Računalniška grafika zapiski

Tim Hajdinjak

October 15, 2024

1 Matematične osnove

Osnovni pojmi, brez katerih žal ne gre

- stolpčna matrika: $\begin{bmatrix} 2,9 \\ -4,6 \\ 0 \end{bmatrix}$
- vrstična matrika: $\begin{bmatrix} 12,5 & -9,32 & 0 \end{bmatrix}$
- transponiranje: pomeni zamenjavo osi dveh matrik: $\begin{bmatrix} 1,3 & -4,1 & 0,0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1,3 \\ -4,1 \\ 0,0 \end{bmatrix}$
- enakost matrik: dve matriki sta si enaki, če imata enako število elementov po obeh oseh, in so vsi vsebovani elementi na enakih mestih
- vektor: predstavljen kot matrika, pomeni premik iz točke v točko in vektorji nimajo lokacije
- seštevanje matrik: $a + b = c \iff c_i = a_i + b_i$, intuitivno:

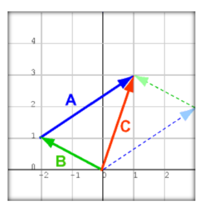


Figure 1: Geometrijsko sestevanje vektorjev. (iz repa vektorja 1 na glavo vektorja 2)

- enota za seštevanje: $a + 0 = 0 + a = a \iff \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}$
- odštevanje matrik: $a - b = c \iff c_i = a_i - b_i$
- množenje s skalarjem: $\alpha * a = b \iff b_i = \alpha * a_i$
- inverz za seštevanje: $a - a = a + -a = a + (-1)a = 0 \iff \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$
- NORMA oz. dolžina vektorja: $h = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \|h\| = \sqrt{x^2 + y^2}, oz. \|a\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$ (L2 norm oz. evklidska razdalja). Splošna norma: $\|a\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p}$. Torej, če na izpitu reče druga splošna norma, namesto p pišeš 2. Neskončna norma $\rightarrow$ dolžina se bliža maksimalni vrednosti vektorja.
- enotski vektor, pomeni vektor dolžine 1, $\|e\| = 1$
- normalizacija: $v = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \implies \hat{v} = v/\|v\| = \begin{bmatrix} v_x/\|v\| \\ v_y/\|v\| \\ v_z/\|v\| \end{bmatrix}, \hat{v}$ = enotskost vektorja

- skalarni produkt: $u = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \implies u * v = u_0 * v_0 + u_1 * v_1 + u_2 * v_2$. Pravimo mu tudi "detektor pravokotnosti", saj:
  1. $u * v = 0 \rightarrow$ vektorja pravokotna
  2. $u * v < 0 \rightarrow$ iztegnjen kot
  3. $u * v > 0 \rightarrow$ ostri kot
  4. $\hat{a} * \hat{b} \rightarrow$ vrednosti med $[-1, 1], -1 = 180°, 0 = 90°, 1 = 0°$

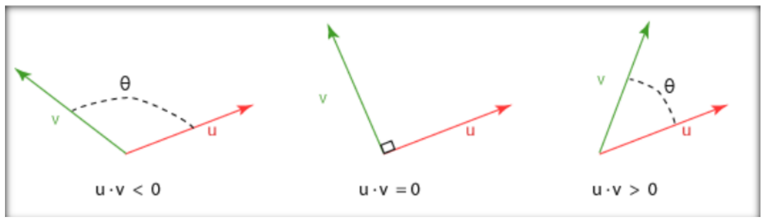


Figure 2: 2 vektorja sta ortogonalna, če je skalarni produkt enak 0 (oz. sta si pravokotna)

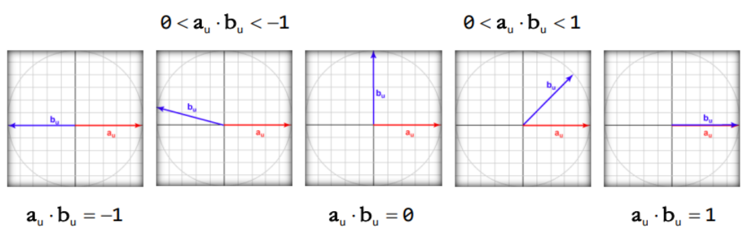


Figure 3: Skalarni produkt enotskih vektorjev

Še par pravil oz. posebnosti pri skalarnih produktih:

- $u * v = \|u\| * \|v\| * \cos\alpha$
- $v * v = \|v\|^2$, norma
- $u * 0 = 0 * u = 0$, skalarni produkt z vektorjem 0
- $0 * 0 = 0$, skalarni produkt vektorja 0
- $u * v = v * u$, komutativnost
- $u * (v + w) = u * v + u * w$, distributivnost za seštevanje
- $(\alpha u) * v = u * (\alpha v) = \alpha * (u * v)$, homogenost za množenje s skalarjem
- $u \perp v \iff u * v = 0$, skalarni produkt ortogonalnih (pravokotnih) vektorjev
- asociativnost: nedefinirana operacija

- linearna neodvisnot, projekcija vektorja na vektor: $kv = \|w\|(w_u * v_u) * v_u$

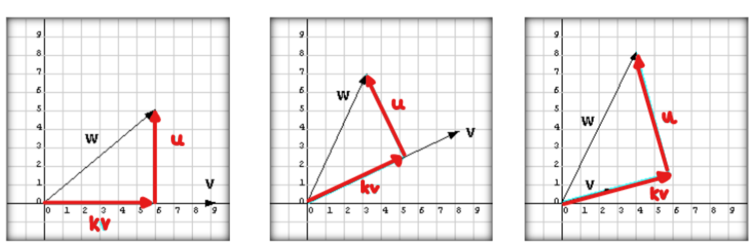


Figure 4: Projekcija vektorja na vektor

Postopek pri linearne neodvisnost:

1. Izračunaj dolžine vektorjev: $\|w\| = w * w, \|v\| = v * v$
2. Izračunaj enotske vektorje: $w_u = w/\|w\|, v_u = v/\|v\|$
3. Izračunaj kosinus kota med vektorji: $\cos\alpha = w_u * v_u$
4. Združi v projekcijo: $kv = \|w\|(w_u * v_u) * v_u$
5. Izračunaj ortogonalni vektor: $u = w - kv$

- Vektorski produkt: $u = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}, u \times v = \begin{bmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{bmatrix}$

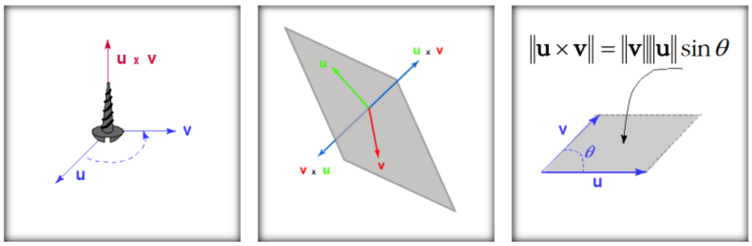


Figure 5: Vektorski produkt intuitivno

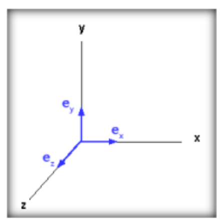


Figure 6: Enotski vektorji, ki tvorijo prostor R^3, imajo normo (dolžino) 1 in so vzajemno pravokotni. Pri tem je $e_x = (1,0,0), e_y = (0,1,0), e_z = (0,0,1)$

Zakonitosti pri vektorskem produktu:

1. $u \times v = -(v \times u)$, antikomutativnost
2. $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$, distributivnost za seštevanje
3. $(\alpha u) \times v = u \times (\alpha v) = \alpha(u \times v)$, homogenost za množenje s skalarjem
4. Asociativnost ne obstaja: $u \times (v \times w) \neq (u \times v) \times w$
5. $u \parallel v \iff u \times v = 0$, vektorski produkt kolinearnih vektorjev
6. $u \times 0 = 0 \times v = 0$, vektorski produkt vektorja 0
7. $0 \times 0 = 0$, vektorski produkt z vektorjem 0
8. $e_x \times e_y = e_z, e_y \times e_z = e_x, e_z \times e_x = e_y$, vektorski produkt koordinatnih osi, zanimivost: vidimo lahko desno pravilo

- Splošna matrika, notacija: $A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

- Seštevanje matrik: $A + B = C \iff c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, primer: $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

  Zakonitosti pri seštevanju splošnih matrik:

1. Možno le, če sta matriki enakih dimenzij!
2. $A + B = B + A$, komutativnost
3. $(A + B) + C = A + (B + C)$, asociativnost
4. $A + 0 = 0 + A = A$, enota za seštevanje
5. $A - A = A + (-1)A = 0$, inverz za seštevanje

- Množenje matrik s skalarjem: $\alpha A = B \iff b_{ij} = \alpha a_{ij}$, primer: $3 * \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -3 & 6 \\ 9 & 15 \end{bmatrix}$

  Zakonitosti pri množenju matrik s skalarjem:

  1. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$, distributivnost seštevanja matrik
  2. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$, distributivnost seštevanja skalarjev
  3. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$, asociativnost
  4. $(-1)A = -A$, množenje s skalarjem -1

- Množenje matrik: $A_{n\times m}B_{m\times p} = C_{n\times p} \iff c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$

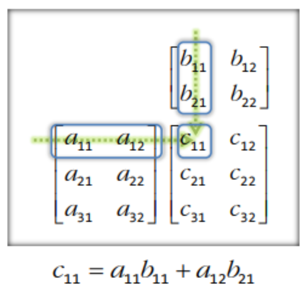


Figure 7: Miselni vzorec za množenje splošnih matrik

  Zakonitosti pri množenju matrik:

  1. $AB \neq BA$, komutativnost ne velja
  2. $(AB)C = A(BC)$, asociativnost
  3. $A(B + C) = AB + AC$, distributivnost za seštevanje
  4. $(A + B)C = AC + BC$, distributivnost za seštevanje
  5. $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$, homogenost za množenje s skalarjem
  6. $0A = 0$, množenje s skalarjem 0
  7. $A0 = 0A = 0$, množenje z matriko 0

- Enota za množenje oz. identiteta: $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$, 1 po diagonali

  1. $AB = BA = I \iff B = A^{-1}$
  2. $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$, inverz za množenje

- Transponiranje: $A^T = B \iff b_{ij} = a_{ji}$ Lastnosti transponiranja:

  1. $(A^T)^T = A$
  2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
  3. $(A + B)^T = A^T + B^T$
  4. $(ABC)^T = C^T B^T A^T$
  5. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

2 Transformacije in homogene koordinate

- Teselacija je matematični koncept, ki se nanaša na prekrivanje ravnine z enakimi ali različnimi geometrijskimi oblikami brez prekrivanja. Te oblike so lahko trikotniki, kvadrati, šestkotniki,..., ki se ponavljajo na urejen način, da zapolnijo celotno površino. Več oblik dodajamo, bolj natančen bo naš objekt.
- Mozaičenje: razbitje površine na manjše koščke.
- LOD (Level of Detail), tehnika, kjer se uporabljajo različne različice 3D modela z različnimi stopnjami podrobnosti glede na razdaljo modela od kamere. Torej, ko je objekt blizu kamere, se uporablja višji nivo (več teselacije), ko pa je daleč, pa nižji (manj teselacije). Namen LOD je izboljšati učinkovitost izrisa ter optimizacijo delovanja sistema.
- Ko pa aplikacija oz. program določi natančnost objektov, jih game engine uredi tako, da zmanjša število podatkov (manj teselacije).
- Vedno delamo z ogljišči, vse ostalo je potem posledica.
- Linearna transformacija: $p' = f(p)$, točko premaknemo drugam
- Razteg/skaliranje: enakomeren oz. neenakomeren

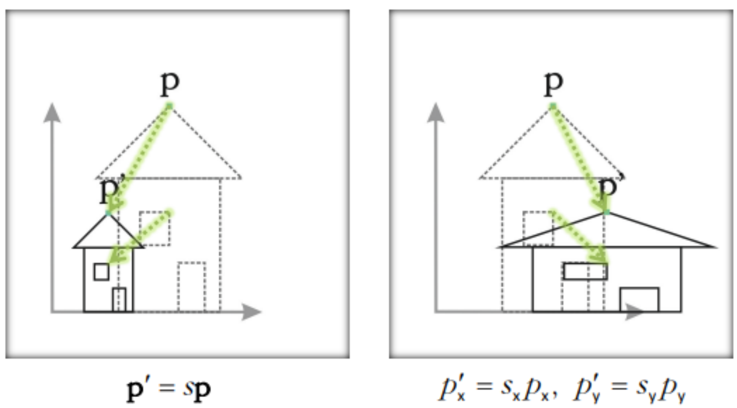


Figure 8: Primer enakomernega ter neenakomernega skaliranja

- Striženje: spreminjamo eno izmed osi na podlagi vrednosti druge osi. Če želimo striženje za kot ϕ, uporabimo kotangens kota.

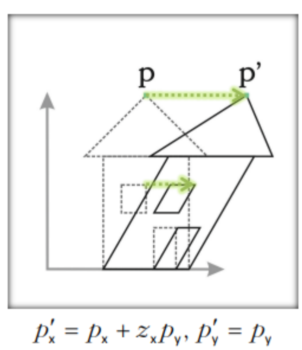
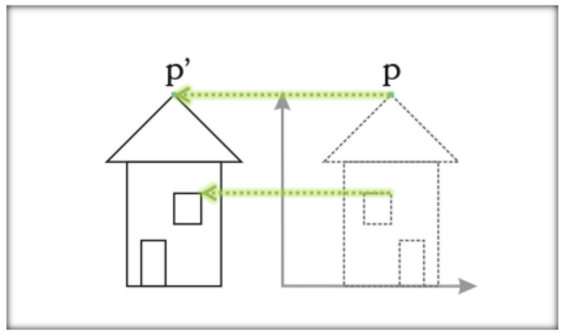


Figure 9: Primer striženja

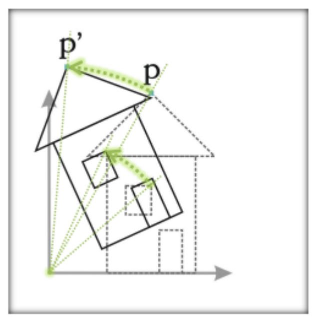
- Zrcaljenje: zrcaljenje čez koordinatne osi. Če zrcalimo dvakrat, dobimo isto. Če želimo zrcalit čez os $x = y$, uporabimo: $p'_x = p_y$ in $p'_y = p_x$



$$p'_x = -p_x,\ p'_y = p_y$$

Figure 10: Primer zrcaljenja preko Y osi

- Vrtenje: vedno vrtimo v nasprotno smer urinega kazalca okrog izhodišča.



$$p'_x = p_x \cos\theta - p_y \sin\theta,\ p'_x = p_x \sin\theta + p_y \cos\theta$$

Figure 11: Primer vrtenja okrog izhodišča

Izpeljava:

1. Zapis s polarnimi koordinatami:
   $p_x = \|p\| \cos \phi$
   $p_y = \|p\| \sin \phi$
2. Vrtenje v polarnih koordinatah:
   $p'_x = \|p\| \cos (\phi + \theta)$
   $p'_y = \|p\| \sin (\phi + \theta)$
3. Adicijski izreki kotnih funkcij:
   $p'_x = \|p\| \cos \phi \cos \theta - \|p\| \sin \phi \sin \theta$
   $p'_y = \|p\| \cos \phi \sin \theta + \|p\| \sin \phi \cos \theta$
4. Pretvorba v kartezične koordinate:
   $p'_x = p_x \cos \theta - p_y \sin \theta$
   $p'_y = p_x \sin \theta + p_y \cos \theta$

- Linearne transformacije, zapisane kot matrike:
  - Nova točka = matrika $*$ točka
  - Matrika 2x2 za 2D
  - Matrika 3x3 za 3D

1. $p' = Mp$, nova točka = matrika $*$ točka