

Osnove verjetnosti in statistike

Popolna verjetnost in Bayesova formula

Asistent dr. Kristina Veljković

POPOLN SISTEM DOGODKOV

Dogodki $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$ ($H_i \neq N, 1 \leq i \leq n$) tvorijo popoln sistem dogodkov, če velja

► $H_i H_j = N$ za vse $i \neq j$ in

► $\bigcup_{i=1}^n H_i = G.$

IZREK O POPOLNI VERJETNOSTI

Če $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$ tvorijo popoln sistem dogodkov, potem velja

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(AH_i) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A|H_i).$$

BAYESOVA FORMULA

Če $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$ tvorijo popoln sistem dogodkov, velja

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}.$$

Primer 1.(Zbirka) Na mizi sta dve posodi. V prvi posodi je 6 rdečih in 8 črnih kroglic, v drugi pa 7 rdečih in 6 črnih. Iz prve posode na slepo izberemo 1 kroglico in jo prestavimo v drugo posodo. Nato iz druge posode izvlečemo dve kroglici.

- a) Kolikšna je verjetnost, da smo prestavili črno kroglico?
- b) Kolikšna je verjetnost, da sta izvlečeni kroglici črni?
- c) Kolikšna je verjetnost, da smo prestavili črno kroglico, če sta obe izvlečeni črni?

Primer 2. Pojavil se je nov virus, ki okužene s časom spremeni v zombije. Na srečo so znanstveniki hitro razvili test za zaznavanje okužb. Če je testirani res okužen, je test pozitiven z verjetnostjo 90%. Če testirani ni okužen, je test negativen z verjetnostjo 70%. Trenutno je okužene 10% populacije. Na žalost si bil na testiranju pravkar pozitiven! Ampak kar brez panike.

Kolikšna je verjetnost, da si res okužen?

Dano:

$$P(A) = 0.1$$

$$P(B|A) = 0.9$$

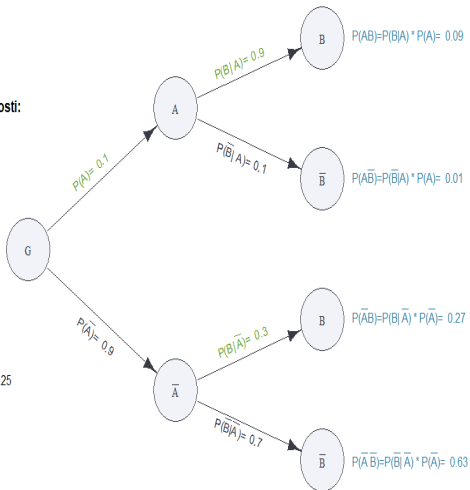
$$P(\bar{B}|\bar{A}) = 0.3$$

Formula popolne verjetnosti:

$$P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B) = 0.36$$

Bayesova formula:

$$P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A) / P(B) = 0.25$$



Primer 3.(Zbirka) V laboratoriju na belih miškah proučujemo dedovanje gena JAA7. V prvi generaciji ima gen petina vseh mišk. Če imata gen oba starša, ga ima potomec v 80% primerov, če ga ima samo eden od staršev, ga ima potomec v 30% primerov, če gena nima nihče od staršev, pa ga tudi potomec nima. Določi verjetnost, da

- a) imata oba starša opazovani gen, če smo pare oblikovali naključno.
- b) ima naključno izbrana miška iz druge generacije gen.
- c) če je imela miška iz druge generacije gen, sta ga imela tudi oba starša?

Primer 4.(Zbirka) V škatli imamo 5 rdečih in 5 črnih kroglic. Igralec vrže kocko, nato pa iz škatle na slepo (brez vračanja) potegne toliko kroglic, kolikor je padlo pik na kocki. Izračunaj verjetnost, da

- a) potegne toliko rdečih kroglic kot črnih, če vemo, da je padla šestica.
- b) potegne toliko rdečih kroglic kot črnih.
- c) je padla šestica, če vemo, da je potegnil toliko rdečih kot črnih.

Primer 5.(Zbirka) Alpske smučarke Tina, Ana in Ilka se želijo pomeriti v smuku. Tina pri vožnji naredi napako in odstopi z verjetnostjo 10%, medtem ko za Ano in Ilko velja, da vsaka odstopi z verjetnostjo 20%. Če nobena smučarka ne odstopi, Tina zmaga v 70% primerih. Ta delež se poveča na 90%, če natanko ena njena tekmica naredi napako in odstopi. Privzamemo, da so dogodki, da posamezna smučarka odstopi, neodvisni. Kolikšna je verjetnost, da

- a) Tina zmaga v smuku?
- b) je vsaj ena njena tekmica odstopila, če je Tina zmagala?

Pri tem upoštevaj, da smučarka, ki odstopi, ne more zmagati tekme. Lahko se torej zgodi, da vse tri smučarke odstopijo in tako nimamo nobene zmagovalke.