Домашнее задание 4

Батрутдинов Тимур, БПИ206

8 февраля 2021 г.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $P \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

a). $\begin{cases} P(x) = x, x \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \\ P(1) = 0 \end{cases}$

b). $\begin{cases} P(x) = x, x \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \\ P(0) = 1 \end{cases}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Пусть $R \subseteq A \times B$ функционально.

$\boxed{\mathbf{3}}$ $f : A \to B$ и $g : A \to B$. Доказать, что $f \cup g : A \to B \Leftrightarrow f = g$

$\boxed{\mathbf{4}}$ $f : A \to B$ и $g : B \to C$. Доказать следствие: $g \circ f$ - инъекция $\implies$ f - тоже инъекция.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Доказать: $f : A \to B$ инъективна $\Leftrightarrow \forall C \forall g, h : C \to A : (f \circ g = f \circ h \implies g = h)$

$\boxed{\mathbf{6}}$

a). $\mathbb{Q}^{\underline{3}}$: $\{(0, \frac{1}{2}), (1, \frac{2}{3}), (2, \frac{4}{7})\}$

b).$\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$: $\{(\frac{1}{2}, \sqrt{2}), (\frac{2}{3}, \pi), (\frac{3}{4}, \sqrt{5})\}$

c). $\mathbb{R}^{\mathbb{R} \times \mathbb{Z}}$: $\{((4.13,8), 17.6), ((0.21,2093), 0.2), ((3.71,3), 9)\}$

$\boxed{\mathbf{7}}$ Пусть $A \cap B = \varnothing$. Доказать: $C^{A \cup B} \sim C^A \times C^B$

1) $|A| + |B| = |A \cup B| - |A \cap B| = |A \cup B| - 0 = |A \cup B|$.
Пусть $|A| = n, |B| = m, |C| = k$

Известно, что $|A^B| = |A|^{|B|}$.
Также очевиден факт, что $|C^A \times C^B| = |C^A| \cdot |C^B|$

Тогда $|C^{A \cup B}| = k^{n+m}, |C^A| = k^n, |C^B| = k^m$,
$|C^A \times C^B| = |C^A| \cdot |C^B| = k^n \cdot k^m = k^{n+m}$.
Выходит, что $|C^{A \cup B}| = |C^A \times C^B| = k^{n+m}$, а значит, $C^{A \cup B} \sim C^A \times C^B$.

$\boxed{\mathbf{8}}$ $P_1(A)$ - множество всех подмножеств множества A вида $\{x\}$. Доказать: $P_1(A) \sim A \; \forall A$

Пусть $A = \{a_0, a_1, a_2 \ldots\}$. Тогда $P_1(A) = \{\{a_0\},\{a_1\},\{a_2\} \ldots\}$

1) Пусть A - конечное и $|A| = n$. Тогда есть n способов выбрать первый синглтон в $P_1(A)$, $n - 1$ способ выбрать 2-й синглтон, $n - 2$ - 3-й, и так далее. n-й синглтон можно выбрать только одним способом, а значит, других синглтонов в $P_1(A)$ быть не может и их ровно n, т.е $|P_1(A)| = |A|$.

2) В общем случае каждому элементу из A соответствует ровно один синглтон из $P_1(A)$, потому что для любой сущности есть только один способ создать одноэлементное множество, состоящее из него одного.

$\boxed{\textbf{9}}$ Доказать, что для любых A, B, C верно, используя характ. функции:

a). $(A \backslash B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C)$

b). $(A \backslash B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$

$\boxed{\textbf{10}}$ Доказать с помощью теоремы Кантора-Бернштейна-Шрёдера:

a). $\mathbb{N}^{\mathbb{N} \times \mathbb{Q}} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$

b). $\underline{5}^{\mathbb{N}} \sim \underline{3}^{\mathbb{N}}$

$$\underline{5}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to \{0,1,2,3,4\}\}$$
$$\underline{3}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to \{0,1,2\}\}$$

$\underline{5}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{N}$, так как каждому натуральному числу можно поставить в соответствие **ровно один** его остаток от деления на 5,
$\underline{3}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{N}$, так как каждому натуральному числу можно поставить в соответствие **ровно один** его остаток от деления на 3.
Оба множества равномощны натуральному ряду, значит, они равномощны друг другу.

c). любой квадрат (с внутренностью) и любой круг на плоскости равномощны друг другу; (подумайте о движениях и других геометрических преобразованиях плоскости)

Обозначим множество квадратов на плоскости как $S = \{(a, b) \in \mathbb{R} | a \cdot b$ - площадь квадрата$\}$;
Обозначим множество кругов на плоскости как $S = \{(x, y, r) \in \mathbb{R} | x, y$ - координаты центра, r - радиус$\}$.

d). множество всевозможных треугольников на плоскости равномощно $\mathbb{R}$.