Osnove verjetnosti in statistike

Centralni limitni izrek

Asistent dr. Kristina Veljković

CLI ZA VSOTO SL. SPREMENLJIVK

- Naj bodo $X_1, \dots, X_n$ neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke, $E(X_i) = \mu$, $D(X_i) = \sigma^2 < \infty$.
- Za dovolj velik n velja, da je porazdelitev vsote $S = X_1 + X_2 + \dots X_n$ približno normalna,

$$S \sim N(n\mu, \sigma\sqrt{n}).$$

CLI ZA VSOTO SL. SPREMENLJIVK

- Naj bodo $X_1, \ldots, X_n$ neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke, $E(X_i) = \mu$, $D(X_i) = \sigma^2 < \infty$.
- Za dovolj velik n velja, da je porazdelitev vsote $S = X_1 + X_2 + \ldots X_n$ približno normalna,

$$S \sim N(n\mu, \sigma\sqrt{n}).$$

- Za večino porazdelitev slučajnih spremenljivk X_i, $i = 1, 2, \ldots n$ velja, da je aproksimacija porazdelitve vsote z normalno porazdelitvijo dobra že za $n \geq 30$.

CLI ZA VSOTO ZVEZNIH SL. SPREMENLJIVK

Primer 1. (Zbirka) Jasna in Marko imata hčerko Živo, ki hodi na gimnastiko v vrtcu dvakrat tedensko. Gimnastika se začne ob 16.00 in traja eno uro. Ker sta Jasna in Marko precej zaposlena, prideta pogosto do vrtca prepozno. Učiteljica gimnastike uveljavlja strogo politiko točnosti tako, da zaračunava za zamudo, sorazmerno z dolžino zamude in sicer 1 EUR na minuto. Predpostavimo, da zamuda v minutah za vsako uro gimnastike sledi eksponentni porazdelitvi s pričakovano vrednostjo 6 (tj. $\mathcal{E}\left(\frac{1}{6}\right)$). Živa je prijavljena na gimnastiko 50 tednov v naslednjem letu. Oceni verjetnost, da bodo njeni starši za zamude plačali več kot 630 EUR.

CLI ZA VSOTO DISKRETNIH SL. SPREMENLJIVK

- Naj bodo X_i, $i = 1, 2, \ldots n$ diskretne slučajne spremenljivke.
- Pri aproksimaciji diskretne porazdelitve vsote $S = X_1 + X_2 + \ldots X_n$ z normalno porazdelitvijo $N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$ uporabljamo popravek za zveznost (vrednost 0.5).

$$P(a \leq S \leq b) \approx F\left(\frac{b + 0.5 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) - F\left(\frac{a - 0.5 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

CLI ZA VSOTO DISKRETNIH SL. SPREMENLJIVK

Primer 2. (Zbirka) Policisti vsak dan ustavijo nekaj pijanih voznikov. Njihova statistika kaže, da je en od 20 ustavljenih voznikov pijan. Policija je imela veliko tedensko akcijo, v kateri je poostreno nadzirala psihofizično stanje voznikov na slovenskih cestah. V akciji so ustavili 10000 voznikov. Kolikšna je verjetnost, da je pijanih več kot pričakovano število?

CLI ZA VSOTO DISKRETNIH SL. SPREMENLJIVK

Primer 3. (Zbirka) Smrtnost piščancev na piščančji farmi je 5%. S smrtjo vsakega piščanca ima farma 5 evrov izgube.

CLI ZA VSOTO DISKRETNIH SL. SPREMENLJIVK

Primer 3. (Zbirka) Smrtnost piščancev na piščančji farmi je 5%. S smrtjo vsakega piščanca ima farma 5 evrov izgube.

a) Kako verjetno je, da bodo imeli v skupini 200 piščancev zaradi smrti živali manj kot 30 evrov izgube?

CLI ZA VSOTO DISKRETNIH SL. SPREMENLJIVK

Primer 3. (Zbirka) Smrtnost piščancev na piščančji farmi je 5%. S smrtjo vsakega piščanca ima farma 5 evrov izgube.

a) Kako verjetno je, da bodo imeli v skupini 200 piščancev zaradi smrti živali manj kot 30 evrov izgube?
b) Kolikšna je ta verjetnost, če jim uspe smrtnost zmanjšati za 1%?

CLI ZA VSOTO DISKRETNIH SL. SPREMENLJIVK

Primer 3. (Zbirka) Smrtnost piščancev na piščančji farmi je 5%. S smrtjo vsakega piščanca ima farma 5 evrov izgube.

a) Kako verjetno je, da bodo imeli v skupini 200 piščancev zaradi smrti živali manj kot 30 evrov izgube?
b) Kolikšna je ta verjetnost, če jim uspe smrtnost zmanjšati za 1%?
c) Na koliko morajo zmanjšati smrtnost, če želijo imeti z verjetnostjo 90% manj kot 30 evrov izgube?

CLI ZA VSOTO SL. SPREMENLJIVK

Primer 4. (Zbirka) Zavarovalnica ima n strank. Verjetnost, da stranka uveljavi zavarovanje, je 2%, višina zahtevka pa je normalno porazdeljena slučajna spremenljivka s pričakovano vrednostjo 2000 in standardnim odklonom 400 evrov.

CLI ZA VSOTO SL. SPREMENLJIVK

Primer 4. (Zbirka) Zavarovalnica ima n strank. Verjetnost, da stranka uveljavi zavarovanje, je 2%, višina zahtevka pa je normalno porazdeljena slučajna spremenljivka s pričakovano vrednostjo 2000 in standardnim odklonom 400 evrov.Naj bo X_i enak 1, če i-ti zavarovanec uveljavi zavarovanje, in 0 sicer, ter Y_i - višina zahtevka.

CLI ZA VSOTO SL. SPREMENLJIVK

Primer 4. (Zbirka) Zavarovalnica ima n strank. Verjetnost, da stranka uveljavi zavarovanje, je 2%, višina zahtevka pa je normalno porazdeljena slučajna spremenljivka s pričakovano vrednostjo 2000 in standardnim odklonom 400 evrov.Naj bo X_i enak 1, če i-ti zavarovanec uveljavi zavarovanje, in 0 sicer, ter Y_i - višina zahtevka.

a) Strošek, ki ga ima zavarovalnica zaradi i-te stranke zapišemo kot $Z_i = X_i Y_i$. Izračunaj $E(Z_i)$ in $\sigma(Z_i)$. Pri tem upoštevaj neodvisnost X_i in Y_i.

CLI ZA VSOTO SL. SPREMENLJIVK

Primer 4. (Zbirka) Zavarovalnica ima n strank. Verjetnost, da stranka uveljavi zavarovanje, je 2%, višina zahtevka pa je normalno porazdeljena slučajna spremenljivka s pričakovano vrednostjo 2000 in standardnim odklonom 400 evrov.Naj bo X_i enak 1, če i-ti zavarovanec uveljavi zavarovanje, in 0 sicer, ter Y_i - višina zahtevka.

a) Strošek, ki ga ima zavarovalnica zaradi i-te stranke zapišemo kot $Z_i = X_i Y_i$. Izračunaj $E(Z_i)$ in $\sigma(Z_i)$. Pri tem upoštevaj neodvisnost X_i in Y_i.

b) Naj bo $n = 10\,000$ in višina zavarovalne premije 45 evrov. Koliko je verjetnost, da bodo premije pokrile stroške zaradi izplačil?

CLI ZA VSOTO SL. SPREMENLJIVK

Primer 4. (Zbirka) Zavarovalnica ima n strank. Verjetnost, da stranka uveljavi zavarovanje, je 2%, višina zahtevka pa je normalno porazdeljena slučajna spremenljivka s pričakovano vrednostjo 2000 in standardnim odklonom 400 evrov.Naj bo X_i enak 1, če i-ti zavarovanec uveljavi zavarovanje, in 0 sicer, ter Y_i - višina zahtevka.

a) Strošek, ki ga ima zavarovalnica zaradi i-te stranke zapišemo kot $Z_i = X_i Y_i$. Izračunaj $E(Z_i)$ in $\sigma(Z_i)$. Pri tem upoštevaj neodvisnost X_i in Y_i.

b) Naj bo $n = 10\,000$ in višina zavarovalne premije 45 evrov. Koliko je verjetnost, da bodo premije pokrile stroške zaradi izplačil?

c) Zavarovalnica hoče ponuditi premijo višine 43 evrov. Najmanj koliko zavarovancev bi morala imeti, da z verjetnostjo vsaj 95% lahko pokrije stroške?

CLI ZA VZORČNO POVPREČJE VZORCA

- Naj bo $(X_1, X_2, \dots X_n)$ enostavni slučajni vzorec in

$$E(X_i) = \mu,\ D(X_i) = \sigma^2 < \infty.$$

- Za dovolj veliki vzorec je porazdelitev vzorčnega povprečja $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ približno normalna

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

CLI ZA VZORČNO POVPREČJE

Primer 5. (Zbirka) Pričakovana vrednost življenjske dobe ene vrste električnih žarnic je $\mu = 500$ ur, standardni odklon pa je $\sigma = 60$ ur. Naključno izberemo vzorec 100 žarnic. Kolikšna je verjetnost, da je vzorčno povprečje življenjske dobe večje od 510 ur?