

Spektralsequenzen und der Satz von Serre

Tim Baumann

Geboren am 15. Juni 1994 in Friedberg

1. Juli 2015

Bachelorarbeit Mathematik

Betreuer: Prof. Dr. Bernhard Hanke

Zweitgutachter: Prof. Dr. X Y

INSTITUT FÜR MATHEMATIK

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-TECHNISCHE FAKULTÄT

UNIVERSITÄT AUGSBURG

1 Spektralsequenzen

1.1 Faserungen

Definition. Eine *Serre-Faserung* ist eine stetige Abbildung $p : E \rightarrow B$, welche die *Homotopieliftungseigenschaft* (HLE) für die Scheiben D^n besitzt, d. h. für alle $n \geq 0$ und für alle stetigen Abbildungen H, H_0 wie unten, sodass das äußere Quadrat kommutiert, gibt es eine stetige Abbildung \tilde{H} , sodass die beiden Dreiecke kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} D^n & \xrightarrow{H_0} & E \\ i_0 \downarrow & \searrow \exists \tilde{H} & \downarrow p \\ D^n \times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

Dabei ist i_0 die Inklusion von D^n in $D^n \times I$ als $D^n \times \{0\}$.
Eindeutigkeit von \tilde{H} wird nicht gefordert.

Lemma. Es sei $p : E \rightarrow B$ eine stetige Abbildung. Dann sind äquivalent:

- a) p ist eine Serre-Faserung
- b) p besitzt die *relative Homotopieliftungseigenschaft* für CW-Paare, d. h. für alle CW-Paare (X, A) und für alle H_0 und H wie unten, sodass das äußere Quadrat kommutiert, gibt eine stetige Abbildung \tilde{H} , sodass die beiden Dreiecke kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} \cup A \times I & \xrightarrow{H_0} & E \\ \downarrow & \searrow \exists \tilde{H} & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

Beweis. „b) \implies a)“ Folgt sofort mit $(X, A) := (D^n, \emptyset)$.

„a) \implies b)“ Wir behandeln zunächst den Fall $(X, A) = (D^n, S^{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(D^n \times I, D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \cup I) \approx (D^n)$ homöomorph als Raumpaare. Somit ist die relative Homotopieliftungseigenschaft in diesem Fall gleichbedeutend zur Homotopieliftungseigenschaft für die Scheibe D^n .

Es sei nun (X, A) ein beliebiges Raumpaare. Dann kann man induktiv die Homotopie H auf die i -Zellen e_α^i von $X \setminus A$ fortsetzen. Dabei ist die Homotopie auf $S^{n-1} = \partial D^n$ durch die Komposition der bisher konstruierten Homotopie mit der anheftenden Abbildung $\phi_\alpha : S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ vorgegeben. Man erhält die Fortsetzung durch Anwenden des zuerst bewiesenen Falls. \square

Lemma. Es seien $p : E \rightarrow B$ eine Serre-Faserung, $b_0 \in B$, $F := p^{-1}(b_0)$ die Faser über b_0 und $f_0 \in F$. Dann gibt es eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow \pi_n(F, f_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, f_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, f_0) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_1(B, b_0)$$

von Homotopiegruppen. Dabei ist $i : F \hookrightarrow E$ die Inklusion.

Beweis. Die gesuchte exakte Sequenz ist die lange exakte Homotopiesequenz

$$\dots \rightarrow \pi_n(F, f_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, f_0) \rightarrow \pi_n(E, F, f_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, f_0) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_1(E, F, f_0)$$

des Raumpaars (E, F) . Es bleibt zu zeigen: $\pi_n(E, F, f_0) \cong \pi_n(B, b_0)$ als Gruppe für $n > 1$ und als punktierte Menge für $n = 1$. Der Isomorphismus muss außerdem so gewählt werden, dass

$$p_* = \left(\pi_n(E, f_0) \rightarrow \pi_n(E, F, f_0) \xrightarrow{\cong} \pi_n(B, b_0) \right).$$

Wir zeigen: $p_* : \pi_n(E, F, f_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$ ist der gesuchte Isomorphismus (damit ist obige Gleichung erfüllt).

Surjektivität: Sei $[g : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, b_0) \rightarrow (B, \{b_0\}, b_0)] \in \pi_{n+1}(B, b_0)$, $n \geq 0$. Sei \tilde{g} der Lift im folgenden relativen HLE-Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\text{konst } f_0} & E \\ \downarrow & \nearrow \exists \tilde{g} & \downarrow p \\ I^n \times I & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

wobei $U := I^n \times \{0\} \cup (\partial I^n) \times I \subset I^{n+1}$. Dann kann man \tilde{g} als eine Abbildung $(I^{n+1}, \partial I^{n+1}, U) \rightarrow (E, F, \{f_0\})$ von Raumtripeln auffassen, welche ein Element von $\pi_{n+1}(E, F, f_0)$ repräsentiert. Es gilt $p_*[\tilde{g}] = [p \circ \tilde{g}] = [g]$.

Injektivität: Seien $[h_0], [h_1] \in \pi_{n+1}(E, F, f_0)$ mit $p_*[h_0] = p_*[h_1]$. Sei

$$H : I \times I^{n+1}, \quad (t, x) \mapsto H_t(x)$$

eine Homotopie mit $H_0 = p \circ h_0$, $H_1 = p \circ h_1$, welche zu jedem Zeitpunkt $t \in I$ eine Abbildung $H_t : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}) \rightarrow (B, \{b_0\})$ von Raumpaaren ist. Betrachte folgendes HLE-Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{h} & E \\ \downarrow & \nearrow \exists \tilde{H} & \downarrow p \\ I^{n+1} \times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

mit $V := I^{n+1} \times \{0\} \cup (\partial I^{n+1}) \times I \subset I^{n+2}$ und

$$h|_{\{0\} \times I^{n+1}} := h_0, \quad h|_{\{1\} \times I^{n+1}} := h_1, \quad h|_{I \times U} := \text{konst } f_0.$$

Nun ist \tilde{H} eine Homotopie von h_0 nach h_1 , welche zu jedem Zeitpunkt t eine Abbildung $\tilde{H}_t : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, U) \rightarrow (E, F, \{b_0\})$ von Raumtripeln ist. \square

Definition. Es seien $p : E \rightarrow B$ und $g : X \rightarrow B$ stetig. Der *Pullback* von p entlang g ist die Abbildung $g^*(p) : g^*(E) \rightarrow X$, wobei $g^*(E) := X \times_B E$ das Faserprodukt von X und E über B vermöge g und p ist.

Bemerkung. Pullback ist funktoriell: $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ und $\text{id}^* = \text{id}$.

Lemma. Pullbacks von Serre-Faserungen sind Serre-Faserungen.

Beweis. Sei $p : E \rightarrow B$ eine Serre-Faserung und $g : X \rightarrow B$ stetig. Wir müssen die Existenz des Morphismus \tilde{H} im folgenden Diagramm zeigen:

$$\begin{array}{ccccc} D^n & \xrightarrow{H_0} & g^*(E) & \xrightarrow{h} & E \\ \downarrow i_0 & & \downarrow g^*(p) & \lrcorner & \downarrow p \\ D^n \times I & \xrightarrow{H} & X & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

Aus der HLE von p erhält wie folgt einen Morphismus K :

$$\begin{array}{ccccc} D^n & \xrightarrow{H_0} & X \times_B E & \xrightarrow{h} & E \\ \downarrow i_0 & & \downarrow & \nearrow K & \downarrow p \\ D^n \times I & \xrightarrow{H} & X & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

Nun ist $D^n \times I$ vermöge H und K ein Kegel über dem Diagramm $(X \xrightarrow{g} B \xleftarrow{p} E)$. Die universelle Eigenschaft von $g^*(E)$ induziert einen Morphismus $\tilde{H} : D^n \times I \rightarrow X \times_B E$ mit $g^*(p) \circ \tilde{H} = H$ und $h \circ \tilde{H} = K$. Aus der univ. Eigenschaft von $g^*(E)$ (Eindeutigkeit) folgt nun $\tilde{H} \circ i_0 = H_0$. \square

Definition. Ein Morphismus $(g, \tilde{g}) : p' \rightarrow p$ von Serre-Faserungen $p' : E' \rightarrow B'$ und $p : E \rightarrow B$ ist ein kommutatives Quadrat der Form

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\tilde{g}} & E \\ \downarrow p' & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

Beispiel. Pullback einer Serre-Faserung p entlang einer stetigen Abbildung g induziert einen Morphismus $(g, \tilde{g}) : g^*(p) \rightarrow p$ von Serre-Faserungen.

Lemma. Die langen exakten Sequenzen der Homotopiegruppen von Faserungen sind natürlich: Es sei $(g, \tilde{g}) : p' \rightarrow p$ ein Morphismus von Serre-Faserungen $p' : E' \rightarrow B'$ und $p : E \rightarrow B$, $b'_0 \in B'$, $b_0 := g(b'_0)$, $F' := p'^{-1}(b'_0)$, $F := p^{-1}(b_0)$, $f'_0 \in F'$, $f_0 := \tilde{g}(f'_0)$. Dann gibt es eine „Leiter“ bestehend aus kommutativen Quadraten zwischen den Homotopiesequenzen:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \pi_n(F', f'_0) & \xrightarrow{i'_*} & \pi_n(E', f'_0) & \xrightarrow{p'_*} & \pi_n(B', b'_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F', f'_0) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow (\tilde{g}|_{F'})_* & & \downarrow \tilde{g}_* & & \downarrow g_* & & \downarrow (\tilde{g}|_{F'})_* \\ \dots & \longrightarrow & \pi_n(F, f_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(E, f_0) & \xrightarrow{p_*} & \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, f_0) \longrightarrow \dots \end{array}$$

Beweis. Folgt aus der Natürlichkeit der langen exakten Homotopiesequenz von Raumpaaren. \square

Es sei $p : E \rightarrow B$ eine Serre-Faserung, $\gamma : I \rightarrow B$ ein stetiger Weg. Betrachte die lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow \pi_n(F_{\gamma(0)}) \rightarrow \pi_n(\gamma^*(E)) \rightarrow \pi_n(I) \rightarrow \pi_{n-1}(F_{\gamma(0)}) \rightarrow \dots$$

der Homotopiegruppen von $\gamma^*(p) : \gamma^*(E) \rightarrow I$ mit Faser

$$F_{\gamma(t)} := \gamma^*(p)^{-1}(t) \subset \gamma^*(E) = \{(t, e) \in I \times E \mid \gamma(t) = p(e)\}.$$

In dieser Sequenz sind die Gruppen $\pi_n(I)$ trivial. Folglich sind die Abbildungen $(i_{\gamma(t)})_* : \pi_n(F_{\gamma(t)}, *) \rightarrow \pi_n(\gamma^*(E), *)$ Isomorphismen. In anderen Worten: $i_{\gamma(t)}$ ist eine schwache Äquivalenz. Aus einem Korollar des Whitehead-Theorems folgt nun, dass i_t auch in Homologie und Kohomologie Isomorphismen induziert (vgl. Spanier, AT, S. 406, Cor 7.6.25). Wir untersuchen den Isomorphismus

$$T_\gamma := (i_{\gamma(1)})^* \circ ((i_{\gamma(0)})^*)^{-1} : H^*(F_{\gamma(0)}) \xrightarrow{\cong} H^*(F_{\gamma(1)}).$$

Lemma. T_γ hängt lediglich von der Weghomotopieklasse von γ ab, d. h. ist η ein zweiter Weg mit $\gamma \simeq \eta$, so gilt $T_\gamma = T_\eta$.

Beweis. Sei $H : I \times I \rightarrow B$ eine Homotopie zw. den Wegen γ und η , d. h. $H_0 := H(0, -) = \gamma$, $H_1 = \eta$, $H(-, 0) \equiv x$ und $H(-, 1) \equiv y$ mit $x := \gamma(0) = \eta(0)$ und $y := \gamma(1) = \eta(1)$. Für festes $s \in I$ sei $i_s : I \rightarrow I \times I$, $t \mapsto (s, t)$ die Inklusion als $\{s\} \times I$. Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H_s^*(E) & \xleftarrow{\tilde{i}_s} & H^*(E) & \longrightarrow & E \\ \downarrow H_s^*(p) & \lrcorner & \downarrow H^*(p) & \lrcorner & \downarrow p \\ I & \xleftarrow{i_s} & I \times I & \xrightarrow{H} & B \\ & & \searrow H_s & & \end{array}$$

Sei $t \in I$ fest. Sei $F_{s,t} := (H_s^*(p))^{-1}(t) = (H^*(p))^{-1}((s,t))$ und $f_0 \in F$. Das linke komm. Diagramm induziert einen Morphismus zw. den langen ex. Homotopieseq. von $H_t^*(p)$ und $H^*(p)$:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \pi_{n+1}(I, t) & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(F_{s,t}, f_0) & \xrightarrow{(i'_{s,t})^*} & \pi_n(H_s^*(E), f_0) \xrightarrow{H_s^*(p)^*} \pi_n(I, t) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow i_{s*} & & \parallel & & \downarrow (\tilde{i}_s)^* \\ \dots & \longrightarrow & \pi_{n+1}(I \times I, (s, t)) & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(F_{s,t}, f_0) & \xrightarrow{(i_{s,t})^*} & \pi_n(H^*(E), f_0) \xrightarrow{H^*(p)^*} \pi_n(I \times I, (s, t)) \longrightarrow \dots \\ & & & & & & \downarrow i_{s*} \end{array}$$

In diesen Sequenzen verschwinden die Gruppen $\pi_n(I, t)$ bzw. $\pi_n(I \times I, (s, t))$. Folglich induzieren die Abbildungen \tilde{i}_s Isomorphismen in Homotopie und in Kohomologie. Es gilt nun

$$\begin{aligned} T_\gamma &= (i'_{0,1})^* \circ ((i'_{0,0})^*)^{-1} = (i'_{0,1})^* \circ (\tilde{i}_0)^* \circ (\tilde{i}_0)^{-1} \circ ((i'_{0,0})^*)^{-1} \\ &= (i_{0,1})^* \circ ((i_{0,0})^*)^{-1} \stackrel{(\star)}{=} (i_{1,1})^* \circ ((i_{1,0})^*)^{-1} \\ &= (i'_{1,1})^* \circ (\tilde{i}_1)^* \circ (\tilde{i}_1)^{-1} \circ ((i'_{1,0})^*)^{-1} = (i'_{1,1})^* \circ ((i'_{1,0})^*)^{-1} = T_\eta. \end{aligned}$$

Die Gleichung (\star) gilt wegen $i_{0,1} \simeq i_{1,1}$ und $i_{0,0} \simeq i_{1,0}$. □

Mit ganz ähnlicher Technik kann man zeigen:

Lemma. Seien $\gamma, \eta : I \rightarrow B$ stetige Wege mit $\gamma(1) = \eta(0)$. Dann gilt

$$T_\eta \circ T_\gamma = T_{\gamma \cdot \eta} : H^*(F_{\gamma(0)}) \xrightarrow{\cong} H^*(F_{\eta(1)}).$$

Dabei ist die Komposition $\gamma \cdot \eta$ von γ und η folgender Weg:

$$\gamma \cdot \eta : I \rightarrow B, \quad s \mapsto \begin{cases} \gamma(2s), & \text{falls } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ \eta(2s - 1), & \text{falls } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Beweis. Betrachte folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} \gamma^*(E) & \xleftarrow{\tilde{j}} & (\gamma \cdot \eta)^*(E) & \longrightarrow & E \\ \downarrow \gamma^*(p) & \ulcorner & \downarrow (\gamma \cdot \eta)^*(p) & \ulcorner & \downarrow p \\ I & \xrightarrow{j} & I & \xrightarrow{\gamma \cdot \eta} & B \\ & \searrow \gamma & & & \end{array}$$

Dabei ist $j : I \rightarrow I$ die Abbildung $s \mapsto s/2$. Analog zum letzten Lemma sieht man anhand des Leiterdiagramms der langen exakten Sequenzen der Faserungen $\gamma^*(p)$ und $(\gamma \cdot \eta)^*(p)$, dass \tilde{j} einen Isomorphismus in Homotopie und Kohomologie induziert. Es gibt ein ähnliches Diagramm mit η statt γ und $k : I \rightarrow I$, $s \mapsto (1+s)/2$ statt j . Es induziert auch \tilde{k} einen Isomorphismus in Kohomologie. Es gilt nun

$$\begin{aligned} T_\eta \circ T_\gamma &= (i_{\eta(1)})^* \circ ((i_{\eta(0)})^*)^{-1} \circ (i_{\gamma(1)})^* \circ ((i_{\gamma(0)})^*)^{-1} \\ &= (i_{\eta(1)})^* \circ \tilde{k}^* \circ (\tilde{k})^{-1} \circ ((i_{\eta(0)})^*)^{-1} \circ (i_{\gamma(1)})^* \circ \tilde{j}^* \circ (\tilde{j})^{-1} \circ ((i_{\gamma(0)})^*)^{-1} \\ &= (\tilde{k} \circ i_{\eta(1)})^* \circ ((\tilde{k} \circ i_{\eta(0)})^*)^{-1} \circ (\tilde{j} \circ i_{\gamma(1)})^* \circ ((\tilde{j} \circ i_{\gamma(0)})^*)^{-1} \\ &= (i_{\gamma \cdot \eta(1)})^* \circ ((i_{\gamma \cdot \eta(1/2)})^*)^{-1} \circ (i_{\gamma \cdot \eta(1/2)})^* \circ ((i_{\gamma \cdot \eta(0)})^*)^{-1} \\ &= (i_{\gamma \cdot \eta(1)})^* \circ ((i_{\gamma \cdot \eta(0)})^*)^{-1} = T_{\gamma \cdot \eta}. \end{aligned} \quad \square$$

1.2 Lokale Koeffizienten

Definition. Ein *lokales Koeffizientensystem* \underline{A} auf einem topologischen Raum B besteht aus abelschen Gruppen $(A_b)_{b \in B}$ und Isomorphismen $T_\gamma : A_{\gamma(0)} \xrightarrow{\cong} A_{\gamma(1)}$ für jeden stetigen Weg $\gamma : I \rightarrow B$, sodass gilt:

- Sind zwei Wege $\gamma, \eta : I \rightarrow B$ homotop modulo Endpunkte, so gilt $T_\gamma = T_\eta$.
- Für komponierbare Wege $\gamma, \eta : I \rightarrow B$ gilt $T_{\gamma \circ \eta} = T_\eta \circ T_\gamma$.
- Für den konstanten Weg $\gamma \equiv b$ gilt $T_\gamma = \text{id}_{A_b}$.

Bemerkung. Man kann ein lokales Koeffizientensystem auf B auch als Funktor aus dem Fundamentalgruppoid von B in die Kategorie der abelschen Gruppen auffassen.

Beispiel. Im letzten Abschnitt wurde gezeigt: Bei einer Serre-Faserung $p : E \rightarrow B$ bilden die q -ten Kohomologiegruppen $A_b := H^q(p^{-1}(b))$ der Fasern ein lokales Koeffizientensystem. Wir bezeichnen dieses Koeffizientensystem im Folgenden mit $\mathcal{H}^q(F_p)$.

Beispiel. Für jede abelsche Gruppe G gibt es das konstante Koeffizientensystem \underline{G} mit $G_b := G$ für alle $b \in B$ und $T_\gamma = \text{id}_G$ für alle $\gamma : I \rightarrow B$.

Sei im Folgenden $\Delta_n(B)$ die Menge der n -Simplizes in B , also die Menge der stetigen Abbildungen $\Delta^n \rightarrow B$ mit $\Delta^n := \text{spann}\{e_0, \dots, e_n\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, und

$$d_n : \Delta_n(B) \rightarrow \Delta_{n-1}(B) \quad \sigma \mapsto \sigma_{\langle e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n \rangle} \quad (0 \leq i \leq n),$$

die Abbildung auf die i -Seite. Für einen n -Simplex σ bezeichne $\sigma_i := \sigma_{\langle e_i \rangle} \in \Delta_0(B) = B$ die i -te Ecke und $\sigma_{ij} := \sigma_{\langle e_i, e_j \rangle} \in \Delta_1(B)$ den Weg von σ_i nach σ_j entlang der ij -Kante von σ ($0 \leq i \leq j \leq n$).

Definition. Sei B ein topologischer Raum, \underline{A} ein lokales Koeffizientensystem auf B . Der *Komplex der singulären Koketten auf B mit Koeffizienten in \underline{A}* ist folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} C^n(B; \underline{A}) &:= \{ \text{Abbildungen } f, \text{ welche einem } n\text{-Simplex } \sigma \in \Delta_n(B) \\ &\quad \text{ein Element } f(\sigma) \in A_{\sigma_0} \text{ zuordnen} \} \\ \delta^n(f) &:= (\sigma \in \Delta_{n+1}(B)) \mapsto T_{\sigma_{01}}^{-1}(f(d_0(\sigma))) + \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i f(d_i(\sigma)). \end{aligned}$$

Man überprüft leicht, dass $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$ gilt. Die Kohomologie $H^*(B; \underline{A}) := H^*(C^*(B; \underline{A}))$ dieses Kettenkomplexes heißt *singuläre Kohomologie von B mit Koeffizienten in \underline{A}* .

Beobachtung. Für das konstante Koeffizientensystem \underline{G} gilt $H^*(B; \underline{G}) \cong H^*(B; G)$. Gewöhnliche Kohomologie mit Koeffizienten ist also ein Spezialfall von Kohomologie mit Koeffizienten in einem lokalen System.

1.3 Spektralsequenzen

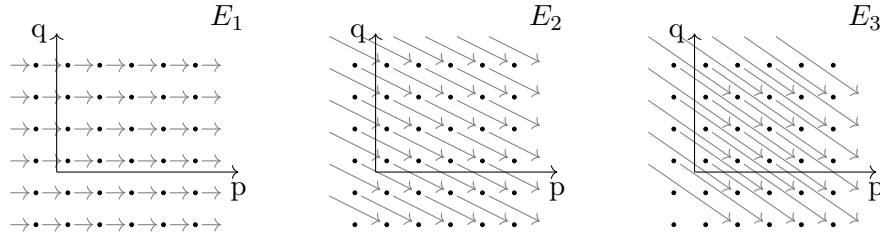
Es sei A im Folgenden ein kommutativer Ring mit Eins.

Definition. Eine (kohomologische) *Spektralsequenz* besteht aus

- A -Moduln $E_r^{p,q}$ für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ und $r \geq 1$,
- A -Modul-Homomorphismen $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1}$ mit $d_r^{p+r, q-r+1} \circ d_r^{p,q} = 0$
- und Isomorphismen $\alpha_r^{p,q} : H^{p,q}(E_r) := \ker(d_r^{p,q}) / \text{im}(d_r^{p-r, q+r-1}) \xrightarrow{\cong} E_{r+1}^{p,q}$.

Bemerkung. • Die Homomorphismen $d_{p,q}^r$ heißen *Differentiale*.

- Die Gesamtheit der Module $E_{p,q}^r$ und Differentiale d_r^{pq} mit $r \in \mathbb{N}$ fest heißt r -te *Seite* E^r .
- Man stellt Seiten für gewöhnlich in einem 2-dimensionalen Raster dar:



Definition. Eine Spektralsequenz *konvergiert*, falls für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ ein $R \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $r \geq R$ die Differentiale von und nach $E_r^{p,q}$ null sind und damit $E_{p,q}^\infty := E_R^{p,q} \cong E_{R+1}^{p,q} \cong \dots$. Der Grenzwert der SS ist die Unendlich-Seite $E_\infty := \{E_\infty^{p,q}\}_{p,q}$.

Bemerkung. Viele Spektralsequenzen sind im ersten Quadranten konzentriert, d. h. $E_r^{p,q}$ ist nur für $p, q \geq 0$ ungleich Null. Solche Spektralsequenzen konvergieren immer, denn für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ führen für $r \geq \max(p+1, q+2)$ alle Differentiale von $E_r^{p,q}$ aus dem ersten Quadranten heraus und alle dort eintreffenden Differentiale kommen von außerhalb des ersten Quadranten und sind daher Null.

Definition. Eine *Filtrierung* eines A -Moduls M ist eine absteigende Folge

$$M \supseteq F^{-1}M \supseteq F^0M \supseteq F^1M \supseteq \dots$$

von Untermoduln von M , $p \in \mathbb{Z}$. Eine Filtrierung heißt

- *ausschöpfend*, falls $M = \cup_p F^p$,
- *Hausdorffsch*, wenn $0 = \cap_p F^p M$ und
- *regulär*, wenn sie ausschöpfend und Hausdorffsch ist.

Definition. Eine Spektralsequenz E *konvergiert gegen* einen graduierten A -Modul $M = \oplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$ (notiert $E_r^{p,q} \Rightarrow M^{p+q}$), falls E überhaupt konvergiert und reguläre Filtrierungen

$$M_n \supseteq \dots \supseteq F^{p-1}M_n \supseteq F^pM_n \supseteq F^{p+1}M_n \supseteq \dots$$

existieren, sodass $E_\infty^{pq} \cong F^pM_{p+q}/F^{p+1}M_{p+q}$ für alle $p, q \in \mathbb{Z}$.

1.4 Die Spektralsequenz eines filtrierten Komplexes

Definition. Eine *Filtrierung eines Kokettenkomplexes* C^\bullet ist eine absteigende Folge

$$C^\bullet \supseteq \dots \supseteq F^{p-1}C^\bullet \supseteq F^pC^\bullet \supseteq F^{p+1}C^\bullet \supseteq \dots$$

von Unterkomplexen.

Lemma. Es sei C^\bullet ein filtrierter Kokettenkomplex. Es gibt eine Spektralsequenz mit

$$E_1^{pq} = H^{p+q}(F^pC^\bullet/F^{p+1}C^\bullet).$$

Angenommen, die Filtrierung ist

- a) *gradweise nach unten beschränkt*, d. h. für alle $q \in \mathbb{Z}$ gibt es ein $p \in \mathbb{Z}$ mit $F^pC^q = 0$,

b) *ausschöpfend*, d. h. für alle $q \in \mathbb{Z}$ ist $\cup_p F^p C^q = C^q$ und

c) für alle $q \in \mathbb{Z}$ gibt es ein $P \in \mathbb{Z}$, sodass für alle $p \leq P$ gilt: Die Inklusion $F^p C^\bullet \hookrightarrow C^\bullet$ induziert einen Isomorphismus $H^q(F^p C^\bullet) \cong H^q(C^\bullet)$ in Kohomologie.

Dann konvergiert die Spektralsequenz gegen $H^*(C^\bullet)$.

Wir führen zunächst etwas neue Notation ein. Diese hilft, den Beweis verständlicher zu formulieren. Wir fassen im Folgenden den Kettenkomplex als ein einziges Modul $C := \oplus_{n \in \mathbb{Z}} C^n$ anstatt als Folge von Modulen auf. Dieses Modul ist filtriert durch die Untermodule $F^p := \oplus_{n \in \mathbb{Z}} F^p C^n$. Wir setzen $F^{-\infty} := C$ und $F^\infty := 0$. Die Korandabbildung fassen wir als Homomorphismen $d : C \rightarrow C$ mit $d \circ d = 0$ auf, der die Filtrierung von C respektiert.

Wir sind interessiert an der Kohomologie von C^\bullet , also an $H^*(C) := \ker(d)/\text{im}(d)$ und an der Kohomologie von F^p/F^{p+1} , also $H^*(F^p/F^{p+1}) \cong (d|_{F^p})^{-1}(F^{p+1})/d(F^p)$. Wir geben nun eine Verallgemeinerung der Definition der Kohomologie von C^\bullet und der Kohomologie des Quotientenkomplexes F^p/F^q : Statt Zykeln (d. h. Elementen $c \in C$ mit $d(c) = 0$) betrachten wir z -Zykel, das sind Elemente $c \in C$ mit $d(c) \in F^z$. Wir teilen diese durch die Menge $d(F^b)$ der b -Ränder anstatt durch die Menge $d(C)$ der Ränder. Wir setzen

$$S[z, q, p, b] := \frac{F^p \cap d^{-1}(F^z)}{(F^p \cap d^{-1}(F^z)) \cap (F^q + d(F^b))}.$$

Wir haben als Spezialfälle

$$S[p, q, p, q] \cong F^p/F^q \quad \text{und} \quad S[q, q, p, p] \cong H^*(F^p/F^q).$$

Lemma. Es sei $z_1 \geq q_1 \geq p_1 = z_2 \geq b_1 = q_2 \geq p_2 \geq b_2$. Dann ist folgende Abbildung ein wohldefinierter Homomorphismus:

$$d^* : S[z_2, q_2, p_2, b_2] \rightarrow S[z_1, q_1, p_1, b_1], \quad [c] \mapsto [d(c)].$$

Beweis. Falls $[c] = 0$ in $S[z_2, q_2, p_2, b_2]$, so existieren $x \in F^{q_2}$ und $y \in F^{b_2}$ mit $c = x + d(y)$. Somit gilt $d^*[c] = [dc] = [d(x) + d^2(y)] = [d(x)] = 0$ in $S[z_1, q_1, p_1, b_1]$, da $F^{b_1} = F^{q_2}$. \square

Lemma. Es seien Filtrierungsindizes wie folgt gegeben:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & z_3 & \geq & q_3 & \geq & p_3 & \geq & b_3 \\ & & & \parallel & & \parallel & & & & \\ & & z_2 & \geq & q_2 & \geq & p_2 & \geq & b_2 \\ & & \parallel & & \parallel & & & & & \\ z_1 & \geq & q_1 & \geq & p_1 & \geq & b_1 \end{array}$$

Dann ist

$$\alpha : S[q_1, q_2, p_2, p_3] \rightarrow \frac{\ker(d^* : S[z_2, q_2, p_2, b_2] \rightarrow S[z_1, q_1, p_1, b_1])}{\text{im}(d^* : S[z_3, q_3, p_3, b_3] \rightarrow S[z_2, q_2, p_2, b_2])}, \quad [c] \mapsto [c]$$

ein wohldefinierter Isomorphismus.

Beweis. Sei A der Quotient auf der rechten Seite.

Wohldefiniertheit: Sei $[c] = 0$ in $S[q_1, q_2, p_2, p_3]$, d. h. es gibt $e \in F^{q_2} = F^{b_1}$ und $f \in F^{p_1}$ mit $c = e + d(f)$. Dann ist $d^*[c] = [d(c)] = [d(e)] = 0$ in $S[z_1, q_1, p_1, b_1]$, also $c \in \ker(d^* : S[z_2, q_2, p_2, b_2] \rightarrow S[z_1, q_1, p_1, b_1])$. Nun ist $f \in d^{-1}(F^{z_3})$, da $d(f) = c - e \in F^{p_2} = F^{z_3}$. Es gilt $[c] = [e + d(f)] = [d(f)] = d^*[f] = 0$ in A .

Injektivität: Sei $c \in F^{p_2} \cap d^{-1}(F^{q_1})$ mit $[c] = 0$ in A . Das heißt, es gibt $e \in F^{q_2}$, $f \in F^{b_2}$ und $g \in F^{p_3} \cap d^{-1}(F^{z_3})$ mit $c = e + d(f) + d(g)$. Dann ist $[c] = [e + d(f + g)] = 0$ in $S[q_1, q_2, p_2, p_3]$, da $f + g \in F^{p_3}$.

Surjektivität: Sei $\tilde{c} \in F^{p_2} \cap d^{-1}(F^{z_2})$ mit $[\tilde{c}] \in \ker(d^* : S[z_2, q_2, p_2, b_2] \rightarrow S[z_1, q_1, p_1, b_1])$. Das heißt, es gibt $e \in F^{q_1}$ und $f \in F^{b_1} = F^{q_2}$ mit $d(\tilde{c}) = e + d(f)$. Dann ist $[\tilde{c}] = [\tilde{c} - f]$ in $S[q_1, q_2, p_2, p_3]$ mit $\tilde{c} - f \in F^{p_2} \cap d^{-1}(F^{q_1})$, da $d(\tilde{c} - f) = e \in F^{q_1}$. \square

Beweis des Lemmas über Existenz der Spektralsequenz. Wir beachten jetzt wieder, dass C und damit $S[z, q, p, b]$ graduiert und d ein Differential vom Grad $+1$ ist. Es sei $S[z, q, p, b]^n$ die n -te Komponente. Setze

$$E_r^{pq} := S[p+r, p+1, p, p-r+1]^{p+q}.$$

Die Differentiale sind

$$d_r^{pq} : \underbrace{S[p+r, p+1, p, p-r+1]^{p+q}}_{=E_r^{p,q}} \rightarrow \underbrace{S[p+2r, p+r+1, p+r, p+1]^{p+q+1}}_{=E_r^{p+r, q-r+1}}, \quad [c] \mapsto [d(c)].$$

Sie sind wohldefiniert nach Lemma **TODO: Nr.** Wegen Lemma **TODO: Nr** ist

$$\alpha_r^{pq} : H^{p,q}(E_r) = \ker(d_r^{pq}) / \operatorname{im}(d_r^{p-r, q+r-1}) \rightarrow E_{r+1}^{pq}, \quad [c] \mapsto [c]$$

ein wohldefinierter Isomorphismus.

Beweis der Konvergenz: Es seien $p, q \in \mathbb{Z}$. Wegen Bedingung a) gibt es ein $R_1 \geq 0$, sodass $F^{p+R_1}C^{p+q+1} = 0$. Für $r \geq R_1$ ist damit $E_r^{p+r, q-r+1}$ als Subquotient (d.h. Quotient eines Untermoduls) von $F^{p+R_1}C^{p+q+1}$ Null. Folglich verschwindet auch das Differential d_r^{pq} . Wegen Bedingung c) gibt es ein $S \in \mathbb{Z}$, sodass $F^s C^\bullet \hookrightarrow C^\bullet$ und somit auch $F^s C^\bullet \hookrightarrow F^{s-1} C^\bullet$ für $s \leq S$ einen Isomorphismus in H^{p+q-1} und H^{p+q} induziert. Anhand der langen exakten Sequenz zu $0 \rightarrow F^s C^\bullet \rightarrow F^{s-1} C^\bullet \rightarrow F^{s-1} C^\bullet / F^s C^\bullet \rightarrow 0$ sieht man, dass $H^{p+q-1}(F^{s-1} C^\bullet / F^s C^\bullet) = 0$. Somit ist $E_r^{p-r, q+r-1}$ für $r \geq R_2 := p-s+1$ als Submodul von $H^{p+q-1}(F^{p-r} C^\bullet / F^{p-r+1} C^\bullet)$ Null. Folglich verschwindet auch $d_r^{p-r, q+r-1}$. Mit $R := \max(R_1, R_2)$ gilt dann $E_R^{pq} \cong E_{R+1}^{pq} \cong \dots \cong E_\infty^{pq}$.

Sei $H^n(C^\bullet)$ absteigend filtriert durch $F^p H^n(C^\bullet) := \operatorname{im}(i^* : H^n(F^p C^\bullet) \rightarrow H^n(C^\bullet))$. Für $r \geq R$ ist

$$E_\infty^{pq} \cong E_r^{pq} = \frac{F^p C^{p+q} \cap d^{-1}(0)}{(F^p C^{p+q} \cap d^{-1}(0)) \cap (F^{p+1} C^{p+q} + d(F^{p-r+1} C^{p+q-1}))} = S[\infty, p+1, p, p-r+1]^{p+q}.$$

Es ist daher $F^p H^{p+q}(C^\bullet) / F^{p+1} H^{p+q}(C^\bullet) \cong S[\infty, p+1, p, -\infty]^{p+q}$ ein Quotient von E_∞^{pq} . Tatsächlich gilt $S[\infty, p+1, p, -\infty]^{p+q} \cong E_\infty^{pq}$, denn: Sei $c \in F^p C^{p+q} \cap d^{-1}(0)$ mit $[c] = 0$ in $S[\infty, p+1, p, -\infty]^{p+q}$. Dann gibt es ein $e \in F^{p+1} C^{p+q}$ und ein $f \in C^{p+q-1}$ mit $c = e + d(f)$. Wegen Bedingung b) gibt es ein $\tilde{p} \in \mathbb{Z}$ mit $f \in F^{\tilde{p}} C^{p+q+1}$. Wähle r so, dass $r \geq R$ und $p-r+1 \leq \tilde{p}$. Dann ist $[c] = [e] + [d(f)] = 0$ in $E_r^{pq} \cong E_\infty^{pq}$. \square

1.5 Die Serre-Spektralsequenz

Satz (Jean-Pierre Serre). Für jede Serre-Faserung $p : E \rightarrow B$ existiert eine Spektralsequenz mit

$$E_2^{p,q} = H^p(B; \mathcal{H}^q(F_p)),$$

welche gegen $H^*(E)$ konvergiert.