Linear Algebra Done Right 笔记

timetraveler314

PigeonCrowd

更新：2022 年 1 月 2 日

1 向量空间

2 有限维向量空间

2.1 张成空间与线性无关

定理 2.1 （习题 11）设 $v_1, \cdots, v_m$ 在 V 中线性无关，且 $w \in V$.

$$\text{则有 } v_1, \cdots, v_m \text{ 线性无关} \iff w \notin \operatorname{span}(v_1, \cdots, v_m)\,.$$

定理 2.2 ⋆（习题 14）V 是无限维的当且仅当 V 中存在一个向量序列 $v_1, v_2, \cdots$ 使得当 m 是任意正整数时 $v_1, \cdots, v_m$ 都是线性无关的.

注 本定理是证明向量空间无限维的常用方法.

题 2.1 证明区间 $[0,1]$ 上的所有实值连续函数构成的实向量空间是无限维的.

证明. 构造

$$f_n(x)=\begin{cases} x-1/n, & x\geqslant 1/n, \\ 0, & 0<x<1/n. \end{cases}$$

显然 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续. 下证 $\forall n, f_{n+1}\notin \operatorname{span}(f_1,\cdots,f_n)$.

假设 $f_{n+1}=a_1f_1+\cdots+a_nf_n$ ，诸 $a_j\in\mathbb{F}$. 注意我们有 $f_{n+1}(1/n)=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\neq 0$. 但是 $f_1(1/n)=\cdots=f_n(1/n)=0$. 由此，只有 $a_1=\cdots=a_n=0$.

此时 $f_{n+1}=0$ ，产生矛盾. 故 $f_{n+1}\notin\operatorname{span}(f_1,\cdots,f_n)$. 至此，我们证明了向量序列 $f_1, f_2, \cdots$ 当 m 为任意正整数时 $f_1,\cdots,f_m$ 线性无关.

由定理2.2，这个向量空间是无限维的. □

题 2.2 设 $p_0,\cdots,p_m\in\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ 使得对于每个 j 都有 $p_j(2)=0$. 证明 $p_0,\cdots,p_m$ 在 $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ 中不是线性无关的.

证明. 假设 $p_0, \cdots, p_m$ 线性无关. 根据线性无关组的长度 $\leqslant$ 张成组的长度，且 $1, z, z^2, \cdots, z^m$ 张成 $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$，有 $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ 线性无关组长度 $\leqslant m+1$.

我们构造组 $z, p_0, p_1, \cdots, p_m$ （长度为 $m+2$），容易看出其是线性相关的.

由前面的问题 11，我们知道这意味着 $\exists a_j$ （不全为 0）$\in \mathbb{F}$ 使得 $z = a_0 p_0 + \cdots + a_m p_m$. 上式中由于 $p_j(2) = 0$ ，可以得到 $2 = 0$ ，矛盾. 故 $z \notin \operatorname{span}(p_0, p_1, \cdots, p_m)$.

再次根据问题 11 可知组 $z, p_0, p_1, \cdots, p_m$ 线性无关，矛盾. 假设不成立. □

2.2 基

定理 2.3 线性无关组可扩充为基

在有限维向量空间中，每个线性无关的向量组都可以扩充为向量空间的基.

题 2.3 证明或给出反例：若 v_1, v_2, v_3, v_4 是 V 的基，且 U 是 V 的子空间使得 $v_1, v_2 \in U$，$v_3, v_4 \notin U$，则 v_1, v_2 是 U 的基.

解 命题是错误的. 给出反例：

取 $V = \mathbb{R}^4$，一组基为 $(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,1), (0,0,0,1)$.

令 $U = \{(x, y, z, 0) \in \mathbb{R}^4 : x, y, z \in \mathbb{R}\}$，有 U 是 V 的子空间且 $v_1, v_2 \in U$，$v_3, v_4 \notin U$. 然而，v_1, v_2 不是 U 的基. 在这里，不难看出 $v_1, v_2, v_3 - v_4$ 是 U 的一组基.

评论 这道问题的核心在于即使有 $v_3, v_4 \notin U$ ，我们仍然不能保证它们的任何一种线性组合都不在 U 中，这导致单独 v_1, v_2 不足以张成 U. 我们可以修改条件让结论成立. 例如，让 $\operatorname{span}(v_3, v_4) \cap U = \{0\}$ 就能保证结论成立.

题 2.4 设 U 和 W 是 V 的子空间使得 $U = V \oplus W$，并设 $u_1, \cdots, u_m$ 是 U 的基，且 $w_1, \cdots, w_n$ 是 W 的基. 证明：$u_1, \cdots, u_m, w_1, \cdots, w_n$ 是 V 的基.

证明. 记题设组为 B .

先来证明 B 在 V 中线性无关. 假设 $\exists a_j, b_k \in \mathbb{F}$ 使得

$$a_1u_1 + \cdots + a_mu_m + b_1w_1 + \cdots + b_nw_n = 0,$$

则

$$a_1u_1 + \cdots + a_mu_m = -(b_1w_1 + \cdots + b_nw_n) \in U \cup W = \{0\}.$$

（由 $V = U \oplus W$）

因此 $a_1u_1 + \cdots + a_mu_m = b_1w_1 + \cdots + b_nw_n = 0$. 又 $u_1, \cdots, u_m$ 是 U 的基，且 $w_1, \cdots, w_n$ 是 W 的基，必然有诸 $a_j, b_k = 0$. 也即 B 线性无关.

再证明 B 张成 V . 假设 $v \in V$ ，根据 $V = U \oplus W$，$v = u + w$，其中 $u \in U, w \in W$. 因此每个 v 都能写成 u 和 w 基底的线性组合，故 $V = \operatorname{span} B$.

综合两方面，得证. $\square$

2.3 维数

定理 2.4 和空间的维数

如果 U_1, U_2 是有限维向量空间 V 的子空间，则

$$\dim(U_1+U_2)=\dim U_1+\dim U_2-\dim(U_1\cap U_2).$$

特别地，如果 U_1+U_2 是直和，$\dim(U_1+U_2)=\dim U_1+\dim U_2$.

评论 这一式子与两个集合的容斥原理相近，但三个集合的容斥原理并不能同样平移，反例：$V=\mathbb{R}^2, U_1=\{(x,0):x\in\mathbb{R}\}, U_1=\{(0,y):y\in\mathbb{R}\}, U_1=\{(x,x):x\in\mathbb{R}\}$.

猜测这个结果可能因为子空间的封闭性. 这导致两个子空间并没有和集合类似的“和运算”，由此可能“覆盖一些维度”.

题 2.5 设 $v_1,\cdots,v_m$ 在 V 中线性无关，并设 $w\in V$. 证明：

$$\dim\operatorname{span}(v_1+w,\cdots,v_m+w)\geqslant m-1.$$

证明. 注意 $v_j-v_1=(v_j+w)-(v_1+w)(2\leqslant j\leqslant m)\in\operatorname{span}(v_1+w,\cdots,v_m+w)$.

容易证明，各 v_j-v_1 线性无关，这样得到了一个长度为 $m-1$ 的线性无关组. 由线性无关组可以扩充为基，即证. □

3 线性映射

3.1 向量空间的线性映射

定义 3.1 Linear Map, 线性映射

从 V 到 W 的线性映射是具有下列性质的函数 $T: V \to W$：

1. **Additivity, 加性**

   对于所有 $u, v \in V$ 都有 $T(u+v) = T(u) + T(v)$.

2. **Homogeneity, 齐性**

   对于所有 $\lambda \in \mathbb{F}, v \in V$ 都有 $T(\lambda v) = \lambda T(v)$.

评论 加性和齐性不互相蕴含. 下为两例

齐性：$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^2$ 有 $\varphi(av) = a\varphi(v)$.

我们求这样的 φ. 考虑模长函数，因为 $|av| = |a|\,|v|$. 但是这并不完全是齐性，需要想办法消去标量前的绝对值.

不妨考虑 $p = 3$ 时的范数 $\varphi((x, y)) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ 显然符合条件.

加性：为简化问题，我们选择域 $\mathbb{C}$ 或者 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ 等等.

给出 $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\varphi(a+b\mathrm{i})=a$. 可以验证不一定有齐性.

注 不排除实某些域（如 $\mathbb{Q}$）中加性蕴含齐性.

定理 3.1 线性映射把 0 映射为 0

设 T 是线性映射，则 $T(0)=0$.

定理 3.2 （线性映射的扩张）有限维向量空间 V 的子空间 U 上的线性映射可以扩张成 V 上的线性映射.

即：$\forall S\in\mathcal{L}(U,W),\exists T\in\mathcal{L}(V,W)\ s.t.\ \forall u\in U,Tu=Su.$

证明. 令 $u_1,\cdots,u_m$ 为 U 一组基. 由线性无关组可扩张为基，这可以扩张为 V 的基:

$$u_1,\cdots,u_m,v_{m+1},\cdots,v_n.$$

定义如下的 $T\in\mathcal{L}(V,W)$:

$$Tu_i=Su_i,Tv_j=0,1\leqslant i\leqslant m,m+1\leqslant j\leqslant n.$$

又线性映射完全由其在基上的取值确定，这样的 T 唯一存在. 容易验证其符合条件. □

题 3.1 设 $T \in \mathcal{L}(V,W)$，且 $v_1, \cdots, v_m$ 是 v 中向量组，使得 $Tv_1, \cdots, Tv_m$ 在 W 中线性无关.

证明：$v_1, \cdots, v_m$ 线性无关.

证明. 假设 $\exists a_1, \cdots, a_m \in \mathbb{F}$ 使

$$0 = a_1v_1 + \cdots + a_mv_m.$$

施以线性映射 T:

$$0 = T(0) = T(a_1v_1 + \cdots + a_mv_m) = a_1Tv_1 + \cdots + a_mTv_m$$

这说明 $a_1, \cdots, a_m = 0$. □

注 注意本题对于线性映射保持 0 不变的应用.

题 3.2 设 V 是有限维的，$\dim V > 0$. 设 W 是无限维的，证明：$\mathcal{L}(V,W)$ 无限维.

证明. 我们利用定理2.2来证明.

易知存在向量序列 $w_1, w_2, \cdots \in W, \forall m, w_1, \cdots, w_m$ 线性无关.

构造 $T_i \in \mathcal{L}(V,W), T(v_1) = w_i$ （$v_1, \cdots, v_m$ 是 V 的基）. 由3.2，每个 T 都存在（不一定唯一）. 容易证明诸 T_i 线性无关.

再次应用2.2，$\mathcal{L}(V,W)$ 无限维. □