\leqslant f(x)+f(y).$

(iv) $x\geqslant 1, 0<y\leqslant 1, 0<xy\leqslant 1$ 时，

$$f(xy)=0, f(x)+f(y)=\log x(\geqslant 0)$$

$$\therefore \quad f(xy)\leqslant f(x)+f(y).$$

(v) $0<x\leqslant 1, y\geqslant 1, 0<xy\leqslant 1$ 时，

与(iv)同理，可得 $\quad f(xy)\leqslant f(x)+f(y).$

(vi) $0<x,y\leqslant 1$ 时，$0<xy\leqslant 1$，$\therefore \quad f(xy)=0.$

另由　$f(x)+f(y)=0$，$\therefore$　$f(xy)=f(x)+f(y)$.

综上(i)～(vi)，得　$f(xy)\leqslant f(x)+f(y)$.

(3) $\leqslant$(证明)(i) $x,y\geqslant 1$ 时，$x+y>1$，$0<\dfrac{1}{x}\leqslant 1$，$0<\dfrac{1}{y}\leqslant 1$.

$$\therefore\quad f(x+y)=\log(x+y).$$

另由　$f(x)+f(y)+\log 2=\log x+\log y+\log 2=\log 2xy$.

但
$$\frac{x+y}{2xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\leqslant 1,$$

$\therefore$　$x+y\leqslant 2xy$.　$\therefore$　$\log(x+y)\leqslant\log 2xy$.

因此，$f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)+\log 2$.

(ii) $x\geqslant 1$，$0<y\leqslant 1$ 时，由 $x+y>1$，得

$$f(x+y)=\log(x+y).$$

另由　$f(x)+f(y)+\log 2=\log x+\log 2=\log 2x$.

由 $0<y\leqslant 1\leqslant x$，得 $x+y\leqslant 2x$.

$$\therefore\quad f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)+\log 2.$$

(iii) $0<x\leqslant 1$，$y\geqslant$ 时，由 $x+y>1$，

与(ii)同理，可得 $f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)+\log 2$.

(iv) $0<x,y\leqslant 1$，$1\leqslant x+y$ 时，

$$f(x+y)=\log(x+y).$$

另由
$$f(x)+f(y)+\log 2=\log 2.$$

由 $1\leqslant x+y\leqslant 2$，得 $f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)+\log 2$.

(v) $0<x,y\leqslant 1$，$0<x+y\leqslant 1$ 时，

$$f(x+y)=0,\quad f(x)+f(y)+\log 2=\log 2.$$

$$\therefore\quad f(x+y)<f(x)+f(y)+\log 2.$$

综上(i)～(v)，得 $f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)+\log 2$.

5. (1) 设一个城镇为 P，另一个城镇为 Q.（根据(a)）

又设不通过道路 PQ(根据(b))的一个城镇为 R.（根据(d)）

因为存在道路 PR(根据(b))，所以通过 P 有道路 PQ，PR.

(2) 设有一条道路 g 不通过任何一个城镇．又设一个城镇为 P，若通过 P 的一条道路为 p，则 p 与 g 不相交．（根据(e)）

根据(d)设不在p上的城镇为Q。则有道路PQ存在，PQ与g不相交(因为g不通过Q,由(e)，PQ与g不相交)．因而，通过P有两条道路p和PQ与g不相交，此与(e)矛盾．所以不存在一个城镇也不通过的道路．

(3) 对于不在同一道路上的城镇P,Q,R，若通过Q与道路PR不相交的道路q,和通过R与道路PQ不相交的道路r不相交，则与(e)相矛盾．(通过Q与r不相交的道路有PQ和q二条)所以q与r相交．由(c),还有一个城镇．因而,至少有四个城镇．

6. (1) 设M的任意元素为x,则$f(x)=x$.

因此，$$f(f(x))=f(x)=x.$$

即,对于M的任意元素x,满足$f(f(x))=x$,则x是N的元素．

$$\therefore\quad M\subset N.$$

(2) 设N的任意元素为x',则$f(f(x'))=x'$. ①

如果$f(x')\neq x'$,那么$f(x')>x'$或$f(x')<x'$.

由于$f(x)$是x的增函数，

如果$f(x')>x'$,那么$f(f(x'))>f(x')$．再由(1)得$x'>f(x')$，这与假定矛盾．

同理,设$f(x')<x'$,则也产生矛盾．从而

$$f(x')=x' \qquad ②$$

即,对于N的任意元素x'满足条件②,则x'是M的元素．

$$\therefore\quad N\subset M.$$

与(1)的结果合起来,得$M=N$.

7. (1) (a) 成立．$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\lambda x_1x_2+\mu y_1y_2$, $\langle\vec{b},\vec{a}\rangle=\lambda x_2x_1+\mu y_2y_1$，于此,因为

$$\lambda x_1x_2=\lambda x_2x_1,\quad \mu y_1y_2=\mu y_2y_1,$$

所以 $$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\langle\vec{b},\vec{a}\rangle.$$

(b) 成立．因为$k\vec{a}=(kx_1,ky_1)$,$k\vec{b}=(kx_2,ky_2)$,所以

$$\langle k\vec{a},\vec{b}\rangle=\lambda\cdot kx_1\cdot x_2+\mu\cdot ky_1\cdot y_2=\lambda kx_1x_2+\mu ky_1y_2,$$

$$\langle\vec{a},k\vec{b}\rangle=\lambda\cdot x_1\cdot kx_2+\mu\cdot y_1\cdot ky_2=\lambda kx_1x_2+\mu ky_1y_2,$$

$$k\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=k(\lambda x_1x_2+\mu y_1y_2)=\lambda kx_1x_2+\mu ky_1y_2.$$

从而，$\langle k\vec{a},\vec{b}\rangle=\vec{a}\cdot k\vec{b}=k\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$.

(c) 成立．因为 $\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$，

所以

$$\begin{aligned}\langle\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\rangle&=\lambda(x_1+x_2)x_3+\mu(y_1+y_2)y_3\\&=\lambda x_1x_3+\lambda x_2x_3+\mu y_1y_3+\mu y_2y_3\\&=(\lambda x_1x_3+\mu y_1y_3)+(\lambda x_2x_3+\mu y_2y_3).\end{aligned}$$

$$\langle\vec{a},\vec{c}\rangle+\langle\vec{b},\vec{c}\rangle=(\lambda x_1x_3+\mu y_1y_3)+(\lambda x_2x_3+\mu y_2y_3).$$

$$\therefore\quad\langle\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\rangle=\langle\vec{a},\vec{c}\rangle+\langle\vec{b},\vec{c}\rangle.$$

(2) 用右边→左边的方法证明．

$$\|k\vec{a}+(1-k)\vec{b}\|^2=\langle k\vec{a}+(1-k)\vec{b},k\vec{a}+(1-k)\vec{b}\rangle$$

$$=k^2\langle\vec{a},\vec{a}\rangle+2k(1-k)\langle\vec{a},\vec{b}\rangle+(1-k)^2\langle\vec{b},\vec{b}\rangle.\qquad①$$

$$k(1-k)\|\vec{a}-\vec{b}\|^2=k(1-k)\langle\vec{a}-\vec{b},\vec{a}-\vec{b}\rangle$$

$$=k(1-k)\langle\vec{a},\vec{a}\rangle-2k(1-k)\langle\vec{a},\vec{b}\rangle+k(1-k)\langle\vec{b},\vec{b}\rangle.\qquad②$$

由①＋②得

$$\begin{aligned}\text{右边}&=k\langle\vec{a},\vec{a}\rangle+(1-k)\langle\vec{b},\vec{b}\rangle\\&=k\|\vec{a}\|^2+(1-k)\|\vec{b}\|^2=\text{左边}.\end{aligned}$$

［注］ 对于两个向量 $\vec{a}=(x_1,y_1),\vec{b}=(x_2,y_2)$，

$$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\lambda x_1x_2+\mu y_1y_2$$

称为广义内积．从而内积的大小就是

$$\|\vec{a}\|=\sqrt{\langle\vec{a},\vec{a}\rangle}.$$

通常的情形取 $\lambda=\mu=1$.

8. 任意整数 a 除以 3 时余数为 0，1 或 2．因而，用 $M(3)$ 表示 3 的倍数时，则任意整数 a 可用 $M(3)$，$M(3)+1$，或 $M(3)+2$ 中的一个表示．

$a=3m$（m 是整数）时，$a^2=9m^2=3(3m^2)\to M(3)$.

$a=3m+1$ 时，$a^2=9m^2+6m+1=3(3m^2+2m)+1\to M(3)+1$.

$a=3m+2$ 时，$a^2=9m^2+12m+4$

$=3(3m^2+4m+1)+1\to M(3)+1$.

因而，a^2 可用 $M(3)$ 或 $M(3)+1$ 中的一个表示．因此，设两个整数为 b,c 时，假定 b^2,c^2 同时为 $M(3)+1$，则 b^2+c^2 可表示为 $M(3)$

$+2$. 所以 $a^2=b^2+c^2$ 不成立.（因为 a^2 为 $M(3)$ 或 $M(3)+1$, b^2+c^2 为 $M(3)+2$）

因而，如果 $a^2=b^2+c^2$ 成立，那么 b, c 中至少一个为 $M(3)$.

（答）依次为 $M(3)+2$, $M(3)$, $M(3)+1$, $M(3)+1$, $M(3)+2$, $M(3)$.

9. (1) $f(2)-f(1)=4-2=2$.

$$f(3)-f(2)=8-4=4.$$

(2) 根据题意 $(n-1)$ 个大圆分球面为 $f(n-1)$ 个部分，再增加一个大圆，则此大圆与上述 $(n-1)$ 个大圆分别相交于两点. 每增加一个交点，平面部分也增加一个，结果增加 $2(n-1)$ 个部分.

$$\therefore\quad f(n)-f(n-1)=2(n-1). \qquad ①$$

(3) 由(1)得

$$\begin{aligned} f(n) &= [f(n)-f(n-1)]+[f(n-1)-f(n-2)] \\ &\quad +\cdots\cdots[f(2)-f(1)]+f(1) \\ &= 2(n-1)+2(n-2)+\cdots\cdots+2\cdot 1+2 \\ &= 2[1+2+\cdots+(n-1)]+2 \\ &= n(n-1)+2 \\ &= n^2-n+2. \end{aligned}$$

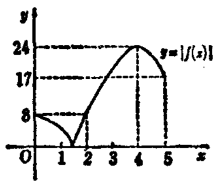
10. $f(x)=x^3-6x^2+8$, $f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$. 当 $0\leqslant x<4$ 时，$f'(x)\leqslant 0$，所以 $f(x)$ 递减.

当 $4<x\leqslant 5$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 递增.

当 $x=4$ 时，$f(x)$ 有极小值，且为最小值.

$f(0)=8$, $f(4)=-24$, $f(1)=3$,

$f(2)=-8$.



在 1, 2 之间 $f(x)=0$ 有一个根.

由上可知，$y=|f(x)|$ 的图象如右. 因而，当 $0\leqslant r\leqslant 2$ 时，$M(r)=8$；当 $2\leqslant r\leqslant 4$ 时，$M(r)=|f(r)|$，当 $4\leqslant r\leqslant 5$ 时，$M(r)=24$.

$$\therefore\quad \int_0^5 M(r)\,dr=\int_0^2 8\,dr+\int_2^4(-r^3+6r^2-8)\,dr+\int_4^5 24\,dr$$

$$=8\times 2+\left[-\frac{1}{4}r^4+2r^3-8r\right]_2^4+24\times 1=76.$$

11. (1) $f(x)=2^{x-1}-\frac{1}{2}$ 为增函数，当 $n<x<n+1$ 时，取值范围为

$$2^{n-1}-\frac{1}{2}<f(x)<2^{n}-\frac{1}{2}.$$

在这个范围内，最小的整数为 2^{n-1}，最大的整数为 $2^{n}-1$.

从而，$a_n=(2^n-1)-(2^{n-1}-1)=2^{n-1}$.

(2) $S'_n=1+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\cdots+n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

边边相减，得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}S_n&=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\\&=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}-n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]\\&\quad-n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n.\end{aligned}$$

$\therefore\quad S_n=4-\frac{2(n+2)}{2^n}=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}.$

(3) 当 $n\geqslant2$ 时，$2^n=(1+1)^n\geqslant$

$$1+n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2+n+2}{2}.$$

$$\therefore\quad 0\leqslant\frac{2(n+2)}{2^n}\leqslant\frac{4(n+2)}{n^2+n+2}=\frac{4\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}.$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2(n+2)}{2^n}=0$，$\therefore\quad\lim\limits_{n\to\infty}S_n=4.$

12. 因为 $a\equiv1$，$b\equiv1$，所以 $a-1$，$b-1$ 被 2 整除.

因此，可令 $a-1=2m$，$b-1=2n$（m，n 是整数）.

$$\therefore\quad \frac{ab-1}{2}=\frac{(2m+1)(2n+1)-1}{2}=2mn+m+n.$$

$$\frac{a-1}{2}+\frac{b-1}{2}=\frac{(2m+1)-1}{2}+\frac{(2n+1)-1}{2}$$

$$=m+n.$$

又，$\dfrac{ab-1}{2}-\left(\dfrac{a-1}{2}+\dfrac{b-1}{2}\right)=2mn$（是 2 的倍数），

因此，$\dfrac{ab-1}{2}\equiv\dfrac{a-1}{2}+\dfrac{b-1}{2}$.

13. (1) $f(x)\circ g(x)=\int_0^x f(x-t)g(t)dt$

$$=-\int_x^0 f(z)g(x-z)dz\quad（令\ x-t=z）$$

$$=\int_0^x g(x-2)f(z)dz=g(x)\circ f(x).$$

(2) $f(x)\circ g(x)=\int_0^x (x-t)\sin t\,dt=x-\sin x.$

14. (1) $f(n)=1+(1+1^3)+(1+2^3)+(1+3^3)+\cdots\cdots+(1+n^3)$

$$=(n+1)+(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)$$

$$=(n+1)+\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{(n+1)(n^3+n^2+4)}{4}$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)(n^2-n+2)}{4}.$$

(2) $\dfrac{n^2-n+2}{f(n)}=\dfrac{4}{(n+1)(n+2)}$

$$=4\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right).$$

$$\therefore\quad \sum_{n=1}^{m}\frac{n^2-n+2}{f(n)}=4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}\right),$$

$$\therefore\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-n+2}{f(n)}=\lim_{n\to\infty}4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}\right)=2.$$

15. (1) $\langle D(f(x)),g(x)\rangle=\langle f(x),-g'(x)\rangle$

$$= -\int_0^{\pi} f(x) g'(x) dx$$

$$= -[f(x)g(x)]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f'(x) g(x) dx$$

$$= -[x^2(\cos 2x - 1)]_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} x(\cos 2x - 1) dx$$

$$= 2\int_0^{\pi} x\cos 2x - 2\int_0^{\pi} x dx$$

$$= 2\left\{\left[x \cdot \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin 2x dx\right\} - [x^2]_0^{\pi}$$

$$= \left[\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi} - \pi^2 = -\pi^2.$$

(2) 如果 $f(x)$ 有连续导函数 $f'(x)$，则

$\langle f'(x), g(x)\rangle$ 由定义 $\langle D(f(x)), g(x)\rangle = \langle f(x),$

$$-g'(x)\rangle = -\int_0^{\pi} f(x) g'(x) dx$$

$$= -[f(x)g(x)]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f'(x) g(x) dx$$

$$= \int_0^{\pi} f'(x) g(x) dx = \langle f'(x), g(x)\rangle.$$

因此，原式成立.

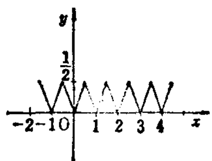
16. $-1.5 \leqslant x < -0.5$ 时，$\{x\} = -1$，

$-0.5 \leqslant x \leqslant 0.5$ 时，$\{x\} = 0$，

$0.5 \leqslant x < 1.5$ 时，$\{x\} = 1$，

$1.5 \leqslant x < 2.5$ 时，$\{x\} = 2$，

$2.5 \leqslant x < 3.5$ 时，$\{x\} = 3$.



$|x+1|$

因而，$-1.5 \leqslant x < -0.5$ 时，$y = |x+1|$，

$-0.5 \leqslant x < 0.5$ 时，$y = |x|$，

$0.5 \leqslant x < 1.5$ 时，$y = |x-1|$，

$1.5 \leqslant x < 2.5$ 时，$y = |x-2|$，

$2.5 \leqslant x < 3.5$ 时，$y = |x-3|$.

因此，图象如上图.

17. 把 $(\mathrm{sh}x)^2$，$(\mathrm{ch}x)^2$ 分别写作 $\mathrm{sh}^2 x$，$\mathrm{ch}^2 x$，

则　$\operatorname{sh}^2 x=\dfrac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{4}$；$\operatorname{ch}^2 x=\dfrac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4}$.

$\therefore$　$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1$.　　(答)

其次，$\operatorname{ch}(x+y)=\dfrac{e^{x+y}+e^{-(x+y)}}{2}$.

但$(e^x+e^{-x})(e^y+e^{-y})=e^{x+y}+e^{-(x+y)}+e^{y-x}+e^{x-y}$,

$(e^x-e^{-x})(e^y-e^{-y})=e^{x+y}+e^{-(x+y)}-e^{y-x}-e^{x-y}$.

$\therefore$　$(e^x+e^{-x})(e^y+e^{-y})+(e^x-e^{-x})(e^y-e^{-y})$

$=2(e^{x+y}+e^{-(x+y)})$.

$\therefore$　$2\operatorname{ch}x\cdot 2\operatorname{ch}y+2\operatorname{sh}x\cdot 2\operatorname{sh}y=2\cdot 2\operatorname{ch}(x+y)$.

$\therefore$　$\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y$　　(答)

18. (1) $m^3n-mn^3=(m^3n-mn)-(mn^3-mn)$

$=mn(m^2-1)-mn(n^2-1)$

$=n\cdot(m-1)m(m+1)-m\cdot(n-1)n(n+1)$.

$(m-1)m(m+1)$，$(n-1)n(n+1)$是 6 的倍数.

所以　m^3n-mn^3 是 6 的倍数.

(2) 如果n 是奇数，可令 $n=2m+1$，则

$n^3-n=(n-1)n(n+1)$

$=2m(2m+1)(2m+2)$

$=4m(m+1)(2m+1)$.

因为 $m(m+1)$是 2 的倍数，令其为 $2k$，则

$n^3-n=8k(2m+1)=(8$ 的倍数$)$.

又　$n^3-n=(n-1)n(n+1)$是 6 的倍数.

所以能被 8 和 6 的最小公倍数 24 整除.

(3) 如果n 是奇数，由(2)知 $n^3-n=n(n^2-1)$是 24 的倍数.

但是，因为n 是奇数，所以 n^2-1 是 8 的倍数.

又，因为n 不被 3 整除，所以

$n=3m\pm1$ 时，$n^2-1=9m^2\pm6m$

$=3(3m^2\pm2m)$.

故 n^2-1 能被 3 整除.

因此，n^2-1 能被 $8\times3=24$ 整除.

(4) 设 n 是整数，连续三个整数可表示为 $n-1, n, n+1$.

$$(n-1)^3+n^3+(n+1)^3=3n^3+6n=3n(n^2+2).$$

因而，只要证明 $n(n^2+2)$ 是 3 的倍数即可. n 可用 $3m$，$3m+1$，$3m-1$（m 是整数）中之一表示.

当 $n=3m$ 时，$n(n^2+n)=3m(9m^2+2)=$(3 的倍数).

当 $n=3m\pm1$ 时，$n(n^2+2)=3(3m\pm1)\ (3m^2\pm2m+1)=$(3 的倍数).

因此，$n(n^2+2)$ 是 3 的倍数.

故命题得证.

19. (1) 设所求的数为 N，则 $N-11$ 能被 15 及 27 整除. 因而能被 15 和 27 的最小公倍数 135 整除.

因此 $N-11=135n$，$\therefore N=135n+11$（n 是整数）.

要使 N 是偶数，需要 n 是奇数. 由 $100\leqslant N\leqslant300$，得

$$n=1,\quad \therefore N=146.$$

(2) 设 $87=ma+q, 38=mb+q, 122=mc+q$（$a, b, c$ 是整数）.

因而　$49=m(a-b), 35=m(c-a)$.

所以 m 是 49 和 35 的公约数，由 $m\neq1$，得 $m=7$，$\therefore q=3$.

20. 设 $p=3m+r, q=3n+r'$（m, n 是整数，r, r' 是 0 或 1 或 2）.

$$\begin{aligned}\therefore\quad N=pq&=(3m+r)(3n+r')\\&=3(3mn+mr'+nr)+rr'.\end{aligned}$$

因而，根据题意 $rr'=2$. $\therefore r=1, r'=2$ 或 $r=2, r'=1$.

这时，$p+q=3(m+n)+r+r'=3(m+n+1)$.

因此 $p+q$ 能被 3 整除.

21. 设 a 和 b 互素，且 $a+b$ 和 ab 不互素.

因为 $a+b$ 和 ab 不互素，所以有非 1 的公约数 d. 设 d 的一个素因数为 p，(因为 ab 被 d 整除)则 p 或为 a 的约数，或为 b 的约数.(因为仅是一个的约数)所以 $a+b$ 不被 p 整除.

但，因为 $a+b$ 被 d 整除，所以也被 p 整除. 这不合理. 从而 $a+b$ 和 ab 互素.

22. 设 $ax+by$ 取最小正整数 d 时，x,y 的值分别为 x_0,y_0. 即 $ax_0+by_0=d$.

x,y 为任意整数时，令 $ax+by=k$.

若 k 除以 d 时的商为 m，余数为 r，则

$$k=md+r\,(0\leqslant r<d).$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad r&=k-md=ax+by-m(ax_0+by_0)\\&=a(x-mx_0)+b(y-my_0).\end{aligned}$$

这就证明了 r 可用 $ax+by$ 的形式表示.

但 d 为 $ax+by$ 形的最小正整数，由 $0\leqslant r<d$，得 $r=0$. 因此 $k=md$.

所以，用 $ax+by$ 表示的整数 k，是 d 的倍数.

(2) 设 $ax_0+by_0=d$. 设 a 除以 d 时商为 m，余数为 r，则 $a=md+r\,(0\leqslant r<d)$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad r&=a-md=a-m(ax_0+by_0)\\&=a(1-mx_0)+b(-my_0).\end{aligned}$$

这就证明了 r 可用 $ax+by$ 的形式表示.

但 d 为 $ax+by$ 形式的最小正整数，由

$0\leqslant r<d$，得 $r=0$. $\therefore a=md$.

所以 a 被 d 整除

同理可证，b 也被 d 整除.

所以 d 是 a 和 b 的公约数. ①

(注) 以上的证明若利用(1)的结果，可如下证明：

在 $ax+by$ 中，令 $x=1,y=0;x=0,y=1$，得

$$a\cdot 1+b\cdot 0=a,\ a\cdot 0+b\cdot 1=b.$$

由(1)得，a,b 同时为 d 的倍数.

在 $ax+by=d$ 中，d 是 a,b 的公约数.

另一方面，设 a,b 的任意公约数为 g，则 $ax+by=d$ 为

$$g(a'x+b'y)=d.$$

所以 d 被 g 整除. ②

由①，②知，d 是 a,b 的最大公约数.

23. 设 $k^2<n<(k+2)^2$. ①

(i) $k=1$ 时，①为 $1<n<9$，被 $k(k+1)=2$ 整除的整数 n 有 2,4,6,8 四个.

(ii) $k\geqslant 2$ 时，满足①的 n 为 $\{k^2+1, k^2+2, \cdots\cdots(k+2)^2-1\}$. ②

其中被 $k(k+1)=k^2+k$ 整除的最小数是 k^2+k 本身. 要使①含有 $2k(k+1)$，需要 $2k(k+1)\leqslant(k+2)^2-1$.

$\therefore\ (k+1)(k-3)\leqslant 0$. 因而 $k\leqslant 3$，即 $k=2$，3 时，②中能被 $k(k+1)$ 整除的数有二个.

其次，因为 $3k(k+1)-[(k+2)^2-1]=(2k-3)(k+1)>0$，所以②中不包含 $3k(k+1)$.

所以，$k=1$ 时，四个，$k=2,3$ 时，二个，$k\geqslant 4$ 时，一个.

24. 设 $a-b=me, c-d=ne$（m,n 是整数）. 则

$$ac-bd=a(c-d)+d(a-b)=(an+dm)e.$$

所以，如果 $an+dm$ 是整数，那么 $ac-bd$ 是 e 的倍数. 因为 $an+dm$ 不一定是整数，所以问题的论断不正确.

（例） 设 $a=\frac{9}{2}, b=\frac{1}{2}, c=\frac{7}{3}, d=-\frac{11}{3}, e=2$.

25. 设 n 不是素数.

因为 n 可表示为 $n=ab$（a,b 是非 1 的正整数），所以

$2^n-1=(2^a)^b-1=(2^a-1)[(2^a)^{b-1}+(2^a)^{b-2}+\cdots+2^a+1]$.

因为 a 是大于 1 的正整数，所以 2^a-1 是大于 1 的正整数. 又，因为 $b-1$ 是正整数，所以[ ]中的数也是大于 1 的正整数. 此与 2^n-1 是素数相矛盾.

26. $N=2\times 3^5+1\times 3^4+0\times 3^3+1\times 3^2+1\times 3+0=579$.

27. (1) $97=3^4+16=3^4+3^2+7=3^4+3^2+2\cdot 3+1$.

因此，$97=1+3\cdot 2+3^2\cdot 1+3^3\cdot 0+3^4\cdot 1$.

(2) $97=1+(3-1)\cdot 3+3^2+3^4=1-3+2\cdot 3^2+3^4$

$\quad=1-3+(3-1)3^2+3^4=1-3-3^2+3^3+3^4$,

即 $97=1+3\cdot(-1)+3^2\cdot(-1)+3^3+3^4$.

$\therefore \quad q=4, s_0=1, s_1= \quad 1, s_2=-1, s_3=1, s_4=1.$

(3) 使用 $81g$ 的砝码时，因为不在盛放这个砝码的盘上盛放测物，所以可测重量为

$$81+3^3s_3+3^2s_2+3s_1+s_0$$

(s_0, s_1, s_2, s_3 中任何一个都是 1 或 0 或 -1). 并且，这样表示 97 只有一种方法. 因而能测出的重量有 3^4 种.

同理，不使用 $81g$ 的砝码而使用 $27g$ 的砝码时，所能测出的重量有3^3 种.

同理可求其他各情况. 所能测得的重量点共有

$$3^4+3^3+3^2+3+1=121(\text{种}).$$

28. 由 $p^k-p^{k-1}=4$，得

$$p^{k-1}(p-1)=4. \qquad ①$$

因为 p, k 是正整数，所以 $k-1\geqslant 0, p-1\geqslant 0, k-1, p-1, p^{k-1}$ 也是整数.

因而，由①得 $p-1$ 是 4 的倍数.

所以 $p-1=1$ 或 $p-1=2$ 或 $p-1=4$.

$p-1=1$ 时，即 $p=2$ 时，

①为 $2^{k-1}=4$，得 $k=3$.

$p-1=2$ 时，即 $p=3$ 时，

①为 $3^{k-3}=2$，此式不成立.

$p-1=4$ 时，即 $p=5$ 时，

①为 $5^{k-1}=1$，得 $k=1$.

因而，求得 p, k 的值为

$$p=2, k=3 \text{ 或 } p=5, k=1.$$

29. $N=5x+y+\left(\frac{z}{5}+\frac{z}{5^2}+\frac{z}{5^3}+\cdots\right)$

$$=5x+y+\frac{z}{4}.$$

同理，$N-1=7z+y+\frac{x}{6}$.

$\because \quad 5x+y+\frac{z}{4}=7z+y+\frac{x}{6}+1,$ ①

其中 x,y,z 是满足 $1\leqslant x\leqslant 4, 0\leqslant y\leqslant 4,$

$$1\leqslant z\leqslant 4 \qquad ②$$

的整数.

由(1)$58x=81z+12$,所以 z 为偶数. 由(2)$z=2$ 或 4.

$z=2$ 时,$x=3$; $z=4$ 时,$x=5\frac{33}{29}$(不合题意).

从而,$x=3, y=0,1,2,3,4, z=2$.

30. 因为这个三位数为 $100a+10b+c$,把数字的顺序倒过来为 $100c+10b+a$, $a>c$,所以它们的差为

$$100a+10b+c-(100c+10b+a)=99(a-c).$$

(1) 因为差为 $99(a-c)=9\cdot 11\cdot(a-c)$,所以确是 9 及 11 的倍数.

(2) $$\begin{aligned}99(a-c)&=(100-1)(a-c)=100(a-c)-(a-c)\\&=100(a-c-1)+100-(a-c)\\&=100(a-c-1)+9\cdot 10+(10-a+c).\end{aligned}$$

因为 $a\leqslant 9, a-c\leqslant 8, c>0$,所以

$$1\leqslant a-c-1\leqslant 7, 2\leqslant 10-a+c\leqslant 8.$$

所以,差的十位数是 9,百位数是 $a-c-1$,个位数是 $10-a+c$.

(3) 差的百位和个位数字之和是

$$(a-c-1)+(10-a+c)=9.$$

31. $y=\frac{1}{5}(463-3x)$, $463-3x$ 为 5 的倍数的条件是整数 $3x$ 的个位数为 3 或 8, 因而 x 的个位数是 1 或 6. 由 $463-3x>0$, 得 $0<x<154.3\cdots\cdots$ 所以,满足这个不等式、个位数是 1,6 的整数 x 的个数为 31 个,这时,由于 y 也是整数,故所求的整数组为 31 组.

32. (1) $xy-2x-3y+4=0$, $\therefore (x-3)(y-2)=2$. 因为 $x-3$, $x-2$ 是整数,故所求的数组(x,y)为$(4,4)$, $(5,3)$, $(2,0)$, $(1,1)$.

(2) $xy-x-3y-2=0$, $\therefore (x-3)(y-1)=5$. 所以求数组(x, y)为$(4,6)$, $(8,2)$.

33. (1) 真数为正,从 x,y 是整数,得 $x\geqslant 1, y\geqslant 1$.

如果去掉 lg，则得 $10x=y(2x-1)$，$2x-1$ 和 x 除 $x=1$ 外没有共同因数．（请读者验证）

又由 $2x-1\geqslant x$，$\therefore y\leqslant 10$．

因此，$x=1, y=10$；$x=3, y=6$．

(2) $x+y>0, x-y>0$ 且 $x>0, y>0$．

去掉 log，得 $(x+y)(x-y)=32$，其中，由 $x+y>x-y>0$，得

$\begin{cases}x+y=32,\\x-y=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=16,\\x-y=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=8,\\x-y=4.\end{cases}$

由 x, y 仅取整数，则得 $x=9, y=7$；$x=6, y=2$．

(3) 从已知条件，得 $10x^2-11xy+3y^2=0$，

$$\therefore\quad (2x-y)(5x-3y)=0. \qquad ①$$

因为 x, y 有最大公约数 3，所以可表示为

$x=3x', y=3y'$ (x', y' 互素)．因此，由①得 $(2x'-y')(5x'-3y')=0$．

$$\therefore\quad y'=2x' \text{ 或 } y'=\frac{5}{3}x'.$$

(a) $y'=2x'$ 时，$x'=1, y'=2$．$\therefore x=3, y=6$．

(b) $y'=\frac{5}{3}x'$ 时，$x'=3, y'=5$．$\therefore x=9$，$y=15$．

34. $(x+y)(x-y)=3\cdot5\cdot7$，因为 $x+y$ 是正整数，所以 $x-y$ 也是正整数．又由 $x+y>x-y$，得

$$\begin{cases}x+y=105, 35, 21, 15,\\x-y=1, 3, 5, 7.\end{cases}$$

$$\therefore\quad \begin{cases}x=53, 19, 13, 11,\\y=52, 16, 8, 4.\end{cases}$$

所以，x 最小时的点为 $(11, 4)$，最大时的点为 $(53, 52)$．

35. $x^2-2(y+1)x+(2y+6)=0$，因为 x 必须为有理数，所以 $D=m^2$（m 是整数，$m\geqslant 0$）．

$$\therefore\quad y^2-5=m^2,\quad \therefore (y+m)(y-m)=5.$$

$y+m, y-m$ 为整数，并且 $y+m>y-m$，

$$\therefore \begin{cases} y+m=5,\ -1, \\ y-m=1,\ -5. \end{cases} \quad y,m \text{ 取整数为}$$

$$\begin{cases} y=3,\ -3, \\ m=2,\ 2. \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} y=3, m=2 \text{ 时}, x=2, 6. \\ y=-3, m=2 \text{ 时}, x=0, -4. \end{array}\right\}$$

所以，$(x,y)=(2,3),(6,3),(0,-3),(-4,-3)$.

36. 设二根为 α,β，则 $\alpha\beta=5p$. 由 α,β 为正，得 $p>0$. 又必须有 $D\geqslant 0$，得 $D=441-20p\geqslant 0$，$\therefore p\leqslant 22.05$. 由 $\alpha\beta=5p$，得 α,β 中的一个是 5 的倍数（设是 α），这时 β 为 p 的约数. $\therefore \beta\leqslant p$.

在 $\alpha+\beta=21$ 中，因为 α 是 5 的倍数，所以 β 除以 5 时余 1.

在 $\beta\leqslant p\leqslant 22$ 的范围内，满足这个条件的为 $\beta=1,6,11,16,21$. 这时 α 为 $\alpha=20,15,10,5,0$. 因为 $\alpha>0$，所以 $\alpha=0$ 不适合. 这时，$p=4,18,22,16$.

37. 设 A,B 的水果每一个的单价分别为 x 日元，y 日元，包装好的水果中 B 种的个数为 z，则 A 种为 $(z+5)$ 个. 那么

$$x(z+5)=900, \cdots\cdots ① \quad yz=900. \qquad ②$$

又 $xz+y(z+5)=x(z+5)+yz+30$,

$$\therefore \quad y=x+6. \qquad ③$$

由②，③得 $\quad z(x+6)=900. \qquad ④$

由①，④得 $\quad 5x=6z. \ \therefore \ x=\dfrac{6}{5}z. \qquad ⑤$

把⑤代入①，得 $\dfrac{6z}{5}(z+5)=900$.

$\therefore \ z^2+5z-750=0$，$\therefore \ (z-25)(z+30)=0$.

满足此式 z 的正值是 25. 所以，由⑤，③得 $x=30$，$y=36$. 这些值符合题意.

38. (1) 设 M 的二数为 a^2+b^2, c^2+d^2（a,b,c,d 是整数），则

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2.$$

$ac+bd, ad-bc$ 是整数，因此积 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ 也是 M 的数.

(2) 由(1)得 $\quad (4^2+5^2)(3^2+7^2)=(12+35)^2+(28-15)^2$

$=47^2+13^2.$

又 $(4^2+5^2)(7^2+3^2)=(28+15)^2+(12-35)^2$

$=43^2+23^2.$

39. (1) 设 $a\in R[2], b\in R[3]$，则

$a=5m+2(m=0,1,2,\cdots\cdots)$，

$b=5n+3(n=0,1,2,\cdots\cdots)$.

$\therefore\quad ab=5(5mn+3m+2n+1)+1$，

$\therefore\quad ab\in R[1]$.

(2) (i) 设 $c\in R[1]$，则 $c=5p+1(p=0,1,2,\cdots\cdots)$.

$\therefore\quad 2c=10p+2=5(2p)+2, \therefore 2c\in R[2]$.

同理可得 $3c\in R[3], 4c\in R[4], 5c\in R[0]$.

(ii) 设 $c\in R[2]$，则 $c=5p+2(p=0,1,2,\cdots\cdots)$.

$\therefore\quad 2c=10p+4=5(2p)+4, \therefore 2c\in R[4]$.

$3c=15p+6=5(3p+1)+1, \therefore\quad 3c\in R[1]$

$4c=5(4p+1)+3\in R[3], 5c=5(5p+2)$

$\in R[0]$.

(iii) 设 $c\in R[3]$，则 $c=5p+3(p=0,1,2,\cdots)$.

$\therefore\quad 2c=5(2p+1)+1\in R[1],\ 3c=5(3p+1)+4\in R[4],\ 4c=5(4p+2)+2\in R[2], 5c\in R[0]$.

(iv) 设 $c\in R[4]$，则 $c=5p+4(p=0,1,2,\cdots)$.

$\therefore\quad 2c=5(2p+1)+3\in R[3],\ 3c=5(3p+2)+2\in R[2],\ 4c=5(4p+3)+1\in R[1], 5c\in R[0]$.

无论哪种情况，$c, 2c, 3c, 4c$，$5c$ 都属于不同的 $R[r]$ $(r=0,1,2,3,4)$.

40. $x^5-x-1=0.$ ①

因为 $x\leqslant 0$ 时左边为负，所以如果有有理数根，则为正根. 如果①有有理数根 $\frac{n}{m}$ (m, n 为互素的正整数)，那么

$$\left(\frac{n}{m}\right)^5=\frac{n}{m}+1, \quad \therefore\quad n^5=m^4(n+m).$$

此式的右边为m的倍数，左边不能被m整除．所以①没有有理数根．

41．(1) 把y代入，得 $10<\frac{1}{8}x^2+x+4<100$.

$$\therefore\ \begin{cases}x^2+8x-48>0,\\ x^2+8x-768<0.\end{cases}\qquad \therefore\ \begin{cases}(x+12)(x-4)>0,\\ (x+32)(x-24)<0.\end{cases}$$

解得　$-32<x<-12,\ 4<x<24.$　①

因为y必须是整数，所以可在满足①的x整数值中，求x^2能被8整除的个数．

所以，$x=-28,\ -24,\ -20,\ -16,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20.$

（答） 8个

(2) $f(x)=xy=\frac{1}{8}x^3+4x.$　②

由②为关于x的单调增加的奇函数，则当$x>0$时满足不等式的数组(x,y)如果有3个时，包含$(0,0)$，全体由7个(x,y)的数组构成．由y为整数，则在$x=4,8,12$三种中，$f(12)=264$．因而a的最小值是264．