

# Домашнее задание 4

Батрутдинов Тимур, БПИ206

8 февраля 2021 г.

**1**  $P \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

a).  $\begin{cases} P(x) = x, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ P(1) = 0 \end{cases}$

b).  $\begin{cases} P(x) = x, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ P(0) = 1 \end{cases}$

**2** Пусть  $R \subseteq A \times B$  функционально.

a). Доказать  $\forall X : R[R^{-1}[X]] \subseteq X$ .

$R^{-1} \subseteq B \times A$  - инъективное отношение (как обратное к функциональному);

При  $X \subseteq B$ ,  $R^{-1}[X] = \{a \in A \mid \exists b \in X : bRa\}$ .

Так как  $R^{-1}$  - инъекция, справедливо, что  $|R^{-1}[X]| \geq |X|$ .

**3**  $f : A \rightarrow B$  и  $g : A \rightarrow B$ . Доказать, что  $f \cup g : A \rightarrow B \Leftrightarrow f = g$

**4**  $f : A \rightarrow B$  и  $g : B \rightarrow C$ . Доказать следствие:  $g \circ f$  - инъекция  $\implies f$  - тоже инъекция.

**5** Доказать:  $f : A \rightarrow B$  инъективна  $\Leftrightarrow \forall C \forall g, h : C \rightarrow A : (f \circ g = f \circ h \implies g = h)$

**6**

a).  $\mathbb{Q}^3$ :  $\{(0, \frac{1}{2}), (1, \frac{2}{3}), (2, \frac{4}{7})\}$

b).  $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ :  $\{(\frac{1}{2}, \sqrt{2}), (\frac{2}{3}, \pi), (\frac{3}{4}, \sqrt{5})\}$

c).  $\mathbb{R}^{\mathbb{R} \times \mathbb{Z}}$ :  $\{((4.13, 8), 17.6), ((0.21, 2093), 0.2), ((3.71, 3), 9)\}$

**7** Пусть  $A \cap B = \emptyset$ . Доказать:  $C^{A \cup B} \sim C^A \times C^B$

1)  $|A| + |B| = |A \cup B| - |A \cap B| = |A \cup B| - 0 = |A \cup B|$ .

Пусть  $|A| = n, |B| = m, |C| = k$

Известно, что  $|A^B| = |A|^{|B|}$ .

Также очевиден факт, что  $|C^A \times C^B| = |C^A| \cdot |C^B|$

Тогда  $|C^{A \cup B}| = k^{n+m}, |C^A| = k^n, |C^B| = k^m$ ,

$|C^A \times C^B| = |C^A| \cdot |C^B| = k^n \cdot k^m = k^{n+m}$ .

Выходит, что  $|C^{A \cup B}| = |C^A \times C^B| = k^{n+m}$ , а значит,  $C^{A \cup B} \sim C^A \times C^B$ .

**8**  $P_1(A)$  - множество всех подмножеств множества  $A$  вида  $\{x\}$ . Доказать:  $P_1(A) \sim A \forall A$

Пусть  $A = \{a_0, a_1, a_2 \dots\}$ . Тогда  $P_1(A) = \{\{a_0\}, \{a_1\}, \{a_2\} \dots\}$

1) Пусть  $A$  - конечное и  $|A| = n$ . Тогда есть  $n$  способов выбрать первый синглтон в  $P_1(A)$ ,  $n - 1$  способ выбрать 2-й синглтон,  $n - 2$  - 3-й, и так далее.  $n$ -й синглтон можно выбрать только одним способом, а значит, других синглтонов в  $P_1(A)$  быть не может и их ровно  $n$ , т.е.  $|P_1(A)| = |A|$ .

2) В общем случае каждому элементу из  $A$  соответствует ровно один синглтон из  $P_1(A)$ , потому что для любой сущности есть только один способ создать одноэлементное множество, состоящее из него одного.

**9** Доказать, что для любых  $A, B, C$  верно, используя характ. функции:

а).  $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

$$\chi_{(A \cup B) \setminus C} = \chi_{A \setminus C} \cup \chi_{B \setminus C}$$

$$\chi_{A \cup B} \cdot (1 - \chi_C) = \chi_A \cdot (1 - \chi_C) \cup \chi_B \cdot (1 - \chi_C)$$

Рассмотрим четыре варианта значений для  $\chi_A, \chi_B$ :

1)  $\chi_A = 0, \chi_B = 0$ .

Тогда  $\chi_{A \cup B} = \max(\chi_A, \chi_B) = 0 \implies \chi_{A \cup B} \cdot (1 - \chi_C) = 0$ ,  
 $\chi_A \cdot (1 - \chi_C) \cup \chi_B \cdot (1 - \chi_C) = 0 \cdot (1 - \chi_C) \cup 0 \cdot (1 - \chi_C) = 0$ .  
 $0 = 0$  - это, вроде как, верно.

2)  $\chi_A = 0, \chi_B = 1$ .

Тогда  $\chi_{A \cup B} = \max(\chi_A, \chi_B) = 1 \implies \chi_{A \cup B} \cdot (1 - \chi_C) = \overline{\chi_C}$ ,  
 $\chi_A \cdot (1 - \chi_C) \cup \chi_B \cdot (1 - \chi_C) = 0 \cdot (1 - \chi_C) \cup 1 \cdot (1 - \chi_C) = 1 - \chi_C = \overline{\chi_C}$ .  
 $\overline{\chi_C} = \overline{\chi_C}$  верно при любом  $\chi_C$ .

3)  $\chi_A = 1, \chi_B = 0$ .

Тогда  $\chi_{A \cup B} = \max(\chi_A, \chi_B) = 1 \implies \chi_{A \cup B} \cdot (1 - \chi_C) = \overline{\chi_C}$ ,  
 $\chi_A \cdot (1 - \chi_C) \cup \chi_B \cdot (1 - \chi_C) = 1 \cdot (1 - \chi_C) \cup 0 \cdot (1 - \chi_C) = 1 - \chi_C = \overline{\chi_C}$ .  
 $\overline{\chi_C} = \overline{\chi_C}$  верно при любом  $\chi_C$ .

4)  $\chi_A = 1, \chi_B = 1$ .

Тогда  $\chi_{A \cup B} = \max(\chi_A, \chi_B) = 1 \implies \chi_{A \cup B} \cdot (1 - \chi_C) = \overline{\chi_C}$ ,  
 $\chi_A \cdot (1 - \chi_C) \cup \chi_B \cdot (1 - \chi_C) = 1 \cdot (1 - \chi_C) \cup 1 \cdot (1 - \chi_C) = (1 - \chi_C) \cup (1 - \chi_C) = \overline{\chi_C}$ .  
 $\overline{\chi_C} = \overline{\chi_C}$  верно при любом  $\chi_C$ .

б).  $(A \setminus B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$

**10** Доказать с помощью теоремы Кантора-Бернштейна-Шрёдера:

а).  $\mathbb{N}^{\mathbb{N} \times \mathbb{Q}} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$

б).  $\underline{5}^{\mathbb{N}} \sim \underline{3}^{\mathbb{N}}$

$$\underline{5}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$$

$$\underline{3}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, 2\}\}$$

$\underline{5}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{N}$ , так как каждому натуральному числу можно поставить в соответствие **ровно один** его остаток от деления на 5,

$\underline{3}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{N}$ , так как каждому натуральному числу можно поставить в соответствие **ровно один** его остаток от деления на 3.

Оба множества равномощны натуральному ряду, значит, они равномощны друг другу.

с). любой квадрат (с внутренностью) и любой круг на плоскости равномощны друг другу; (подумайте о движениях и других геометрических преобразованиях плоскости)

Обозначим множество квадратов на плоскости как  $S = \{(a, b) \in \mathbb{R} | a \cdot b - \text{площадь квадрата}\}$ ;

Обозначим множество кругов на плоскости как  $S = \{(x, y, r) \in \mathbb{R} | x, y - \text{координаты центра, } r - \text{радиус}\}$ .

d). Множество всевозможных треугольников на плоскости равномощно  $\mathbb{R}$ .

Обозначим за  $V$  множество всех троек точек на плоскости, за  $L$  - множество троек точек на плоскости, лежащих на одной прямой. Тогда множество всех треугольников на плоскости  $T = V \setminus L$ .

$$V = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)) | x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 \in \mathbb{R}\}$$

$$L = \left\{ ((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)) \mid \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{y_3 - y_1} \right\}$$

$$T = V \setminus L$$

$$T \sim \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

$$T \sim \mathbb{R}^6$$

Равномощность  $\mathbb{R}^6$  и  $\mathbb{R}$  вроде как очевидна и доказывалась на лекциях, но повлияет ли на равномощность исключение из  $\mathbb{R}^6$  некоторых элементов?.