

Домашнее задание 4

Батрутдинов Тимур, БПИ206

8 февраля 2021 г.

1 $P \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

a). $\begin{cases} P(x) = x, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ P(1) = 0 \end{cases}$

b). $\begin{cases} P(x) = x, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ P(0) = 1 \end{cases}$

2 Пусть $R \subseteq A \times B$ функционально.

a). Доказать $\forall X : R[R^{-1}[X]] \subseteq X$.

$R^{-1} \subseteq B \times A$ - инъективное отношение (как обратное к функциональному);

При $X \subseteq B$, $R^{-1}[X] = \{a \in A \mid \exists b \in X : bRa\}$.

Так как R^{-1} - инъекция, справедливо, что $|R^{-1}[X]| \geq |X|$.

3 $f : A \rightarrow B$ и $g : A \rightarrow B$. Доказать, что $f \cup g : A \rightarrow B \Leftrightarrow f = g$

4 $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow C$. Доказать следствие: $g \circ f$ - инъекция $\implies f$ - тоже инъекция.

5 Доказать: $f : A \rightarrow B$ инъективна $\Leftrightarrow \forall C \forall g, h : C \rightarrow A : (f \circ g = f \circ h \implies g = h)$

6

a). \mathbb{Q}^3 : $\{(0, \frac{1}{2}), (1, \frac{2}{3}), (2, \frac{4}{7})\}$

b). $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$: $\{(\frac{1}{2}, \sqrt{2}), (\frac{2}{3}, \pi), (\frac{3}{4}, \sqrt{5})\}$

c). $\mathbb{R}^{\mathbb{R} \times \mathbb{Z}}$: $\{((4.13, 8), 17.6), ((0.21, 2093), 0.2), ((3.71, 3), 9)\}$

7 Пусть $A \cap B = \emptyset$. Доказать: $C^{A \cup B} \sim C^A \times C^B$

1) $|A| + |B| = |A \cup B| - |A \cap B| = |A \cup B| - 0 = |A \cup B|$.

Пусть $|A| = n, |B| = m, |C| = k$

Известно, что $|A^B| = |A|^{|B|}$.

Также очевиден факт, что $|C^A \times C^B| = |C^A| \cdot |C^B|$

Тогда $|C^{A \cup B}| = k^{n+m}, |C^A| = k^n, |C^B| = k^m,$

$|C^A \times C^B| = |C^A| \cdot |C^B| = k^n \cdot k^m = k^{n+m}.$

Выходит, что $|C^{A \cup B}| = |C^A \times C^B| = k^{n+m}$, а значит, $C^{A \cup B} \sim C^A \times C^B$.

8 $P_1(A)$ - множество всех подмножеств множества A вида $\{x\}$. Доказать: $P_1(A) \sim A \forall A$

Пусть $A = \{a_0, a_1, a_2 \dots\}$. Тогда $P_1(A) = \{\{a_0\}, \{a_1\}, \{a_2\} \dots\}$

1) Пусть A - конечное и $|A| = n$. Тогда есть n способов выбрать первый синглтон в $P_1(A)$, $n - 1$ способ выбрать 2-й синглтон, $n - 2$ - 3-й, и так далее. n -й синглтон можно выбрать только одним способом, а значит, других синглтонов в $P_1(A)$ быть не может и их ровно n , т.е. $|P_1(A)| = |A|$.

2) В общем случае каждому элементу из A соответствует ровно один синглтон из $P_1(A)$, потому что для любой сущности есть только один способ создать одноэлементное множество, состоящее из него одного.

9 Доказать, что для любых A, B, C верно, используя характ. функции:

а). $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

$$\chi_{(A \cup B) \setminus C} = \chi_{A \setminus C} \cup \chi_{B \setminus C}$$

$$\chi_{A \cup B} \cdot (1 - \chi_C) = \chi_A \cdot (1 - \chi_C) \cup \chi_B \cdot (1 - \chi_C)$$

Рассмотрим четыре варианта значений для χ_A, χ_B :

1) $\chi_A = 0, \chi_B = 0$.

Тогда $\chi_{A \cup B} = \max(\chi_A, \chi_B) = 0 \implies \chi_{A \cup B} \cdot (1 - \chi_C) = 0$,

$\chi_A \cdot (1 - \chi_C) \cup \chi_B \cdot (1 - \chi_C) = 0 \cdot (1 - \chi_C) \cup 0 \cdot (1 - \chi_C) = 0$.

$0 = 0$ - это, вроде как, верно.

2) $\chi_A = 0, \chi_B = 1$.

Тогда $\chi_{A \cup B} = \max(\chi_A, \chi_B) = 1 \implies \chi_{A \cup B} \cdot (1 - \chi_C) = \overline{\chi_C}$,

$\chi_A \cdot (1 - \chi_C) \cup \chi_B \cdot (1 - \chi_C) = 0 \cdot (1 - \chi_C) \cup 1 \cdot (1 - \chi_C) = 1 - \chi_C = \overline{\chi_C}$.

$\overline{\chi_C} = \overline{\chi_C}$ верно при любом χ_C .

3) $\chi_A = 1, \chi_B = 0$.

Тогда $\chi_{A \cup B} = \max(\chi_A, \chi_B) = 1 \implies \chi_{A \cup B} \cdot (1 - \chi_C) = \overline{\chi_C}$,

$\chi_A \cdot (1 - \chi_C) \cup \chi_B \cdot (1 - \chi_C) = 1 \cdot (1 - \chi_C) \cup 0 \cdot (1 - \chi_C) = 1 - \chi_C = \overline{\chi_C}$.

$\overline{\chi_C} = \overline{\chi_C}$ верно при любом χ_C .

4) $\chi_A = 1, \chi_B = 1$.

Тогда $\chi_{A \cup B} = \max(\chi_A, \chi_B) = 1 \implies \chi_{A \cup B} \cdot (1 - \chi_C) = \overline{\chi_C}$,

$\chi_A \cdot (1 - \chi_C) \cup \chi_B \cdot (1 - \chi_C) = 1 \cdot (1 - \chi_C) \cup 1 \cdot (1 - \chi_C) = (1 - \chi_C) \cup (1 - \chi_C) = \overline{\chi_C}$.

$\overline{\chi_C} = \overline{\chi_C}$ верно при любом χ_C .

б). $(A \setminus B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$

10 Доказать с помощью теоремы Кантора-Бернштейна-Шрёдера:

а). $\mathbb{N}^{\mathbb{N} \times \mathbb{Q}} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$

б). $\underline{5}^{\mathbb{N}} \sim \underline{3}^{\mathbb{N}}$

$$\underline{5}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$$

$$\underline{3}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, 2\}\}$$

$\underline{5}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{N}$, так как каждому натуральному числу можно поставить в соответствие **ровно один** его остаток от деления на 5,

$\underline{3}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{N}$, так как каждому натуральному числу можно поставить в соответствие **ровно один** его остаток от деления на 3.

Оба множества равномощны натуральному ряду, значит, они равномощны друг другу.

с). любой квадрат (с внутренностью) и любой круг на плоскости равномощны друг другу; (подумайте о движениях и других геометрических преобразованиях плоскости)

Обозначим множество квадратов на плоскости как $S = \{(a, b) \in \mathbb{R} | a \cdot b - \text{площадь квадрата}\}$;

Обозначим множество кругов на плоскости как $S = \{(x, y, r) \in \mathbb{R} | x, y - \text{координаты центра, } r - \text{радиус}\}$.

d). Множество всевозможных треугольников на плоскости равномощно \mathbb{R} .

Обозначим за V множество всех троек точек на плоскости, за L - множество троек точек на плоскости, лежащих на одной прямой. Тогда множество всех треугольников на плоскости $T = V \setminus L$.

$$V = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)) | x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 \in \mathbb{R}\}$$

$$L = \left\{ ((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)) \mid \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{y_3 - y_1} \right\}$$

$$T = V \setminus L$$

$$T \sim \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

$$T \sim \mathbb{R}^6$$

Равномощность \mathbb{R}^6 и \mathbb{R} вроде как очевидна и доказывалась на лекциях, но повлияет ли на равномощность исключение из \mathbb{R}^6 некоторых элементов?