Statistični praktikum

Opisna statistika in grafično predstavljanje podatkov

Asistent dr. Kristina Veljković

Fakulteta za računalništvo in informatiko

TIPI SLUČAJNIH SPREMENLJIVK

• Slučajna spremenljivka X je količina, katere vrednosti so rezultat slučajnega poskusa.

TIPI SLUČAJNIH SPREMENLJIVK

- Slučajna spremenljivka X je količina, katere vrednosti so rezultat slučajnega poskusa.
- Na osnovi zaloge vrednosti razlikujemo:
 - 1. numerične slučajne spremenljivke: diskretne in zvezne,
 - 2. **kategorične slučajne spremenljivke**: *nominalne* (imenske) in *ordinalne* (urejenostne).

• Kategorične slučajne spremenljivke imajo kategorije za vrednosti.

Kategorične slučajne spremenljivke imajo kategorije za vrednosti.
 Kategorije se lahko numerično kodirajo.

- Kategorične slučajne spremenljivke imajo kategorije za vrednosti.
 Kategorije se lahko numerično kodirajo.
- Nominalne slučajne spremenljivke: med kategorijami ni hierarhije.

- Kategorične slučajne spremenljivke imajo kategorije za vrednosti.
 Kategorije se lahko numerično kodirajo.
- Nominalne slučajne spremenljivke: med kategorijami ni hierarhije.
 - spol: 0=moški, 1=ženski,

- Kategorične slučajne spremenljivke imajo kategorije za vrednosti.
 Kategorije se lahko numerično kodirajo.
- Nominalne slučajne spremenljivke: med kategorijami ni hierarhije.
 - spol: 0=moški, 1=ženski,
 - barva las: 1=črna, 2=rjava, 3=rdeča, 4=blondna, 5=bela.

- Kategorične slučajne spremenljivke imajo kategorije za vrednosti.
 Kategorije se lahko numerično kodirajo.
- Nominalne slučajne spremenljivke: med kategorijami ni hierarhije.
 - spol: 0=moški, 1=ženski,
 - barva las: 1=črna, 2=rjava, 3=rdeča, 4=blondna, 5=bela.
- Ordinalne slučajne spremenljivke: kategorije so urejene, obstaja hierarhija med njimi.

- Kategorične slučajne spremenljivke imajo kategorije za vrednosti.
 Kategorije se lahko numerično kodirajo.
- Nominalne slučajne spremenljivke: med kategorijami ni hierarhije.
 - spol: 0=moški, 1=ženski,
 - barva las: 1=črna, 2=rjava, 3=rdeča, 4=blondna, 5=bela.
- Ordinalne slučajne spremenljivke: kategorije so urejene, obstaja hierarhija med njimi.
 - stopnja bolečin: 0=ni, 1=blage, 2=srednje, 3=močne,

- Kategorične slučajne spremenljivke imajo kategorije za vrednosti.
 Kategorije se lahko numerično kodirajo.
- Nominalne slučajne spremenljivke: med kategorijami ni hierarhije.
 - spol: 0=moški, 1=ženski,
 - barva las: 1=črna, 2=rjava, 3=rdeča, 4=blondna, 5=bela.
- Ordinalne slučajne spremenljivke: kategorije so urejene, obstaja hierarhija med njimi.
 - stopnja bolečin: 0=ni, 1=blage, 2=srednje, 3=močne,
 - **stopnja izobrazbe**: 1= brez, 2=osnovna šola, 3=srednja šola, 4=fakulteta, 5=postdiplomski študij.

NOMINALNA SLUČAJNA SPREMENLJIVKA - KRVNA SKUPINA

• *Primer*: Zabeležili smo krvno skupino naključnega vzorca 100 Slovencev enega majhnega mesta. V naslednjo tabelo smo vpisali dobljene frekvence

krvna skupina O A B AB frekvenca f 38 40 15 7

Grafično prikaži dobljene podatke.

NOMINALNA SLUČAJNA SPREMENLJIVKA - KRVNA SKUPINA

 Primer: Zabeležili smo krvno skupino naključnega vzorca 100 Slovencev enega majhnega mesta. V naslednjo tabelo smo vpisali dobljene frekvence

```
krvna skupina O A B AB frekvenca f 38 40 15 7
```

Grafično prikaži dobljene podatke.

• Ustvarimo vektor karakterjev v R-ju

Nominalna slučajna spremenljivka - krvna skupina

Frekvenčna tabela v R-ju

```
table(krv.skupina)
```

```
## krv.skupina
## A AB B O
## 40 7 15 38
```

Nominalna slučajna spremenljivka - krvna skupina

Frekvenčna tabela v R-ju

```
table(krv.skupina)
```

```
## krv.skupina
## A AB B O
## 40 7 15 38
```

Podatke grafično prikažemo s stolpčnim diagramom (ang. *barplot*): na *x*-osi so kategorije, višina stolpca je frekvenca kategorije (absolutna frekvenca).

NOMINALNA SLUČAJNA SPREMENLJIVKA - KRVNA SKUPINA

• Frekvenčna tabela v R-ju

```
table(krv.skupina)
```

```
## krv.skupina
## A AB B O
## 40 7 15 38
```

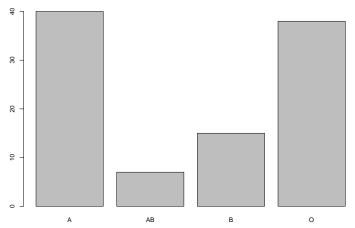
- Podatke grafično prikažemo s stolpčnim diagramom (ang. *barplot*): na *x*-osi so kategorije, višina stolpca je frekvenca kategorije (absolutna frekvenca).
- Stolpčni diagram v R-ju

```
barplot(table(krv.skupina))
```

• Na osnovi tabele in grafa opazimo, katera kategorija se javlja najbolj pogosto (modus), katera pa je najbolj redka.

NOMINALNA SLUČAJNA SPREMENLJIVKA - KRVNA SKUPINA

• Stolpčni diagram krvne skupine



• Za ordinalne podatke lahko izračunamo, poleg modusa, vzorčno mediano in vzorčne kvartile.

- Za ordinalne podatke lahko izračunamo, poleg modusa, vzorčno mediano in vzorčne kvartile.
- Podatki se razvrstijo v naraščajočem vrstnem redu $Y_1 \leq Y_2 \leq \ldots \leq Y_n$.

- Za ordinalne podatke lahko izračunamo, poleg modusa, vzorčno mediano in vzorčne kvartile.
- Podatki se razvrstijo v naraščajočem vrstnem redu $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n$.
- Vzorčna mediana

00000000

$$M_e = \left\{ \begin{array}{ll} Y_{(n+1)/2}, & n-\text{liho} \\ \frac{Y_{n/2}+Y_{n/2+1}}{2}, & n-\text{sodo} \end{array} \right. \label{eq:mean_mean_mean}$$

- Za ordinalne podatke lahko izračunamo, poleg modusa, vzorčno mediano in vzorčne kvartile.
- Podatki se razvrstijo v naraščajočem vrstnem redu $Y_1 \leq Y_2 \leq \ldots \leq Y_n$.
- Vzorčna mediana

$$M_e = \left\{ \begin{array}{ll} Y_{(n+1)/2}, & n-{\rm liho} \\ \frac{Y_{n/2} + Y_{n/2+1}}{2}, & n-{\rm sodo} \end{array} \right.$$

• Vzorčni prvi in tretji kvartil (po Tukey-jevi metodi):

- Za ordinalne podatke lahko izračunamo, poleg modusa, vzorčno mediano in vzorčne kvartile.
- Podatki se razvrstijo v naraščajočem vrstnem redu $Y_1 \leq Y_2 \leq \ldots \leq Y_n$.
- Vzorčna mediana

$$M_e = \left\{ \begin{array}{ll} Y_{(n+1)/2}, & n-{\rm liho} \\ \frac{Y_{n/2} + Y_{n/2+1}}{2}, & n-{\rm sodo} \end{array} \right.$$

- Vzorčni **prvi** in **tretji kvartil** (po Tukey-jevi metodi):
 - Prvi kvartil Q_1 je mediana prve polovice sortiranih podatkov,

- Za ordinalne podatke lahko izračunamo, poleg modusa, vzorčno mediano in vzorčne kvartile.
- Podatki se razvrstijo v naraščajočem vrstnem redu $Y_1 \leq Y_2 \leq \ldots \leq Y_n$.
- Vzorčna mediana

$$M_e = \left\{ \begin{array}{ll} Y_{(n+1)/2}, & n-{\rm liho} \\ \frac{Y_{n/2} + Y_{n/2+1}}{2}, & n-{\rm sodo} \end{array} \right.$$

- Vzorčni prvi in tretji kvartil (po Tukey-jevi metodi):
- Prvi kvartil Q_1 je mediana prve polovice sortiranih podatkov,
- Tretji kvartil Q_3 je mediana druge polovice sortiranih podatkov.

- Za ordinalne podatke lahko izračunamo, poleg modusa, vzorčno mediano in vzorčne kvartile.
- Podatki se razvrstijo v naraščajočem vrstnem redu $Y_1 \leq Y_2 \leq \ldots \leq Y_n$.
- Vzorčna mediana

$$M_e = \left\{ \begin{array}{ll} Y_{(n+1)/2}, & n-\text{liho} \\ \frac{Y_{n/2} + Y_{n/2+1}}{2}, & n-\text{sodo} \end{array} \right.$$

- Vzorčni prvi in tretji kvartil (po Tukey-jevi metodi):
- Prvi kvartil Q_1 je mediana prve polovice sortiranih podatkov,
- Tretji kvartil Q_3 je mediana druge polovice sortiranih podatkov. Za liho število podatkov, pri računanju kvartilov vključimo mediano v obe polovici sortiranih podatkov.

 Primer: Zabeležili smo stopnjo bolečin naključnega vzorca 20 oseb z revmatološkimi težavami (0 = brez bolečin, 1 = blage bolečine, 2 = srednje bolečine, 3 = močne bolečine). Podatke so razvrstili v naraščajočem vrstnem redu:

 $0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 3\ 3\ 3$

Izračunaj opisno statistiko in grafično prikaži dobljene podatke.

Ordinalna spremenljivka

• Ustvarimo vektor z numeričnimi kodami stopnje bolečin

```
bol < -c(rep(0,2), rep(1,7), rep(2,8), rep(3,3))
```

Ordinalna spremenljivka

• Ustvarimo vektor z numeričnimi kodami stopnje bolečin

```
bol<-c(rep(0,2),rep(1,7),rep(2,8),rep(3,3))
```

Modus (najbolj pogosta vrednost ali kategorija) je 2 (srednje bolečine).

ORDINALNA SPREMENLJIVKA

• Ustvarimo vektor z numeričnimi kodami stopnje bolečin

```
bol<-c(rep(0,2),rep(1,7),rep(2,8),rep(3,3))
```

- Modus (najbolj pogosta vrednost ali kategorija) je 2 (srednje bolečine).
- Mediana, prvi in tretji kvartil vzorca

```
quantile(bol,c(0.25,0.5,0.75))

## 25% 50% 75%

## 1 2 2
```

Ordinalna spremenljivka

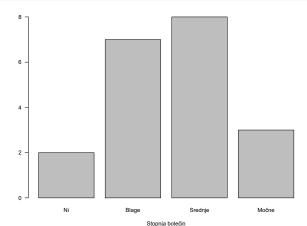
• Ustvarimo vektor z numeričnimi kodami stopnje bolečin

```
bol<-c(rep(0,2),rep(1,7),rep(2,8),rep(3,3))
```

- Modus (najbolj pogosta vrednost ali kategorija) je 2 (srednje bolečine).
- Mediana, prvi in tretji kvartil vzorca

```
quantile(bol,c(0.25,0.5,0.75))
## 25% 50% 75%
## 1 2 2
```

• Stolpčni diagram v R-ju



 Opisna statistika vzorca: minimalna in maksimalna vrednost, povprečje, mediana, standardni odklon, kvartili, itn.

- Opisna statistika vzorca: minimalna in maksimalna vrednost, povprečje, mediana, standardni odklon, kvartili, itn.
- Vzorčno povprečje $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

- Opisna statistika vzorca: minimalna in maksimalna vrednost, povprečje, mediana, standardni odklon, kvartili, itn.
- Vzorčno povprečje $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.
- Popravljeni vzorčni standardni odklon $S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i \overline{X})^2}.$

• *Primer*: Izmerili smo težo (v kg) slučajnega vzorca 50 študentov prvega letnika.

```
teza<-c(60.9, 72.7, 69.2, 74.6, 64.6, 69.4, 79.4, 71.1, 75.6, 68.5, 63.0, 69.9, 61.7, 62.3, 73.0, 62.6, 58.6, 66.8, 69.9, 65.9, 61.8, 67.1, 76.8, 74.9, 57.3, 72.4, 80.9, 64.5, 68.5, 68.4, 83.5, 75.4, 58.4, 59.7, 73.3, 68.8, 76.5, 81.0, 60.6, 71.2, 71.1, 61.4, 86.0, 60.4, 69.9, 79.3, 68.9, 74.4, 78.7, 66.6)
```

• Vzorčno povprečje \overline{x}

```
mean(teza)
```

```
## [1] 69.548
```

Popravljeni vzorčni standardni odklon s

```
sd(teza)
```

```
## [1] 7.07722
```

 Povzetek s petimi števili: minimum, maksimum, mediana, prvi in tretji kvartil (in še dodatno vzorčno povprečje)

```
summary(teza)
```

```
## Min. 1st Qu. Median Mean 3rd Qu. Max.
## 57.30 63.38 69.30 69.55 74.55 86.00
```

ZVEZNE SLUČAJNE SPREMENLJIVKE

• Osamelec (ang. *outlier*) lahko ima veliki vpliv na vzorčno povprečje, ne pa tudi na mediano.

ZVEZNE SLUČAJNE SPREMENLJIVKE

- Osamelec (ang. *outlier*) lahko ima veliki vpliv na vzorčno povprečje, ne pa tudi na mediano.
- Primer: Dodajmo podatkom visoko težo 140 kg.

ZVEZNE SLUČAJNE SPREMENLJIVKE

- Osamelec (ang. *outlier*) lahko ima veliki vpliv na vzorčno povprečje, ne pa tudi na mediano.
- Primer: Dodajmo podatkom visoko težo 140 kg.

```
teza1<-c(teza,140)
c(staro.povp=mean(teza),novo.povp=mean(teza1))

## staro.povp novo.povp
## 69.54800 70.92941

c(stara.med=median(teza),nova.med=median(teza1))</pre>
```

```
## stara.med nova.med
## 69.3 69.4
```

• Pri risanju histograma razvrstimo težo v željene razrede (intervale) in preštejemo število podatkov v vsakem razredu.

- Pri risanju histograma razvrstimo težo v željene razrede (intervale) in preštejemo število podatkov v vsakem razredu.
- Za težo študentov je minimalna vrednost 57.3kg, maksimalna vrednost pa 86kg.
- Koliko razredov teže potrebujemo?

- Pri risanju histograma razvrstimo težo v željene razrede (intervale) in preštejemo število podatkov v vsakem razredu.
- Za težo študentov je minimalna vrednost 57.3kg, maksimalna vrednost pa 86kg.
- Koliko razredov teže potrebujemo?
- Sturges-ovo pravilo: za n podatkov je optimalno število razredov $k = \text{ceiling}(log_2(n)) + 1$

- Pri risanju histograma razvrstimo težo v željene razrede (intervale) in preštejemo število podatkov v vsakem razredu.
- Za težo študentov je minimalna vrednost 57.3kg, maksimalna vrednost pa 86kg.
- Koliko razredov teže potrebujemo?
- Sturges-ovo pravilo: za n podatkov je optimalno število razredov $k = \text{ceiling}(log_2(n)) + 1$
- Podatki o teži: n=50, $k=ceiling(log_2(50))+1=7$ (začetno število razredov).

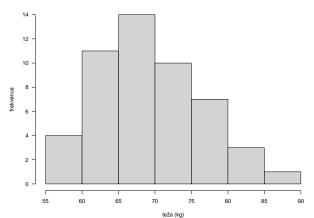
- Pri risanju histograma razvrstimo težo v željene razrede (intervale) in preštejemo število podatkov v vsakem razredu.
- Za težo študentov je minimalna vrednost 57.3kg, maksimalna vrednost pa 86kg.
- Koliko razredov teže potrebujemo?
- Sturges-ovo pravilo: za n podatkov je optimalno število razredov $k = \text{ceiling}(log_2(n)) + 1$
- Podatki o teži: n=50, $k=ceiling(log_2(50))+1=7$ (začetno število razredov).
- Dolžina razreda

$$h = \frac{max - min}{k} = \frac{86 - 57.3}{7} = 4.1.$$

- Pri risanju histograma razvrstimo težo v željene razrede (intervale) in preštejemo število podatkov v vsakem razredu.
- Za težo študentov je minimalna vrednost 57.3kg, maksimalna vrednost pa 86kg.
- Koliko razredov teže potrebujemo?
- Sturges-ovo pravilo: za n podatkov je optimalno število razredov $k = \text{ceiling}(log_2(n)) + 1$
- Podatki o teži: n=50, $k=ceiling(log_2(50))+1=7$ (začetno število razredov).
- Dolžina razreda

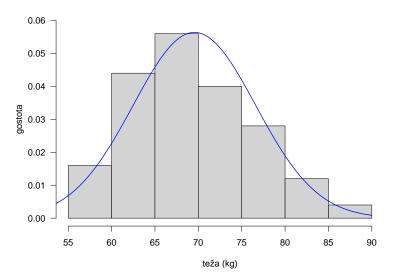
$$h = \frac{max - min}{k} = \frac{86 - 57.3}{7} = 4.1.$$

• Vzamemo k = 7 razredov dolžine h = 5.

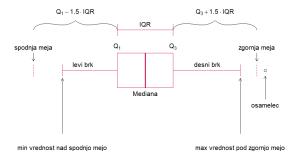


• Histogram gostote: ploščina vseh pravokotnikov histograma je enaka 1 (ploščina posameznega pravokotnika je enaka relativni frekvenci $f_{rel}=\frac{f}{n}$).

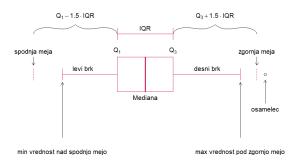
- Histogram gostote: ploščina vseh pravokotnikov histograma je enaka 1 (ploščina posameznega pravokotnika je enaka relativni frekvenci $f_{rel}=\frac{f}{n}$).
- Preko histograma gostote narišemo gostoto normalne porazdelitve (μ ocenimo z $\overline{x}=69.55$, standardni odklon σ z s=7.08).



ZVEZNE SLUČAJNE SPREMENLJIVKE - ŠKATLA Z BRKI



ZVEZNE SLUČAJNE SPREMENLJIVKE - ŠKATLA Z BRKI

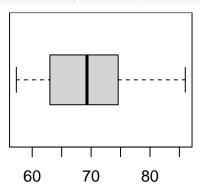


- Navpična črta v škatli je mediana, meji škatle sta Q_1 prvi kvartil in Q_3 tretji kvartil.
- Škatla je dolžine $IQR = Q_3 Q_1$.
- Spodnja meja= $Q_1 1.5 \cdot IQR$, zgornja meja= $Q_3 + 1.5 \cdot IQR$.
- Podatki, ki so manjši od spodnje meje ali večji od zgornje meje, se imenujejo osamelci (ang. *outliers*).

ZVEZNE SLUČAJNE SPREMENLJIVKE - ŠKATLA Z BRKI

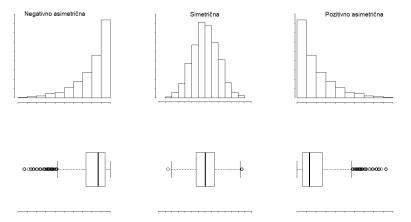
- Pri simetrični porazdelitvi je mediana na sredini škatle in sta brka enakih dolžin.
- Škatla z brki teže študentov

```
par(mar=c(3,3,0,0))
boxplot(teza,horizontal=TRUE,cex=1.2)
```



ZVEZNE SLUČAJNE SPREMENLJIVKE - HISTOGRAM IN ŠKATLA Z BRKI

• Primeri histogramov in škatle z brki negativno asimetrične, simetrične in pozitivno asimetrične vzorčne porazdelitve.



• Diskretne podatke z malim številom vrednosti grafično prikažemo s stolpčnim diagramom.

- Diskretne podatke z malim številom vrednosti grafično prikažemo s stolpčnim diagramom.
- Diskretne podatke z več vrednostmi prikažemo s histogramom in škatlo z brki.

- Diskretne podatke z malim številom vrednosti grafično prikažemo s stolpčnim diagramom.
- Diskretne podatke z več vrednostmi prikažemo s histogramom in škatlo z brki.
- *Primer*: Zabeležili smo število otrok slučajnega vzorca 60 družin. Izračunaj opisno statistiko, ter nariši histogram in škatlo z brki za število otrok.

```
otroci<-c(0,4,5,2,3,2,1,2,3,3,4,5,1,8,1,2,3,2,2,4,0,2,2,1,6,1,5,3,0,3,2,3,2,2,4,3,3,1,2,2,1,2,4,3,1,1,0,2,2,2,3,1,2,1,2,2,2,2,3,0)
```

 Za diskretne podatke izračunamo opisno statistiko na enak način kot za zvezne podatke (vzorčno povprečje, vzorčni standardni odklon, povzetek s petimi števili).

- Za diskretne podatke izračunamo opisno statistiko na enak način kot za zvezne podatke (vzorčno povprečje, vzorčni standardni odklon, povzetek s petimi števili).
- Povzetek s petimi števili in vzorčno povprečje.

```
summary(otroci)
```

```
## Min. 1st Qu. Median Mean 3rd Qu. Max.
## 0.000 1.000 2.000 2.333 3.000 8.000
```

- Za diskretne podatke izračunamo opisno statistiko na enak način kot za zvezne podatke (vzorčno povprečje, vzorčni standardni odklon, povzetek s petimi števili).
- Povzetek s petimi števili in vzorčno povprečje.

```
## Min. 1st Qu. Median Mean 3rd Qu. Max.
## 0.000 1.000 2.000 2.333 3.000 8.000
```

• Popravljeni vzorčni standardni odklon števila otrok.

```
sd(otroci)
## [1] 1.514525
```

summary (otroci)

• Tabela frekvenc

```
table(otroci)
```

```
## otroci
## 0 1 2 3 4 5 6 8
## 5 11 22 12 5 3 1 1
```

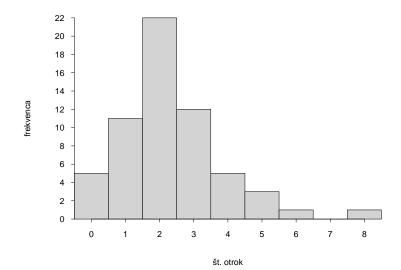
Tabela frekvenc

```
table(otroci)
```

```
## otroci
## 0 1 2 3 4 5 6 8
## 5 11 22 12 5 3 1 1
```

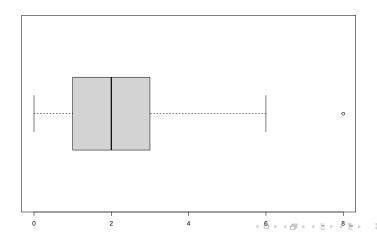
• Želimo, da je sredina vsakega razreda histograma v vrednostih 0-8. Meje razredov so: vrednost \pm 0.5.

Histogram števila otrok



• Škatla z brki števila otrok

boxplot(otroci, horizontal=TRUE)



OPISNA STATISTIKA IN GRAFI

- Za vse tipe spremenljivk lahko izračunamo frekvence (absolutne in relativne).
- Tabela opisne statistike in grafov za kategorične podatke

Podatki	Opisna statistika	Grafi
Nominalni	Modus	Stolpčni diagram
Ordinalni	Modus, mediana, kvartili	Stolpčni diagram

OPISNA STATISTIKA IN GRAFI

• Tabela opisne statistike in grafov za numerične podatke

Podatki	Opisna statistika	Grafi
Diskretni	Minimum, maksimum, modus,	malo število vrednosti:
	mediana, kvartili, povprečje,	stolpčni diagram;
	standardni odklon	večje število vrednosti:
		histogram, škatla z brki
Zvezni	Minimum, maksimum,	histogram
	modus (za interval vrednosti),	škatla z brki
	mediana, kvartili, povprečje,	
	standardni odklon	