# Алгебра на ФКН ПИ

Общий конспект всех лекций за 3 модуль

15 февраля 2021 г.

$\boxed{\textbf{Утв}}$ Пусть $G$ - группа и $g \in G$.
Тогда $| < g > | = ord(g)$, где $| < g > |$ - число элементов в циклической группе, порожденной элементом $g$.

$\square$ Заметим, что если $g^k = g^s \Rightarrow g^{k-s} = e$ (так как $\exists g^{-1}$) $\Rightarrow$ порядок $g \leq k - s \Rightarrow$ если $g$ имеет бесконечный порядок, то все элементы $g^n$ $(n \in \mathbb{Z})$ различны и $\Rightarrow < g >$ содержит бесконечно много элементов. В бесконечном случае доказано.

Если же $ord(g) = m$, то из минимальности $m \in \mathbb{N} \Rightarrow e = g^0, g = g^1, g^2, \ldots, g^{m-1}$ попарно различны.
Покажем, что $< g >= \{e, g, g^2, \ldots, g^{m-1}\}$:
$\forall n \in \mathbb{Z} : n = m \cdot q + r$, где $0 \leq r \leq m \Rightarrow g^n = g^{mq+r} = (g^m)^q \cdot g^r = e^q \cdot g^r = g^r$, где $0 \leq r \leq m \Rightarrow < g >= \{e,g,g^2, \ldots, g^{m-1}\}$ и $| < g > | = m = ord(g)$. $\blacksquare$

$\boxed{\textbf{Утв}}$ Пусть $f : G \implies F$ - гомоморфизм. Тогда $f$ - инъективен (т.е. является мономорфизмом) $\Leftrightarrow \ker f = e_G$, где $e_G$ - нейтральный элемент в группе в $G$, а $\ker f$ в данном случае является тривиальным **ядром** гомоморфизма.

$\boxed{\textbf{Опр}}$ Ядром гомоморфизма $f : G \implies F$ называется множество элементов группы G, которые переходят в $e_F$ - нейтральный элемент во второй группе.

$$\ker f = \{g \in G | f(g) = e_F\}$$

$\boxed{\textbf{Зам}}$ $\ker f$ никогда не является пустым множеством, так как по свойству гомоморфизма $f(e_G) = e_F$.

$\square$
$\boxed{\Rightarrow}$ Необходимость:
Дано: $\forall x_1 \neq x_2 : f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow f(e_G) = e_F$ (и для $x \in G$ $(x \neq e_G)$ $f(x) \neq f(e_G) = e_F$).
$\boxed{\Leftarrow}$ Достаточность:
Дано: $\ker f = e_G$. Допустим, что $\exists x_1 \neq x_2 : f(x_1) = f(x_2)$. Тогда $f(x_1 \cdot x_2^{-1}) = f(x_1) \cdot f(x_2^{-1}) = f(x_1) \cdot (f(x_2))^{-1} = e_F \Rightarrow x_1 \cdot x_2^{-1} = e_G \Leftrightarrow x_1 = x_2$ - противоречие, значит, $f$ инъективно. $\blacksquare$