

# Spektralsequenzen und der Satz von Serre

Tim Baumann

Geboren am 15. Juni 1994 in Friedberg

27. Juli 2015

Bachelorarbeit Mathematik

Betreuer: Prof. Dr. Bernhard Hanke

Zweitgutachter: Prof. Dr. X Y

INSTITUT FÜR MATHEMATIK

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-TECHNISCHE FAKULTÄT

UNIVERSITÄT AUGSBURG



# 1 Spektralsequenzen

## 1.1 Faserungen

**Definition 1.** Eine *Serre-Faserung* ist eine stetige Abbildung  $p : E \rightarrow B$ , welche die *Homotopieliftungseigenschaft* (HLE) für die Scheiben  $D^n$  besitzt, d.h. für alle  $n \geq 0$  und für alle stetigen Abbildungen  $H, H_0$  wie unten, sodass das äußere Quadrat kommutiert, gibt es eine stetige Abbildung  $\tilde{H}$ , sodass die beiden Dreiecke kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} D^n & \xrightarrow{H_0} & E \\ i_0 \downarrow & \searrow \exists \tilde{H} & \downarrow p \\ D^n \times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

Dabei ist  $i_0$  die Inklusion von  $D^n$  in  $D^n \times I$  als  $D^n \times \{0\}$ .  
Eindeutigkeit von  $\tilde{H}$  wird nicht gefordert.

**Lemma 1.** Es sei  $p : E \rightarrow B$  eine stetige Abbildung. Dann sind äquivalent:

- a)  $p$  ist eine Serre-Faserung
- b)  $p$  besitzt die *relative Homotopieliftungseigenschaft* für CW-Paare, d.h. für alle CW-Paare  $(X, A)$  und für alle  $H_0$  und  $H$  wie unten, sodass das äußere Quadrat kommutiert, gibt eine stetige Abbildung  $\tilde{H}$ , sodass die beiden Dreiecke kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} \cup A \times I & \xrightarrow{H_0} & E \\ \downarrow & \searrow \exists \tilde{H} & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

*Bemerkung.* Eine *Hurewicz-Faserung* ist eine Serre-Faserung, welche die Homotopieliftungseigenschaft sogar für alle topologischen Räume besitzt.

*Beweis.* „b)  $\implies$  a)“ Folgt sofort mit  $(X, A) := (D^n, \emptyset)$ .

„a)  $\implies$  b)“ Wir behandeln zunächst den Fall  $(X, A) = (D^n, S^{n-1})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $(D^n \times I, D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \cup I) \approx (D^n)$  homöomorph als Raumpaare. Somit ist die relative Homotopieliftungseigenschaft in diesem Fall gleichbedeutend zur Homotopieliftungseigenschaft für die Scheibe  $D^n$ .

Es sei nun  $(X, A)$  ein beliebiges Raumpaare. Dann kann man induktiv die Homotopie  $H$  auf die  $i$ -Zellen  $e_\alpha^i$  von  $X \setminus A$  fortsetzen. Dabei ist die Homotopie auf  $S^{n-1} = \partial D^n$  durch die Komposition der bisher konstruierten Homotopie mit der anheftenden Abbildung  $\phi_\alpha : S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$  vorgegeben. Man erhält die Fortsetzung durch Anwenden des zuerst bewiesenen Falls.  $\square$

**Lemma 2.** Es seien  $p : E \rightarrow B$  eine Serre-Faserung,  $b_0 \in B$ ,  $F := p^{-1}(b_0)$  die Faser über  $b_0$  und  $f_0 \in F$ . Dann gibt es eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow \pi_n(F, f_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, f_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, f_0) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_1(B, b_0)$$

von Homotopiegruppen. Dabei ist  $i : F \hookrightarrow E$  die Inklusion.

*Beweis.* Die gesuchte exakte Sequenz ist die lange exakte Homotopiesequenz

$$\dots \rightarrow \pi_n(F, f_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, f_0) \rightarrow \pi_n(E, F, f_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, f_0) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_1(E, F, f_0)$$

des Raumpaars  $(E, F)$ . Es bleibt zu zeigen:  $\pi_n(E, F, f_0) \cong \pi_n(B, b_0)$  als Gruppe für  $n > 1$  und als punktierte Menge für  $n = 1$ . Der Isomorphismus muss außerdem so gewählt werden, dass

$$p_* = \left( \pi_n(E, f_0) \rightarrow \pi_n(E, F, f_0) \xrightarrow{\cong} \pi_n(B, b_0) \right).$$

Wir zeigen:  $p_* : \pi_n(E, F, f_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$  ist der gesuchte Isomorphismus (damit ist obige Gleichung erfüllt).

*Surjektivität:* Sei  $[g : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, b_0) \rightarrow (B, \{b_0\}, b_0)] \in \pi_{n+1}(B, b_0)$ ,  $n \geq 0$ . Sei  $\tilde{g}$  der Lift im folgenden relativen HLE-Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\text{konst } f_0} & E \\ \downarrow & \nearrow \exists \tilde{g} & \downarrow p \\ I^n \times I & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

wobei  $U := I^n \times \{0\} \cup (\partial I^n) \times I \subset I^{n+1}$ . Dann kann man  $\tilde{g}$  als eine Abbildung  $(I^{n+1}, \partial I^{n+1}, U) \rightarrow (E, F, \{f_0\})$  von Raumtripeln auffassen, welche ein Element von  $\pi_{n+1}(E, F, f_0)$  repräsentiert. Es gilt  $p_*[\tilde{g}] = [p \circ \tilde{g}] = [g]$ .

*Injektivität:* Seien  $[h_0], [h_1] \in \pi_{n+1}(E, F, f_0)$  mit  $p_*[h_0] = p_*[h_1]$ . Sei

$$H : I \times I^{n+1}, \quad (t, x) \mapsto H_t(x)$$

eine Homotopie mit  $H_0 = p \circ h_0$ ,  $H_1 = p \circ h_1$ , welche zu jedem Zeitpunkt  $t \in I$  eine Abbildung  $H_t : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}) \rightarrow (B, \{b_0\})$  von Raumpaaren ist. Betrachte folgendes HLE-Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{h} & E \\ \downarrow & \nearrow \exists \tilde{H} & \downarrow p \\ I^{n+1} \times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

mit  $V := I^{n+1} \times \{0\} \cup (\partial I^{n+1}) \times I \subset I^{n+2}$  und

$$h|_{\{0\} \times I^{n+1}} := h_0, \quad h|_{\{1\} \times I^{n+1}} := h_1, \quad h|_{I \times U} := \text{konst } f_0.$$

Nun ist  $\tilde{H}$  eine Homotopie von  $h_0$  nach  $h_1$ , welche zu jedem Zeitpunkt  $t$  eine Abbildung  $\tilde{H}_t : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, U) \rightarrow (E, F, \{b_0\})$  von Raumtripeln ist.  $\square$

**Definition 2.** Es seien  $p : E \rightarrow B$  und  $g : X \rightarrow B$  stetig. Der *Pullback* von  $p$  entlang  $g$  ist die Abbildung  $g^*(p) : g^*(E) \rightarrow X$ , wobei  $g^*(E) := X \times_B E$  das Faserprodukt von  $X$  und  $E$  über  $B$  vermöge  $g$  und  $p$  ist.

*Bemerkung.* Pullback ist funktoriell:  $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$  und  $\text{id}^* = \text{id}$ .

**Lemma 3.** Pullbacks von Serre-Faserungen sind Serre-Faserungen.

*Beweis.* Sei  $p : E \rightarrow B$  eine Serre-Faserung und  $g : X \rightarrow B$  stetig. Wir müssen die Existenz des Morphismus  $\tilde{H}$  im folgenden Diagramm zeigen:

$$\begin{array}{ccccc} D^n & \xrightarrow{H_0} & g^*(E) & \xrightarrow{h} & E \\ \downarrow i_0 & & \downarrow g^*(p) & \lrcorner & \downarrow p \\ D^n \times I & \xrightarrow{H} & X & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

Aus der HLE von  $p$  erhält wie folgt einen Morphismus  $K$ :

$$\begin{array}{ccccc}
D^n & \xrightarrow{H_0} & X \times_B E & \xrightarrow{h} & E \\
\downarrow i_0 & & & \nearrow K & \downarrow p \\
D^n \times I & \xrightarrow{H} & X & \xrightarrow{g} & B
\end{array}$$

Nun ist  $D^n \times I$  vermöge  $H$  und  $K$  ein Kegel über dem Diagramm  $(X \xrightarrow{g} B \xleftarrow{p} E)$ . Die universelle Eigenschaft von  $g^*(E)$  induziert einen Morphismus  $\tilde{H} : D^n \times I \rightarrow X \times_B E$  mit  $g^*(p) \circ \tilde{H} = H$  und  $h \circ \tilde{H} = K$ . Aus der univ. Eigenschaft von  $g^*(E)$  (Eindeutigkeit) folgt nun  $\tilde{H} \circ i_0 = H_0$ .  $\square$

**Definition 3.** Ein Morphismus  $(g, \tilde{g}) : p' \rightarrow p$  von Serre-Faserungen  $p' : E' \rightarrow B'$  und  $p : E \rightarrow B$  ist ein kommutatives Quadrat der Form

$$\begin{array}{ccc}
E' & \xrightarrow{\tilde{g}} & E \\
\downarrow p' & & \downarrow p \\
B' & \xrightarrow{g} & B
\end{array}$$

**Beispiel 1.** Pullback einer Serre-Faserung  $p$  entlang einer stetigen Abbildung  $g$  induziert einen Morphismus  $(g, \tilde{g}) : g^*(p) \rightarrow p$  von Serre-Faserungen.

**Lemma 4.** Die langen exakten Sequenzen der Homotopiegruppen von Faserungen sind natürlich: Es sei  $(g, \tilde{g}) : p' \rightarrow p$  ein Morphismus von Serre-Faserungen  $p' : E' \rightarrow B'$  und  $p : E \rightarrow B$ ,  $b'_0 \in B'$ ,  $b_0 := g(b'_0)$ ,  $F' := p'^{-1}(b'_0)$ ,  $F := p^{-1}(b_0)$ ,  $f'_0 \in F'$ ,  $f_0 := \tilde{g}(f'_0)$ . Dann gibt es eine „Leiter“ bestehend aus kommutativen Quadraten zwischen den Homotopiesequenzen:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \longrightarrow \pi_n(F', f'_0) & \xrightarrow{i'_*} & \pi_n(E', f'_0) & \xrightarrow{p'_*} & \pi_n(B', b'_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(F', f'_0) \longrightarrow \cdots \\
& \downarrow (\tilde{g}|_{F'})^* & \downarrow \tilde{g}_* & & \downarrow g_* & & \downarrow (g|_{F'})^* \\
\cdots \longrightarrow \pi_n(F, f_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(E, f_0) & \xrightarrow{p_*} & \pi_n(B, b_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(F, f_0) \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

*Beweis.* Folgt aus der Natürlichkeit der langen exakten Homotopiesequenz von Raumpaaren.  $\square$

Es sei  $p : E \rightarrow B$  eine Serre-Faserung,  $\gamma : I \rightarrow B$  ein stetiger Weg. Betrachte die lange exakte Sequenz

$$\cdots \rightarrow \pi_n(F_{\gamma(0)}) \rightarrow \pi_n(\gamma^*(E)) \rightarrow \pi_n(I) \rightarrow \pi_{n-1}(F_{\gamma(0)}) \rightarrow \cdots$$

der Homotopiegruppen von  $\gamma^*(p) : \gamma^*(E) \rightarrow I$  mit Faser

$$F_{\gamma(t)} := \gamma^*(p)^{-1}(t) \subset \gamma^*(E) = \{(t, e) \in I \times E \mid \gamma(t) = p(e)\}.$$

In dieser Sequenz sind die Gruppen  $\pi_n(I)$  trivial. Folglich sind die Abbildungen  $(i_{\gamma(t)})_* : \pi_n(F_{\gamma(t)}, *) \rightarrow \pi_n(\gamma^*(E), *)$  Isomorphismen. In anderen Worten:  $i_{\gamma(t)}$  ist eine schwache Äquivalenz. Aus einem Korollar des Whitehead-Theorems folgt nun, dass  $i_t$  auch in Homologie und Kohomologie Isomorphismen induziert (vgl. Spanier, AT, S. 406, Cor 7.6.25). Wir untersuchen den Isomorphismus

$$T_\gamma := (i_{\gamma(1)})^* \circ ((i_{\gamma(0)})^*)^{-1} : H^*(F_{\gamma(0)}) \xrightarrow{\cong} H^*(F_{\gamma(1)}).$$

**Lemma 5.**  $T_\gamma$  hängt lediglich von der Weghomotopieklasse von  $\gamma$  ab, d. h. ist  $\eta$  ein zweiter Weg mit  $\gamma \simeq \eta$ , so gilt  $T_\gamma = T_\eta$ .

*Beweis.* Sei  $H : I \times I \rightarrow B$  eine Homotopie zw. den Wegen  $\gamma$  und  $\eta$ , d. h.  $H_0 := H(0, -) = \gamma$ ,  $H_1 = \eta$ ,  $H(-, 0) \equiv x$  und  $H(-, 1) \equiv y$  mit  $x := \gamma(0) = \eta(0)$  und  $y := \gamma(1) = \eta(1)$ . Für festes  $s \in I$  sei  $i_s : I \rightarrow I \times I$ ,  $t \mapsto (s, t)$  die Inklusion als  $\{s\} \times I$ . Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
H_s^*(E) & \xrightarrow{\tilde{i}_s} & H^*(E) & \longrightarrow & E \\
\downarrow H_s^*(p) & \lrcorner & \downarrow H^*(p) & \lrcorner & \downarrow p \\
I & \xrightarrow{i_s} & I \times I & \xrightarrow{H} & B \\
& & \searrow H_s & & 
\end{array}$$

Sei  $t \in I$  fest. Sei  $F_{s,t} := (H_s^*(p))^{-1}(t) = (H^*(p))^{-1}((s,t))$  und  $f_0 \in F$ . Das linke komm. Diagramm induziert einen Morphismus zw. den langen ex. Homotopieseq. von  $H_t^*(p)$  und  $H^*(p)$ :

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & \pi_{n+1}(I, t) & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(F_{s,t}, f_0) & \xrightarrow{(i'_{s,t})^*} & \pi_n(H_s^*(E), f_0) \xrightarrow{H_s^*(p)^*} \pi_n(I, t) \longrightarrow \cdots \\
& & \downarrow i_{s*} & & \parallel & & \downarrow (\tilde{i}_s)^* \\
\cdots & \longrightarrow & \pi_{n+1}(I \times I, (s, t)) & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(F_{s,t}, f_0) & \xrightarrow{(i_{s,t})^*} & \pi_n(H^*(E), f_0) \xrightarrow{H^*(p)^*} \pi_n(I \times I, (s, t)) \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

In diesen Sequenzen verschwinden die Gruppen  $\pi_n(I, t)$  bzw.  $\pi_n(I \times I, (s, t))$ . Folglich induzieren die Abbildungen  $\tilde{i}_s$  Isomorphismen in Homotopie und in Kohomologie. Es gilt nun

$$\begin{aligned}
T_\gamma &= (i'_{0,1})^* \circ ((i'_{0,0})^*)^{-1} = (i'_{0,1})^* \circ (\tilde{i}_0)^* \circ (\tilde{i}_0)^{-1} \circ ((i'_{0,0})^*)^{-1} \\
&= (i_{0,1})^* \circ ((i_{0,0})^*)^{-1} \stackrel{(\star)}{=} (i_{1,1})^* \circ ((i_{1,0})^*)^{-1} \\
&= (i'_{1,1})^* \circ (\tilde{i}_1)^* \circ (\tilde{i}_1)^{-1} \circ ((i'_{1,0})^*)^{-1} = (i'_{1,1})^* \circ ((i'_{1,0})^*)^{-1} = T_\eta.
\end{aligned}$$

Die Gleichung  $(\star)$  gilt wegen  $i_{0,1} \simeq i_{1,1}$  und  $i_{0,0} \simeq i_{1,0}$ . □

Mit ganz ähnlicher Technik kann man zeigen:

**Lemma 6.** Seien  $\gamma, \eta : I \rightarrow B$  stetige Wege mit  $\gamma(1) = \eta(0)$ . Dann gilt

$$T_\eta \circ T_\gamma = T_{\gamma \cdot \eta} : H^*(F_{\gamma(0)}) \xrightarrow{\cong} H^*(F_{\eta(1)}).$$

Dabei ist die Komposition  $\gamma \cdot \eta$  von  $\gamma$  und  $\eta$  folgender Weg:

$$\gamma \cdot \eta : I \rightarrow B, \quad s \mapsto \begin{cases} \gamma(2s), & \text{falls } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ \eta(2s-1), & \text{falls } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

*Beweis.* Betrachte folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
\gamma^*(E) & \xrightarrow{\tilde{j}} & (\gamma \cdot \eta)^*(E) & \longrightarrow & E \\
\downarrow \gamma^*(p) & \lrcorner & \downarrow (\gamma \cdot \eta)^*(p) & \lrcorner & \downarrow p \\
I & \xrightarrow{j} & I & \xrightarrow{\gamma \cdot \eta} & B \\
& & \searrow \gamma & & 
\end{array}$$

Dabei ist  $j : I \rightarrow I$  die Abbildung  $s \mapsto s/2$ . Analog zum letzten Lemma sieht man anhand des Leiterdiagramms der langen exakten Sequenzen der Faserungen  $\gamma^*(p)$  und  $(\gamma \cdot \eta)^*(p)$ , dass  $\tilde{j}$  einen Isomorphismus in Homotopie und Kohomologie induziert. Es gibt ein ähnliches Diagramm

mit  $\eta$  statt  $\gamma$  und  $k : I \rightarrow I$ ,  $s \mapsto (1+s)/2$  statt  $j$ . Es induziert auch  $\tilde{k}$  einen Isomorphismus in Kohomologie. Es gilt nun

$$\begin{aligned}
T_\eta \circ T_\gamma &= (i_{\eta(1)})^* \circ ((i_{\eta(0)})^*)^{-1} \circ (i_{\gamma(1)})^* \circ ((i_{\gamma(0)})^*)^{-1} \\
&= (i_{\eta(1)})^* \circ \tilde{k}^* \circ (\tilde{k}^*)^{-1} \circ ((i_{\eta(0)})^*)^{-1} \circ (i_{\gamma(1)})^* \circ \tilde{j}^* \circ (\tilde{j}^*)^{-1} \circ ((i_{\gamma(0)})^*)^{-1} \\
&= (\tilde{k} \circ i_{\eta(1)})^* \circ ((\tilde{k} \circ i_{\eta(0)})^*)^{-1} \circ (\tilde{j} \circ i_{\gamma(1)})^* \circ ((\tilde{j} \circ i_{\gamma(0)})^*)^{-1} \\
&= (i_{\gamma, \eta(1)})^* \circ ((i_{\gamma, \eta(1/2)})^*)^{-1} \circ (i_{\gamma, \eta(1/2)})^* \circ ((i_{\gamma, \eta(0)})^*)^{-1} \\
&= (i_{\gamma, \eta(1)})^* \circ ((i_{\gamma, \eta(0)})^*)^{-1} = T_{\gamma \cdot \eta}.
\end{aligned}$$

□

## 1.2 Lokale Koeffizienten

**Definition 4.** Ein *lokales Koeffizientensystem*  $\underline{A}$  auf einem topologischen Raum  $B$  besteht aus abelschen Gruppen  $(A_b)_{b \in B}$  und Isomorphismen  $T_\gamma : A_{\gamma(0)} \xrightarrow{\cong} A_{\gamma(1)}$  für jeden stetigen Weg  $\gamma : I \rightarrow B$ , sodass gilt:

- Sind zwei Wege  $\gamma, \eta : I \rightarrow B$  homotop modulo Endpunkte, so gilt  $T_\gamma = T_\eta$ .
- Für komponierbare Wege  $\gamma, \eta : I \rightarrow B$  gilt  $T_{\gamma \cdot \eta} = T_\eta \circ T_\gamma$ .
- Für den konstanten Weg  $\gamma \equiv b$  gilt  $T_\gamma = \text{id}_{A_b}$ .

*Bemerkung.* Man kann ein lokales Koeffizientensystem auf  $B$  auch als Funktor von dem Fundamentalgruppoid von  $B$  in die Kategorie der abelschen Gruppen auffassen.

**Beispiel 2.** Im letzten Abschnitt wurde gezeigt: Bei einer Serre-Faserung  $p : E \rightarrow B$  bilden die  $q$ -ten Kohomologiegruppen  $A_b := H^q(p^{-1}(b))$  der Fasern ein lokales Koeffizientensystem. Mit dem universellen Koeffiziententheorem sieht man, dass gleiches auch für die Homologiegruppen  $A_b := H^q(p^{-1}(b); G)$  mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe  $G$  gilt. Wir bezeichnen dieses Koeffizientensystem im Folgenden mit  $\mathcal{H}^q(F_p; G)$ .

**Beispiel 3.** Für jede abelsche Gruppe  $G$  gibt es das konstante Koeffizientensystem  $\underline{G}$  mit  $G_b := G$  für alle  $b \in B$  und  $T_\gamma = \text{id}_G$  für alle  $\gamma : I \rightarrow B$ .

Sei im Folgenden  $\Delta_n(B)$  die Menge der  $n$ -Simplizes in  $B$ , also die Menge der stetigen Abbildungen  $\Delta^n \rightarrow B$  mit  $\Delta^n := \text{spann}\{e_0, \dots, e_n\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , und

$$d_n : \Delta_n(B) \rightarrow \Delta_{n-1}(B) \quad \sigma \mapsto \sigma_{\langle e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n \rangle} \quad (0 \leq i \leq n),$$

die Abbildung auf die  $i$ -Seite. Für einen  $n$ -Simplex  $\sigma$  bezeichne  $\sigma_i := \sigma_{\langle e_i \rangle} \in \Delta_0(B) = B$  die  $i$ -te Ecke und  $\sigma_{ij} := \sigma_{\langle e_i, e_j \rangle} \in \Delta_1(B)$  den Weg von  $\sigma_i$  nach  $\sigma_j$  entlang der  $ij$ -Kante von  $\sigma$  ( $0 \leq i \leq j \leq n$ ).

**Definition 5.** Sei  $B$  ein topologischer Raum,  $\underline{A}$  ein lokales Koeffizientensystem auf  $B$ . Der *Kokomplex der singulären Koketten auf  $B$  mit Koeffizienten in  $\underline{A}$*  ist folgendermaßen definiert:

$$C^n(B; \underline{A}) := \prod_{\sigma \in \Delta_n(B)} A_{\sigma_0}, \quad \delta^n((a_\tau)_{\tau \in \Delta_n(B)})_{\sigma \in \Delta_{n+1}(B)} := T_{\sigma_{01}}^{-1}(a_{d_0(\sigma)}) + \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i a_{d_i(\sigma)}.$$

Man überprüft leicht, dass  $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$  gilt. Die Kohomologie  $H^*(B; \underline{A}) := H^*(C^*(B; \underline{A}))$  dieses Kettenkomplexes heißt *singuläre Kohomologie von  $B$  mit Koeffizienten in  $\underline{A}$* .

**Beobachtung 1.** Für das konstante Koeffizientensystem  $\underline{G}$  gilt  $H^*(B; \underline{G}) \cong H^*(B; G)$ . Gewöhnliche Kohomologie mit Koeffizienten ist also ein Spezialfall von Kohomologie mit Koeffizienten in einem lokalen System.

**Definition 6.** Es sei  $\underline{R}$  ein lokales Koeffizientensystem, in dem die Gruppen  $R_b$  sogar Ringe und die Abbildungen  $T_\gamma$  Ringisomorphismen sind. Dann definiert

$$\cup : H^m(B; \underline{R}) \times H^n(B; \underline{R}) \rightarrow H^{m+n}(B; \underline{R}),$$

$$([(a_\sigma)_{\sigma \in \Delta_m(B)}] \cup [(b_\sigma)_{\sigma \in \Delta_n(B)}])_{\tau \in \Delta_{m+n}(B)} := a_{\sigma_{\langle e_1, \dots, e_m \rangle}} \cdot T_{\sigma_{0m}}^{-1}(b_{\sigma_{e_m, \dots, e_{m+n}}})$$

ein Produkt, das sogenannte *Cup-Produkt*.

### 1.3 Spektralsequenzen

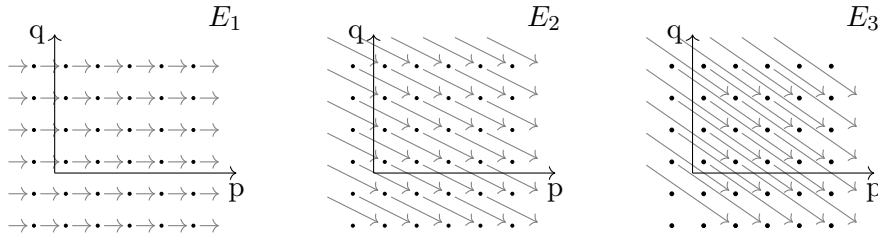
Es sei  $A$  im Folgenden ein kommutativer Ring mit Eins.

**Definition 7.** Eine (kohomologische) *Spektralsequenz* besteht aus

- $A$ -Moduln  $E_r^{p,q}$  für alle  $p, q \in \mathbb{Z}$  und  $r \geq 1$ ,
- $A$ -Modul-Homomorphismen  $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1}$  mit  $d_r^{p+r, q-r+1} \circ d_r^{p,q} = 0$
- und Isomorphismen  $\alpha_r^{p,q} : H^{p,q}(E_r) := \ker(d_r^{p,q}) / \text{im}(d_r^{p-r, q+r-1}) \xrightarrow{\cong} E_{r+1}^{p,q}$ .

*Bemerkung.* • Die Homomorphismen  $d_{p,q}^r$  heißen *Differentiale*.

- Die Gesamtheit der Module  $E_{p,q}^r$  und Differentiale  $d_r^{p,q}$  mit  $r \in \mathbb{N}$  fest heißt  $r$ -te *Seite*  $E^r$ .
- Man stellt Seiten für gewöhnlich in einem 2-dimensionalen Raster dar:



**Definition 8.** Eine Spektralsequenz *konvergiert*, falls für alle  $p, q \in \mathbb{Z}$  ein  $R \in \mathbb{N}$  existiert, sodass für alle  $r \geq R$  die Differentiale von und nach  $E_r^{p,q}$  null sind und damit  $E_{p,q}^\infty := E_R^{p,q} \cong E_{R+1}^{p,q} \cong \dots$ . Der Grenzwert der SS ist die Unendlich-Seite  $E_\infty := \{E_\infty^{p,q}\}_{p,q}$ .

*Bemerkung.* Viele Spektralsequenzen sind im ersten Quadranten konzentriert, d. h.  $E_r^{p,q}$  ist nur für  $p, q \geq 0$  ungleich Null. Solche Spektralsequenzen konvergieren immer, denn für alle  $p, q \in \mathbb{Z}$  führen für  $r \geq \max(p+1, q+2)$  alle Differentiale von  $E_r^{p,q}$  aus dem ersten Quadranten heraus und alle dort eintreffenden Differentiale kommen von außerhalb des ersten Quadranten und sind daher Null.

**Definition 9.** Eine *Filtrierung* eines  $A$ -Moduls  $M$  ist eine absteigende Folge

$$M \supseteq \dots \supseteq F^{p-1}M \supseteq F^pM \supseteq F^{p+1}M \supseteq \dots$$

von Untermoduln von  $M$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ . Eine Filtrierung heißt

- *ausschöpfend*, falls  $M = \cup_p F^p$ ,
- *Hausdorffsch*, wenn  $0 = \cap_p F^pM$  und
- *regulär*, wenn sie ausschöpfend und Hausdorffsch ist.

**Definition 10.** Eine Spektralsequenz  $E$  *konvergiert gegen* einen graduierten  $A$ -Modul  $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M^n$  (notiert  $E_r^{p,q} \Rightarrow M^{p+q}$ ), falls  $E$  überhaupt konvergiert und reguläre Filtrierungen

$$M^n \supseteq \dots \supseteq F^{p-1}M^n \supseteq F^pM^n \supseteq F^{p+1}M^n \supseteq \dots$$

existieren, sodass  $E_\infty^{p,q} \cong F^pM^{p+q} / F^{p+1}M^{p+q}$  für alle  $p, q \in \mathbb{Z}$ .



## 1.4 Die Spektralsequenz eines filtrierten Komplexes

**Definition 11.** Eine *Filtrierung eines Kokettenkomplexes*  $C^\bullet$  ist eine absteigende Folge

$$C^\bullet \supseteq \dots \supseteq F^{p-1}C^\bullet \supseteq F^pC^\bullet \supseteq F^{p+1}C^\bullet \supseteq \dots$$

von Unterkomplexen.

**Lemma 7.** Es sei  $C^\bullet$  ein filtrierter Kokettenkomplex. Es gibt eine Spektralsequenz mit

$$E_1^{pq} = H^{p+q}(F^pC^\bullet/F^{p+1}C^\bullet).$$

Angenommen, die Filtrierung ist

- a) *gradweise nach unten beschränkt*, d. h. für alle  $q \in \mathbb{Z}$  gibt es ein  $p \in \mathbb{Z}$  mit  $F^pC^q = 0$ ,
- b) *ausschöpfend*, d. h. für alle  $q \in \mathbb{Z}$  ist  $\cup_p F^pC^q = C^q$  und
- c) für alle  $q \in \mathbb{Z}$  gibt es ein  $P \in \mathbb{Z}$ , sodass für alle  $p \leq P$  gilt: Die Inklusion  $F^pC^\bullet \hookrightarrow C^\bullet$  induziert einen Isomorphismus  $H^q(F^pC^\bullet) \cong H^q(C^\bullet)$  in Kohomologie.

Dann konvergiert die Spektralsequenz gegen  $H^*(C^\bullet)$ .

Wir führen zunächst etwas neue Notation ein. Diese hilft, den Beweis verständlicher zu formulieren. Wir fassen im Folgenden den Kettenkomplex als ein einziges Modul  $C := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} C^n$  anstatt als Folge von Modulen auf. Dieses Modul ist filtriert durch die Untermodule  $F^p := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} F^pC^n$ . Wir setzen  $F^{-\infty} := C$  und  $F^\infty := 0$ . Die Korandabbildung fassen wir als Homomorphismen  $d : C \rightarrow C$  mit  $d \circ d = 0$  auf, der die Filtrierung von  $C$  respektiert.

Wir sind interessiert an der Kohomologie von  $C^\bullet$ , also an  $H^*(C) := \ker(d)/\text{im}(d)$  und an der Kohomologie von  $F^p/F^{p+1}$ , also  $H^*(F^p/F^{p+1}) \cong (d|_{F^p})^{-1}(F^{p+1})/d(F^p)$ . Wir geben nun eine Verallgemeinerung der Definition der Kohomologie von  $C^\bullet$  und der Kohomologie des Quotientenkomplexes  $F^p/F^q$ : Statt Zykeln (d. h. Elementen  $c \in C$  mit  $d(c) = 0$ ) betrachten wir *z-Zykel*, das sind Elemente  $c \in C$  mit  $d(c) \in F^z$ . Wir teilen diese durch die Menge  $d(F^b)$  der *b-Ränder* anstatt durch die Menge  $d(C)$  der Ränder. Wir setzen

$$S[z, q, p, b] := \frac{F^p \cap d^{-1}(F^z)}{(F^p \cap d^{-1}(F^z)) \cap (F^q + d(F^b))}.$$

Wir haben als Spezialfälle

$$S[p, q, p, q] \cong F^p/F^q \quad \text{und} \quad S[q, q, p, p] \cong H^*(F^p/F^q).$$

**Lemma 8.** Es sei  $z_1 \geq q_1 \geq p_1 = z_2 \geq b_1 = q_2 \geq p_2 \geq b_2$ . Dann ist folgende Abbildung ein wohldefinierter Homomorphismus:

$$d^* : S[z_2, q_2, p_2, b_2] \rightarrow S[z_1, q_1, p_1, b_1], \quad [c] \mapsto [d(c)].$$

*Beweis.* Falls  $[c] = 0$  in  $S[z_2, q_2, p_2, b_2]$ , so existieren  $x \in F^{q_2}$  und  $y \in F^{b_2}$  mit  $c = x + d(y)$ . Somit gilt  $d^*[c] = [dc] = [d(x) + d^2(y)] = [d(x)] = 0$  in  $S[z_1, q_1, p_1, b_1]$ , da  $F^{b_1} = F^{q_2}$ .  $\square$

**Lemma 9.** Es seien Filtrierungsindizes wie folgt gegeben:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & z_3 & \geq & q_3 & \geq & p_3 & \geq & b_3 \\ & & & \parallel & & \parallel & & & & \\ & & z_2 & \geq & q_2 & \geq & p_2 & \geq & b_2 \\ & & \parallel & & \parallel & & & & & \\ z_1 & \geq & q_1 & \geq & p_1 & \geq & b_1 & & & \end{array}$$

Dann ist

$$\alpha : S[q_1, q_2, p_2, p_3] \rightarrow \frac{\ker(d^* : S[z_2, q_2, p_2, b_2] \rightarrow S[z_1, q_1, p_1, b_1])}{\operatorname{im}(d^* : S[z_3, q_3, p_3, b_3] \rightarrow S[z_2, q_2, p_2, b_2])}, \quad [c] \mapsto [c]$$

ein wohldefinierter Isomorphismus.

*Beweis.* Sei  $A$  der Quotient auf der rechten Seite.

*Wohldefiniertheit:* Sei  $[c] = 0$  in  $S[q_1, q_2, p_2, p_3]$ , d. h. es gibt  $e \in F^{q_2} = F^{b_1}$  und  $f \in F^{p_1}$  mit  $c = e + d(f)$ . Dann ist  $d^*[c] = [d(c)] = [d(e)] = 0$  in  $S[z_1, q_1, p_1, b_1]$ , also  $c \in \ker(d^* : S[z_2, q_2, p_2, b_2] \rightarrow S[z_1, q_1, p_1, b_1])$ . Nun ist  $f \in d^{-1}(F^{z_3})$ , da  $d(f) = c - e \in F^{p_2} = F^{z_3}$ . Es gilt  $[c] = [e + d(f)] = [d(f)] = d^*[f] = 0$  in  $A$ .

*Injektivität:* Sei  $c \in F^{p_2} \cap d^{-1}(F^{q_1})$  mit  $[c] = 0$  in  $A$ . Das heißt, es gibt  $e \in F^{q_2}$ ,  $f \in F^{b_2}$  und  $g \in F^{p_3} \cap d^{-1}(F^{z_3})$  mit  $c = e + d(f) + d(g)$ . Dann ist  $[c] = [e + d(f + g)] = 0$  in  $S[q_1, q_2, p_2, p_3]$ , da  $f + g \in F^{p_3}$ .

*Surjektivität:* Sei  $\tilde{c} \in F^{p_2} \cap d^{-1}(F^{z_2})$  mit  $[\tilde{c}] \in \ker(d^* : S[z_2, q_2, p_2, b_2] \rightarrow S[z_1, q_1, p_1, b_1])$ . Das heißt, es gibt  $e \in F^{q_1}$  und  $f \in F^{b_1} = F^{q_2}$  mit  $d(\tilde{c}) = e + d(f)$ . Dann ist  $[\tilde{c}] = [\tilde{c} - f]$  in  $S[q_1, q_2, p_2, p_3]$  mit  $\tilde{c} - f \in F^{p_2} \cap d^{-1}(F^{q_1})$ , da  $d(\tilde{c} - f) = e \in F^{q_1}$ .  $\square$

*Beweis des Lemmas über Existenz der Spektralsequenz.* Wir beachten jetzt wieder, dass  $C$  und damit  $S[z, q, p, b]$  graduiert und  $d$  ein Differential vom Grad  $+1$  ist. Es sei  $S[z, q, p, b]^n$  die  $n$ -te Komponente. Setze

$$E_r^{pq} := S[p+r, p+1, p, p-r+1]^{p+q}.$$

Die Differentiale sind

$$d_r^{pq} : \underbrace{S[p+r, p+1, p, p-r+1]^{p+q}}_{=E_r^{p,q}} \rightarrow \underbrace{S[p+2r, p+r+1, p+r, p+1]^{p+q+1}}_{=E_r^{p+r, q-r+1}}, \quad [c] \mapsto [d(c)].$$

Sie sind wohldefiniert nach Lemma **TODO: Nr.** Wegen Lemma **TODO: Nr** ist

$$\alpha_r^{pq} : H^{p,q}(E_r) = \ker(d_r^{pq}) / \operatorname{im}(d_r^{p-r, q+r-1}) \rightarrow E_{r+1}^{pq}, \quad [c] \mapsto [c]$$

ein wohldefinierter Isomorphismus.

*Beweis der Konvergenz:* Es seien  $p, q \in \mathbb{Z}$ . Wegen Bedingung a) gibt es ein  $R_1 \geq 0$ , sodass  $F^{p+R_1}C^{p+q+1} = 0$ . Für  $r \geq R_1$  ist damit  $E_r^{p+r, q-r+1}$  als Subquotient (d. h. Quotient eines Untermoduls) von  $F^{p+R_1}C^{p+q+1}$  Null. Folglich verschwindet auch das Differential  $d_r^{pq}$ . Wegen Bedingung c) gibt es ein  $S \in \mathbb{Z}$ , sodass  $F^s C^\bullet \hookrightarrow C^\bullet$  und somit auch  $F^s C^\bullet \hookrightarrow F^{s-1} C^\bullet$  für  $s \leq S$  einen Isomorphismus in  $H^{p+q-1}$  und  $H^{p+q}$  induziert. Anhand der langen exakten Sequenz zu  $0 \rightarrow F^s C^\bullet \rightarrow F^{s-1} C^\bullet \rightarrow F^{s-1} C^\bullet / F^s C^\bullet \rightarrow 0$  sieht man, dass  $H^{p+q-1}(F^{s-1} C^\bullet / F^s C^\bullet) = 0$ . Somit ist  $E_r^{p-r, q+r-1}$  für  $r \geq R_2 := p - s + 1$  als Submodul von  $H^{p+q-1}(F^{p-r} C^\bullet / F^{p-r+1} C^\bullet)$  Null. Folglich verschwindet auch  $d_r^{p-r, q+r-1}$ . Mit  $R := \max(R_1, R_2)$  gilt dann  $E_R^{pq} \cong E_{R+1}^{pq} \cong \dots \cong E_\infty^{pq}$ .

Sei  $H^n(C^\bullet)$  absteigend filtriert durch  $F^p H^n(C^\bullet) := \operatorname{im}(i^* : H^n(F^p C^\bullet) \rightarrow H^n(C^\bullet))$ . Für  $r \geq R$  ist

$$E_\infty^{pq} \cong E_r^{pq} = \frac{F^p C^{p+q} \cap d^{-1}(0)}{(F^p C^{p+q} \cap d^{-1}(0)) \cap (F^{p+1} C^{p+q} + d(F^{p-r+1} C^{p+q-1}))} = S[\infty, p+1, p, p-r+1]^{p+q}.$$

Es ist daher  $F^p H^{p+q}(C^\bullet) / F^{p+1} H^{p+q}(C^\bullet) \cong S[\infty, p+1, p, -\infty]^{p+q}$  ein Quotient von  $E_\infty^{pq}$ . Tatsächlich gilt  $S[\infty, p+1, p, -\infty]^{p+q} \cong E_\infty^{pq}$ , denn: Sei  $c \in F^p C^{p+q} \cap d^{-1}(0)$  mit  $[c] = 0$  in  $S[\infty, p+1, p, -\infty]^{p+q}$ . Dann gibt es ein  $e \in F^{p+1} C^{p+q}$  und ein  $f \in C^{p+q-1}$  mit  $c = e + d(f)$ . Wegen Bedingung b) gibt es ein  $\tilde{p} \in \mathbb{Z}$  mit  $f \in F^{\tilde{p}} C^{p+q+1}$ . Wähle  $r$  so, dass  $r \geq R$  und  $p - r + 1 \leq \tilde{p}$ . Dann ist  $[c] = [e] + [d(f)] = 0$  in  $E_r^{pq} \cong E_\infty^{pq}$ .  $\square$

## 1.5 Die Serre-Spektralsequenz

**Satz 1** (Jean-Pierre Serre). Es sei  $G$  eine abelsche Gruppe. Für jede Serre-Faserung  $p : E \rightarrow B$  existiert eine Spektralsequenz mit

$$E_2^{p,q} = H^p(B; \mathcal{H}^q(F_p; G)),$$

welche gegen  $H^*(E)$  konvergiert.

*Beweis.* **TODO:** □

## 1.6 Multiplikative Struktur der Serre-Spektralsequenz

**Satz 2.** Es sei  $R$  ein Ring,  $p : E \rightarrow B$  eine Serre-Faserung. Dann gibt es bilineare Abbildungen

$$m_r : E_r^{p,q} \times E_r^{s,t} \rightarrow E_r^{p+s,q+t}, \quad (x, y) \mapsto m_r(x, y) =: xy$$

mit folgenden Eigenschaften:

- (i)  $d_r$  ist derivativ:  $d_r^{p+s,q+t}(xy) = (d_r^{p,q}x)y + (-1)^{p+q}x(d_r^{s,t}y)$
- (ii) Es gilt  $m_{r+1}([x], [y]) = [m_r(x, y)]$  für alle  $x \in \ker(d_r^{p,q}), y \in \ker(d_r^{s,t})$ .
- (iii)  $m_2 : E_2^{p,q} \times E_2^{r,s} \rightarrow E_2^{p+r,q+s}$  ist das  $(-1)^{qs}$ -fache des Cup-Produkts

$$H^p(B; \mathcal{H}^q(F; R)) \times H^s(B; \mathcal{H}^t(F; R)) \rightarrow H^{p+s}(B; \mathcal{H}^{q+t}(F; R)),$$

welches für  $a = [(a_\sigma)_{\sigma \in \Delta_m(B)}] \in H^p(B; \mathcal{H}^q(F; R))$  und  $b = [(b_\sigma)_{\sigma \in \Delta_n(B)}] \in H^s(B; \mathcal{H}^t(F; R))$  definiert ist durch

$$(a \cup b)_{\sigma \in \Delta_{p+s}(B)} := a_{\sigma_{\langle e_1, \dots, e_m \rangle}} \cup T_{\sigma_{0m}}^{-1}(b_{\sigma_{\langle e_m, \dots, e_{m+n} \rangle}}).$$

- (iv) Das Cup-Produkt auf  $H^*(B; R)$  respektiert die Filtrierungen von  $H^n(B; R)$  und schränkt daher ein zu Abbildungen  $F_p^m \times F_s^n \rightarrow F_{p+s}^{m+n}$ . Die induzierte Abbildung auf dem Quotienten  $F_p^m / F_{p+1}^m \times F_s^n / F_{s+1}^n \rightarrow F_{p+s}^{m+n} / F_{p+s+1}^{m+n}$  entspricht dem Grenzwert  $m_\infty : E_\infty^{p,m-p} \times E_\infty^{s,n-s} \rightarrow E_\infty^{p+s,m+n-p-s}$  der Multiplikationen  $m_r$ .

*Beweis.* **TODO:** □

## 1.7 Die Serre-Spektralsequenz für Homologie

Es gibt eine Version des Satzes für Serre für Homologie anstatt Kohomologie. In Homologie wird eine andere Indizierung für Spektralsequenzen verwendet:

**Definition 12.** Eine homologische *Spektralsequenz* besteht aus

- $A$ -Moduln  $E_{p,q}^r$  für alle  $p, q \in \mathbb{Z}$  und  $r \geq 1$ ,
- $A$ -Modul-Homomorphismen  $d_{p,q}^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r$  mit  $d_{p-r,q+r-1}^r \circ d_{p,q}^r = 0$
- und Isomorphismen  $\alpha_{p,q}^r : H_{p,q}(E^r) := \ker(d_{p,q}^r) / \text{im}(d_{p+r,q-r+1}^r) \xrightarrow{\cong} E_{p,q}^{r+1}$ .

Jede homologische Spektralsequenz  $E$  liefert eine kohomologische Spektralsequenz, wenn man  $E_r^{p,q} := E_{-p,-q}^r$  setzt.

**Definition 13.** Eine homologische Spektralsequenz  $E$  *konvergiert gegen* einen graduierten  $A$ -Modul  $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$  (notiert  $E_{p,q}^r \Rightarrow M_{p+q}$ ), falls  $E$  überhaupt konvergiert und reguläre Filtrierungen

$$0 \subseteq \dots \subseteq F^{p-1}M_n \subseteq F^pM_n \subseteq F^{p+1}M_n \subseteq \dots$$

existieren, sodass  $E_{pq}^\infty \cong F^pM_{p+q} / F^{p-1}M_{p+q}$  für alle  $p, q \in \mathbb{Z}$ .

**Satz 3** (Jean-Pierre Serre). Es sei  $G$  eine abelsche Gruppe. Für jede Serre-Faserung  $p : E \rightarrow B$  existiert eine (homologische) Spektralsequenz mit

$$E_{p,q}^2 = H_p(B; \mathcal{H}_q(F_p; G)),$$

welche gegen  $H_*(E)$  konvergiert.

Dabei bilden die  $q$ -ten Homologiegruppen der Fasern ein lokales Koeffizientensystem mit  $\mathcal{H}_q(F_p; G)_b = H_q(p^{-1}(b))$ . Homologie mit einem Koeffizientensystem  $\underline{A}$  ist ähnlich definiert wie Homologie. Falls  $B$  einfach zusammenhängend ist oder allgemeiner  $\pi_1(B)$  trivial auf den Homologiegruppen der Faser wirkt, so gilt  $H_p(B; \mathcal{H}_q(F_p; G)) \cong H_p(B; H_q(F_p; G))$ .

## 1.8 Die Pfadfaserung

**Definition 14.** Der *Pfadraum* eines punktierten topologischer Raum  $(X, x_0)$  ist

$$PX := \{\gamma \in X^I \mid \gamma(0) = x_0\} \subset X^I$$

mit der Unterraumtopologie des Raumes  $X^I$ , welcher die Kompakt-Offen-Topologie besitzt. Der Basispunkt von  $PX$  ist der konstante Weg  $y_0 : I \rightarrow X, t \mapsto x_0$ .

*Bemerkung.* Der Raum  $PX$  ist zusammenziehbar: Die Abbildung

$$H : I \times PX \rightarrow PX, \quad (t, \gamma) \mapsto \gamma(t \cdot -)$$

ist eine Homotopie zwischen der konstanten Abbildung mit Wert  $\gamma_0$  und  $\text{id}_{PX}$ .

**Lemma 10.** Die Abbildung  $p : PX \rightarrow X, \gamma \mapsto \gamma(1)$  ist eine Hurewicz-Faserung.

*Beweis.* Es sei ein topologischer Raum  $A$  und stetige Abbildungen  $H_0 : A \rightarrow PX, H : I \times A \rightarrow X$  mit  $H \circ i_0 = p \circ H_0$  gegeben. Dann ist eine Homotopieliftung gegeben durch

$$\begin{aligned} \tilde{H} : I \times A &\rightarrow PX, \\ (s, a) &\mapsto \gamma_{s,a}, \quad \gamma_{s,a}(t) := \begin{cases} H_0(a)(t \cdot (1+s)) & \text{falls } t \cdot (1+s) \leq 1, \\ H(t \cdot (1+s) - 1, a) & \text{falls } t \cdot (1+s) \geq 1. \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

Die Faserung  $p : PX \rightarrow X$  wird *Pfadfaserung* genannt.

*Bemerkung.* Die Faser von  $p$  über  $x_0$  ist

$$\Omega X := \{\gamma \in X^I \mid \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\}.$$

Der Raum  $\Omega X$  heißt *Schleifenraum* von  $X$ .

*Bemerkung.* Seien  $(X, x_0)$  und  $(Y, y_0)$  punktierte Räume. Es gibt eine in  $X$  und  $Y$  natürliche Bijektion

$$\begin{aligned} \text{Hom}((\Sigma X, x_0), (Y, y_0)) &\cong \text{Hom}((X, x_0), (\Omega Y, \gamma_0)), \\ f &\mapsto (x \mapsto t \mapsto f([(x, t)])), \\ [(x, t)] &\mapsto g(x)(t) \leftarrow g. \end{aligned}$$

**Lemma 11.** Man kann jede stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  schreiben als Komposition

$$X \xrightarrow{i} E_f \xrightarrow{p} Y$$

einer Homotopieäquivalenz  $i$  und einer Hurewicz-Faserung  $p$ . Genauer gilt

$$\begin{aligned} E_f &:= \{(x, \gamma) \in X \times X^I \mid f(x) = \gamma(0)\} \subset X \times Y^I, \\ i(x) &:= (x, t \mapsto f(x)), \\ p(x, \gamma) &:= \gamma(1). \end{aligned}$$

*Beweis.* Offensichtlich sind  $i$  und  $p$  stetig und es gilt  $p \circ i = f$ . Das Homotopie-Inverse von  $i$  ist  $j : E_f \rightarrow X$ ,  $(x, \gamma) \mapsto x$ . Es gilt  $j \circ i = \text{id}_X$  und eine Homotopie zwischen  $i \circ j$  und  $\text{id}_{E_f}$  ist gegeben durch

$$H : I \times E_f \rightarrow E_f, \quad (s, (x, \gamma)) \mapsto (x, \gamma(s \cdot -)).$$

Es bleibt zu zeigen, dass  $p$  eine Faserung ist. Es sei dazu ein topologischer Raum  $A$  und Abbildungen  $H_0 : A \rightarrow E_f$  und  $H : I \times A \rightarrow Y$  mit  $H \circ i_0 = p \circ H_0$  gegeben. Dann ist folgende Abbildung eine Homotopieliftung:

$$\begin{aligned} \tilde{H} : I \times A &\rightarrow E_f, \\ (s, a) &\mapsto \gamma_{s,a}, \quad \gamma_{s,a}(t) := \begin{cases} H_0(a)(t \cdot (1+s)) & \text{falls } t \cdot (1+s) \leq 1, \\ H(t \cdot (1+s) - 1, a) & \text{falls } t \cdot (1+s) \geq 1. \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

## 1.9 Eilenberg-MacLane-Räume

**Definition 15.** Sei  $G$  eine Gruppe,  $n \geq 1$ . Ein *Eilenberg-MacLane-Raum* vom Typ  $K(G, n)$  ist ein punktierter, zusammenhängender topologischer Raum  $(X, x_0)$  mit

$$\pi_q(X, x_0) = \begin{cases} G & \text{falls } q = n, \\ 0 & \text{falls } q \neq n. \end{cases}$$

**Lemma 12.** Sei  $G$  eine abelsche Gruppe,  $n \geq 2$ . Dann existiert ein CW-Komplex  $(X, x_0)$  vom Typ  $K(G, n)$ .

*Beweis.* **TODO:** □

*Bemerkung.* Sei  $(X, x_0)$  ein  $K(G, n)$ . Dann ist  $\Omega X$  ein  $K(G, n-1)$ , denn

$$\begin{aligned} \pi_q(\Omega X, \gamma_0) &\cong \text{Hom}((S^q, *), (\Omega X, \gamma_0)) \cong \text{Hom}((\Sigma S^q, *), (X, x_0)) \cong \pi_{q+1}(X, x_0) \\ &\cong \begin{cases} G & \text{falls } q+1 = n \iff q = n-1 \\ 0 & \text{falls } q+1 \neq n. \end{cases} \end{aligned}$$

## 1.10 Das Hurewicz-Mod- $\mathcal{C}$ -Theorem

Sei  $(X, x_0)$  ein punktierter topologischer Raum. Für  $n \geq 1$  liefert der Hurewicz-Homomorphismus  $h_n : \pi_n(X, x_0) \rightarrow H_n(X; \mathbb{Z})$  einen Zusammenhang zwischen der  $n$ -ten Homotopiegruppe und der  $n$ -ten Homologiegruppe von  $X$ . Er ist definiert durch  $h_n([f]) := H_n(f)(\alpha)$  für einen fest gewählten Erzeuger  $\alpha \in H_n(S^n; \mathbb{Z})$ .

**Satz 4 (Hurewicz).** Sei  $(X, x_0)$  ein  $(n-1)$ -zusammenhängender topologischer Raum, d. h.  $\pi_i(X, x_0) = 0$  für  $i < n$ . Dann ist  $h_i : \pi_i(X, x_0) \rightarrow H_i(X; \mathbb{Z})$  ein Isomorphismus für  $0 < i \leq n$ . Insbesondere gilt  $H_i(X; \mathbb{Z}) = 0$  für  $0 < i < n$ .

**Definition 16.** Eine Klasse  $\mathcal{C}$  von abelschen Gruppen heißt *Serre-Klasse*, falls

1. Für jede kurze exakte Sequenz  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  von abelschen Gruppen gilt:  $B \in \mathcal{C} \iff A, C \in \mathcal{C}$ .
2. Für  $A, B \in \mathcal{C}$ , sind auch  $A \otimes B \in \mathcal{C}$  und  $\text{Tor}(A, B) \in \mathcal{C}$ .

*Bemerkung.* Aus der ersten Eigenschaft folgt, dass Bilder, Untergruppen und Quotienten einer Gruppe aus  $\mathcal{C}$  wieder in  $\mathcal{C}$  sind. Genauer gilt für eine ab. Gruppe  $B$  und eine Untergruppe  $A < B$ :  $B \in \mathcal{C} \iff A, B/A \in \mathcal{C}$ . Durch Induktion kann man zeigen, dass für eine Gruppe  $A$  mit endlicher Filtrierung  $A = F^0 A \supseteq F^1 A \supseteq \dots \supseteq F^k A = 0$  gilt:  $A \in \mathcal{C} \iff F^0 A/F^1 A, \dots, F^{k-1} A/F^k A \in \mathcal{C}$ . Außerdem ist die direkte Summe zweier Gruppen aus  $\mathcal{C}$  wieder in  $\mathcal{C}$ .

**Definition 17.** Es sei  $\mathcal{C}$  eine Serre-Klasse. Ein Morphismus  $f : A \rightarrow B$  zwischen abelschen Gruppen heißt *Isomorphismus modulo  $\mathcal{C}$* , falls  $\ker(f), \operatorname{coker}(f) \in \mathcal{C}$ .

Dies ist äquivalent zur Existenz einer exakten Sequenz  $K \rightarrow A \xrightarrow{f} B \rightarrow C$  mit  $K, C \in \mathcal{C}$ .

**Beispiele 1.** Man kann leicht zeigen, dass folgende Klassen die Definition erfüllen:

- $\mathcal{FG} := \{ \text{endlich erzeugte Gruppen} \}$
- $\mathcal{F} := \{ \text{endliche Gruppen} \}$

**Satz 5** („Hurewicz-mod- $\mathcal{C}$ -Theorem“). Es sei  $\mathcal{C} \in \{\mathcal{FG}, \mathcal{F}\}$  und  $(X, x_0)$  ein einfach zusammenhängender topologischer Raum. Angenommen,  $\pi_i(X, x_0) \in \mathcal{C}$  für  $0 < i < n$ . Dann ist  $h_i : \pi_i(X, x_0) \rightarrow H_i(X; \mathbb{Z})$  ein Isomorphismus modulo  $\mathcal{C}$  für  $i \leq n$ . Insbesondere gilt  $H_i(X; \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}$  für  $0 < i < n$ .

**Satz 6.** Es sei  $(X, x_0)$  ein einfach zusammenhängend. Dann sind äquivalent:

- Die Homotopiegruppen  $\pi_n(X, x_0)$  sind endlich für  $n \geq 0$ .
- Die Homologiegruppen  $H_n(X; \mathbb{Z})$  sind endlich für  $n \geq 1$ .

**Lemma 13.** Es sei  $F \rightarrow X \rightarrow B$  eine Faserung und die Räume  $F$ ,  $X$  und  $B$  wegzusammenhängend. Wirke  $\pi_1(B)$  trivial auf  $H_*(F)$ . Dann gilt folgende 2-aus-3-Eigenschaft: Falls für zwei der Räume  $F$ ,  $X$  und  $B$  alle Homologiegruppen  $H_n(-; \mathbb{Z})$  für  $n \geq 1$  aus  $\mathcal{C}$  sind, so gilt gleiches für den dritten Raum.

*Beweis.* Wir betrachten die Serre-Spektralsequenz zu der Faserung mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}$ . Die Aussage, dass die Homologiegruppe  $H_n(X)$  in  $\mathcal{C}$  liegt, ist äquivalent dazu, dass die Gruppen  $E_{i, n-i}^\infty$  für  $i = 0, \dots, n$  in  $\mathcal{C}$  liegen, denn diese Gruppen sind die Quotienten einer endlichen Filtrierung von  $H_n(X)$ .

*Fall 1:*  $H_n(F), H_n(B) \in \mathcal{C}$  für alle  $n > 0$ : Die universelle Koeffizientenformel liefert

$$E_{pq}^2 \cong H_p(B; H_q(F; \mathbb{Z})) \cong (H_p(B) \otimes H_q(F)) \oplus \operatorname{Tor}(H_{p-1}(B), H_q).$$

Man sieht durch Unterscheidung der Fälle  $p = 0$ ,  $p = 1$  und  $p > 1$  sowie  $q = 0$  und  $q > 0$ , dass  $E_{pq}^2 \in \mathcal{C}$  für  $(p, q) \neq (0, 0)$ . Als Subquotient von  $E_{pq}^2$ , einer Gruppe aus  $\mathcal{C}$ , ist dann auch  $E_{pq}^\infty \in \mathcal{C}$  für  $(p, q) \neq (0, 0)$ . Dies zeigt die Behauptung nach der Bemerkung am Anfang des Beweises.

*Fall 2:*  $H_n(F), H_n(X) \in \mathcal{C}$  für alle  $n > 0$ : Wir zeigen nun durch Induktion über  $k$ , dass  $H_p(B) \in \mathcal{C}$  für  $0 < p < k$ . Gelte dies für  $k \geq 1$ . Wir wollen zeigen, dass dann auch  $H_k(B)$  in  $\mathcal{C}$  liegt. Für alle  $r \geq 2$  gibt es eine kurze exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \rightarrow & \ker(d_{k,0}^r) & \rightarrow & E_{k,0}^r \xrightarrow{d_{k,0}^r} \operatorname{im}(d_{k,0}^r) \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \subseteq \\ & & E_{k,0}^{r+1} & & E_{k-r,r-1}^r \end{array}$$

Man sieht unter Verwendung der Induktionsannahme und der universellen Koeffizientenformel, dass  $E_{k-r,r-1}^r$  und somit auch  $E_{k-r,r-1}^r$  in  $\mathcal{C}$  liegen. Folglich gilt auch  $\operatorname{im}(d_{k,0}^r) \in \mathcal{C}$ , also  $E_{k,0}^r \in \mathcal{C} \iff E_{k,0}^{r+1} \in \mathcal{C}$ . Da aber  $E_{k,0}^R \cong E_{k,0}^\infty \in \mathcal{C}$  für  $R$  groß genug, gilt  $E_{k,0}^r \in \mathcal{C}$  für alle  $r \geq 2$ . Insbesondere  $H_k(B; \mathbb{Z}) \cong H_k(B; H_0(F; \mathbb{Z})) \cong E_{k,0}^2 \in \mathcal{C}$ .

*Fall 3:*  $H_n(X), H_n(B) \in \mathcal{C}$  für alle  $n > 0$ : Analog zum vorherigen Fall zeigt man induktiv, dass  $H_q(F) \in \mathcal{C}$  für  $0 < q < k$ . Dazu verwendet man die kurze exakte Sequenz  $0 \rightarrow \operatorname{im}(d_{r,k-r+1}^r) \hookrightarrow E_{0,k}^r \rightarrow E_{0,k}^{r+1}$ .  $\square$

**Lemma 14.** Sei  $G \in \mathcal{C} \in \{\mathcal{FG}, \mathcal{F}\}$ . Dann gilt  $H_k(K(G, n)) \in \mathcal{C}$  für alle  $k, n > 0$ .

*Beweis.* Sei zunächst  $n = 1$ .

- Falls  $G = \mathbb{Z}$ , so stimmt die Aussage, denn der Kreis  $S^1$  ist ein  $K(\mathbb{Z}, 1)$  und  $H_*(S^1; \mathbb{Z}) \in \mathcal{FG}$ .
- Falls  $G = \mathbb{Z}_m$ , **TODO: begründen damit, dass der „unendliche Linsenraum“ ein  $K(\mathbb{Z}_m, 1)$  ist**
- Falls  $G = G_1 \oplus G_2$ , dann ist  $K(G_1, 1) \times K(G_2, 1)$  ein  $K(G, 1)$ . Wenn die Aussage für  $G_1$  und  $G_2$  stimmt, so folgt aus dem letzten Lemma, angewendet auf die Produktfaserung  $K(G_1, 1) \rightarrow K(G_1, 1) \times K(G_2, 1) \rightarrow K(G_2, 1)$ , dass sie auch für  $G$  gilt.

Da man jede endlich erzeugte abelsche Gruppe als direkte Summe von endlich vielen Summanden der Form  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Z}_m$  schreiben kann, gilt die Aussage für  $n = 1$ .

Induktiv zeigen wir nun, dass die Aussage für  $n$  beliebig gilt. Dazu verwenden wir die Pfadraumfaserung  $K(G, n) \rightarrow P \rightarrow K(G, n+1)$ . Es gilt  $H_k(P) = 0 \in \mathcal{C}$  und  $H_k(K(G, n)) \in \mathcal{C}$  für  $k \geq 1$  nach Induktionshypothese, also  $H_k(K(G, n+1)) \in \mathcal{C}$  für alle  $k \geq 1$  nach dem vorherigen Lemma.  $\square$

**Definition 18.** Ein *Postnikov-Turm* eines wegzusammenhängenden Raumes  $X$  ist ein kommutatives Diagramm wie rechts, für das gilt:

- $\pi_i(X \rightarrow X_n)$  ist ein Isomorphismus für  $i \leq n$  und
- $\pi_i(X_n) = 0$  für  $i > n$ .

$$\begin{array}{c} X \\ \swarrow \downarrow \\ \dots \rightarrow X_3 \rightarrow X_2 \rightarrow X_1 \end{array}$$

**TODO: Bemerkung zur Konstruktion von Postnikov-Türmen**

*Bemerkung.* Es sei ein Postnikov-Turm  $\dots \rightarrow X_2 \rightarrow X_1$  gegeben. Dann kann man durch wiederholtes Anwenden der in **TODO: Ref** beschriebenen Konstruktion einen neuen Postnikovturm  $\dots \rightarrow X'_2 \rightarrow X'_1$  und Homotopieäquivalenzen  $X_i \simeq X'_i$  konstruieren, sodass die Abbildungen  $X'_{i+1} \rightarrow X'_i$  Hurewicz-Faserungen sind. Man sieht anhand der langen exakten Sequenz von Homotopiegruppen, dass die Faser von  $X'_{i+1} \rightarrow X'_i$  ein  $K(\pi_{n+1}(X), n+1)$  ist.

**Lemma 15.** Es sei  $X$  einfach zusammenhängend mit  $\pi_i(X, x_0) \in \mathcal{C}$  für alle  $i \geq 0$ , wobei  $\mathcal{C} \in \{\mathcal{FG}, \mathcal{F}\}$ . Dann gilt  $H_i(X) \in \mathcal{C}$  für  $i \geq 1$ .

*Beweis.* Es sei  $\dots \rightarrow X_{i+1} \rightarrow X_i \rightarrow \dots \rightarrow X_1$  ein Postnikov-Turm von  $X$ , dessen Abbildungen  $X_{i+1} \rightarrow X_i$  Hurewicz-Faserungen sind. Wir zeigen, dass  $H_i(X_k; \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}$  für alle  $i, k > 0$ . Die Aussage stimmt für  $k = 1$ , da alle Homotopiegruppen und somit auch Homologiegruppen von  $X_1$  gleich Null sind. Gelte die Aussage nun für ein  $k \geq 1$ . Wir verwenden die Faserung  $K(\pi_{k+1}(X), k+1) \rightarrow X_{k+1} \rightarrow X_k$ . Nach Lemma 14 sind die Homologiegruppen der Faser in  $\mathcal{C}$ . Gleiches gilt für den Basisraum nach Induktionsvoraussetzung, und somit auch für  $X_k$  nach Lemma 13.

Es gilt  $H_i(X; \mathbb{Z}) \cong H_i(X_k; \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}$  für  $k \geq i$ , da  $\pi_i(X \rightarrow X_k)$  und nach einem Korollar der relativen Version des Hurewicz-Theorems damit auch  $H_i(X \rightarrow X_k)$  ein Isomorphismus für  $i \leq k$  ist.  $\square$

*Beweis von Satz 5.* Aufgrund der Natürlichkeit des Hurewicz-Homomorphismus kommutiert folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X) & \xrightarrow{\cong} & \pi_n(X_n) \\ \downarrow h_n & & \downarrow h_n \\ H_n(X) & \xrightarrow{\cong} & H_n(X_n) \end{array}$$

Es genügt daher zu zeigen, dass  $h_n : \pi_n(X_n) \rightarrow H_n(X_n; \mathbb{Z})$  ein Isomorphismus modulo  $\mathcal{C}$  ist. Wir betrachten die Serre-Spektralsequenz zur Faserung  $F_n \rightarrow X_n \rightarrow X_{n-1}$ .

$$E_{pq}^2 \cong H_p(X_{n-1}; \underbrace{H_q(K(\pi_n(X), n); \mathbb{Z})}_{=0 \text{ für } 0 < q < n}),$$

Es verschwinden also alle Einträge zwischen der 0-ten und der  $n$ -ten Zeile. Für diese gilt Wir betrachten die exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc}
H_{n+1}(X_{n-1}) & & H_n(F_n) & & 0 & & 0 \\
\cap & & \cap & & \searrow & & \swarrow \\
E_{n+1,0}^2 & & E_{0,n}^2 & & & & E_{n,0}^2 \\
\cap & & \cap & & \nearrow & & \searrow \\
E_{n+1,0}^n & \xrightarrow{d_{n+1,0}^r} & E_{0,n}^n & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & E_{0,n}^\infty & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & H_n(X_n) \longrightarrow E_{n,0}^\infty \longrightarrow 0
\end{array}$$

welche sich aus zwei kurzen Sequenzen zusammensetzt:

- Die linke Sequenz ist exakt, da  $E_{0,n}^\infty \cong E_{0,n}^{n+1} \cong \ker(d_{0,n}^r) / \text{im}(d_{n+1,0}^r) = E_{0,n}^n / \text{im}(d_{n+1,0}^r)$ .
- Die rechte Sequenz ist exakt, da  $E_{0,n}^\infty = F^0 H_n(X_n)$  und  $E_{n,0}^\infty = F^n H_n(X_n) / F^{n-1} H_n(X_n)$  für eine Filtrierung  $0 = F^{-1} H_n(X_n) \subseteq F^0 H_n(X_n) \subseteq \dots \subseteq F^n H_n(X_n) = H_n(X_n)$ . Da  $F^p H_n(X_n) / F^{p-1} H_n(X_n) = E_{p,n-p}^\infty = 0$  für  $p = 1, \dots, n-1$ , gilt  $F^0 H_n(X_n) = \dots = F^{n-1} H_n(X_n)$ .

Aus Lemma folgt, dass  $E_{n+1,0}^n, E_{n,0}^\infty \in \mathcal{C}$ . Somit ist der mittlere Morphismus  $H_n(F_n) = E_{0,n}^n \rightarrow H_n(X_n)$  ein Isomorphismus modulo  $\mathcal{C}$ . **TODO: Begründen, warum dieser Morphismus genau der von der Inklusion  $F_n \hookrightarrow X_n$  induzierte Morphismus ist.** Betrachte nun das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\pi_n(F_n) & \xrightarrow{\cong} & \pi_n(X_n) \\
\cong \downarrow h_n & & \downarrow h_n \\
H_n(F_n) & \longrightarrow & H_n(X_n)
\end{array}$$

Dabei sind die vertikalen Morphismen die Hurewicz-Homomorphismen und die horizontalen Morphismen werden durch die Inklusion induziert. Der linke Hurewicz-Homomorphismus ist nach dem Hurewicz-Theorem ein Isomorphismus, da  $F_n$   $(n-1)$ -zusammenhängend ist. Der obere Morphismus ist ein Isomorphismus, wie man anhand der langen exakten Sequenz der Faserung  $F_n \rightarrow X_n \rightarrow X_{n-1}$  sehen kann. Der untere Morphismus ist ein Isomorphismus modulo  $\mathcal{C}$ , wie wir gerade eben gesehen haben. Somit ist auch der rechte Morphismus im Diagramm ein Isomorphismus modulo  $\mathcal{C}$ .  $\square$

*Bemerkung.* Man kann in diesem Kapitel die Voraussetzung, dass  $X$  einfach zusammenhängend ist, ersetzen durch die Forderung, dass  $X$  wegzusammenhängend und abelsch ist, d. h. die Wirkung der Fundamentalgruppe  $\pi_1(X)$  auf den höheren Homotopiegruppen  $\pi_n(X)$  trivial ist.

## 1.11 Rationale Kohomologie von Räumen vom Typ $K(\mathbb{Z}, n)$

**Satz 7.** Für  $n \geq 1$  gilt

$$H^*(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q}[x], & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \Lambda_{\mathbb{Q}}[x], & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

als graduierte Ringe mit Erzeuger  $x \in H^n(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q})$ . Dabei bezeichnet  $\Lambda_{\mathbb{Q}}[x]$  die äußere Algebra mit Erzeuger  $x$ .

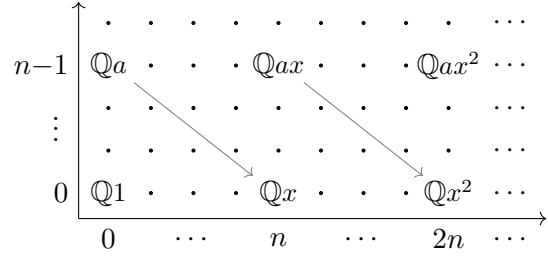
*Beweis.* Durch Induktion über  $n$ . Der Satz gilt für  $n = 1$ , denn der Kreis  $S^1$  ist ein  $K(\mathbb{Z}, 1)$  und es gilt bekanntermaßen  $H^*(S^1; R) \cong \Lambda_R[x]$  für  $R = \mathbb{Z}$  und somit auch für  $R = \mathbb{Q}$ .

Im Induktionsschritt nutzen wir die Pfadraumfaserung  $F := K(\mathbb{Z}, n-1) \rightarrow P \rightarrow B := K(\mathbb{Z}, n)$ .

Da  $K(\mathbb{Z}, n)$  für  $n \geq 2$  einfach zusammenhängend ist, gilt für deren zugehörige Serre-Spektralsequenz  $E_2^{p,q} \cong H^p(B; H^q(F))$ .

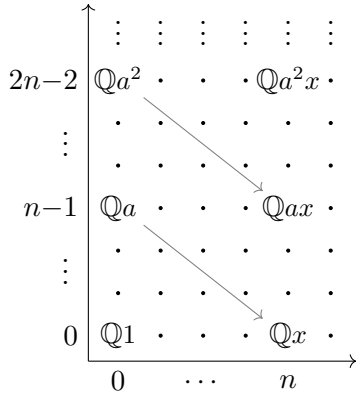


Falls  $n$  gerade: Dann sieht die Spektralsequenz auf der Seite  $E_r$ ,  $r \leq n$  aus wie rechts skizziert (dabei stehen die Gitterpunkte für die Nullgruppe). Das sieht man folgendermaßen: Zunächst ist  $E_2^{pq} = 0$  und somit  $E_r^{pq} = 0$  außer für  $q \in \{0, n-1\}$ , denn nach Induktionsvoraussetzung gilt  $H^*(F; \mathbb{Q}) \cong \Lambda_{\mathbb{Q}}[x]$ . Es folgt, dass nur auf der  $n$ -ten Seite  $E_n$  nicht verschwindende



Differentiale existieren können und  $E_2 \cong E_n$  und  $E_{n+1} \cong E_{\infty}$  gilt. Außerdem ist  $E_n^{0,0} \cong E_2^{0,0} \cong \mathbb{Q}$  und  $E_n^{0,n-1} \cong E_2^{0,n-1} \cong \mathbb{Q}$ , da  $B$  zusammenhängend ist. Die Spektralsequenz konvergiert gegen  $H^*(P; \mathbb{Q})$ . Da  $P$  zusammenziehbar ist, gilt  $H^0(P; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$  und  $H^n(P; \mathbb{Q}) = 0$  für  $n > 0$ . Folglich ist  $E_{n+1}^{pq} \cong E_{\infty}^{pq} = 0$  außer für  $p = q = 0$ . Insbesondere gilt  $E_{n+1}^{0,n-1} \cong E_{\infty}^{0,n-1} = 0$ . Das eingezeichnete Differential  $d_n^{0,n-1} : E_n^{0,n-1} \rightarrow E_n^{n,0}$  ist nun injektiv, denn  $\ker(d_n^{0,n-1}) \cong E_{n+1}^{0,n-1} = 0$ . Dieses Differential ist auch surjektiv, denn  $\text{coker}(d_n^{0,n-1}) \cong E_{n+1}^{n,0} \cong E_{\infty}^{n,0} = 0$ , also ein Isomorphismus. Somit  $H^n(B; \mathbb{Q}) \cong E_2^{n,0} \cong E_n^{n,0} \cong E_n^{0,n-1} \cong \mathbb{Q}$ . Der zweite Isomorphismus kommt daher, da für  $r \leq n-1$  alle Differentiale von und nach  $E_r^{n,0}$  Null sind. Damit ist  $E_2^{n,n-1} \cong H^n(B; H^{n-1}(F; \mathbb{Q})) \cong H^n(B; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ . Induktiv sieht man nun, dass die Abbildungen  $d_n^{kn,n-1}$  Isomorphismen sind und dass  $H^{kn}(B; \mathbb{Q}) \cong E_2^{kn,0} \cong E_2^{kn,n-1} \cong \mathbb{Q}$  für alle  $k \geq 0$ . Damit haben wir gezeigt, dass die graduierte, additive Struktur von  $H^*(B; \mathbb{Q})$  wie behauptet ist.

Es sei nun  $a \in E_n^{0,n-1} \cong H^0(B; H^{n-1}(F; \mathbb{Q}))$  ungleich Null und  $x := d_n^{0,n-1}(a) \in E_n^{n,0} \cong H^n(B; H^0(F; \mathbb{Q})) \cong H^n(B; \mathbb{Q})$ . Dann gilt auch  $x \neq 0$  und  $ax := m_r(a, x) \neq 0$ , da wegen (ii) und (iii) das Produkt  $m_r$  gerade dem kanonischen Produkt  $H^n(B; H^0(F; \mathbb{Q})) \times H^0(B; H^{n-1}(F; \mathbb{Q})) \rightarrow H^n(B; H^{n-1}(F; \mathbb{Q}))$  entspricht. Es gilt  $0 \neq d_n^{n,n-1}(ax) = d_n^{0,n-1}(a)x - ad_n^{n,0}(x) = xx$ . Da das Produkt  $xx \in E_n^{2n,0}$  gerade dem Cup-Produkt  $x \cup x \in H^{2n}(B; \mathbb{Q})$  entspricht, ist  $x \cup x \neq 0$ , also ein Erzeuger von  $H^{2n}(B; \mathbb{Q})$ . Induktiv ist nun  $0 \neq d_n^{kn,n-1}(ax^k) = x^{k+1} \in E_n^{kn,0}$  da ja  $0 \neq ax^k$ . Somit ist für alle  $k$  das  $k$ -fache Cup-Produkt  $x^k \in H^{kn}(B; \mathbb{Q})$  ein Erzeuger.



Falls  $n$  ungerade: Dann ist  $E_r^{p,q} = 0$  für alle  $q$ , die kein Vielfaches von  $n-1$  sind. Somit verschwinden alle Differentiale auf  $E_r$  für  $r < n$  und  $E_2 \cong E_n$ . Für  $0 < m < n$  verschwinden alle Differentiale von und nach  $E_r^{m,0}$  und daher ist  $H^m(B; \mathbb{Q}) \cong E_2^{m,0} \cong E_{\infty}^{m,0} = 0$  und folglich  $E_2^{m,k} = 0$  für alle  $k \geq 0$ . Selbiges gilt folglich auch für  $n < m < 2n$  und allgemeiner für solche  $m$ , die kein Vielfaches von  $n$  sind. Analog wie im vorherigen Fall sieht man, dass das eingezeichnete Differential  $d_n^{0,n-1}$  ein Isomorphismus ist. Somit  $H^n(B; \mathbb{Q}) \cong H^n(B; H^0(F; \mathbb{Q})) \cong \mathbb{Q}$  und  $E_2^{n,k(n-1)} \cong \mathbb{Q}$  für alle  $k \geq 0$ . Sei  $a \in H^0(B; H^{n-1}(F; \mathbb{Q}))$  ungleich Null und  $x := d_n^{0,n-1}(a)$ . Dann ist auch  $a^2 \neq 0 \in E_n^{0,2n-2}$  und  $d_n^{0,2n-2}(a^2) = d_n^{0,n-1}(a)a + d_n^{0,n-1}(a)a = xa + ax = (-1)^{0 \cdot n + (n-1) \cdot 0} ax + ax = 2ax \neq 0$ . Also ist  $d_n^{0,2n-2}$  ein Isomorphismus. Analog sieht man, dass  $d_n^{0,k(n-1)}$  für alle  $k \geq 0$  ein Isomorphismus ist. Es bleibt zu zeigen, dass  $H^{kn}(B; \mathbb{Q}) = 0$  für  $k > 1$ . Das einzige potentiell nichttriviale Differential, das bei  $E_r^{2n,0}$  ankommt, ist  $d_n^{n,n-1}$ . Dieses ist aber Null, da  $\ker(d_n^{n,n-1}) = \text{im}(d_n^{0,2n-2}) = E_n^{n,n-1}$ . Also  $H^{2n}(B; \mathbb{Q}) \cong E_2^{2n,0} \cong E_{\infty}^{2n,0} = 0$  und  $E_2^{2n,k} = 0$  für alle  $k \geq 0$ . Für  $k > 2$  sieht man durch Induktion, dass alle Differentiale von und nach  $E_r^{2n,0}$  verschwinden und daher  $H^{kn}(B; \mathbb{Q}) = 0$ .  $\square$

## 1.12 Satz von Serre

**Satz 8.** Die Homotopiegruppen  $\pi_i(S^n)$  sind endlich bis auf die Gruppen  $\pi_{4k-1}(S^{2k})$ ,  $k \geq 1$ , welche jeweils isomorph zu einer direkten Summe von  $\mathbb{Z}$  mit einer endlichen Gruppe sind.

*Beweis.* **TODO:**

