Der Satz von Serre über die Endlichkeit der Homotopiegruppen der Sphären

Bachelorarbeit

von

Tim Baumann

Eingereicht am

TODO: ??. ??. 2015

Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Erstgutachter:	Prof. Dr. Bernhard Hanke
Zweitgutachter:	TODO: ???

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Satz 1. Die Homotopiegruppen $\pi_i(S^n, *)$, $i > n$, sind endlich bis auf die Gruppen $\pi_{4k-1}(S^{2k})$, $k \geqslant 1$, welche jeweils isomorph zu einer direkten Summe von $\mathbb{Z}$ und einer endlichen Gruppe sind.

2 Homotopiegruppen der Sphären

Definition 1. Es sei (X, x_0) ein punktierter topologischer Raum. Für $n \geqslant 0$ sei

$$\pi_n(X, x_0) := [(S^n, *), (X, x_0)]$$

die Menge der basispunkterhaltenden Abbildungen $S^n \to X$ modulo basispunkterhaltender Homotopie. Für $n \geqslant 1$ heißt $\pi_n(X)$ die *n-te Homotopiegruppe* von X (mit Basispunkt x_0).

Die Gruppenstruktur auf $\pi_n(X)$ wird induziert durch die Kogruppenstruktur auf S^n, welche durch die Abbildung $S^n \to S^n \vee S^n$ gegeben ist, die die Südkappe D^n_+ auf die erste S^n, die Nordkappe D^n_- auf die zweite S^n und den Äquator $D^n_+ \cap D^n_-$ auf den Anklebepunkt von $S^n \vee S^n$ abbildet. Das neutrale Element der Homotopiegruppen wird repräsentiert durch die konstante Abbildung auf den Basispunkt x_0. Man kann zeigen, dass $\pi_n(X, x_0)$ für $n \geqslant 2$ abelsch ist (vgl. [Hat02]).

Eine basispunkterhaltende Abbildung $g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ induziert Abbildungen $g_* = \pi_i(g) : \pi_i(X, x_0) \to \pi_i(Y, y_0)$ durch Nachkomponieren mit g. Auf diese Weise wird π_i zu einem Funktor von der Kategorie der punktierten topologischen Räume in die Kategorie der (abelschen) Gruppen.

Die Menge $\pi_0(X, x_0)$ ist die Menge der Wegzusammenhangskomponenten von X. Wir schreiben $\pi_0(X, x_0) = 0$, falls die einzige Wegzusammenhangskomponente von X die von x_0 ist.

Falls ein Weg von x_0 nach x_0' in X existiert, so sind $\pi_n(X, x_0)$ und $\pi_n(X, x_0')$ isomorph. Für nicht leere, wegzusammenhängende Räume X kann man daher den Basispunkt in der Notation weglassen von der Homotopiegruppe $\pi_n(X)$ von X sprechen.

Für $i < n$ gilt $\pi_i(S^n) = 0$: Wir können die Sphären S^i und S^n als CW-Komplexe mit jeweils einer Nullzelle und einer i-Zelle bzw. n-Zelle realisieren. Das zelluläre Approximationstheorem besagt, dass jede Abbildung $f : S^i \to S^n$ homotop relativ Basispunkt zu einer zellulären Abbildung ist, d. h. einer Abbildung $\tilde{f} : S^i \to S^n$, die das i-Skelett von S^i (das ist ganz S^i) auf das i-Skelett von S^n (das ist $\{*\}$) abbildet. In anderen Worten ist jede Abbildung $S^i \to S^n$ homotop zur konstanten Abbildung und repräsentiert daher das neutrale Element in $\pi_i(S^n)$.

Mit der universellen Überlagerung $p : \mathbb{R} \to S^1,\ t \mapsto e^{it}$ kann man die Homotopiegruppen von S^1 bestimmen: Die Fundamentalgruppe von S^1 ist isomorph zur Decktransformationsgruppe dieser Überlagerung, von der man leicht zeigen kann, dass diese isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist. Es sei nun $i > 1$ und $f : S^i \to S^1$ stetig. Dann existiert eine Hochhebung $\tilde{f} : S^i \to \mathbb{R}$, da $f_*(\pi_1(S^n)) = f_*(0) = 0 = p_*(\pi_0(\mathbb{R}))$. Da $\mathbb{R}$ zusammenziehbar ist, finden wir eine Homotopie H von $\tilde{f}$ zur konstanten Abbildung $x \mapsto 0$. Dann ist $p \circ H$ eine Homotopie zwischen f und der konstanten Abbildung. Somit ist $\pi_i(S^1) = 0$ für $i > 1$.

Definition 2. Die *(reduzierte) Einhängung* ΣX eines punktierten Raumes (X, x_0) ist

$$\Sigma X := (X \times I)/(X \times \{0, 1\} \cup \{x_0\} \times I).$$

Der Basispunkt $*$ von ΣX ist der auf einen Punkt zusammengezogene Teilraum.

Einhängung ist ein Endofunktor der Kategorie der punktierten topologischen Räume:
Für $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ ist

$$\Sigma f : (\Sigma X, *) \to (\Sigma Y, *), \quad [(x, t)] \mapsto [(f(x), t)].$$

Die Einhängung eines CW-Komplexes ist wieder ein CW-Komplex. Man sieht leicht, dass $\Sigma S^i \approx S^{i+1}$. Somit induziert Einhängung eine Abbildung $E : \pi_i(X, x_0) \to \pi_i(\Sigma X, *)$. Da Einhängung mit den Kogruppenstruktur von S^i und S^{i+1} verträglich ist, ist E sogar ein Gruppenhomomorphismus.

Definition 3. Ein nicht leerer topologischer Raum X heißt *n-zusammenhängend*, falls $\pi_i(X) = 0$ für $0 \leqslant i \leqslant n$.

Satz 2 (Freudenthal'scher Einhängungssatz)**.** Es sei $n \geqslant 0$ und X ein n-zusammenhängender CW-Komplex. Dann ist $E : \pi_i(X) \to \pi_{i+1}(\Sigma X)$ bijektiv für $0 \leqslant i \leqslant 2n$ und surjektiv für $i = 2n + 1$.

Insbesondere ist die i-fach iterierte Einhängung $\Sigma^i X$ eines n-zusammenhängenden CW-Komplexes X ein $(n+i)$-zusammenhängender CW-Komplex.

Für einen beliebigen CW-Komplex X gilt daher $\pi_{n+j}(\Sigma^j X) \cong \pi_{n+j+1}(\Sigma^{j+1} X)$ für $n + j \leqslant 2(j - 1) \Leftrightarrow n + 2 \leqslant j$. Somit ist

$$\pi_{2n+2}(\Sigma^n X) \cong \pi_{2n+3}(\Sigma^{n+1} X) \cong \pi_{2n+4}(\Sigma^{n+2} X) \cong \ldots \cong \operatorname{colim} \pi_{n+j}(\Sigma^j X).$$

Diese Gruppe heißt *n-te stabile Homotopiegruppe* von X. Im Fall der Sphären haben wir mit $X = S^0$:

$$\pi_{2n+2}(S^{n+2}) \cong \pi_{2n+3}(S^{n+3}) \cong \pi_{2n+4}(S^{n+4}) \cong \ldots \cong \operatorname{colim}_j \pi_{n+j}(S^j) =: \pi_n^s.$$

Wir behaupten, dass $E : \pi_1(S^1) \to \pi_2(S^2)$ ein Isomorphismus ist. Aus dem Einhängungssatz folgt, dass diese Abbildung surjektiv ist. Somit ist $\pi_2(S^2)$ ein zyklische Gruppe mit Erzeuger id_{S^2}. Es sei nun $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist $H_2(k \cdot \mathrm{id}_{S^2}) : H_2(S^2) \to H^2(S^2)$ gegeben durch Multiplikation mit k. Angenommen, $k \cdot \mathrm{id}_{S^2}$ ist nullhomomotop. Dann ist auch $H_2(k \cdot \mathrm{id}_{S^2}) = 0$ und somit $k = 0$. Somit ist E injektiv. Es folgt

$$\mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1) \cong \pi_2(S^2) \cong \ldots \cong \pi_i(S^i) \cong \ldots \cong \operatorname{colim}_j \pi_j(S^j) = \pi_0^s.$$

Dabei ist id_{S^i} ein Erzeuger von $\pi_i(S^i)$.

$\pi_{n+k}(S^n)$	$n{=}1$	$n{=}2$	$n{=}3$	$n{=}4$	$n{=}5$	$n{=}6$	$n{=}7$	$n{=}8$	$n{=}9$	$n{=}10$	$n{=}11$	π_k^s
$k=0$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\cdots$									$\mathbb{Z}$
$k=1$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\cdots$								$\mathbb{Z}_2$
$k=2$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\cdots$							$\mathbb{Z}_2$
$k=3$	0	$\mathbb{Z}_4{\times}\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}{\times}\mathbb{Z}_4{\times}\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_8{\times}\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_8{\times}\mathbb{Z}_3$	$\cdots$						$\mathbb{Z}_8{\times}\mathbb{Z}_3$
$k=4$	0	$\mathbb{Z}_4{\times}\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2{\times}\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\cdots$					0
$k=5$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$				0
$k=6$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_8{\times}\mathbb{Z}_3^2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\cdots$			$\mathbb{Z}_2$
$k=7$	0	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3{\times}\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_3{\times}\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_2{\times}\mathbb{Z}_3{\times}\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_4{\times}\mathbb{Z}_3{\times}\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_8{\times}\mathbb{Z}_3{\times}\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}{\times}\mathbb{Z}_8{\times}\mathbb{Z}_3{\times}\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_{16}{\times}\mathbb{Z}_3{\times}\mathbb{Z}_5$	$\cdots$		$\mathbb{Z}_{16}{\times}\mathbb{Z}_3{\times}\mathbb{Z}_5$
$k=8$	0	$\mathbb{Z}_3{\times}\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_8{\times}\mathbb{Z}_2{\times}\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\cdots$	$\mathbb{Z}_2^2$
$k=9$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\mathbb{Z}_2^5$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\mathbb{Z}{\times}\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^3$

Zusammengefasst wissen wir also

$$\pi_i(S^n,*) \cong \begin{cases} 0, & \text{für } i < n \text{ und } i > n = 1 \\ \mathbb{Z}, & \text{für } i = n, \\ \mathbb{Z} \oplus \text{endliche Gruppe}, & \text{für } i = 2n-1 \text{ und } n \text{ gerade}, \\ \text{endliche Gruppe}, & \text{sonst.} \end{cases}$$