

# Računalniška grafika zapiski

Tim Hajdinjak

October 14, 2024

## 1 Matematične osnove

Osnovni pojmi, brez katerih žal ne gre

- stolpčna matrika:  $\begin{bmatrix} 2, 9 \\ -4, 6 \\ 0 \end{bmatrix}$
- vrstična matrika:  $[12, 5 \quad -9, 32 \quad 0]$
- transponiranje: pomeni zamenjavo osi dveh matrik:  $[1, 3 \quad -4, 1 \quad 0, 0]^T = \begin{bmatrix} 1, 3 \\ -4, 1 \\ 0, 0 \end{bmatrix}$
- enakost matrik: dve matriki sta si enaki, če imata enako število elementov po obeh oseh, in so vsi vsebovani elementi na enakih mestih
- vektor: predstavljen kot matrika, pomeni premik iz točke v točko in vektorji nimajo lokacije
- seštevanje matrik:  $a + b = c \iff c_i = a_i + b_i$ , intuitivno:

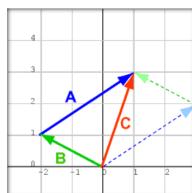


Figure 1: Geometrijsko seštevanje vektorjev. (iz repa vektorja 1 na glavo vektorja 2)

- enota za seštevanje:  $a + 0 = 0 + a = a \iff [3 \quad -1] + [0 \quad 0] = [3 \quad -1]$
- odštevanje matrik:  $a - b = c \iff c_i = a_i - b_i$
- množenje s skalarjem:  $\alpha * a = b \iff b_i = \alpha * a_i$
- inverz za seštevanje:  $a - a = a + -a = a + (-1)a = 0 \iff [2 \quad 5] - [2 \quad 5] = [2 \quad 5] + [-2 \quad -5] = [0 \quad 0]$
- NORMA oz. dolžina vektorja:  $h = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \|h\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , oz.  $\|a\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$  (L2 norm oz. evklidska razdalja). Splošna norma:  $\|a\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |a_i|^p}$ . Torej, če na izpitu reče druga splošna norma, namesto p pišeš 2. Neskončna norma  $\rightarrow$  dolžina se bliža maksimalni vrednosti vektorja.
- enotski vektor, pomeni vektor dolžine 1,  $\|e\| = 1$
- normalizacija:  $v = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \implies \hat{v} = v / \|v\| = \begin{bmatrix} v_x / \|v\| \\ v_y / \|v\| \\ v_z / \|v\| \end{bmatrix}$ ,  $\hat{v}$  = enotskost vektorja

- skalarni produkt:  $u = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \Rightarrow u * v = u_0 * v_0 + u_1 * v_1 + u_2 * v_2$ . Pravimo mu tudi "detektor pravokotnosti", saj:

1.  $u * v = 0 \rightarrow$  vektorja pravokotna
2.  $u * v < 0 \rightarrow$  iztegnjen kot
3.  $u * v > 0 \rightarrow$  ostri kot
4.  $\hat{a} * \hat{b} \rightarrow$  vrednosti med  $[-1, 1]$ ,  $-1 = 180^\circ, 0 = 90^\circ, 1 = 0^\circ$

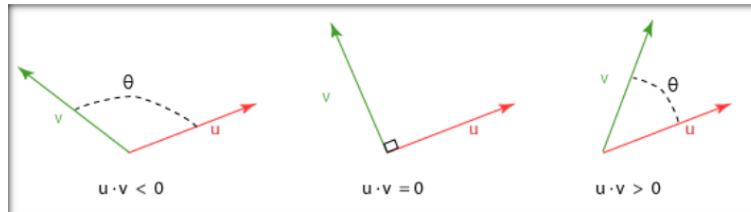


Figure 2: 2 vektorja sta ortogonalna, če je skalarni produkt enak 0 (oz. sta si pravokotna)

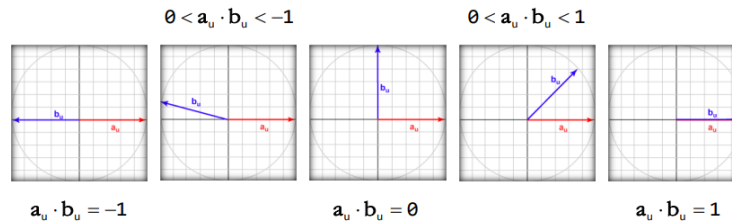


Figure 3: Skalarni produkt enotskih vektorjev

Še par pravil oz. posebnosti pri skalarnih produktih:

- $u * v = \|u\| * \|v\| * \cos \alpha$
  - $v * v = \|v\|^2$ , norma
  - $u * 0 = 0 * u = 0$ , skalarni produkt z vektorjem 0
  - $0 * 0 = 0$ , skalarni produkt vektorja 0
  - $u * v = v * u$ , komutativnost
  - $u * (v + w) = u * v + u * w$ , distributivnost za seštevanje
  - $(\alpha u) * v = u * (\alpha v) = \alpha * (u * v)$ , homogenost za množenje s skalarjem
  - $u \perp v \iff u * v = 0$ , skalarni produkt ortogonalnih (pravokotnih) vektorjev
  - asociativnost: nedefinirana operacija
- linearna neodvisnot, projekcija vektorja na vektor:  $kv = \|w\|(w_u * v_u) * v_u$

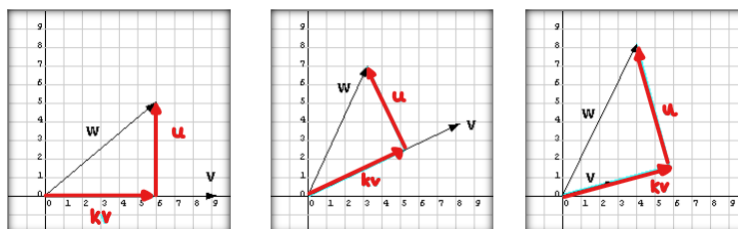


Figure 4: Projekcija vektorja na vektor

Postopek pri linearne neodvisnost:

1. Izračunaj dolžine vektorjev:  $\|w\| = w * w, \|v\| = v * v$
2. Izračunaj enotske vektorje:  $w_u = w/\|w\|, v_u = v/\|v\|$
3. Izračunaj kosinus kota med vektorji:  $\cos \alpha = w_u * v_u$
4. Združi v projekcijo:  $kv = \|w\|(w_u * v_u) * v_u$
5. Izračunaj ortogonalni vektor:  $u = w - kv$

• Vektorski produkt:  $u = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}, u \times v = \begin{bmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{bmatrix}$

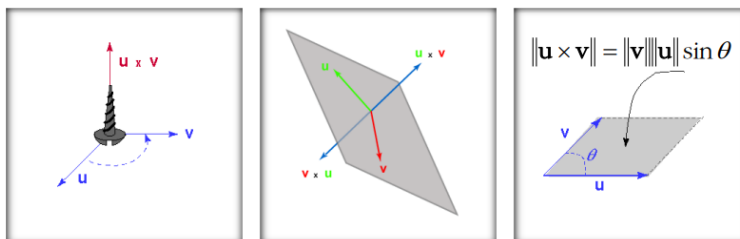


Figure 5: Vektorski produkt intuitivno

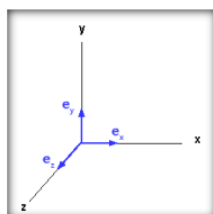


Figure 6: Enotski vektorji, ki tvorijo prostor  $R^3$ , imajo normo (dolžino) 1 in so vzajemno pravokotni. Pri tem je  $e_x = (1, 0, 0), e_y = (0, 1, 0), e_z = (0, 0, 1)$

Zakovitosti pri vektorskem produktu:

1.  $u \times v = -(v \times u)$ , antikomutativnost
2.  $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$ , distributivnost za seštevanje
3.  $(\alpha u) \times v = u \times (\alpha v) = \alpha(u \times v)$ , homogenost za množenje s skalarjem
4. Asociativnost ne obstaja:  $u \times (v \times w) \neq (u \times v) \times w$
5.  $u \parallel v \iff u \times v = 0$ , vektorski produkt kolinearnih vektorjev
6.  $u \times 0 = 0 \times v = 0$ , vektorski produkt vektorja 0
7.  $0 \times 0 = 0$ , vektorski produkt z vektorjem 0
8.  $e_x \times e_y = e_z, e_y \times e_z = e_x, e_z \times e_x = e_y$ , vektorski produkt koordinatnih osi, zanimivost: vidimo lahko desno pravilo

• Splošna matrika, notacija:  $A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

• Seštevanje matrik:  $A + B = C \iff c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ , primer:  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

Zakovitosti pri seštevanju splošnih matrik:

1. Možno le, če sta matriki enakih dimenzij!
2.  $A + B = B + A$ , komutativnost
3.  $(A + B) + C = A + (B + C)$ , asociativnost
4.  $A + 0 = 0 + A = A$ , enota za seštevanje
5.  $A - A = A + (-1)A = 0$ , inverz za seštevanje

- Množenje matrik s skalarjem:  $\alpha A = B \iff b_{ij} = \alpha a_{ij}$ , primer:  $3 * \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -3 & 6 \\ 9 & 15 \end{bmatrix}$

Zakovitosti pri množenju matrik s skalarjem:

1.  $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ , distributivnost seštevanja matrik
2.  $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ , distributivnost seštevanja skalarjev
3.  $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$ , asociativnost
4.  $(-1)A = -A$ , množenje s skalarjem -1

- Množenje matrik:  $A_{n \times m} B_{m \times p} = C_{n \times p} \iff c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$

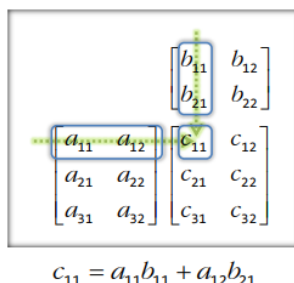


Figure 7: Miselni vzorec za množenje splošnih matrik

Zakovitosti pri množenju matrik:

1.  $AB \neq BA$ , komutativnost ne velja
2.  $(AB)C = A(BC)$ , asociativnost
3.  $A(B + C) = AB + AC$ , distributivnost za seštevanje
4.  $(A + B)C = AC + BC$ , distributivnost za seštevanje
5.  $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$ , homogenost za množenje s skalarjem
6.  $0A = 0$ , množenje s skalarjem 0
7.  $A0 = 0A = 0$ , množenje z matriko 0

- Enota za množenje oz. identiteta:  $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$ , 1 po diagonalni

1.  $AB = BA = I \iff B = A^{-1}$
2.  $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ , inverz za množenje

- Transponiranje:  $A^T = B \iff b_{ij} = a_{ji}$  Lastnosti transponiranja:

1.  $(A^T)^T = A$
2.  $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
3.  $(A + B)^T = A^T + B^T$
4.  $(ABC)^T = C^T B^T A^T$
5.  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

## 2 Transformacije in homogene koordinate

## 3 Some examples to get started

### 3.1 How to create Sections and Subsections

Simply use the section and subsection commands, as in this example document! With Overleaf, all the formatting and numbering is handled automatically according to the template you’ve chosen. If you’re using the Visual Editor, you can also create new section and subsections via the buttons in the editor toolbar.

### 3.2 How to include Figures

First you have to upload the image file from your computer using the upload link in the file-tree menu. Then use the `includegraphics` command to include it in your document. Use the `figure` environment and the `caption` command to add a number and a caption to your figure. See the code for Figure ?? in this section for an example.

Note that your figure will automatically be placed in the most appropriate place for it, given the surrounding text and taking into account other figures or tables that may be close by. You can find out more about adding images to your documents in this help article on [including images on Overleaf](#).

### 3.3 How to add Tables

Use the `table` and `tabular` environments for basic tables — see Table 1, for example. For more information, please see this help article on [tables](#).

Item	Quantity
Widgets	42
Gadgets	13

Table 1: An example table.

### 3.4 How to add Comments and Track Changes

Comments can be added to your project by highlighting some text and clicking “Add comment” in the top right of the editor pane. To view existing comments, click on the Review menu in the toolbar above. To reply to a comment, click on the Reply button in the lower right corner of the comment. You can close the Review pane by clicking its name on the toolbar when you’re done reviewing for the time being.

Track changes are available on all our [premium plans](#), and can be toggled on or off using the option at the top of the Review pane. Track changes allow you to keep track of every change made to the document, along with the person making the change.

### 3.5 How to add Lists

You can make lists with automatic numbering ...

1. Like this,
2. and like this.

...or bullet points ...

- Like this,
- and like this.