Osnove verjetnosti in statistike

Normalna porazdelitev

Asistent dr. Kristina Veljković

Gostota porazdelitve

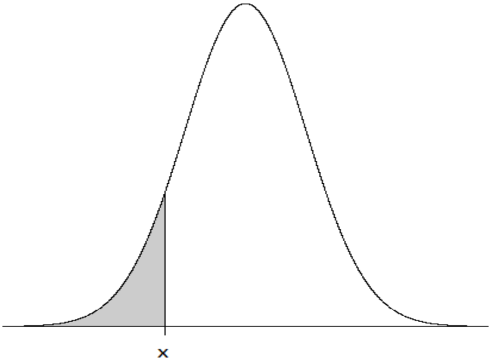
- Gostota porazdelitve

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}.$$

- Normalna porazdelitev je odvisna od dveh parametrov: μ in σ ($\mu = E(X), \sigma = \sigma(X)$).
- Za $\mu = 0$ in $\sigma = 1$ dobimo standardno normalno porazdelitev $\mathcal{N}(0, 1)$.
- $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ (standardizacija).

Porazdelitvena funkcija standardne normalne porazdelitve

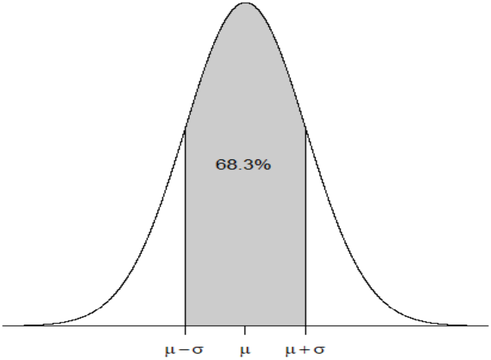
- Vrednost porazdelitvene funkcije $F(x) = P(X \leq x)$: ploščina pod krivuljo gostote od $-\infty$ do x.



1σ PRAVILO

- 1σ pravilo

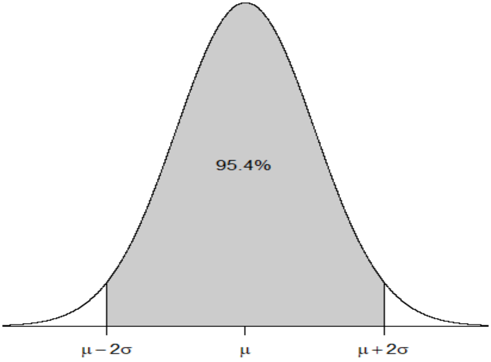
$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0.683.$$



2σ PRAVILO

- 2σ pravilo

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0.954.$$



3σ PRAVILO

- 3σ pravilo

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0.997.$$

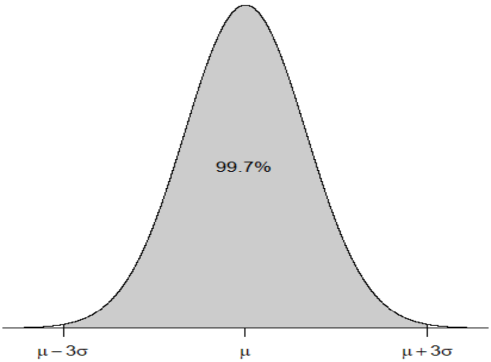


TABELA VREDNOSTI $N(0,1)$

- Kako računamo $F(x)$, za $x > 0$?

Tabela vrednosti $N(0, 1)$

- Kako računamo $F(x)$, za $x > 0$?
- Primer: Izračunajmo $F(1.32) = P(X \leq 1.32)$.

TABELA VREDNOSTI $N(0,1)$

- Kako računamo $F(x)$, za $x > 0$?
- Primer: Izračunajmo $F(1.32) = P(X \leq 1.32)$.
  - Del tabele

x	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
0.00	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1.30	0.9032	0.9049	**0.9066**	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
3.90	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

TABELA VREDNOSTI $N(0,1)$

- Kako računamo $F(x)$, za $x > 0$?
- Primer: Izračunajmo $F(1.32) = P(X \leq 1.32)$.
  - Del tabele

x	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
0.00	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.30	0.9032	0.9049	**0.9066**	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
3.90	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

  - $F(1.32) = 0.9066$.
- $F(x) \approx 1$, za $x \geq 4$.

Tabela vrednosti $N(0, 1)$

- Kako računamo $F(x)$, za $x < 0$?

TABELA VREDNOSTI $N(0,1)$

- Kako računamo $F(x)$, za $x < 0$?
- Na osnovi simetrije porazdelitve velja $F(-x) = 1 - F(x)$.

Tabela vrednosti $N(0,1)$

- Kako računamo $F(x)$, za $x < 0$?
- Na osnovi simetrije porazdelitve velja $F(-x) = 1 - F(x)$.
- Primer: Izračunajmo $F(-1.32) = P(X \leq -1.32)$.

TABELA VREDNOSTI $N(0,1)$

- Kako računamo $F(x)$, za $x < 0$?
- Na osnovi simetrije porazdelitve velja $F(-x) = 1 - F(x)$.
- Primer: Izračunajmo $F(-1.32) = P(X \leq -1.32)$.

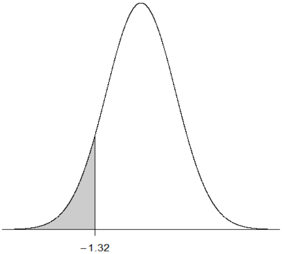
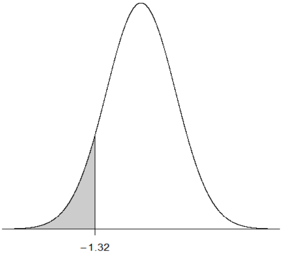


TABELA VREDNOSTI $N(0,1)$

- Kako računamo $F(x)$, za $x < 0$?
- Na osnovi simetrije porazdelitve velja $F(-x) = 1 - F(x)$.
- Primer: Izračunajmo $F(-1.32) = P(X \leq -1.32)$.



- $F(-1.32) = 1 - F(1.32) = 1 - 0.9066 = 0.0934$.

TABELA VREDNOSTI $N(0,1)$

- Kako računamo $F(x)$, ko X ima nestandardno normalno porazdelitev?

Tabela vrednosti $N(0,1)$

- Kako računamo $F(x)$, ko X ima nestandardno normalno porazdelitev?
- Primer: Naj bo X višina odraslih Slovencev, $X \sim \mathcal{N}(180, 7)$. Izračunajmo $P(X \leq 190)$.

Tabela vrednosti $N(0,1)$

- Kako računamo $F(x)$, ko X ima nestandardno normalno porazdelitev?
- Primer: Naj bo X višina odraslih Slovencev, $X \sim \mathcal{N}(180, 7)$. Izračunajmo $P(X \leq 190)$.
  - Standardizacija slučajne spremenljivke X: $Z = \frac{X-180}{7} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Tabela vrednosti $N(0,1)$

- Kako računamo $F(x)$, ko X ima nestandardno normalno porazdelitev?
- Primer: Naj bo X višina odraslih Slovencev, $X \sim \mathcal{N}(180, 7)$. Izračunajmo $P(X \leq 190)$.
  - Standardizacija slučajne spremenljivke X: $Z = \frac{X-180}{7} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

$$P(X \leq 190) = F\left(\frac{190-180}{7}\right) = F(1.43) = 0.9236.$$

Računanje kvantilov

- Iščemo vrednost x kateri ustreza verjetnost $F(x) = p$, $0 \le p \le 1$.

Računanje kvantilov

- Iščemo vrednost x kateri ustreza verjetnost $F(x) = p$, $0 \leq p \leq 1$.
- Inverzna funkcija $x = F^{-1}(p)$.

Računanje kvantilov

- Iščemo vrednost x kateri ustreza verjetnost $F(x) = p$, $0 \leq p \leq 1$.
- Inverzna funkcija $x = F^{-1}(p)$.
- Kako računamo x za $p \geq 0.5$ ($x \geq 0$)?

Računanje kvantilov

- Iščemo vrednost x kateri ustreza verjetnost $F(x) = p$, $0 \leq p \leq 1$.
- Inverzna funkcija $x = F^{-1}(p)$.
- Kako računamo x za $p \geq 0.5$ ($x \geq 0$)?
  - Primer: Za katero x je $F(x) = 0.9$?

Računanje kvantilov

- Iščemo vrednost x kateri ustreza verjetnost $F(x) = p$, $0 \leq p \leq 1$.
- Inverzna funkcija $x = F^{-1}(p)$.
- Kako računamo x za $p \geq 0.5$ ($x \geq 0$)?
  - Primer: Za katero x je $F(x) = 0.9$?

x	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	**0.8997**	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Računanje kvantilov

- Iščemo vrednost x kateri ustreza verjetnost $F(x) = p$, $0 \leq p \leq 1$.
- Inverzna funkcija $x = F^{-1}(p)$.
- Kako računamo x za $p \geq 0.5$ ($x \geq 0$)?
  - Primer: Za katero x je $F(x) = 0.9$?

x	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	**0.8997**	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

  - $x = F^{-1}(0.9) = 1.28$.

Računanje kvantilov

- Kako računamo x za $p < 0.5$ ($x < 0$)?

Računanje kvantilov

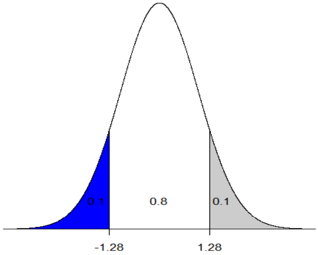
- Kako računamo x za $p < 0.5$ ($x < 0$)?
- Velja $x = F^{-1}(p) = -F^{-1}(1 - p)$.

Računanje kvantilov

- Kako računamo x za $p < 0.5$ ($x < 0$)?
- Velja $x = F^{-1}(p) = -F^{-1}(1 - p)$.

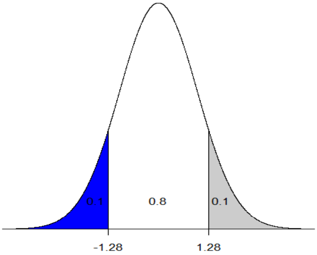
Računanje kvantilov

- Kako računamo x za $p < 0.5$ ($x < 0$)?
- Velja $x = F^{-1}(p) = -F^{-1}(1-p)$.
  - Primer: Za katero x je $F(x) = 0.1$?



Računanje kvantilov

- Kako računamo x za $p < 0.5$ ($x < 0$)?
- Velja $x = F^{-1}(p) = -F^{-1}(1-p)$.
  - Primer: Za katero x je $F(x) = 0.1$?



  - $x = F^{-1}(0.1) = -F^{-1}(1-0.1) = -F^{-1}(0.9) = -1.28$.

Primer 1. (Zbirka) Vojska poroča, da je porazdelitev obsega glav vojakov približno normalna s pričakovano vrednostjo $\mu = 56$ cm in standardnim odklonom $\sigma = 2$ cm.

a) Kolikšen delež vojakov ima obseg glave večji od 64 cm?

b) Vojska želi čelade pripraviti vnaprej in hoče, da bi se prilegale sredinskim 95 odstotkom vojakov. Preostalim vojakom bodo izdelali čelade posebej. Kateri obsegi so dovolj majhni ali pa dovolj veliki, da bodo dobili čelade po naročilu?

Primer 2.(Zbirka) Uspeh dijakov na spomladanskem roku mature pri slovenščini je bil porazdeljen normalno s pričakovano vrednostjo 65.7 točk in standardnim odklonom 11.9 točk.

a) Kolikšna je verjetnost, da je naključno izbran maturant pisal pozitivno, tj. zbral vsaj 48 točk?
b) Kolikšna je verjetnost, da je naključno izbran maturant dosegel med 60 in 70 točk?
c) Koliko točk je moral maturant zbrati pri slovenščini, da ga to uvršča med zgornjih 5% generacije?

Vsota normalnih sl. spremenljivk

- Slučajni spremenljivki $X \sim N(\mu_1, \sigma_1)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$ sta neodvisni. Potem je

$$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}).$$

Vsota normalnih sl. spremenljivk

- Slučajni spremenljivki $X \sim N(\mu_1, \sigma_1)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$ sta neodvisni. Potem je

$$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}).$$

- Slučajne spremenljivke

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1),\ X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2),\ \ldots,\ X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n)$$

so neodvisne. Potem velja

$$X_1 + X_2 \ldots + X_n \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}\right).$$

PRIMERI

Primer 3.(Zbirka) Teža jabolka X je porazdeljena normalno z $\mu_X = 180$ g in $\sigma_X = 15$ g, teža pomaranče Y pa normalno z $\mu_Y = 160$ g in $\sigma_Y = 12$ g. Kupimo 6 pomaranč in 6 jabolk. Kolikšna je verjetnost, da smo kupili manj kot 2 kg sadja?

Primer 4.(Zbirka) V trgovini prodajajo vrvi dolžine 10 m in vrvi dolžine 3 m. Dolžina vrvi z oznako 10 m je porazdeljena normalno s pričakovano vrednostjo 10 m in standardnim odklonom 2 cm, dolžina vrvi z oznako 3 m pa normalno s pričakovano vrednostjo 3 m in standardnim odklonom 1 cm. Kupimo eno vrv z oznako 10 m in eno vrv z oznako 3 m. Kolikšna je verjetnost, da bomo skupaj imeli manj kot 12.9 m vrvi?

Enostavni slučajni vzorec

Naj bo X slučajna spremenljivka. Enostavni slučajni vzorec je slučajni vektor $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, za katerega velja

- vsi členi vektorja X_i imajo isto porazdelitev kot spremenljivka X in
- členi X_i so med seboj neodvisni.

Vzorčno povprečje normalno porazdeljenega vzorca

Naj bo $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ normalno porazdeljen enostavni slučajni vzorec, $X_i \sim N(\mu, \sigma)$. Potem je porazdelitev vzorčnega povprečja $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ tudi normalna:

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Primeri

Primer 5. Čokoladnica Mali Princ vsak dan naključno izbere 20 mlečnih čokolad za kontrolo kakovosti. Predpostavimo, da je masa čokolade X (merjeno v gramih) normalno porazdeljena slučajna spremenljivka, $X \sim \mathcal{N}(100, 0.5)$. Kolikšna je verjetnost, da je vzorčno povprečje mase čokolad manjše od 99 gramov?