Differentiable Dynamic Programming for Time Series Alignment

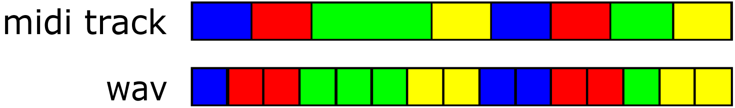
Тимур Гарипов, 517 группа
Татьяна Шолохова, 517 группа
Павел Коваленко, 517 группа
Саня Щербаков, 522 группа

9 июня 2018

Постановка задачи

Рассматривается задача выравнивания временных рядов.

Дана нотная запись музыкальной композиции и аудиозапись этой композиции. Требуется каждому моменту времени в аудиозаписи сопоставить ноту, играемую в этот момент.



Описание датасета

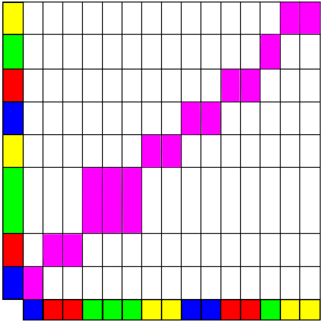
В работе был использован датасет Bach 10, состоящий из 10 аудиозаписей фрагментов хоралов Баха, продолжительность фрагментов — от 25 до 40 секунд.

Каждая запись состоит из четырех дорожек, соответствующих четырем инструментам — скрипка, кларнет, саксофон и фагот. Есть как записи отдельных дорожек, так и сводная запись всех инструментов.

Для каждой дорожки дана ее идеальная нотная запись, однако фактическая игра от нее немного отклоняется. Также для всех дорожек дано правильное выравнивание аудио– и нотной записи. Для инструментов в выборке представлено от 15 до 25 различных нот.

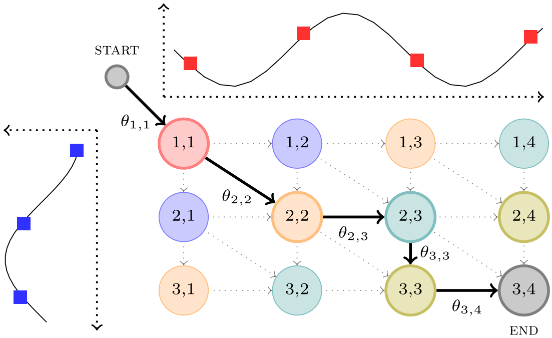
Выравнивание

Для аудиозаписи выделим с равными интервалами ключевые точки, для которых будем искать выравнивание.
Выравнивание можно представить в виде бинарной матрицы Y размера количество нот $\times$ количество фрагментов в разбиении.
Единица в позиции (i, j) означает, что в j–й момент времени проигрывалась i–я нота.



Выравнивание

Предположим, что последовательность нот при игре не изменилась и ни одна из нот не была пропущена. Тогда выравнивание можно представить в виде пути в матрице Y из левой верхней клетки правую-нижнюю, при этом разрешены перемещения только вправо, вниз и вправо-вниз. Пример выравнивания — на рисунке ниже.



Можно потребовать, чтобы в каждый момент времени играла только одна нота, то есть для каждого момента времени требуется предсказать, какая нота сейчас играет.

Для матрицы это ограничение означает, что в каждом столбце может быть не больше одной единицы. Для пути в графе это ограничение равносильно запрету переходов вниз.

Метрика качества — *mean absolute deviation* — суммарное (по моментам времени) отклонение индекса предсказанной ноты от истинного индекса.

Аудио признаки

В статье предложено использовать следующие признаки для аудиодорожки:

- MFCC признаки — первые 5 коэффициентов.
- Root Mean Square Energy — энергия фрейма.
- Spectral Centroid — средняя частота спектра во фрейме.
- Spectral Bandwidth — разброс частот спектра во фрейме.

Были использованы реализации этих признаков из библиотеки librosa.

Простое решение

Разбиваем датасет на две части. На первой части обучаем классификатор по числу различных нот — предсказываем вероятность того, что в момент времени t играет нота i.

Для второй части датасета построим матрицу $\theta \in \mathbb{R}^{N_A \times N_B}$. θ_{ij} соответствует отрицательному логарифму вероятности того, что в момент времени j играет нота номер i, то есть штрафу за предсказание ноты i для момента времени j. Этот штраф можно получить из классификатора.

Теперь требуется найти в матрице путь из клетки $(1, 1)$ в клетку (N_A, N_B) с наименьшим суммарным штрафом. Эту задачу можно решить за $N_A \times N_B$ операций при помощи динамического программирования.

Дана матрица $N_A \times N_B$ штрафов. Нужно найти путь из клетки $(1,1)$ в клетку (N_A, N_B) с наименьшим суммарным штрафом. На пути из клетки можно перемещаться в ее соседа справа или справа-снизу.

Заведем матрицу D размера $N_A \times N_B$. D_{ij} равно минимальному штрафу, за который можно проложить путь из $(1,1)$ в (i,j). Будем заполнять эту матрицу по столбцам.

База динамики

$D_{11} = \theta_{11}$, $D_{1j} = +\infty$

Шаг динамики

$D_{ij} = \min(D_{i-1,j}, D_{i-1,j-1}) + \theta_{ij}$

Рассмотрим $x \in \mathbb{R}^d$

$$\min(\boldsymbol{x}) = \min_{i=1,\ldots,d} x_i$$

Пусть $\Omega(\cdot) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ — сильно выпуклая функция

$$\min{}_{\Omega}(\boldsymbol{x}) = \min_{\boldsymbol{q} \in \Delta^d} \langle \boldsymbol{q}, \boldsymbol{x} \rangle + \Omega(\boldsymbol{q}).$$

Тогда $\min_{\Omega}(\boldsymbol{x})$ — гладкая функция:

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} \min{}_{\Omega}(\boldsymbol{x}) = \arg\min_{\boldsymbol{q} \in \Delta^d} \langle \boldsymbol{q}, \boldsymbol{x} \rangle + \Omega(\boldsymbol{q})$$

Например:

$$\Omega(\boldsymbol{q}) = \gamma \sum_{i=1}^{d} q_i \log q_i, \quad \gamma > 0$$

$$\min{}_{\Omega}(\boldsymbol{x}) = \min_{\boldsymbol{q} \in \Delta^d} \sum_{i=1}^{d} q_i x_i + \gamma \sum_{i=1}^{d} q_i \log q_i$$

$$\hat{q}_i \propto \exp\left\{ -\frac{x_i}{\gamma} \right\}, \quad \hat{\boldsymbol{q}} = \mathrm{softmax}\left(-\frac{\boldsymbol{x}}{\gamma} \right) = \mathrm{softmin}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\gamma} \right)$$

Пусть $\theta \in \mathbb{R}^{N_A \times N_B}$.

- Алгоритм DTW:
  - $\mathrm{DTW}(\theta)$ — величина минимального пути;
  - $Y(\theta) \in \{0, 1\}^{N_A \times N_B}$ — матрица выранивания;
- Алгоритм DTW_Ω:
  - $\mathrm{DTW}_\Omega(\theta)$ — приближенная величина минимального пути;
  - $Y_\Omega(\theta) = \nabla_\theta \mathrm{DTW}_\Omega(\theta)$ — сглаженная матрица выранивания;

Оптимизируемый функционал:

$$\mathrm{MAD}(\hat{Y}, Y) = \|L(Y - \hat{Y})^T\|_F^2,$$

где $L \in \mathbb{R}^{N_B \times N_B}$ — нижнетреугольная матрица, заполненная 1.

Compute $\mathrm{DTW}_\Omega(\boldsymbol{\theta})$ and $\nabla\mathrm{DTW}_\Omega(\boldsymbol{\theta})$

Input: Distance matrix $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{N_A \times N_B}$

$\triangleright$ Forward pass

$v_{0,0} = 0;\ v_{i,0} = v_{0,j} = \infty,\ i \in [N_A], j \in [N_B]$

for $i \in [1, \dots, N_A], j \in [1, \dots, N_B]$ **do**

$$v_{i,j} = d_{i,j} + \min\nolimits_\Omega(v_{i,j-1}, v_{i-1,j-1}, v_{i-1,j})$$

$$\boldsymbol{q}_{i,j} = \nabla \min\nolimits_\Omega(v_{i,j-1}, v_{i-1,j-1}, v_{i-1,j}) \in \mathbb{R}^3$$

$\triangleright$ Backward pass

$\boldsymbol{q}_{i,N_B+1} = \boldsymbol{q}_{N_A+1,j} = \mathbf{0}_3,\ i \in [N_A], j \in [N_B]$

$e_{i,N_B+1} = e_{N_A+1,j} = 0,\ i \in [N_A], j \in [N_B]$

$\boldsymbol{q}_{N_A+1,N_B+1} = (0, 1, 0);\ e_{N_A+1,N_B+1} = 1$

for $j \in [N_B, \dots, 1], i \in [N_A, \dots, 1]$ **do**

$$e_{i,j} = q_{i,j+1,1}\ e_{i,j+1} + q_{i+1,j+1,2}\ e_{i+1,j+1} + q_{i+1,j,3}\ e_{i+1,j}$$

Return: $\mathrm{DTW}_\Omega(\boldsymbol{\theta}) = v_{N_A,N_B}$

$$\nabla\mathrm{DTW}_\Omega(\boldsymbol{\theta}) = (e)_{i,j=1}^{N_A,N_B}$$

Результаты экспериментов

Выборка была разбита на тренировочную и валидационную, по пять записей в каждой из частей.

Были рассмотрены три модели:

1. Простая модель с логистической регрессией в качестве базового классификатора.
2. End-to-end модель на основе DTW_Ω.

Инструмент	Pretrained	End-to-end
Скрипка	0.7804	0.4761
Кларнет	0.4527	0.2353
Саксофон	0.4930	0.4677
Фагот	0.6001	0.5650

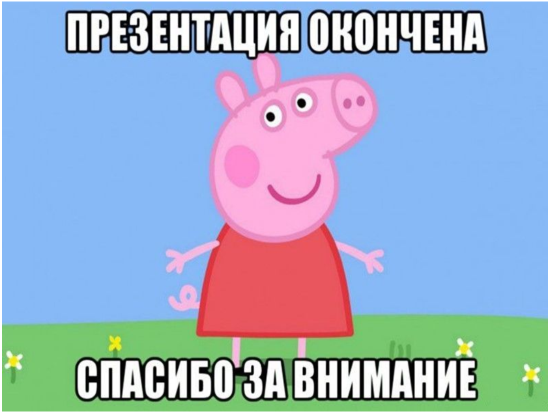
Вклад участников

Тимур Гарипов
Реализация метода End-to-end на основе алгоритма DTW_{Ω}.

Татьяна Шолохова
Подготовка данных и извлечение признаков для классификатора.

Павел Коваленко
Реализация простой модели с логистической регрессией в качестве базового классификатора.

Саня Щербаков
Проведение экспериментов. Рефакторинг и документация кода.



Состав команды:

Тимур Гарипов, 517 группа
Татьяна Шолохова, 517 группа
Павел Коваленко, 517 группа
Саня Щербаков, 522 группа