Osnove verjetnosti in statistike

Diskretne slučajne spremenljive

Asistent dr. Kristina Veljković

DISKRETNE SLUČAJNE SPREMENLJIVKE S KONČNO MNOGO VREDNOSTI

Naj bo $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ zaloga vrednosti slučajne spremenljivke X in

$$P(X = x_k) = p_k, k = 1, 2, \ldots, n,$$

(rečemo: verjetnost, da X zavzame vrednost x_k).

DISKRETNE SLUČAJNE SPREMENLJIVKE S KONČNO MNOGO VREDNOSTI

Naj bo $\{x_1, x_2, \dots x_n\}$ zaloga vrednosti slučajne spremenljivke X in

$$P(X = x_k) = p_k, k = 1, 2, \dots, n,$$

(rečemo: verjetnost, da X zavzame vrednost x_k).
Porazdelitev slučajne spremenljivke X lahko predstavimo s porazdelitveno shemo verjetnosti

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots x_n \\ p_1 & p_2 & \dots p_n \end{pmatrix},$$

pri čemer je $p_1 + p_2 + \dots p_n = 1$ ($0 \leq p_k \leq 1$).

Diskretne slučajne spremenljivke s števno mnogo vrednosti

Naj bo $\{x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots\}$ zaloga vrednosti slučajne spremenljivke X in

$$P(X = x_k) = p_k, k = 1, 2, \ldots$$

Diskretne slučajne spremenljivke s števno mnogo vrednosti

Naj bo $\{x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots\}$ zaloga vrednosti slučajne spremenljivke X in

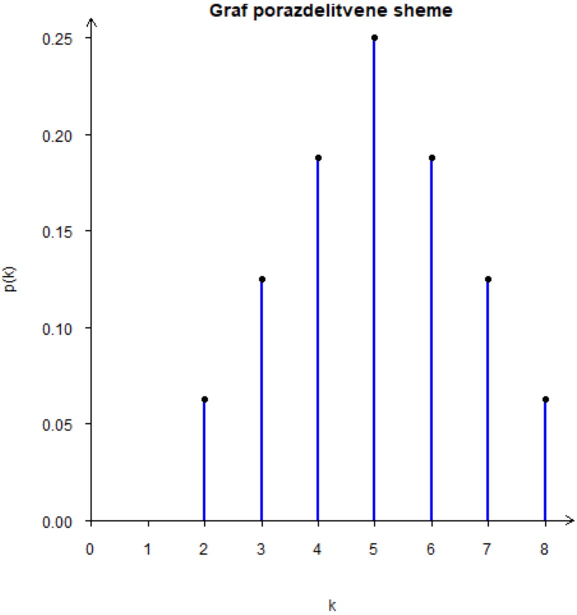
$$P(X = x_k) = p_k, k = 1, 2, \ldots$$

Porazdelitev slučajne spremenljivke X lahko predstavimo s porazdelitveno shemo verjetnosti

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n & \ldots \end{pmatrix},$$

pri čemer je $p_1 + p_2 + \ldots = 1$ $(0 \leq p_k \leq 1)$.

Primer 1. Hkrati vržemo dva tetraedra. Naj bo slučajna spremenljivka X vsota padlih pik. Zapiši porazdelitveno shemo slučajne spremenljivke X in jo grafično predstavi.


Graf porazdelitvene sheme
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
p(k)
0
1
2
3
4
5
6
7
8
k

Porazdelitvena funkcija

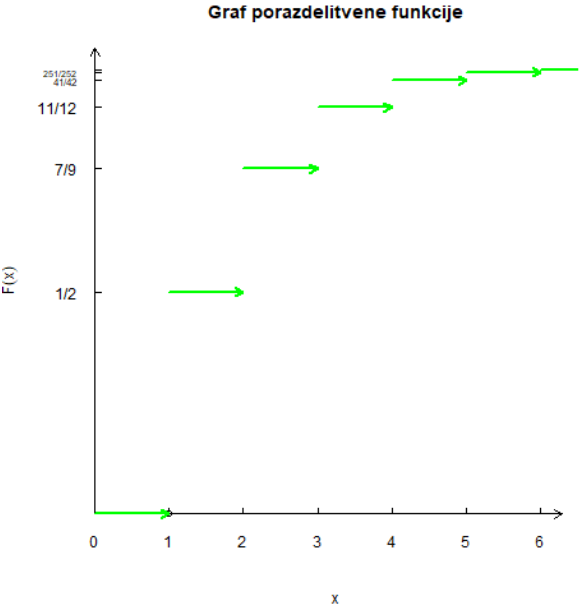
$F_X(x) = P(X \leq x), \ \ x \in \mathbb{R}$. Lastnosti

- F_X je naraščajoča funkcija, oziroma za $x_1 \leq x_2$ je $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$.
- $$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0,$$ $$\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1.$$
- Funkcija F_X je zvezna z desne strani, oziroma $\lim_{x \to a+} F_X(x) = F_X(a)$.

Primer 2. Pet moških in pet žensk je razvrščenih glede na njihove ocene na izpitu, kjer 1 pomeni najvišjo uvrstitev, 10 pa najnižjo. Predpostavimo, da nobena dva rezultata nista enaka in, da so vse možne razporeditve enako verjetne. Naj bo X najvišja uvrstitev, ki jo je dosegla ženska.

a) Zapiši porazdelitveno shemo slučajne spremenljivke X.

b) Nariši porazdelitveno funkcijo.


Graf porazdelitvene funkcije
251/252
41/42
11/12
7/9
1/2
F(x)
0
1
2
3
4
5
6
x

DISKRETNE SLUČAJNE SPREMENLJIVKE

Pričakovana vrednost (matematično upanje) diskretne slučajne spremenljivke

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix},$$

je

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots x_n p_n \dots = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i.$$

Primer 3. (Zbirka) Odpira se poštena igralnica. Njen cilj je narediti igre na srečo kar čimbolj poštene. Zato si želijo sestaviti takšne igre, pri katerih bi bil pričakovan dobiček enak 0. Ena izmed takšnih iger je met igralne kocke. Pri njej igralec vloži 1 evro in vrže igralno kocko. Igralec pri tej igri zmaga, če je število pik pri metu deljivo s 3. Če zmaga, mu igralnica izplača 2 evra.

a) Ali je ta igra poštena?

b) Za kocko, obteženo s

$$p_k = \begin{cases} \frac{5ak}{3}, & k \text{ lih}, \\ \frac{bk}{6}, & k \text{ sod}, \end{cases}$$

določi a in b, da bo igra poštena.

Disperzija

- Disperzija slučajne spremenljivke X je

$$D(X) = E\left(X - E(X)\right)^2 = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2.$$

- Standardni odklon

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Primer 4. (Zbirka) Slučajna spremenljivka X ima zalogo vrednosti $\{1, \ldots, 10\}$. Verjetnost, da X zavzame vrednost k, je enaka $c \cdot k$.

a) Izračunaj konstanto c.
b) Izračunaj $P(X \leq 5)$.
c) Izračunaj matematično upanje slučajne spremenljivke X.
d) Izračunaj disperzijo $D(X)$ in standardni odklon $\sigma(X)$.

Primer 5. (Zbirka) V škatli imamo 6 kart (glej sliko). Izvlečemo dve karti (brez vračanja). Naj bo X največje izmed izvlečenih števil. Izračunaj $E(X)$ in $D(X)$.