Spektralsequenzen und der Satz von Serre

Tim Baumann

Geboren am 15. Juni 1994 in Friedberg

14. Juli 2015

Bachelorarbeit Mathematik

Betreuer: Prof. Dr. Bernhard Hanke

Zweitgutachter: Prof. Dr. X Y

Institut für Mathematik

Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät

Universität Augsburg

1 Spektralsequenzen

1.1 Faserungen

Definition. Eine *Serre-Faserung* ist eine stetige Abbildung $p : E \to B$, welche die *Homotopieliftungseigenschaft* (HLE) für die Scheiben D^n besitzt, d. h. für alle $n \geq 0$ und für alle stetigen Abbildungen H, H_0 wie unten, sodass das äußere Quadrat kommutiert, gibt es eine stetige Abbildung $\tilde{H}$, sodass die beiden Dreiecke kommutieren:

$$\begin{tikzcd} D^n \arrow[r, "H_0"] \arrow[d, hook, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ D^n \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\exists \tilde{H}"] & B \end{tikzcd}$$

Dabei ist i_0 die Inklusion von D^n in $D^n \times I$ als $D^n \times \{0\}$.
Eindeutigkeit von $\tilde{H}$ wird nicht gefordert.

Lemma. Es sei $p : E \to B$ eine stetige Abbildung. Dann sind äquivalent:

a) p ist eine Serre-Faserung

b) p besitzt die *relative Homotopieliftungseigenschaft* für CW-Paare, d. h. für alle CW-Paare (X, A) und für alle H_0 und H wie unten, sodass das äußere Quadrat kommutiert, gibt eine stetige Abbildung $\tilde{H}$, sodass die beiden Dreiecke kommutieren:

$$\begin{tikzcd} X \times \{0\} \cup A \times I \arrow[r, "H_0"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\exists \tilde{H}"] & B \end{tikzcd}$$

Bemerkung. Eine *Hurewicz-Faserung* ist eine Serre-Faserung, welche die Homotopieliftungseigenschaft sogar für alle topologischen Räume besitzt.

Beweis. „b) $\implies$ a)“ Folgt sofort mit $(X, A) := (D^n, \emptyset)$.
„a) $\implies$ b)“ Wir behandeln zunächst den Fall $(X, A) = (D^n, S^{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(D^n \times I, D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \cup I) \approx (D^n)$ homöomorph als Raumpaar. Somit ist die relative Homotopieliftungseigenschaft in diesem Fall gleichbedeutend zur Homotopieliftungseigenschaft für die Scheibe D^n.
Es sei nun (X, A) ein beliebiges Raumpaar. Dann kann man induktiv die Homotopie H auf die i-Zellen e^i_α von $X \setminus A$ fortsetzen. Dabei ist die Homotopie auf $S^{n-1} = \partial D^n$ durch die Komposition der bisher konstruierten Homotopie mit der anheftenden Abbildung $\phi_\alpha : S^{n-1} \to X^{n-1}$ vorgegeben. Man erhält die Fortsetzung durch Anwenden des zuerst bewiesenen Falls. $\square$

Lemma. Es seien $p : E \to B$ eine Serre-Faserung, $b_0 \in B$, $F := p^{-1}(b_0)$ die Faser über b_0 und $f_0 \in F$. Dann gibt es eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \to \pi_n(F, f_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, f_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, f_0) \to \ldots \to \pi_1(B, b_0)$$

von Homotopiegruppen. Dabei ist $i : F \hookrightarrow E$ die Inklusion.

Beweis. Die gesuchte exakte Sequenz ist die lange exakte Homotopiesequenz

$$\ldots \to \pi_n(F, f_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, f_0) \to \pi_n(E, F, f_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, f_0) \to \ldots \to \pi_1(E, F, f_0)$$

des Raumpaares (E, F). Es bleibt zu zeigen: $\pi_n(E, F, f_0) \cong \pi_n(B, b_0)$ als Gruppe für $n > 1$ und als punktierte Menge für $n = 1$. Der Isomorphismus muss außerdem so gewählt werden, dass

$$p_* = \left(\pi_n(E, f_0) \to \pi_n(E, F, f_0) \xrightarrow{\cong} \pi_n(B, b_0)\right).$$

Wir zeigen: $p_* : \pi_n(E, F, f_0) \to \pi_n(B, b_0)$ ist der gesuchte Isomorphismus (damit ist obige Gleichung erfüllt).

Surjektivität: Sei $[g : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, b_0) \to (B, \{b_0\}, b_0)] \in \pi_{n+1}(B, b_0)$, $n \geq 0$. Sei $\tilde{g}$ der Lift im folgenden relativen HLE-Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\text{konst } f_0"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
I^n \times I \arrow[r, "g"] \arrow[ur, dashed, "\exists\,\tilde{g}"] & B
\end{tikzcd}$$

wobei $U := I^n \times \{0\} \cup (\partial I^n) \times I \subset I^{n+1}$. Dann kann man $\tilde{g}$ als eine Abbildung $(I^{n+1}, \partial I^{n+1}, U) \to (E, F, \{f_0\})$ von Raumtripeln auffassen, welche ein Element von $\pi_{n+1}(E, F, f_0)$ repräsentiert. Es gilt $p_*[\tilde{g}] = [p \circ \tilde{g}] = [g]$.

Injektivität: Seien $[h_0], [h_1] \in \pi_{n+1}(E, F, f_0)$ mit $p_*[h_0] = p_*[h_1]$. Sei

$$H : I \times I^{n+1}, \quad (t, x) \mapsto H_t(x)$$

eine Homotopie mit $H_0 = p \circ h_0$, $H_1 = p \circ h_1$, welche zu jedem Zeitpunkt $t \in I$ eine Abbildung $H_t : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}) \to (B, \{b_0\})$ von Raumpaaren ist. Betrachte folgendes HLE-Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "h"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
I^{n+1} \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\exists\,\tilde{H}"] & B
\end{tikzcd}$$

mit $V := I^{n+1} \times \{0\} \cup (\partial I^{n+1}) \times I \subset I^{n+2}$ und

$$h|_{\{0\} \times I^{n+1}} := h_0, \quad h|_{\{1\} \times I^{n+1}} := h_1, \quad h|_{I \times U} := \text{konst } f_0.$$

Nun ist $\tilde{H}$ eine Homotopie von h_0 nach h_1, welche zu jedem Zeitpunkt t eine Abbildung $\tilde{H}_t : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, U) \to (E, F, \{b_0\})$ von Raumtripeln ist. $\square$

Definition. Es seien $p : E \to B$ und $g : X \to B$ stetig. Der *Pullback* von p entlang g ist die Abbildung $g^*(p) : g^*(E) \to X$, wobei $g^*(E) := X \times_B E$ das Faserprodukt von X und E über B vermöge g und p ist.

Bemerkung. Pullback ist funktoriell: $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ und $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$.

Lemma. Pullbacks von Serre-Faserungen sind Serre-Faserungen.

Beweis. Sei $p : E \to B$ eine Serre-Faserung und $g : X \to B$ stetig. Wir müssen die Existenz des Morphismus $\tilde{H}$ im folgenden Diagramm zeigen:

$$\begin{tikzcd}
D^n \arrow[r, "H_0"] \arrow[d, hook, "i_0"'] & g^*(E) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g^*(p)"] \arrow[dr, phantom, very near start, "\lrcorner"] & E \arrow[d, "p"] \\
D^n \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{H}"] & X \arrow[r, "g"] & B
\end{tikzcd}$$

Aus der HLE von p erhält wie folgt einen Morphismus K:

$$\begin{tikzcd}
D^n \arrow[r, "H_0"] \arrow[d, hook, "i_0"'] & X \times_B E \arrow[r, "h"] & E \arrow[d, "p"] \\
D^n \times I \arrow[r, "H"] \arrow[urr, dashed, "K"] & X \arrow[r, "g"] & B
\end{tikzcd}$$

Nun ist $D^n \times I$ vermöge H und K ein Kegel über dem Diagramm $(X \xrightarrow{g} B \xleftarrow{p} E)$. Die universelle Eigenschaft von $g^*(E)$ induziert einen Morphismus $\tilde{H} : D^n \times I \to X \times_B E$ mit $g^*(p) \circ \tilde{H} = H$ und $h \circ \tilde{H} = K$. Aus der univ. Eigenschaft von $g^*(E)$ (Eindeutigkeit) folgt nun $\tilde{H} \circ i_0 = H_0$. $\square$

Definition. Ein Morphismus $(g, \tilde{g}) : p' \to p$ von Serre-Faserungen $p' : E' \to B'$ und $p : E \to B$ ist ein kommutatives Quadrat der Form

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "p'"] & E \arrow[d, "p"] \\
B' \arrow[r, "g"] & B
\end{tikzcd}$$

Beispiel. Pullback einer Serre-Faserung p entlang einer stetigen Abbildung g induziert einen Morphismus $(g, \tilde{g}) : g^*(p) \to p$ von Serre-Faserungen.

Lemma. Die langen exakten Sequenzen der Homotopiegruppen von Faserungen sind natürlich: Es sei $(g, \tilde{g}) : p' \to p$ ein Morphismus von Serre-Faserungen $p' : E' \to B'$ und $p : E \to B$, $b'_0 \in B'$, $b_0 := g(b'_0)$, $F' := p'^{-1}(b'_0)$, $F := p^{-1}(b_0)$, $f'_0 \in F'$, $f_0 := \tilde{g}(f'_0)$. Dann gibt es eine „Leiter" bestehend aus kommutativen Quadraten zwischen den Homotopiesequenzen:

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & \pi_n(F', f'_0) \arrow[r, "i'_*"] \arrow[d, "(\tilde{g}|_{F'})_*"] & \pi_n(E', f'_0) \arrow[r, "p'_*"] \arrow[d, "\tilde{g}_*"] & \pi_n(B', b'_0) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "g_*"] & \pi_{n-1}(F', f'_0) \arrow[r] \arrow[d, "(\tilde{g}|_{F'})_*"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & \pi_n(F, f_0) \arrow[r, "i_*"] & \pi_n(E, f_0) \arrow[r, "p_*"] & \pi_n(B, b_0) \arrow[r, "\partial"] & \pi_{n-1}(F, f_0) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Beweis. Folgt aus der Natürlichkeit der langen exakten Homotopiesequenz von Raumpaaren. $\square$

Es sei $p : E \to B$ eine Serre-Faserung, $\gamma : I \to B$ ein stetiger Weg. Betrachte die lange exakte Sequenz

$$\dots \to \pi_n(F_{\gamma(0)}) \to \pi_n(\gamma^*(E)) \to \pi_n(I) \to \pi_{n-1}(F_{\gamma(0)}) \to \dots$$

der Homotopiegruppen von $\gamma^*(p) : \gamma^*(E) \to I$ mit Faser

$$F_{\gamma(t)} := \gamma^*(p)^{-1}(t) \subset \gamma^*(E) = \{(t, e) \in I \times E \mid \gamma(t) = p(e)\}.$$

In dieser Sequenz sind die Gruppen $\pi_n(I)$ trivial. Folglich sind die Abbildungen $(i_{\gamma(t)})_* : \pi_n(F_{\gamma(t)}, *) \to \pi_n(\gamma^*(E), *)$ Isomorphismen. In anderen Worten: $i_{\gamma(t)}$ ist eine schwache Äquivalenz. Aus einem Korollar des Whitehead-Theorems folgt nun, dass i_t auch in Homologie und Kohomologie Isomorphismen induziert (vgl. Spanier, AT, S. 406, Cor 7.6.25). Wir untersuchen den Isomorphismus

$$T_\gamma := (i_{\gamma(1)})^* \circ ((i_{\gamma(0)})^*)^{-1} \;\; : \;\; H^*(F_{\gamma(0)}) \xrightarrow{\cong} H^*(F_{\gamma(1)}).$$

Lemma. T_γ hängt lediglich von der Weghomotopieklasse von γ ab, d. h. ist η ein zweiter Weg mit $\gamma \simeq \eta$, so gilt $T_\gamma = T_\eta$.

Beweis. Sei $H : I \times I \to B$ eine Homotopie zw. den Wegen γ und η, d. h. $H_0 := H(0, -) = \gamma$, $H_1 = \eta$, $H(-, 0) \equiv x$ und $H(-, 1) \equiv y$ mit $x := \gamma(0) = \eta(0)$ und $y := \gamma(1) = \eta(1)$. Für festes $s \in I$ sei $i_s : I \to I \times I, \;\; t \mapsto (s, t)$ die Inklusion als $\{s\} \times I$. Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H_s^*(E) \arrow[r, hook, "\widetilde{i_s}"] \arrow[d, "H_s^*(p)"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & H^*(E) \arrow[r] \arrow[d, "H^*(p)"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & E \arrow[d, "p"] \\
I \arrow[r, hook, "i_s"] \arrow[rr, bend right, "H_s"'] & I \times I \arrow[r, "H"] & B
\end{tikzcd}$$

Sei $t \in I$ fest. Sei $F_{s,t} \coloneqq (H_s^*(p))^{-1}(t) = (H^*(p))^{-1}((s,t))$ und $f_0 \in F$. Das linke komm. Diagramm induziert einen Morphismus zw. den langen ex. Homotopieseq. von $H_t^*(p)$ und $H^*(p)$:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & \pi_{n+1}(I,t) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "i_{s*}"] & \pi_n(F_{s,t}, f_0) \arrow[r, "(i'_{s,t})_*"] \arrow[d, equal] & \pi_n(H_s^*(E), f_0) \arrow[r, "H_s^*(p)_*"] \arrow[d, "(\widetilde{i_s})_*"] & \pi_n(I,t) \arrow[r] \arrow[d, "i_{s*}"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & \pi_{n+1}(I \times I, (s,t)) \arrow[r, "\partial"] & \pi_n(F_{s,t}, f_0) \arrow[r, "(i_{s,t})_*"] & \pi_n(H^*(E), f_0) \arrow[r, "H^*(p)_*"] & \pi_n(I \times I, (s,t)) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

In diesen Sequenzen verschwinden die Gruppen $\pi_n(I,t)$ bzw. $\pi_n(I \times I, (s,t))$. Folglich induzieren die Abbildungen $\widetilde{i_s}$ Isomorphismen in Homotopie und in Kohomologie. Es gilt nun

$$\begin{aligned}
T_\gamma &= (i'_{0,1})^* \circ ((i'_{0,0})^*)^{-1} = (i'_{0,1})^* \circ (\widetilde{i_0})^* \circ (\widetilde{i_0})^{-1} \circ ((i'_{0,0})^*)^{-1} \\
&= (i_{0,1})^* \circ ((i_{0,0})^*)^{-1} \overset{(\star)}{=} (i_{1,1})^* \circ ((i_{1,0})^*)^{-1} \\
&= (i'_{1,1})^* \circ (\widetilde{i_1})^* \circ (\widetilde{i_1})^{-1} \circ ((i'_{1,0})^*)^{-1} = (i'_{1,1})^* \circ ((i'_{1,0})^*)^{-1} = T_\eta.
\end{aligned}$$

Die Gleichung $(\star)$ gilt wegen $i_{0,1} \simeq i_{1,1}$ und $i_{0,0} \simeq i_{1,0}$. $\square$

Mit ganz ähnlicher Technik kann man zeigen:

Lemma. Seien $\gamma, \eta : I \to B$ stetige Wege mit $\gamma(1) = \eta(0)$. Dann gilt

$$T_\eta \circ T_\gamma = T_{\gamma \centerdot \eta} \quad : \quad H^*(F_{\gamma(0)}) \xrightarrow{\cong} H^*(F_{\eta(1)}).$$

Dabei ist die Komposition $\gamma \centerdot \eta$ von γ und η folgender Weg:

$$\gamma \centerdot \eta : I \to B, \quad s \mapsto \begin{cases} \gamma(2s), & \text{falls } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ \eta(2s-1), & \text{falls } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Beweis. Betrachte folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\gamma^*(E) \arrow[r, hook, "\widetilde{j}"] \arrow[d, "\gamma^*(p)"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & (\gamma \centerdot \eta)^*(E) \arrow[r] \arrow[d, "(\gamma \centerdot \eta)^*(p)"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & E \arrow[d, "p"] \\
I \arrow[r, hook, "j"] \arrow[rr, bend right, "\gamma"'] & I \arrow[r, "\gamma \centerdot \eta"] & B
\end{tikzcd}$$

Dabei ist $j : I \to I$ die Abbildung $s \mapsto {}^s\!/_2$. Analog zum letzten Lemma sieht man anhand des Leiterdiagramms der langen exakten Sequenzen der Faserungen $\gamma^*(p)$ und $(\gamma \centerdot \eta)^*(p)$, dass $\widetilde{j}$ einen Isomorphismus in Homotopie und Kohomologie induziert. Es gibt ein ähnliches Diagramm mit η statt γ und $k : I \to I,\ \ s \mapsto {}^{(1+s)}/_2$ statt j. Es induziert auch $\widetilde{k}$ einen Isomorphismus in Kohomologie. Es gilt nun

$$\begin{aligned}
T_\eta \circ T_\gamma &= (i_{\eta(1)})^* \circ ((i_{\eta(0)})^*)^{-1} \circ (i_{\gamma(1)})^* \circ ((i_{\gamma(0)})^*)^{-1} \\
&= (i_{\eta(1)})^* \circ \tilde{k}^* \circ (\tilde{k}^*)^{-1} \circ ((i_{\eta(0)})^*)^{-1} \circ (i_{\gamma(1)})^* \circ \tilde{j}^* \circ (\tilde{j}^*)^{-1} \circ ((i_{\gamma(0)})^*)^{-1} \\
&= (\tilde{k} \circ i_{\eta(1)})^* \circ ((\tilde{k} \circ i_{\eta(0)})^*)^{-1} \circ (\tilde{j} \circ i_{\gamma(1)})^* \circ ((\tilde{j} \circ i_{\gamma(0)})^*)^{-1} \\
&= (i_{\gamma\bullet\eta(1)})^* \circ ((i_{\gamma\bullet\eta(1/2)})^*)^{-1} \circ (i_{\gamma\bullet\eta(1/2)})^* \circ ((i_{\gamma\bullet\eta(0)})^*)^{-1} \\
&= (i_{\gamma\bullet\eta(1)})^* \circ ((i_{\gamma\bullet\eta(0)})^*)^{-1} = T_{\gamma\bullet\eta}.
\end{aligned}$$

□

1.2 Lokale Koeffizienten

Definition. Ein *lokales Koeffizientensystem* $\underline{A}$ auf einem topologischen Raum B besteht aus abelschen Gruppen $(A_b)_{b\in B}$ und Isomorphismen $T_\gamma : A_{\gamma(0)} \xrightarrow{\cong} A_{\gamma(1)}$ für jeden stetigen Weg $\gamma : I \to B$, sodass gilt:

- Sind zwei Wege $\gamma, \eta : I \to B$ homotop modulo Endpunkte, so gilt $T_\gamma = T_\eta$.
- Für komponierbare Wege $\gamma, \eta : I \to B$ gilt $T_{\gamma\bullet\eta} = T_\eta \circ T_\gamma$.
- Für den konstanten Weg $\gamma \equiv b$ gilt $T_\gamma = \mathrm{id}_{A_b}$.

Bemerkung. Man kann ein lokales Koeffizientensystem auf B auch als Funktor von dem Fundamentalgruppoid von B in die Kategorie der abelschen Gruppen auffassen.

Beispiel. Im letzten Abschnitt wurde gezeigt: Bei einer Serre-Faserung $p : E \to B$ bilden die q-ten Kohomologiegruppen $A_b := H^q(p^{-1}(b))$ der Fasern ein lokales Koeffizientensystem. Mit dem universellen Koeffizententheorem sieht man, dass gleiches auch für die Homologiegruppen $A_b := H^q(p^{-1}(b); G)$ mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe G gilt. Wir bezeichnen dieses Koeffizientensystem im Folgenden mit $\mathcal{H}^q(F_p; G)$.

Beispiel. Für jede abelsche Gruppe G gibt es das konstante Koeffizientensystem $\underline{G}$ mit $G_b := G$ für alle $b \in B$ und $T_\gamma = \mathrm{id}_G$ für alle $\gamma : I \to B$.

Sei im Folgenden $\Delta_n(B)$ die Menge der n-Simplizes in B, also die Menge der stetigen Abbildungen $\Delta^n \to B$ mit $\Delta^n := \mathrm{spann}\{e_0, \ldots, e_n\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, und

$$d_n : \Delta_n(B) \to \Delta_{n-1}(B) \quad \sigma \mapsto \sigma_{\langle e_0,\ldots,\hat{e_i},\ldots,e_n\rangle} \qquad (0 \le i \le n),$$

die Abbildung auf die i-Seite. Für einen n-Simplex σ bezeichne $\sigma_i := \sigma_{\langle e_i\rangle} \in \Delta_0(B) = B$ die i-te Ecke und $\sigma_{ij} := \sigma_{\langle e_i, e_j\rangle} \in \Delta_1(B)$ den Weg von von σ_i nach σ_j entlang der ij-Kante von σ $(0 \le i \le j \le n)$.

Definition. Sei B ein topologischer Raum, $\underline{A}$ ein lokales Koeffizientensystem auf B. Der *Kokomplex der singulären Koketten auf B mit Koeffizienten in $\underline{A}$* ist folgendermaßen definiert:

$$C^n(B; \underline{A}) := \prod_{\sigma\in\Delta_n(B)} A_{\sigma_0}, \quad \delta^n\left((a_\tau)_{\tau\in\Delta_n(B)}\right)_{\sigma\in\Delta_{n+1}(B)} := T^{-1}_{\sigma_{01}}(a_{d_0(\sigma)}) + \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i a_{d_i(\sigma)}.$$

Man überprüft leicht, dass $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$ gilt. Die Kohomologie $H^*(B; \underline{A}) := H^*(C^*(B; \underline{A}))$ dieses Kettenkomplexes heißt *singuläre Kohomologie von B mit Koeffizienten in $\underline{A}$*.

Beobachtung. Für das konstante Koeffizientensystem $\underline{G}$ gilt $H^*(B; \underline{G}) \cong H^*(B; G)$. Gewöhnliche Kohomologie mit Koeffizienten ist also ein Spezialfall von Kohomologie mit Koeffizienten in einem lokalen System.

Definition. Es sei $\underline{R}$ ein lokales Koeffizientensystem, in dem die Gruppen R_b sogar Ringe und die Abbildungen T_γ Ringisomorphismen sind. Dann definiert

$$\begin{aligned} &\cup : H^m(B;\underline{R}) \times H^n(B;\underline{R}) \to H^{m+n}(B;\underline{R}), \\ &([(a_\sigma)_{\sigma\in\Delta_m(B)}] \cup [(b_\sigma)_{\sigma\in\Delta_n(B)}])_{\tau\in\Delta_{m+n}(B)} := a_{\sigma_{\langle e_1,\dots,e_m\rangle}} \cdot T^{-1}_{\sigma_{0m}}(b_{\sigma_{e_m,\dots,e_{m+n}}}) \end{aligned}$$

ein Produkt, das sogenannte *Cup-Produkt*.

1.3 Spektralsequenzen

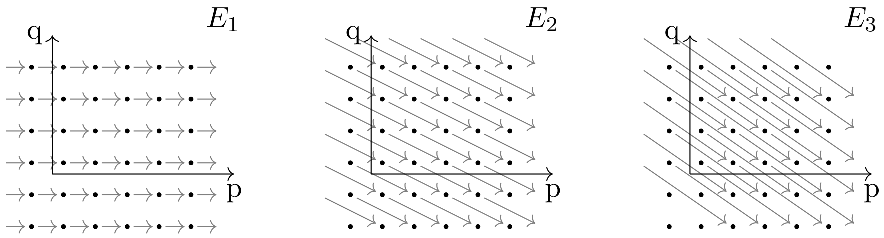
Es sei A im Folgenden ein kommutativer Ring mit Eins.

Definition. Eine (kohomologische) *Spektralsequenz* besteht aus

- A-Moduln $E_r^{p,q}$ für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ und $r \geq 1$,
- A-Modul-Homomorphismen $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$ mit $d_r^{p+r,q-r+1} \circ d_r^{p,q} = 0$
- und Isomorphismen $\alpha_r^{p,q} : H^{p,q}(E_r) := \ker(d_r^{p,q})/\operatorname{im}(d_r^{p-r,q+r-1}) \xrightarrow{\cong} E_{r+1}^{p,q}$.

Bemerkung.

- Die Homomorphismen $d^r_{p,q}$ heißen *Differentiale*.
- Die Gesamtheit der Module $E^r_{p,q}$ und Differentiale d_r^{pq} mit $r \in \mathbb{N}$ fest heißt r-te *Seite* E^r.
- Man stellt Seiten für gewöhnlich in einem 2-dimensionalen Raster dar:



Definition. Eine Spektralsequenz *konvergiert*, falls für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ ein $R \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $r \geq R$ die Differentiale von und nach $E_r^{p,q}$ null sind und damit $E^\infty_{p,q} := E_R^{p,q} \cong E_{R+1}^{p,q} \cong \dots$ Der Grenzwert der SS ist die Unendlich-Seite $E_\infty := \{E_\infty^{p,q}\}_{p,q}$.

Bemerkung. Viele Spektralsequenzen sind im ersten Quadranten konzentriert, d. h. $E_r^{p,q}$ ist nur für $p, q \geq 0$ ungleich Null. Solche Spektralsequenzen konvergieren immer, denn für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ führen für $r \geq \max(p+1, q+2)$ alle Differentiale von $E_r^{p,q}$ aus dem ersten Quadranten heraus und alle dort eintreffenden Differentiale kommen von außerhalb des ersten Quadranten und sind daher Null.

Definition. Eine *Filtrierung* eines A-Moduls M ist eine absteigende Folge

$$M \ldots \supseteq F^{p-1}M \supseteq F^pM \supseteq F^{p+1}M \supseteq \ldots$$

von Untermoduln von M, $p\in\mathbb{Z}$. Eine Filtrierung heißt

- *ausschöpfend*, falls $M = \cup_p F^p$,
- *Hausdorffsch*, wenn $0 = \cap_p F^pM$ und
- *regulär*, wenn sie ausschöpfend und Hausdorffsch ist.

Definition. Eine Spektralsequenz E *konvergiert gegen* einen graduierten A-Modul $M = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ (notiert $E_r^{p,q} \Rightarrow M^{p+q}$), falls E überhaupt konvergiert und reguläre Filtrierungen

$$M_n \supseteq \ldots \supseteq F^{p-1}M_n \supseteq F^pM_n \supseteq F^{p+1}M_n \supseteq \ldots$$

existieren, sodass $E^{pq}_\infty \cong F^pM_{p+q}/F^{p+1}M_{p+q}$ für alle $p, q \in \mathbb{Z}$.

1.4 Die Spektralsequenz eines filtrierten Komplexes

Definition. Eine *Filtrierung eines Kokettenkomplexes* $C^\bullet$ ist eine absteigende Folge

$$C^\bullet \supseteq \ldots \supseteq F^{p-1}C^\bullet \supseteq F^pC^\bullet \supseteq F^{p+1}C^\bullet \supseteq \ldots$$

von Unterkomplexen.

Lemma. Es sei $C^\bullet$ ein filtrierter Kokettenkomplex. Es gibt eine Spektralsequenz mit

$$E_1^{pq} = H^{p+q}(F^pC^\bullet/F^{p+1}C^\bullet).$$

Angenommen, die Filtrierung ist

a) *gradweise nach unten beschränkt*, d. h. für alle $q \in \mathbb{Z}$ gibt es ein $p \in \mathbb{Z}$ mit $F^pC^q = 0$,

b) *ausschöpfend*, d. h. für alle $q \in \mathbb{Z}$ ist $\cup_p F^pC^q = C^q$ und

c) für alle $q \in \mathbb{Z}$ gibt es ein $P \in \mathbb{Z}$, sodass für alle $p \leq P$ gilt: Die Inklusion $F^pC^\bullet \hookrightarrow C^\bullet$ induziert einen Isomorphismus $H^q(F^pC^\bullet) \cong H^q(C^\bullet)$ in Kohomologie.

Dann konvergiert die Spektralsequenz gegen $H^*(C^\bullet)$.

Wir führen zunächst etwas neue Notation ein. Diese hilft, den Beweis verständlicher zu formulieren. Wir fassen im Folgenden den Kettenkomplex als ein einziges Modul $C := \oplus_{n\in\mathbb{Z}} C^n$ anstatt als Folge von Modulen auf. Dieses Modul ist filtriert durch die Untermodule $F^p := \oplus_{n\in\mathbb{Z}} F^pC^n$. Wir setzen $F^{-\infty} := C$ und $F^\infty := 0$. Die Korandabbildung fassen wir als Homomorphismen $d : C \to C$ mit $d \circ d = 0$ auf, der die Filtrierung von C respektiert.

Wir sind interessiert an der Kohomologie von $C^\bullet$, also an $H^*(C) := \ker(d)/\operatorname{im}(d)$ und an der Kohomologie von F^p/F^{p+1}, also $H^*(F^p/F^{p+1}) \cong (d|_{F^p})^{-1}(F^{p+1})/d(F^p)$. Wir geben nun eine Verallgemeinerung der Definition der Kohomologie von $C^\bullet$ und der Kohomologie des Quotientenkomplexes F^p/F^q: Statt Zykeln (d. h. Elementen $c \in C$ mit $d(c) = 0$) betrachten wir *z-Zykel*, das sind Elemente $c \in C$ mit $d(c) \in F^z$. Wir teilen diese durch die Menge $d(F^b)$ der *b-Ränder* anstatt durch die Menge $d(C)$ der Ränder. Wir setzen

$$S[z, q, p, b] := \frac{F^p \cap d^{-1}(F^z)}{(F^p \cap d^{-1}(F^z)) \cap (F^q + d(F^b))}.$$

Wir haben als Spezialfälle

$$S[p, q, p, q] \cong F^p/F^q \quad \text{und} \quad S[q, q, p, p] \cong H^*(F^p/F^q).$$

Lemma. Es sei $z_1 \geq q_1 \geq p_1 = z_2 \geq b_1 = q_2 \geq p_2 \geq b_2$. Dann ist folgende Abbildung ein wohldefinierter Homomorphismus:

$$d^* : S[z_2, q_2, p_2, b_2] \to S[z_1, q_1, p_1, b_1], \quad [c] \mapsto [d(c)].$$

Beweis. Falls $[c] = 0$ in $S[z_2, q_2, p_2, b_2]$, so existieren $x \in F^{q_2}$ und $y \in F^{b_2}$ mit $c = x + d(y)$. Somit gilt $d^*[c] = [dc] = [d(x) + d^2(y)] = [d(x)] = 0$ in $S[z_1, q_1, p_1, b_1]$, da $F^{b_1} = F^{q_2}$. $\square$

Lemma. Es seien Filtrierungsindizes wie folgt gegeben:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & & z_3 & \geq & q_3 & \geq & p_3 & \geq & b_3 \\
 & & & & & & & & \| & & \| & & & & \\
 & & & & z_2 & \geq & q_2 & \geq & p_2 & \geq & b_2 & & & & \\
 & & & & \| & & \| & & & & & & & & \\
z_1 & \geq & q_1 & \geq & p_1 & \geq & b_1 & & & & & & & &
\end{array}$$

Dann ist

$$\alpha : S[q_1,q_2,p_2,p_3] \to \frac{\ker(d^* : S[z_2,q_2,p_2,b_2] \to S[z_1,q_1,p_1,b_1])}{\operatorname{im}(d^* : S[z_3,q_3,p_3,b_3] \to S[z_2,q_2,p_2,b_2])}, \quad [c] \mapsto [c]$$

ein wohldefinierter Isomorphismus.

Beweis. Sei A der Quotient auf der rechten Seite.
Wohldefiniertheit: Sei $[c] = 0$ in $S[q_1,q_2,p_2,p_3]$, d. h. es gibt $e \in F^{q_2} = F^{b_1}$ und $f \in F^{p_1}$ mit $c = e + d(f)$. Dann ist $d^*[c] = [d(c)] = [d(e)] = 0$ in $S[z_1,q_1,p_1,b_1]$, also $c \in \ker(d^* : S[z_2,q_2,p_2,b_2] \to S[z_1,q_1,p_1,b_1])$. Nun ist $f \in d^{-1}(F^{z_3})$, da $d(f) = c - e \in F^{p_2} = F^{z_3}$. Es gilt $[c] = [e + d(f)] = [d(f)] = d^*[f] = 0$ in A.
Injektivität: Sei $c \in F^{p_2} \cap d^{-1}(F^{q_1})$ mit $[c] = 0$ in A. Das heißt, es gibt $e \in F^{q_2}$, $f \in F^{b_2}$ und $g \in F^{p_3} \cap d^{-1}(F^{z_3})$ mit $c = e + d(f) + d(g)$. Dann ist $[c] = [e + d(f+g)] = 0$ in $S[q_1,q_2,p_2,p_3]$, da $f + g \in F^{p_3}$.
Surjektivität: Sei $\tilde{c} \in F^{p_2} \cap d^{-1}(F^{z_2})$ mit $[\tilde{c}] \in \ker(d^* : S[z_2,q_2,p_2,b_2] \to S[z_1,q_1,p_1,b_1])$. Das heißt, es gibt $e \in F^{q_1}$ und $f \in F^{b_1} = F^{q_2}$ mit $d(\tilde{c}) = e + d(f)$. Dann ist $[\tilde{c}] = [\tilde{c} - f]$ in $S[q_1,q_2,p_2,p_3]$ mit $\tilde{c} - f \in F^{p_2} \cap d^{-1}(F^{q_1})$, da $d(\tilde{c} - f) = e \in F^{q_1}$. □

Beweis des Lemmas über Existenz der Spektralsequenz. Wir beachten jetzt wieder, dass C und damit $S[z,q,p,b]$ graduiert und d ein Differential vom Grad $+1$ ist. Es sei $S[z,q,p,b]^n$ die n-te Komponente. Setze

$$E_r^{pq} := S[p+r, p+1, p, p-r+1]^{p+q}.$$

Die Differentiale sind

$$d_r^{pq} \;:\; \underbrace{S[p+r,p+1,p,p-r+1]^{p+q}}_{=E_r^{p,q}} \to \underbrace{S[p+2r,p+r+1,p+r,p+1]^{p+q+1}}_{=E_r^{p+r,q-r+1}}, \quad [c] \mapsto [d(c)].$$

Sie sind wohldefiniert nach Lemma TODO: Nr. Wegen Lemma TODO: Nr ist

$$\alpha_r^{pq} : H^{p,q}(E_r) = \ker(d_r^{pq}) / \operatorname{im}(d_r^{p-r,q+r-1}) \to E_{r+1}^{pq}, \quad [c] \mapsto [c]$$

ein wohldefinierter Isomorphismus.

Beweis der Konvergenz: Es seien $p, q \in \mathbb{Z}$. Wegen Bedingung a) gibt es ein $R_1 \geq 0$, sodass $F^{p+R_1}C^{p+q+1} = 0$. Für $r \geq R_1$ ist damit $E_r^{p+r,q-r+1}$ als Subquotient (d. h. Quotient eines Untermoduls) von $F^{p+R_1}C^{p+q+1}$ Null. Folglich verschwindet auch das Differential d_r^{pq}. Wegen Bedingung c) gibt es ein $S \in \mathbb{Z}$, sodass $F^sC^\bullet \hookrightarrow C^\bullet$ und somit auch $F^sC^\bullet \hookrightarrow F^{s-1}C^\bullet$ für $s \leq S$ einen Isomorphismus in H^{p+q-1} und H^{p+q} induziert. Anhand der langen exakten Sequenz zu $0 \to F^sC^\bullet \to F^{s-1}C^\bullet \to F^{s-1}C^\bullet/F^sC^\bullet \to 0$ sieht man, dass $H^{p+q-1}(F^{s-1}C^\bullet/F^sC^\bullet) = 0$. Somit ist $E_r^{p-r,q+r-1}$ für $r \geq R_2 := p - s + 1$ als Submodul von $H^{p+q-1}(F^{p-r}C^\bullet/F^{p-r+1}C^\bullet)$ Null. Folglich verschwindet auch $d_r^{p-r,q+r-1}$. Mit $R := \max(R_1, R_2)$ gilt dann $E_R^{pq} \cong E_{R+1}^{pq} \cong \ldots \cong E_\infty^{pq}$.

Sei $H^n(C^\bullet)$ absteigend filtriert durch $F^pH^n(C^\bullet) := \operatorname{im}(i^* : H^n(F^pC^\bullet) \to H^n(C^\bullet))$. Für $r \geq R$ ist

$$E_\infty^{pq} \cong E_r^{pq} = \frac{F^pC^{p+q} \cap d^{-1}(0)}{(F^pC^{p+q} \cap d^{-1}(0)) \cap (F^{p+1}C^{p+q} + d(F^{p-r+1}C^{p+q-1}))} = S[\infty, p+1, p, p-r+1]^{p+q}.$$

Es ist daher $F^pH^{p+q}(C^\bullet)/F^{p+1}H^{p+q}(C^\bullet) \cong S[\infty, p+1, p, -\infty]^{p+q}$ ein Quotient von E_∞^{pq}. Tatsächlich gilt $S[\infty, p+1, p, -\infty]^{p+q} \cong E_\infty^{pq}$, denn: Sei $c \in F^pC^{p+q} \cap d^{-1}(0)$ mit $[c] = 0$ in $S[\infty, p+1, p, -\infty]^{p+q}$. Dann gibt es ein $e \in F^{p+1}C^{p+q}$ und ein $f \in C^{p+q-1}$ mit $c = e + d(f)$. Wegen Bedingung b) gibt es ein $\tilde{p} \in \mathbb{Z}$ mit $f \in F^{\tilde{p}}C^{p+q+1}$. Wähle r so, dass $r \geq R$ und $p - r + 1 \leq \tilde{p}$. Dann ist $[c] = [e] + [d(f)] = 0$ in $E_r^{pq} \cong E_\infty^{pq}$. □

1.5 Die Serre-Spektralsequenz

Satz (Jean-Pierre Serre)**.** Es sei G eine abelsche Gruppe. Für jede Serre-Faserung $p : E \to B$ existiert eine Spektralsequenz mit

$$E_2^{p,q} = H^p(B; \mathcal{H}^q(F_p; G)),$$

welche gegen $H^*(E)$ konvergiert.

Beweis. TODO: $\square$

1.6 Multiplikative Struktur der Serre-Spektralsequenz

Satz. Es sei R ein Ring, $p : E \to B$ eine Serre-Faserung. Dann gibt es bilineare Abbildungen

$$m_r : E_r^{p,q} \times E_r^{s,t} \to E_r^{p+s,q+t}, \quad (x,y) \mapsto m_r(x,y) =: xy$$

mit folgenden Eigenschaften:

- d_r ist derivativ: $d_r^{p+s,q+t}(xy) = (d_r^{p,q}x)y + (-1)^{p+q}x(d_r^{s,t}y)$
- Es gilt $m_{r+1}([x],[y]) = [m_r(x,y)]$ für alle $x \in \ker(d_r^{p,q})$, $y \in \ker(d_r^{s,t})$.
- $m_2 : E_2^{p,q} \times E_2^{r,s} \to E_2^{p+s,q+t}$ ist das $(-1)^{qs}$-fache des Cup-Produkts

  $$H^p(B; \mathcal{H}^q(F;R)) \times H^s(B; \mathcal{H}^t(F;R)) \to H^{p+s}(B; \mathcal{H}^{q+t}(F;R)),$$

  welches für $a = [(a_\sigma)_{\sigma \in \Delta_m(B)}] \in H^p(B; \mathcal{H}^q(F;R))$ und $b = [(b_\sigma)_{\sigma \in \Delta_n(B)}] \in H^s(B; \mathcal{H}^t(F;R))$ definiert ist durch

  $$(a \cup b)_{\sigma \in \Delta_{p+s}(B)} \coloneqq a_{\sigma_{\langle e_1,\dots,e_m\rangle}} \cup T_{\sigma 0m}^{-1}(b_{\sigma_{e_m,\dots,e_{m+n}}}).$$

- Das Cup-Produkt auf $H^*(B;R)$ respektiert die Filtrierungen von $H^n(B;R)$ und schränkt daher ein zu Abbildungen $F_p^m \times F_s^n \to F_{p+s}^{m+n}$. Die induzierte Abbildung auf dem Quotienten $F_p^m / F_{p+1}^m \times F_s^n / F_{s+1}^n \to F_{p+s}^{m+n} / F_{p+s+1}^{m+n}$ entspricht dem Grenzwert $m_\infty : E_\infty^{p,m-p} \times E_\infty^{s,n-s} \to E_\infty^{p+s,m+n-p-s}$ der Multiplikationen m_r.

Beweis. TODO: $\square$

1.7 Die Pfadfaserung

Definition. Der *Pfadraum* eines punktierten topologischer Raum (X, x_0) ist

$$PX \coloneqq \{\gamma \in X^I \mid \gamma(0) = x_0\} \subset X^I$$

mit der Unterraumtopologie des Raumes X^I, welcher die Kompakt-Offen-Topologie besitzt. Der Basispunkt von PX ist der konstante Weg $y_0 : I \to X,\ t \mapsto x_0$.

Bemerkung. Der Raum PX ist zusammenziehbar: Die Abbildung

$$H : I \times PX \to PX, \quad (t,\gamma) \mapsto \gamma(t \cdot -)$$

ist eine Homotopie zwischen der konstanten Abbildung mit Wert γ_0 und id_{PX}.

Lemma. Die Abbildung $p : PX \to X,\ \gamma \mapsto \gamma(1)$ ist eine Hurewicz-Faserung.

Beweis. Es sei ein topologischer Raum A und stetige Abbildungen $H_0 : A \to PX$, $H : I \times A \to X$ mit $H \circ i_0 = p \circ H_0$ gegeben. Dann ist eine Homotopieliftung gegeben durch

$$\begin{aligned} &\tilde{H} : I \times A \to PX, \\ &(s,a) \mapsto \gamma_{s,a}, \quad \gamma_{s,a}(t) := \begin{cases} H_0(a)(t \cdot (1+s)) & \text{falls } t \cdot (1+s) \le 1, \\ H(t \cdot (1+s) - 1, a) & \text{falls } t \cdot (1+s) \ge 1. \end{cases} \end{aligned}$$ □

Die Faserung $p : PX \to X$ wird *Pfadfaserung* genannt.

Bemerkung. Die Faser von p über x_0 ist

$$\Omega X := \{\gamma \in X^I \mid \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\}.$$

Der Raum ΩX heißt *Schleifenraum* von X.

Bemerkung. Seien (X, x_0) und (Y, y_0) punktierte Räume. Es gibt eine in X und Y natürliche Bijektion

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}((\Sigma X, x_0), (Y, y_0)) &\cong \mathrm{Hom}((X, x_0), (\Omega Y, \gamma_0)), \\ f &\mapsto (x \mapsto t \mapsto f([(x,t)])), \\ ([(x,t)] \mapsto g(x)(t)) &\leftarrow g. \end{aligned}$$

Lemma. Man kann jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ schreiben als Komposition

$$X \xrightarrow{i} E_f \xrightarrow{p} Y$$

einer Homotopieäquivalenz i und einer Hurewicz-Faserung p. Genauer gilt

$$\begin{aligned} E_f &:= \{(x, \gamma) \in X \times X^I \mid f(x) = \gamma(0)\} \subset X \times Y^I, \\ i(x) &:= (x, t \mapsto f(x)), \\ p(x, \gamma) &:= \gamma(1). \end{aligned}$$

Beweis. Offensichtlich sind i und p stetig und es gilt $p \circ i = f$. Das Homotopie-Inverse von i ist $j : E_f \to X$, $(x, \gamma) \mapsto x$. Es gilt $j \circ i = \mathrm{id}_X$ und eine Homotopie zwischen $i \circ j$ und id_{E_f} ist gegeben durch

$$H : I \times E_f \to E_f, \quad (s, (x, \gamma)) \mapsto (x, \gamma(s \cdot -)).$$

Es bleibt zu zeigen, dass p eine Faserung ist. Es sei dazu ein topologischer Raum A und Abbildungen $H_0 : A \to E_f$ und $H : I \times A \to Y$ mit $H \circ i_0 = p \circ H_0$ gegeben. Dann ist folgende Abbildung eine Homotopieliftung:

$$\begin{aligned} &\tilde{H} : I \times A \to E_f, \\ &(s,a) \mapsto \gamma_{s,a}, \quad \gamma_{s,a}(t) := \begin{cases} H_0(a)(t \cdot (1+s)) & \text{falls } t \cdot (1+s) \le 1, \\ H(t \cdot (1+s) - 1, a) & \text{falls } t \cdot (1+s) \ge 1. \end{cases} \end{aligned}$$ □

1.8 Eilenberg-MacLane-Räume

Definition. Sei G eine Gruppe, $n \ge 1$. Ein *Eilenberg-MacLane-Raum* vom Typ $K(G, n)$ ist ein punktierter, zusammenhängender topologischer Raum (X, x_0) mit

$$\pi_q(X, x_0) = \begin{cases} G & \text{falls } q = n, \\ 0 & \text{falls } q \ne n. \end{cases}$$

Lemma. Sei G eine abelsche Gruppe, $n \ge 2$. Dann existiert ein CW-Komplex (X, x_0) vom Typ $K(G, n)$.

Beweis. TODO: □

Bemerkung. Sei (X, x_0) ein $K(G, n)$. Dann ist ΩX ein $K(G, n-1)$, denn

$$\begin{aligned}\pi_q(\Omega X, \gamma_0) &\cong \operatorname{Hom}((S^q, *), (\Omega X, \gamma_0)) \cong \operatorname{Hom}((\Sigma S^q, *), (X, x_0)) \cong \pi_{q+1}(X, x_0) \\ &\cong \begin{cases} G & \text{falls } q+1 = n \iff q = n-1 \\ 0 & \text{falls } q+1 \neq n. \end{cases}\end{aligned}$$

1.9 Serre-Klassen

Satz. Es sei (X, x_0) ein wegzusammenhängender, abelscher Raum, d. h. die Wirkung von $\pi_1(X, x_0)$ auf den höheren Homotopiegruppen $\pi_n(X, x_0)$, $n \geq 1$, ist trivial. Dann sind äquivalent:

- Die Homotopiegruppen $\pi_n(X, x_0)$ sind endlich für $n \geq 0$.
- Die Homologiegruppen $H_n(X; \mathbb{Z})$ sind endlich für $n \geq 1$.

Beweis. TODO: □

1.10 Rationale Kohomologie von Räumen vom Typ $K(\mathbb{Z}, n)$

Satz. Es gilt

$$H^*(K(\mathbb{Z}, n); Q) \cong \mathbb{Q}[x] \cong \begin{cases} \mathbb{Q}[x] & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \Lambda_{\mathbb{Q}}[x] & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

mit Erzeuger $x \in H^n(K(\mathbb{Z}, n), \mathbb{Q})$. Dabei bezeichnet $\Lambda_{\mathbb{Q}}[x]$ die äußere Algebra mit Erzeuger x.

Beweis. TODO: □

1.11 Satz von Serre

Satz. Die Homotopiegruppen $\pi_i(S^n)$ sind endlich bis auf die Gruppen $\pi_{4k-1}(S^{2k})$, $k \geq 1$, welche jeweils isomorph zu einer direkten Summe von $\mathbb{Z}$ mit einer endlichen Gruppe sind.

Beweis. TODO: □