Računalniška grafika zapiski

Tim Hajdinjak

October 16, 2024

1 Matematične osnove

Osnovni pojmi, brez katerih žal ne gre

- stolpčna matrika: $\begin{bmatrix} 2,9 \\ -4,6 \\ 0 \end{bmatrix}$
- vrstična matrika: $\begin{bmatrix} 12,5 & -9,32 & 0 \end{bmatrix}$
- transponiranje: pomeni zamenjavo osi dveh matrik: $\begin{bmatrix} 1,3 & -4,1 & 0,0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1,3 \\ -4,1 \\ 0,0 \end{bmatrix}$
- enakost matrik: dve matriki sta si enaki, če imata enako število elementov po obeh oseh, in so vsi vsebovani elementi na enakih mestih
- vektor: predstavljen kot matrika, pomeni premik iz točke v točko in vektorji nimajo lokacije
- seštevanje matrik: $a + b = c \iff c_i = a_i + b_i$, intuitivno:

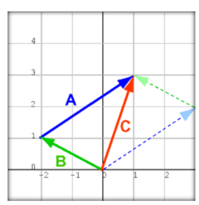


Figure 1: Geometrijsko sestevanje vektorjev. (iz repa vektorja 1 na glavo vektorja 2)

- enota za seštevanje: $a + 0 = 0 + a = a \iff \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}$
- odštevanje matrik: $a - b = c \iff c_i = a_i - b_i$
- množenje s skalarjem: $\alpha * a = b \iff b_i = \alpha * a_i$
- inverz za seštevanje: $a - a = a + -a = a + (-1)a = 0 \iff \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$
- NORMA oz. dolžina vektorja: $h = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \|h\| = \sqrt{x^2 + y^2}, oz. \|a\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$ (L2 norm oz. evklidska razdalja). Splošna norma: $\|a\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p}$. Torej, če na izpitu reče druga splošna norma, namesto p pišeš 2. Neskončna norma $\rightarrow$ dolžina se bliža maksimalni vrednosti vektorja.
- enotski vektor, pomeni vektor dolžine 1, $\|e\| = 1$
- normalizacija: $v = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \implies \hat{v} = v / \|v\| = \begin{bmatrix} v_x / \|v\| \\ v_y / \|v\| \\ v_z / \|v\| \end{bmatrix}$, $\hat{v}$ = enotskost vektorja

- skalarni produkt: $u = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \implies u * v = u_0 * v_0 + u_1 * v_1 + u_2 * v_2$. Pravimo mu tudi "detektor pravokotnosti", saj:

  1. $u * v = 0 \rightarrow$ vektorja pravokotna
  2. $u * v < 0 \rightarrow$ iztegnjen kot
  3. $u * v > 0 \rightarrow$ ostri kot
  4. $\hat{a} * \hat{b} \rightarrow$ vrednosti med $[-1, 1], -1 = 180°, 0 = 90°, 1 = 0°$

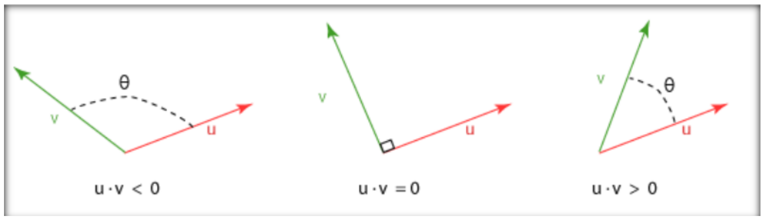


Figure 2: 2 vektorja sta ortogonalna, če je skalarni produkt enak 0 (oz. sta si pravokotna)

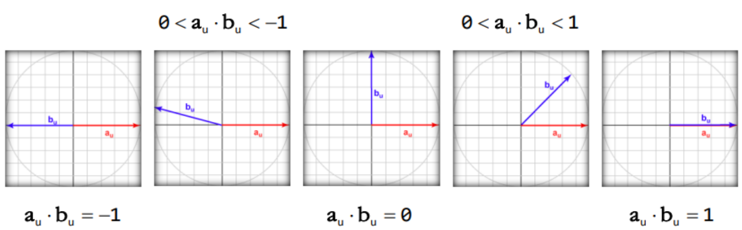


Figure 3: Skalarni produkt enotskih vektorjev

Še par pravil oz. posebnosti pri skalarnih produktih:

  - $u * v = \|u\| * \|v\| * \cos\alpha$
  - $v * v = \|v\|^2$, norma
  - $u * 0 = 0 * u = 0$, skalarni produkt z vektorjem 0
  - $0 * 0 = 0$, skalarni produkt vektorja 0
  - $u * v = v * u$, komutativnost
  - $u * (v + w) = u * v + u * w$, distributivnost za seštevanje
  - $(\alpha u) * v = u * (\alpha v) = \alpha * (u * v)$, homogenost za množenje s skalarjem
  - $u \perp v \iff u * v = 0$, skalarni produkt ortogonalnih (pravokotnih) vektorjev
  - asociativnost: nedefinirana operacija

- linearna neodvisnot, projekcija vektorja na vektor: $kv = \|w\|(w_u * v_u) * v_u$

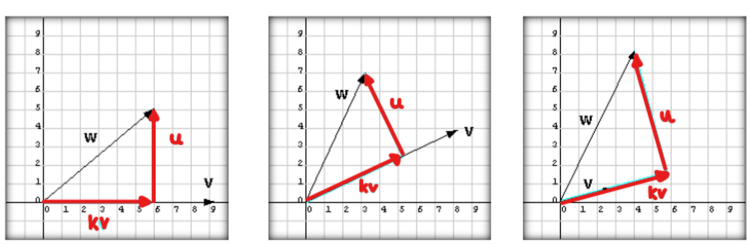


Figure 4: Projekcija vektorja na vektor

Postopek pri linearne neodvisnost:

1. Izračunaj dolžine vektorjev: $\|w\| = w * w, \|v\| = v * v$
2. Izračunaj enotske vektorje: $w_u = w/\|w\|, v_u = v/\|v\|$
3. Izračunaj kosinus kota med vektorji: $\cos\alpha = w_u * v_u$
4. Združi v projekcijo: $kv = \|w\|(w_u * v_u) * v_u$
5. Izračunaj ortogonalni vektor: $u = w - kv$

- Vektorski produkt: $u = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}, u \times v = \begin{bmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{bmatrix}$

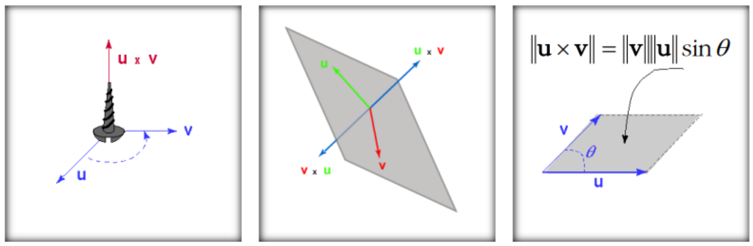


Figure 5: Vektorski produkt intuitivno

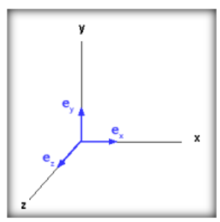


Figure 6: Enotski vektorji, ki tvorijo prostor R^3, imajo normo (dolžino) 1 in so vzajemno pravokotni. Pri tem je $e_x = (1,0,0), e_y = (0,1,0), e_z = (0,0,1)$

Zakonitosti pri vektorskem produktu:

1. $u \times v = -(v \times u)$, antikomutativnost
2. $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$, distributivnost za seštevanje
3. $(\alpha u) \times v = u \times (\alpha v) = \alpha(u \times v)$, homogenost za množenje s skalarjem
4. Asociativnost ne obstaja: $u \times (v \times w) \neq (u \times v) \times w$
5. $u \parallel v \iff u \times v = 0$, vektorski produkt kolinearnih vektorjev
6. $u \times 0 = 0 \times v = 0$, vektorski produkt vektorja 0
7. $0 \times 0 = 0$, vektorski produkt z vektorjem 0
8. $e_x \times e_y = e_z, e_y \times e_z = e_x, e_z \times e_x = e_y$, vektorski produkt koordinatnih osi, zanimivost: vidimo lahko desno pravilo

- Splošna matrika, notacija: $A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

- Seštevanje matrik: $A + B = C \iff c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, primer: $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

  Zakonitosti pri seštevanju splošnih matrik:

1. Možno le, če sta matriki enakih dimenzij!
2. $A + B = B + A$, komutativnost
3. $(A + B) + C = A + (B + C)$, asociativnost
4. $A + 0 = 0 + A = A$, enota za seštevanje
5. $A - A = A + (-1)A = 0$, inverz za seštevanje

- Množenje matrik s skalarjem: $\alpha A = B \iff b_{ij} = \alpha a_{ij}$, primer: $3 * \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -3 & 6 \\ 9 & 15 \end{bmatrix}$

  Zakonitosti pri množenju matrik s skalarjem:

  1. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$, distributivnost seštevanja matrik
  2. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$, distributivnost seštevanja skalarjev
  3. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$, asociativnost
  4. $(-1)A = -A$, množenje s skalarjem -1

- Množenje matrik: $A_{n\times m}B_{m\times p} = C_{n\times p} \iff c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$

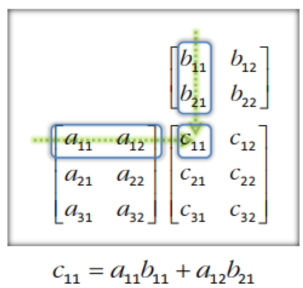


Figure 7: Miselni vzorec za množenje splošnih matrik

  Zakonitosti pri množenju matrik:

  1. $AB \neq BA$, komutativnost ne velja
  2. $(AB)C = A(BC)$, asociativnost
  3. $A(B + C) = AB + AC$, distributivnost za seštevanje
  4. $(A + B)C = AC + BC$, distributivnost za seštevanje
  5. $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$, homogenost za množenje s skalarjem
  6. $0A = 0$, množenje s skalarjem 0
  7. $A0 = 0A = 0$, množenje z matriko 0

- Enota za množenje oz. identiteta: $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$, 1 po diagonali

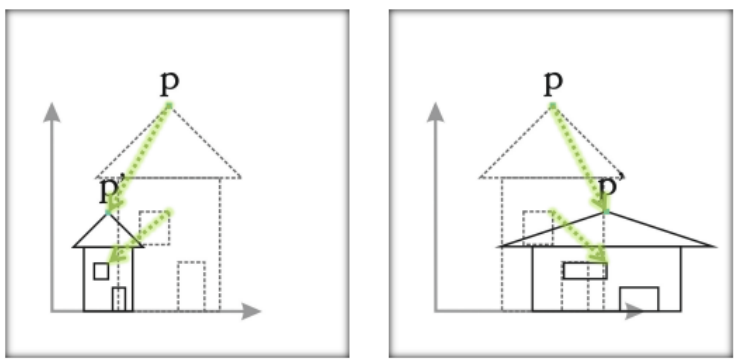
  1. $AB = BA = I \iff B = A^{-1}$
  2. $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$, inverz za množenje

- Transponiranje: $A^T = B \iff b_{ij} = a_{ji}$ Lastnosti transponiranja:

  1. $(A^T)^T = A$
  2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
  3. $(A + B)^T = A^T + B^T$
  4. $(ABC)^T = C^T B^T A^T$
  5. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

2 Transformacije in homogene koordinate

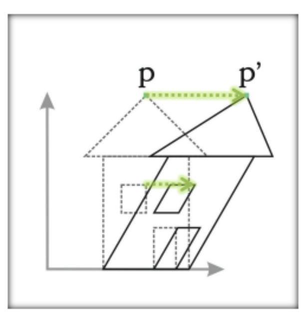
- Teselacija je matematični koncept, ki se nanaša na prekrivanje ravnine z enakimi ali različnimi geometrijskimi oblikami brez prekrivanja. Te oblike so lahko trikotniki, kvadrati, šestkotniki,..., ki se ponavljajo na urejen način, da zapolnijo celotno površino. Več oblik dodajamo, bolj natančen bo naš objekt.
- Mozaičenje: razbitje površine na manjše koščke.
- LOD (Level of Detail), tehnika, kjer se uporabljajo različne različice 3D modela z različnimi stopnjami podrobnosti glede na razdaljo modela od kamere. Torej, ko je objekt blizu kamere, se uporablja višji nivo (več teselacije), ko pa je daleč, pa nižji (manj teselacije). Namen LOD je izboljšati učinkovitost izrisa ter optimizacijo delovanja sistema.
- Ko pa aplikacija oz. program določi natančnost objektov, jih game engine uredi tako, da zmanjša število podatkov (manj teselacije).
- Vedno delamo z ogljišči, vse ostalo je potem posledica.
- Linearna transformacija: $p' = f(p)$, točko premaknemo drugam
- Razteg/skaliranje: enakomeren oz. neenakomeren



$\mathbf{p}' = s\mathbf{p}$ $\quad$ $p'_x = s_x p_x, \ p'_y = s_y p_y$

Figure 8: Primer enakomernega ter neenakomernega skaliranja

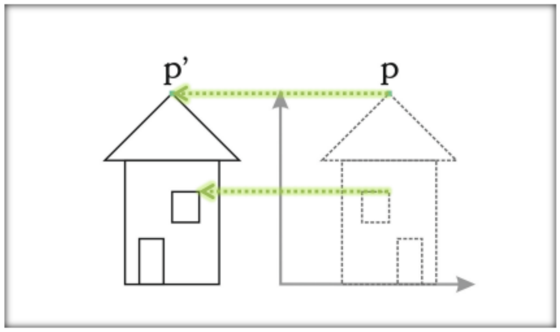
- Striženje: spreminjamo eno izmed osi na podlagi vrednosti druge osi. Če želimo striženje za kot ϕ, uporabimo kotangens kota.



$p'_x = p_x + z_x p_y, p'_y = p_y$

Figure 9: Primer striženja

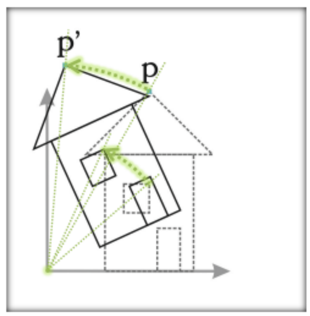
- Zrcaljenje: zrcaljenje čez koordinatne osi. Če zrcalimo dvakrat, dobimo isto. Če želimo zrcalit čez os $x = y$, uporabimo: $p'_x = p_y$ in $p'_y = p_x$



$p'_x = -p_x,\ p'_y = p_y$

Figure 10: Primer zrcaljenja preko Y osi

- Vrtenje: vedno vrtimo v nasprotno smer urinega kazalca okrog izhodišča.



$p'_x = p_x \cos\theta - p_y \sin\theta,\ p'_x = p_x \sin\theta + p_y \cos\theta$

Figure 11: Primer vrtenja okrog izhodišča

Izpeljava:

1. Zapis s polarnimi koordinatami:
   $p_x = \|p\| \cos\phi$
   $p_y = \|p\| \sin\phi$
2. Vrtenje v polarnih koordinatah:
   $p'_x = \|p\| \cos(\phi + \theta)$
   $p'_y = \|p\| \sin(\phi + \theta)$
3. Adicijski izreki kotnih funkcij:
   $p'_x = \|p\| \cos\phi \cos\theta - \|p\| \sin\phi \sin\theta$
   $p'_y = \|p\| \cos\phi \sin\theta + \|p\| \sin\phi \cos\theta$
4. Pretvorba v kartezične koordinate:
   $p'_x = p_x \cos\theta - p_y \sin\theta$
   $p'_y = p_x \sin\theta + p_y \cos\theta$

- Linearne transformacije, omenjene zgoraj, lahko zapišemo kot matrike:
  - Nova točka = matrika ∗ točka
  - Matrika 2x2 za 2D
  - Matrika 3x3 za 3D

1. $p' = Mp$, nova točka = matrika ∗ točka
2. $S(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$, za skaliranje gremo vzdolž padajoče diagonale

3. $Z(z_x, z_y) = \begin{bmatrix} 1 & z_x \\ z_y & 1 \end{bmatrix}$, striženje za nek faktor
4. $Z(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & \cot\theta \\ \cot\phi & 1 \end{bmatrix}$, striženje za kot ϕ
5. $M_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, zrcaljenje čez Y os
6. $M_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, zrcaljenje čez X os
7. $M_{x=y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, zrcaljenje čez os x=y
8. $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, rotiranje za kot θ v 2D prostoru, za obe koordinati X in Y
9. Vrtenje v 3D prostoru: $p' = R_{x|y|z}(\theta)p$. Tukaj v bistvu vrtimo objekt preko neke koordinatne osi A, da se giblje v ravnini koordinatnih osi B in C. Primer: če vrtimo okoli koordinatne osi Z, se bo objekt vrtel preko X in Y koordinate, Y = X in Z ter X = Y in Z. To pomeni, da če vrtimo preko, ne vem, koordinatne osi Z, bomo v 3x3 matriki (ker smo v 3D), dali zadnjo vrstico in stolpec (oz. vrstici in stolpcu, ki pripada tej koordinatni osi), vse 0, razen en element na 1, kjer se stikata.
   Primer: $R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (matrika, ki zavrti objekt preko koordinatne osi Z), in preko zgornje enačbe dobimo: $p' = R_z(\theta)p = \begin{bmatrix} p_x\cos\theta - p_y\sin\theta \\ p_x\sin\theta + p_y\cos\theta \\ p_z \end{bmatrix}$. Matriki za preostali koordinatni osi X in Y: $R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, $R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$

2.1 Afine transformacije

- $p' = Mp + t$, linearne transformacije s premiki
- $v = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = v_x e_x + v_y e_y + v_z e_z$, vektor zapisan tudi s pomočjo enotskih vektorjev
- $p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = p_x e_x + p_y e_y + p_z e_z + o$, dodatek homogene koordinate (1 = točka, 0 = vektor), z njimi lahko izvajam premike
- $p_h = \begin{bmatrix} wp_x \\ wp_y \\ wp_z \\ w \end{bmatrix} = wp_x e_x + wp_y e_y + wp_z e_z + wo$
- $p_h = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_h = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 0 \end{bmatrix}$, $p'_h = p_h + v_h = \begin{bmatrix} p_x + v_x \\ p_y + v_y \\ p_z + v_z \\ 1 \end{bmatrix}$, dobim točko, če pa odštejem, dobim vektor
- Premik v homogenih koordinatah: $p' = T(t)p$, T = translate, premaknemo točko za točko t.
  Primer: $p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix}, t = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow p' = \begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x + t_x \\ p_y + t_y \\ p_z + t_z \\ 1 \end{bmatrix}$

Za premike obstaja inverzna operacija, s tem vrnemo neko točko nazaj kjer je bila:
$$T(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ inverz: } T(t)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & 0 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 & -t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Razteg v homogenih koordinatah: $p' = S(s_x, s_y, s_z)p$, S = scale:
$$p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} \implies p' = \begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x p_x \\ s_y p_y \\ s_z p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$
Raztegi poznajo tudi inverzno operacijo: $S(s_x, s_y, s_z)^{-1} = S(\frac{1}{s_x}, \frac{1}{s_y}, \frac{1}{s_z})$

- Vrtenje v homogenih koordinatah (3D): $p' = R(\theta)p$, R = rotate, rotiramo za kot θ, na določeni koord. osi:
$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
Vrtenje ima tudi inverzno operacijo, vendar samo, če poznamo kot: $R(\theta)^{-1} = R(-\theta) = R(\theta)^T$

- Striženje v homogenih koordinatah: $p' = Z(z_1, \ldots, z_6)p$, Z = shear, $Z(z_1, \ldots, z_6) = \begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_2 & 0 \\ z_3 & 1 & z_4 & 0 \\ z_5 & z_6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

  V 2D prostoru gre striženje po določeni koordinatni osi, v 3D pa po vzdolž ravnine.

- Transformacijska matrika: matrika, v kateri lahko hkrati delamo več operacij

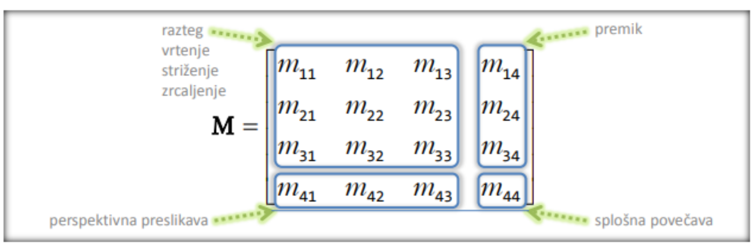


Figure 12: Definicija transformacijske matrike

2.2 Veriženje transformacij

- $p' = M_3 M_2 M_1 p$, najprej M_1, nato M_2 ter šele nato M_3
- Eulerjevi koti: $R_E(\theta_h, \theta_p, \theta_r) = R_z(\theta_r) R_x(\theta_p) R_y(\theta_h)$

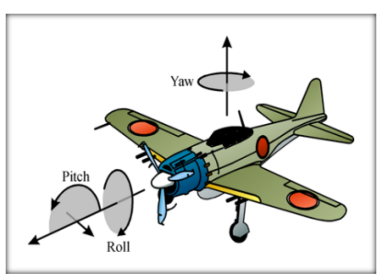


Figure 13: Eulerjevi koti, vizualno

Pitch, roll, in yaw so trije osnovni koti rotacije, ki se uporabljajo za opis orientacije telesa v tridimenzionalnem prostoru. V kontekstu Eulerjevih kotov se te rotacije nanašajo na vrtenje okrog treh pravokotnih osi, pogosto imenovanih x, y, in z osi. Eulerjevi koti so kotni parametri, ki definirajo vrtenje objekta z zaporedjem treh rotacij okoli določenih osi. Te rotacije so razdeljene na yaw, pitch, in roll, kar opisuje vrtenje glede na osnovne osi. Pomen osi:

  - Yaw: Rotacija okoli navpične osi (Z), sprememba smeri levo-desno.
  - Pitch: Rotacija okoli prečne osi (Y), dviganje ali spuščanje nosu.
  - Roll: Rotacija okoli dolžinske osi (X), nagibanje v levo ali desno.

  Eulerjevi koti se definirajo kot sekvenca treh rotacij, običajno v določenem vrstnem redu. Ena pogosta sekvenca je yaw $\to$ pitch $\to$ roll (rotacije okoli z $\to$ y $\to$ x osi), kjer vsaka naslednja rotacija vpliva na orientacijo po prejšnji. Vendar obstaja več različnih vrst Eulerjevih kotov, odvisno od izbire vrstnega reda osi.

- Kardanska zapora (angl. gimbal lock): izgubimo eno prostorsko stopnjo, če zavrtimo skozi eno os toliko, da bo poravnano z drugo osjo, ker če je 0, bo z vrtenjem tudi ostal pri 0 (zmanjša se število neodvisnih osi, saj dve osi postaneta sočasni). Je pojav, ki se pojavi pri uporabi Eulerjevih kotov za opis rotacij v tridimenzionalnem prostoru. Kardanska zapora nastane, ko se dve rotacijski osi poravnata, kar povzroči izgubo ene stopnje prostosti (degree of freedom) in vodi do nezmožnosti natančnega opisovanja rotacij okoli vseh osi.

- Zakonitosti veriženja transformacij:

  1. $p' = Mp = M_3M_2M_1p$
  2. $M_3(M_2(M_1p)) = (M_3M_2)M_1p = M_3(M_2M_1)p = (M_3M_2M_1)p$, komutativnost
  3. $p'^T = p^TM^T$, transponiranje
  4. $p'^T = p^TM_1^TM_2^TM_3^T$, transponiranje, obratni vrstni red

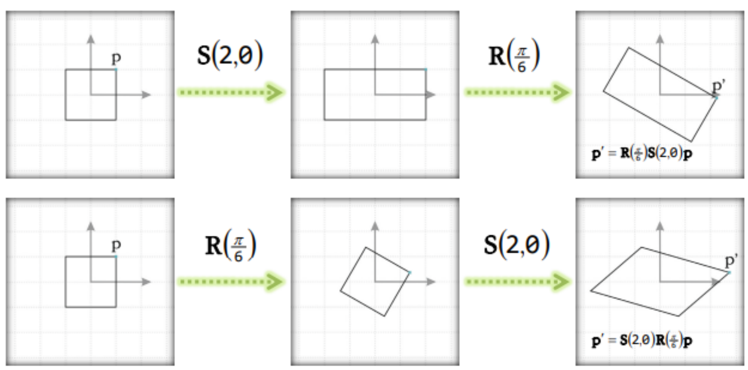


Figure 14: Primer, kako pomemben je vrstni red operacij

  5. Vrstni red operacij: SRT $\to$ skaliranje $\to$ vrtenje $\to$ premiki
  6. Vse operacije izvajamo preko izhodišča

- Transformacije vrtenja okrog poljubne točke: $p' = M_3M_2M_1p$, $p' = T(r)R(\theta)T(-r)p$

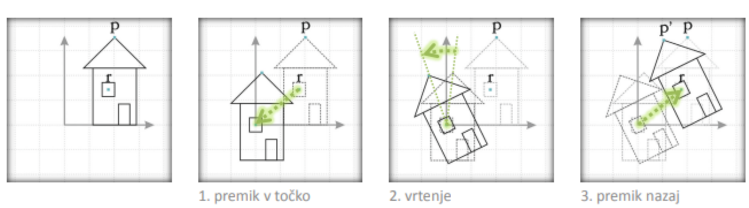


Figure 15: Postopek vrtenja okoli poljubne točke

2.3 Toge transformacije

- Vse transformacije, ki spreminjajo lokacijo in orientacijo, vendar ohranjajo obliko objekta.

2.4 Prehodi med koordinatnimi sistemi

- "Točki p, podani v koord. sistemu (x,y,z,o), poišči koordinate glede na koord. sistem (u,v,w,q)"

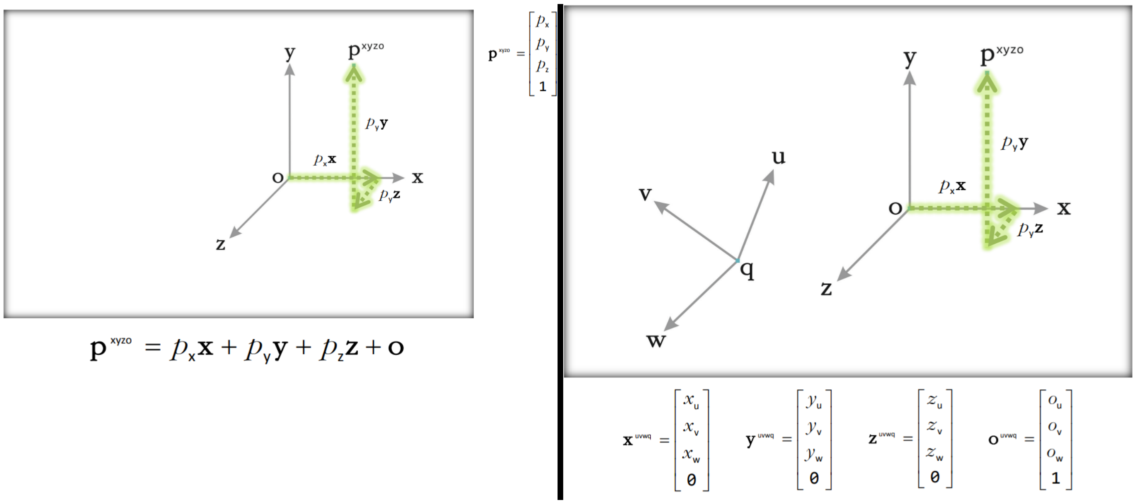


Figure 16: Predstavitev točke v enem ter v drugem sistemu

Tako lahko zapišemo: $p^{uvwq} = p_x x^{uvwq} + p_y y^{uvwq} + p_z z^{uvwq} + o^{uvwq}$, oz. $p^{uvwq} = \begin{bmatrix} x & y & z & o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix}$

Kar lahko zapišemo v skupno transformacijsko matriko, hkrati pa dobimo tudi inverz, torej prehod iz (x,y,z,o) v (u,v,w,q) ter nazaj. Pri tem oznaka B pomeni operacije raztega, vrtenja, skaliranja ter striženja.