Домашнее задание 4

Батрутдинов Тимур, БПИ206

10 февраля 2021 г.

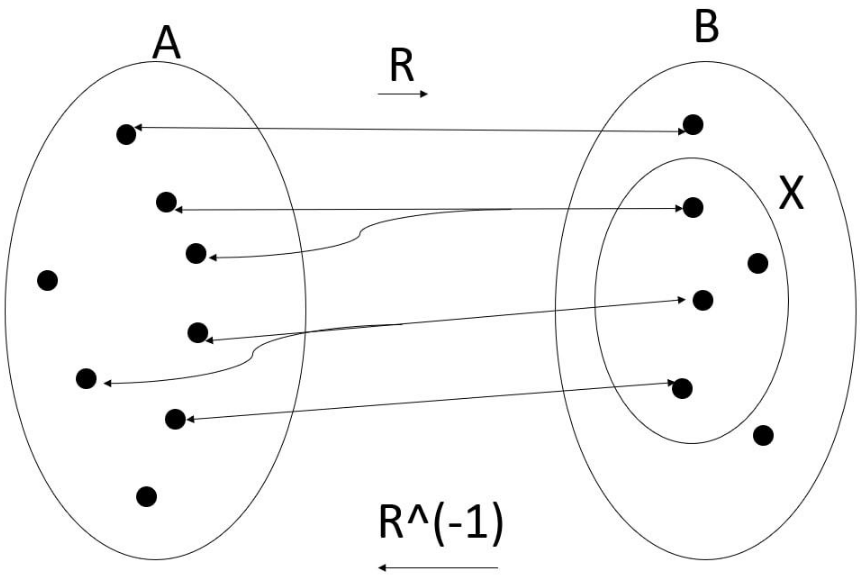
$\boxed{\mathbf{1}}$ $P \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

a). $\begin{cases} P(x) = x, x \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \\ P(1) = 0 \end{cases}$

b). $\begin{cases} P(x) = x, x \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \\ P(0) = 1 \end{cases}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Пусть $R \subseteq A \times B$ функционально.

a). Доказать $\forall X : R[R^{-1}[X]] \subseteq X$.
$R^{-1} \subseteq B \times A$ - инъективное отношение (как обратное к функциональному);
При $X \subseteq B$, $R^{-1}[X] = \{a \in A | \exists b \in X : bRa\}$.
Так как R^{-1} - инъекция, справедливо, что $|R^{-1}[X]| \geq |X|$.



Обозначим $R^{-1}[X]$ за Y. Так как отображение R^{-1} инъективно, стрелки, выходящие из X в Y, могут 'размножаться', а значит, мощность Y **не меньше** мощности X.

$R[R^{-1}[X]] = R[Y]$ - элементы из Y вернутся по тем же стрелкам в элементы, которые были в X, при этом ни в какие другие элементы, выходящие за пределы X, стрелки попасть не смогут. Значит, полученное множество (назовем его X_1) вложено в исходное множество X.

б) Обратное включение верно не всегда, контрпример как раз представлен на изображении выше. Так как R ни тотально, ни сюръективно, в X могут быть элементы, не переходящие в Y, а значит, обратно в X_1 они не попадут.

$\boxed{\textbf{3}}$ $f : A \to B$ и $g : A \to B$. Доказать, что $f \cup g : A \to B \Leftrightarrow f = g$

$\boxed{\Leftarrow}$ Очевидно, что если два множества равны, то их объединение равно каждому из них.

$\boxed{\Rightarrow}$ Пусть не так ($f \neq g$)
Тогда $\exists x_0 : f(x_0) = y_1$ и $g(x_0) = y_2$ ($y_1 \neq y_2$).
$\begin{cases} (x_0, y_1) \in f, (x_0, y_1) \notin g, \\ (x_0, y_2) \in g, (x_0, y_2) \notin f \end{cases} \implies \exists z : (x_0, z) \notin f \cup g \implies f \cup g$ не является тотальным отображением.
Противоречие.

$\boxed{\textbf{4}}$ $f : A \to B$ и $g : B \to C$. Доказать следствие: $g \circ f$ - инъекция $\implies$ f - тоже инъекция.

Пусть не так. Тогда $\exists b \in B, a_1, a_2 \in A : f(a_1) = f(a_2) = b$. В свою очередь $g(b)$ может принимать только одно единственное значение $c \in C$ (иначе нарушится функциональность). Тогда получаем, что $(g \circ f)(a_1) = f(g(b)) = c$ и $(g \circ f)(a_2) = f(g(b)) = c$ и приходим к противоречию: композиция $g \circ f$ не инъективна.

$\boxed{\textbf{5}}$ Доказать: $f : A \to B$ инъективна $\Leftrightarrow \forall C \forall g, h : C \to A : (f \circ g = f \circ h \implies g = h)$

$\boxed{\textbf{6}}$

a). $\mathbb{Q}^{\underline{3}}$: $\{(0, \frac{1}{2}), (1, \frac{2}{3}), (2, \frac{4}{7})\}$

b).$\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$: $\{(\frac{1}{2}, \sqrt{2}), (\frac{2}{3}, \pi), (\frac{3}{4}, \sqrt{5})\}$

c). $\mathbb{R}^{\mathbb{R} \times \mathbb{Z}}$: $\{((4.13, 8), 17.6), ((0.21, 2093), 0.2), ((3.71, 3), 9)\}$

$\boxed{\textbf{7}}$ Пусть $A \cap B = \varnothing$. Доказать: $C^{A \cup B} \sim C^A \times C^B$

1) $|A| + |B| = |A \cup B| - |A \cap B| = |A \cup B| - 0 = |A \cup B|$.
Пусть $|A| = n, |B| = m, |C| = k$

Известно, что $|A^B| = |A|^{|B|}$.
Также очевиден факт, что $|C^A \times C^B| = |C^A| \cdot |C^B|$

Тогда $|C^{A \cup B}| = k^{n+m}, |C^A| = k^n, |C^B| = k^m$,
$|C^A \times C^B| = |C^A| \cdot |C^B| = k^n \cdot k^m = k^{n+m}$.
Выходит, что $|C^{A \cup B}| = |C^A \times C^B| = k^{n+m}$, а значит, $C^{A \cup B} \sim C^A \times C^B$.

$\boxed{\textbf{8}}$ $P_1(A)$ - множество всех подмножеств множества A вида $\{x\}$. Доказать: $P_1(A) \sim A \; \forall A$

Пусть $A = \{a_0, a_1, a_2 \ldots\}$. Тогда $P_1(A) = \{\{a_0\}, \{a_1\}, \{a_2\} \ldots\}$

1) Пусть A - конечное и $|A| = n$. Тогда есть n способов выбрать первый синглтон в $P_1(A)$, $n - 1$ способ выбрать 2-й синглтон, $n - 2$ - 3-й, и так далее. n-й синглтон можно выбрать только одним способом, а значит, других синглтонов в $P_1(A)$ быть не может и их ровно n, т.е $|P_1(A)| = |A|$.

2) В общем случае каждому элементу из A соответствует ровно один синглтон из $P_1(A)$, потому что для любой сущности есть только один способ создать одноэлементное множество, состоящее из него одного.

$\boxed{9}$ Доказать, что для любых A, B, C верно, используя характ. функции:

a). $(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C)$

$$\chi_{(A \cup B) \backslash C} = \chi_{A \backslash C} \cup \chi_{B \backslash C}$$

$$\chi_{A \cup B} \cdot (1 - \chi_C) = \chi_A \cdot (1 - \chi_C) \cup \chi_B \cdot (1 - \chi_C)$$

Рассмотрим четыре варианта значений для χ_A, χ_B:

1) $\chi_A = 0, \chi_B = 0$.
Тогда $\chi_{A \cup B} = max(\chi_A, \chi_B) = 0 \implies \chi_{A \cup B} \cdot (1 - \chi_C) = 0$,
$\chi_A \cdot (1 - \chi_C) \cup \chi_B \cdot (1 - \chi_C) = 0 \cdot (1 - \chi_C) \cup 0 \cdot (1 - \chi_C) = 0$.
$0 = 0$ - это, вроде как, верно.

2) $\chi_A = 0, \chi_B = 1$.
Тогда $\chi_{A \cup B} = max(\chi_A, \chi_B) = 1 \implies \chi_{A \cup B} \cdot (1 - \chi_C) = \overline{\chi_C}$,
$\chi_A \cdot (1 - \chi_C) \cup \chi_B \cdot (1 - \chi_C) = 0 \cdot (1 - \chi_C) \cup 1 \cdot (1 - \chi_C) = 1 - \chi_C = \overline{\chi_C}$.
$\overline{\chi_C} = \overline{\chi_C}$ верно при любом χ_C.

3) $\chi_A = 1, \chi_B = 0$.
Тогда $\chi_{A \cup B} = max(\chi_A, \chi_B) = 1 \implies \chi_{A \cup B} \cdot (1 - \chi_C) = \overline{\chi_C}$,
$\chi_A \cdot (1 - \chi_C) \cup \chi_B \cdot (1 - \chi_C) = 1 \cdot (1 - \chi_C) \cup 0 \cdot (1 - \chi_C) = 1 - \chi_C = \overline{\chi_C}$.
$\overline{\chi_C} = \overline{\chi_C}$ верно при любом χ_C.

4) $\chi_A = 1, \chi_B = 1$.
Тогда $\chi_{A \cup B} = max(\chi_A, \chi_B) = 1 \implies \chi_{A \cup B} \cdot (1 - \chi_C) = \overline{\chi_C}$,
$\chi_A \cdot (1 - \chi_C) \cup \chi_B \cdot (1 - \chi_C) = 1 \cdot (1 - \chi_C) \cup 1 \cdot (1 - \chi_C) = (1 - \chi_C) \cup (1 - \chi_C) = \overline{\chi_C}$.
$\overline{\chi_C} = \overline{\chi_C}$ верно при любом χ_C.

b). $(A \backslash B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$

$\boxed{10}$ Доказать с помощью теоремы Кантора-Бернштейна-Шрёдера:

a). $\mathbb{N}^{\mathbb{N} \times \mathbb{Q}} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$

b). $\underline{5}^{\mathbb{N}} \sim \underline{3}^{\mathbb{N}}$

$$\underline{5}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to \{0,1,2,3,4\}\}$$
$$\underline{3}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to \{0,1,2\}\}$$

$\underline{5}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{N}$, так как каждому натуральному числу можно поставить в соответствие **ровно один** его остаток от деления на 5,
$\underline{3}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{N}$, так как каждому натуральному числу можно поставить в соответствие **ровно один** его остаток от деления на 3.
Оба множества равномощны натуральному ряду, значит, они равномощны друг другу.

c). любой квадрат (с внутренностью) и любой круг на плоскости равномощны друг другу; (подумайте о движениях и других геометрических преобразованиях плоскости)

Для упрощения задачи перенесу все левые нижние углы квадратов и все центры кругов в начало координат.

Обозначу произвольный квадрат со стороной l на плоскости как множество пар координат его точек: $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} | x, y \leq l\}$;
Обозначу произвольный круг с радиусом r на плоскости как множество пар координат его точек: $C = \{(x, y) \in \mathbb{R} | x^2 + y^2 = r^2\}$.

d). Множество всевозможных треугольников на плоскости равномощно $\mathbb{R}$.

Обозначим за V множество всех троек точек на плоскости, за L - множество троек точек на плоскости, лежащих на одной прямой. Тогда множество всех треугольников на плоскости $T = V \setminus L$.

$$V = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)) | x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 \in \mathbb{R}\}$$

.

$$L = \left\{((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)) | \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_2}{y_3 - y_2}\right\}$$

$$T = V \setminus L$$

$$T \sim \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

$$T \sim \mathbb{R}^6$$

Равномощность $\mathbb{R}^6$ и $\mathbb{R}$ вроде как очевидна и доказывалась на лекциях, но повлияет ли на равномощность исключение из $\mathbb{R}^6$ некоторых элементов?.