Der Satz von Serre über die Endlichkeit der Homotopiegruppen der Sphären

Bachelorarbeit

von

Tim Baumann

Eingereicht am

TODO: ??. ??. 2015

Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Erstgutachter: Prof. Dr. Bernhard Hanke
Zweitgutachter: TODO: ???

Inhaltsverzeichnis

1 Die Serre-Spektralsequenz

1.1 Faserungen

Definition 1. Eine *Serre-Faserung* ist eine stetige Abbildung $p : E \to B$, welche die *Homotopieliftungseigenschaft* (HLE) für die Scheiben D^n besitzt, d. h. für alle $n \geqslant 0$ und für alle stetigen Abbildungen H, H_0 wie unten, sodass das äußere Quadrat kommutiert, gibt es eine stetige Abbildung $\tilde{H}$, sodass die beiden Dreiecke kommutieren:

$$\begin{tikzcd} D^n \arrow[r, "H_0"] \arrow[d, hook, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ D^n \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\exists\, \tilde{H}"] & B \end{tikzcd}$$

Dabei ist i_0 die Inklusion von D^n in $D^n \times I$ als $D^n \times \{0\}$.
Eindeutigkeit von $\tilde{H}$ wird nicht gefordert.

Lemma 1. Es sei $p : E \to B$ eine stetige Abbildung. Dann sind äquivalent:

a) p ist eine Serre-Faserung

b) p besitzt die *relative Homotopieliftungseigenschaft* für CW-Paare, d. h. für alle CW-Paare (X, A) und für alle H_0 und H wie unten, sodass das äußere Quadrat kommutiert, gibt eine stetige Abbildung $\tilde{H}$, sodass die beiden Dreiecke kommutieren:

$$\begin{tikzcd} X \times \{0\} \cup A \times I \arrow[r, "H_0"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\exists\, \tilde{H}"] & B \end{tikzcd}$$

Bemerkung. Eine *Hurewicz-Faserung* ist eine Serre-Faserung, welche die Homotopieliftungseigenschaft sogar für alle topologischen Räume besitzt.

Beweis. „b) $\Longrightarrow$ a)“ Folgt sofort mit $(X, A) := (D^n, \varnothing)$.
„a) $\Longrightarrow$ b)“ Wir behandeln zunächst den Fall $(X, A) = (D^n, S^{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(D^n \times I, D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \cup I) \approx (D^n)$ homöomorph als Raumpaar. Somit ist die relative Homotopieliftungseigenschaft in diesem Fall gleichbedeutend zur Homotopieliftungseigenschaft für die Scheibe D^n.
Es sei nun (X, A) ein beliebiges Raumpaar. Dann kann man induktiv die Homotopie H auf die i-Zellen e^i_α von $X \backslash A$ fortsetzen. Dabei ist die Homotopie auf $S^{n-1} = \partial D^n$ durch die Komposition der bisher konstruierten Homotopie mit der anheftenden Abbildung $\phi_\alpha : S^{n-1} \to X^{n-1}$ vorgegeben. Man erhält die Fortsetzung durch Anwenden des zuerst bewiesenen Falls. $\square$

Lemma 2. Es seien $p : E \to B$ eine Serre-Faserung, $b_0 \in B$, $F := p^{-1}(b_0)$ die Faser über b_0 und $f_0 \in F$. Dann gibt es eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \to \pi_n(F, f_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, f_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, f_0) \to \ldots \to \pi_1(B, b_0)$$

von Homotopiegruppen. Dabei ist $i : F \hookrightarrow E$ die Inklusion.

Beweis. Die gesuchte exakte Sequenz ist die lange exakte Homotopiesequenz

$$\ldots \to \pi_n(F, f_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, f_0) \to \pi_n(E, F, f_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, f_0) \to \ldots \to \pi_1(E, F, f_0)$$

des Raumpaares (E, F). Es bleibt zu zeigen: $\pi_n(E, F, f_0) \cong \pi_n(B, b_0)$ als Gruppe für $n > 1$ und als punktierte Menge für $n = 1$. Der Isomorphismus muss außerdem so gewählt werden, dass

$$p_* = \left(\pi_n(E, f_0) \to \pi_n(E, F, f_0) \xrightarrow{\cong} \pi_n(B, b_0)\right).$$

Wir zeigen: $p_* : \pi_n(E, F, f_0) \to \pi_n(B, b_0)$ ist der gesuchte Isomorphismus (damit ist obige Gleichung erfüllt).

Surjektivität: Sei $[g : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, b_0) \to (B, \{b_0\}, b_0)] \in \pi_{n+1}(B, b_0)$, $n \geqslant 0$. Sei $\tilde{g}$ der Lift im folgenden relativen HLE-Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\text{konst } f_0"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
I^n \times I \arrow[r, "g"] \arrow[ur, dashed, "\exists\, \tilde{g}"] & B
\end{tikzcd}$$

wobei $U := I^n \times \{0\} \cup (\partial I^n) \times I \subset I^{n+1}$. Dann kann man $\tilde{g}$ als eine Abbildung $(I^{n+1}, \partial I^{n+1}, U) \to (E, F, \{f_0\})$ von Raumtripeln auffassen, welche ein Element von $\pi_{n+1}(E, F, f_0)$ repräsentiert. Es gilt $p_*[\tilde{g}] = [p \circ \tilde{g}] = [g]$.

Injektivität: Seien $[h_0], [h_1] \in \pi_{n+1}(E, F, f_0)$ mit $p_*[h_0] = p_*[h_1]$. Sei

$$H : I \times I^{n+1}, \quad (t, x) \mapsto H_t(x)$$

eine Homotopie mit $H_0 = p \circ h_0$, $H_1 = p \circ h_1$, welche zu jedem Zeitpunkt $t \in I$ eine Abbildung $H_t : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}) \to (B, \{b_0\})$ von Raumpaaren ist. Betrachte folgendes HLE-Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "h"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\
I^{n+1} \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\exists\, \tilde{H}"] & B
\end{tikzcd}$$

mit $V := I^{n+1} \times \{0\} \cup (\partial I^{n+1}) \times I \subset I^{n+2}$ und

$$h|_{\{0\} \times I^{n+1}} := h_0, \quad h|_{\{1\} \times I^{n+1}} := h_1, \quad h|_{I \times U} := \text{konst } f_0.$$

Nun ist $\tilde{H}$ eine Homotopie von h_0 nach h_1, welche zu jedem Zeitpunkt t eine Abbildung $\tilde{H}_t : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, U) \to (E, F, \{b_0\})$ von Raumtripeln ist. ☐

Definition 2. Es seien $p : E \to B$ und $g : X \to B$ stetig. Der *Pullback* von p entlang g ist die Abbildung $g^*(p) : g^*(E) \to X$, wobei $g^*(E) := X \times_B E$ das Faserprodukt von X und E über B vermöge g und p ist.

Bemerkung. Pullback ist funktoriell: $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ und $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$.

Lemma 3. Pullbacks von Serre-Faserungen sind Serre-Faserungen.

Beweis. Sei $p : E \to B$ eine Serre-Faserung und $g : X \to B$ stetig. Wir müssen die Existenz des Morphismus $\tilde{H}$ im folgenden Diagramm zeigen:

$$\begin{tikzcd}
D^n \arrow[r, "H_0"] \arrow[d, hook, "i_0"'] & g^*(E) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g^*(p)"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & E \arrow[d, "p"] \\
D^n \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{H}"] & X \arrow[r, "g"] & B
\end{tikzcd}$$

Aus der HLE von p erhält wie folgt einen Morphismus K:

$$\begin{tikzcd}
D^n \arrow[r, "H_0"] \arrow[d, hook, "i_0"'] & X \times_B E \arrow[r, "h"] & E \arrow[d, "p"] \\
D^n \times I \arrow[r, "H"] \arrow[urr, dashed, "K"] & X \arrow[r, "g"] & B
\end{tikzcd}$$

Nun ist $D^n \times I$ vermöge H und K ein Kegel über dem Diagramm $(X \xrightarrow{g} B \xleftarrow{p} E)$. Die universelle Eigenschaft von $g^*(E)$ induziert einen Morphismus $\tilde{H} : D^n \times I \to X \times_B E$ mit $g^*(p) \circ \tilde{H} = H$ und $h \circ \tilde{H} = K$. Aus der univ. Eigenschaft von $g^*(E)$ (Eindeutigkeit) folgt nun $\tilde{H} \circ i_0 = H_0$. $\square$

Definition 3. Ein Morphismus $(g, \tilde{g}) : p' \to p$ von Serre-Faserungen $p' : E' \to B'$ und $p : E \to B$ ist ein kommutatives Quadrat der Form

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "p'"] & E \arrow[d, "p"] \\
B' \arrow[r, "g"] & B
\end{tikzcd}$$

Beispiel 1. Pullback einer Serre-Faserung p entlang einer stetigen Abbildung g induziert einen Morphismus $(g, \tilde{g}) : g^*(p) \to p$ von Serre-Faserungen.

Lemma 4. Die langen exakten Sequenzen der Homotopiegruppen von Faserungen sind natürlich: Es sei $(g, \tilde{g}) : p' \to p$ ein Morphismus von Serre-Faserungen $p' : E' \to B'$ und $p : E \to B$, $b_0' \in B'$, $b_0 := g(b_0')$, $F' := p'^{-1}(b_0')$, $F := p^{-1}(b_0)$, $f_0' \in F'$, $f_0 := \tilde{g}(f_0')$. Dann gibt es eine „Leiter“ bestehend aus kommutativen Quadraten zwischen den Homotopiesequenzen:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & \pi_n(F', f_0') \arrow[r, "i'_*"] \arrow[d, "(\tilde{g}|_{F'})_*"] & \pi_n(E', f_0') \arrow[r, "p'_*"] \arrow[d, "\tilde{g}_*"] & \pi_n(B', b_0') \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "g_*"] & \pi_{n-1}(F', f_0') \arrow[r] \arrow[d, "(\tilde{g}|_{F'})_*"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & \pi_n(F, f_0) \arrow[r, "i_*"] & \pi_n(E, f_0) \arrow[r, "p_*"] & \pi_n(B, b_0) \arrow[r, "\partial"] & \pi_{n-1}(F, f_0) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Beweis. Folgt aus der Natürlichkeit der langen exakten Homotopiesequenz von Raumpaaren. $\square$

Es sei $p : E \to B$ eine Serre-Faserung, $\gamma : I \to B$ ein stetiger Weg. Betrachte die lange exakte Sequenz

$$\ldots \to \pi_n(F_{\gamma(0)}) \to \pi_n(\gamma^*(E)) \to \pi_n(I) \to \pi_{n-1}(F_{\gamma(0)}) \to \ldots$$

der Homotopiegruppen von $\gamma^*(p) : \gamma^*(E) \to I$ mit Faser

$$F_{\gamma(t)} := \gamma^*(p)^{-1}(t) \subset \gamma^*(E) = \{(t, e) \in I \times E \mid \gamma(t) = p(e)\}.$$

In dieser Sequenz sind die Gruppen $\pi_n(I)$ trivial. Folglich sind die Abbildungen $(i_{\gamma(t)})_* : \pi_n(F_{\gamma(t)}, *) \to \pi_n(\gamma^*(E), *)$ Isomorphismen. In anderen Worten: $i_{\gamma(t)}$ ist eine schwache Äquivalenz. Aus einem Korollar des Whitehead-Theorems folgt nun, dass i_t auch in Homologie und Kohomologie Isomorphismen induziert (vgl. Spanier, AT, S. 406, Cor 7.6.25). Wir untersuchen den Isomorphismus

$$T_\gamma := (i_{\gamma(1)})^* \circ ((i_{\gamma(0)})^*)^{-1} \quad : \quad H^*(F_{\gamma(0)}) \xrightarrow{\cong} H^*(F_{\gamma(1)}).$$

Lemma 5. T_γ hängt lediglich von der Weghomotopieklasse von γ ab, d. h. ist η ein zweiter Weg mit $\gamma \simeq \eta$, so gilt $T_\gamma = T_\eta$.

Beweis. Sei $H : I \times I \to B$ eine Homotopie zw. den Wegen γ und η, d. h. $H_0 := H(0, -) = \gamma$, $H_1 = \eta$, $H(-, 0) \equiv x$ und $H(-, 1) \equiv y$ mit $x := \gamma(0) = \eta(0)$ und $y := \gamma(1) = \eta(1)$. Für festes $s \in I$ sei $i_s : I \to I \times I$, $t \mapsto (s, t)$ die Inklusion als $\{s\} \times I$. Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H_s^*(E) \arrow[r, hook, "\widetilde{i_s}"] \arrow[d, "H_s^*(p)"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & H^*(E) \arrow[r] \arrow[d, "H^*(p)"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & E \arrow[d, "p"] \\
I \arrow[r, hook, "i_s"] \arrow[rr, bend right, "H_s"'] & I \times I \arrow[r, "H"] & B
\end{tikzcd}$$

Sei $t \in I$ fest. Sei $F_{s,t} := (H_s^*(p))^{-1}(t) = (H^*(p))^{-1}((s,t))$ und $f_0 \in F$. Das linke komm. Diagramm induziert einen Morphismus zw. den langen ex. Homotopieseq. von $H_t^*(p)$ und $H^*(p)$:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & \pi_{n+1}(I,t) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "i_{s*}"] & \pi_n(F_{s,t}, f_0) \arrow[r, "(i'_{s,t})_*"] \arrow[d, equal] & \pi_n(H_s^*(E), f_0) \arrow[r, "H_s^*(p)_*"] \arrow[d, "(\widetilde{i_s})_*"] & \pi_n(I,t) \arrow[r] \arrow[d, "i_{s*}"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & \pi_{n+1}(I \times I, (s,t)) \arrow[r, "\partial"] & \pi_n(F_{s,t}, f_0) \arrow[r, "(i_{s,t})_*"] & \pi_n(H^*(E), f_0) \arrow[r, "H^*(p)_*"] & \pi_n(I \times I, (s,t)) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

In diesen Sequenzen verschwinden die Gruppen $\pi_n(I,t)$ bzw. $\pi_n(I \times I, (s,t))$. Folglich induzieren die Abbildungen $\widetilde{i_s}$ Isomorphismen in Homotopie und in Kohomologie. Es gilt nun

$$\begin{aligned}
T_\gamma &= (i'_{0,1})^* \circ ((i'_{0,0})^*)^{-1} = (i'_{0,1})^* \circ (\widetilde{i_0})^* \circ (\widetilde{i_0})^{-1} \circ ((i'_{0,0})^*)^{-1} \\
&= (i_{0,1})^* \circ ((i_{0,0})^*)^{-1} \overset{(\star)}{=} (i_{1,1})^* \circ ((i_{1,0})^*)^{-1} \\
&= (i'_{1,1})^* \circ (\widetilde{i_1})^* \circ (\widetilde{i_1})^{-1} \circ ((i'_{1,0})^*)^{-1} = (i'_{1,1})^* \circ ((i'_{1,0})^*)^{-1} = T_\eta.
\end{aligned}$$

Die Gleichung $(\star)$ gilt wegen $i_{0,1} \simeq i_{1,1}$ und $i_{0,0} \simeq i_{1,0}$. □

Mit ganz ähnlicher Technik kann man zeigen:

Lemma 6. Seien $\gamma, \eta : I \to B$ stetige Wege mit $\gamma(1) = \eta(0)$. Dann gilt

$$T_\eta \circ T_\gamma = T_{\gamma \blacksquare \eta} \quad : \quad H^*(F_{\gamma(0)}) \xrightarrow{\cong} H^*(F_{\eta(1)}).$$

Dabei ist die Komposition $\gamma \blacksquare \eta$ von γ und η folgender Weg:

$$\gamma \blacksquare \eta : I \to B, \quad s \mapsto \begin{cases} \gamma(2s), & \text{falls } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ \eta(2s-1), & \text{falls } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Beweis. Betrachte folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\gamma^*(E) \arrow[r, hook, "\widetilde{j}"] \arrow[d, "\gamma^*(p)"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & (\gamma \blacksquare \eta)^*(E) \arrow[r] \arrow[d, "(\gamma\blacksquare\eta)^*(p)"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & E \arrow[d, "p"] \\
I \arrow[r, hook, "j"] \arrow[rr, bend right, "\gamma"'] & I \arrow[r, "\gamma\blacksquare\eta"] & B
\end{tikzcd}$$

Dabei ist $j : I \to I$ die Abbildung $s \mapsto s/2$. Analog zum letzten Lemma sieht man anhand des Leiterdiagramms der langen exakten Sequenzen der Faserungen $\gamma^*(p)$ und $(\gamma \blacksquare \eta)^*(p)$, dass $\widetilde{j}$ einen Isomorphismus in Homotopie und Kohomologie induziert. Es gibt ein ähnliches Diagramm mit η statt γ und $k : I \to I,\ \ s \mapsto {}^{(1+s)}\!/_2$ statt j. Es induziert auch $\widetilde{k}$ einen Isomorphismus in Kohomologie. Es gilt nun

$$\begin{aligned}
T_\eta \circ T_\gamma &= (i_{\eta(1)})^* \circ ((i_{\eta(0)})^*)^{-1} \circ (i_{\gamma(1)})^* \circ ((i_{\gamma(0)})^*)^{-1} \\
&= (i_{\eta(1)})^* \circ \tilde{k}^* \circ (\tilde{k}^*)^{-1} \circ ((i_{\eta(0)})^*)^{-1} \circ (i_{\gamma(1)})^* \circ \tilde{j}^* \circ (\tilde{j}^*)^{-1} \circ ((i_{\gamma(0)})^*)^{-1} \\
&= (\tilde{k} \circ i_{\eta(1)})^* \circ ((\tilde{k} \circ i_{\eta(0)})^*)^{-1} \circ (\tilde{j} \circ i_{\gamma(1)})^* \circ ((\tilde{j} \circ i_{\gamma(0)})^*)^{-1} \\
&= (i_{\gamma \centerdot \eta(1)})^* \circ ((i_{\gamma \centerdot \eta(1/2)})^*)^{-1} \circ (i_{\gamma \centerdot \eta(1/2)})^* \circ ((i_{\gamma \centerdot \eta(0)})^*)^{-1} \\
&= (i_{\gamma \centerdot \eta(1)})^* \circ ((i_{\gamma \centerdot \eta(0)})^*)^{-1} = T_{\gamma \centerdot \eta}. \qquad \square
\end{aligned}$$

1.2 Lokale Koeffizienten

Definition 4. Ein *lokales Koeffizientensystem* $\underline{A}$ auf einem topologischen Raum B besteht aus abelschen Gruppen $(A_b)_{b \in B}$ und Isomorphismen $T_\gamma : A_{\gamma(0)} \xrightarrow{\cong} A_{\gamma(1)}$ für jeden stetigen Weg $\gamma : I \to B$, sodass gilt:

- Sind zwei Wege $\gamma, \eta : I \to B$ homotop modulo Endpunkte, so gilt $T_\gamma = T_\eta$.
- Für komponierbare Wege $\gamma, \eta : I \to B$ gilt $T_{\gamma \centerdot \eta} = T_\eta \circ T_\gamma$.
- Für den konstanten Weg $\gamma \equiv b$ gilt $T_\gamma = \mathrm{id}_{A_b}$.

Bemerkung. Man kann ein lokales Koeffizientensystem auf B auch als Funktor von dem Fundamentalgruppoid von B in die Kategorie der abelschen Gruppen auffassen.

Beispiel 2. Im letzten Abschnitt wurde gezeigt: Bei einer Serre-Faserung $p : E \to B$ bilden die q-ten Kohomologiegruppen $A_b := H^q(p^{-1}(b))$ der Fasern ein lokales Koeffizientensystem. Mit dem universellen Koeffizententheorem sieht man, dass gleiches auch für die Homologiegruppen $A_b := H^q(p^{-1}(b); G)$ mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe G gilt. Wir bezeichnen dieses Koeffizientensystem im Folgenden mit $\mathcal{H}^q(F_p; G)$.

Beispiel 3. Für jede abelsche Gruppe G gibt es das konstante Koeffizientensystem $\underline{G}$ mit $G_b := G$ für alle $b \in B$ und $T_\gamma = \mathrm{id}_G$ für alle $\gamma : I \to B$.

Sei im Folgenden $\Delta_n(B)$ die Menge der n-Simplizes in B, also die Menge der stetigen Abbildungen $\Delta^n \to B$ mit $\Delta^n := \mathrm{spann}\{e_0, \dots, e_n\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, und

$$d_n : \Delta_n(B) \to \Delta_{n-1}(B) \quad \sigma \mapsto \sigma_{\langle e_0, \dots, \hat{e_i}, \dots, e_n \rangle} \qquad (0 \leqslant i \leqslant n),$$

die Abbildung auf die i-Seite. Für einen n-Simplex σ bezeichne $\sigma_i := \sigma_{\langle e_i \rangle} \in \Delta_0(B) = B$ die i-te Ecke und $\sigma_{ij} := \sigma_{\langle e_i, e_j \rangle} \in \Delta_1(B)$ den Weg von von σ_i nach σ_j entlang der ij-Kante von σ $(0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n)$.

Definition 5. Sei B ein topologischer Raum, $\underline{A}$ ein lokales Koeffizientensystem auf B. Der *Kokomplex der singulären Koketten auf B mit Koeffizienten in $\underline{A}$* ist folgendermaßen definiert:

$$C^n(B; \underline{A}) := \prod_{\sigma \in \Delta_n(B)} A_{\sigma_0}, \quad \delta^n \left((a_\tau)_{\tau \in \Delta_n(B)} \right)_{\sigma \in \Delta_{n+1}(B)} := T_{\sigma_{01}}^{-1}(a_{d_0(\sigma)}) + \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i a_{d_i(\sigma)}.$$

Man überprüft leicht, dass $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$ gilt. Die Kohomologie $H^*(B; \underline{A}) := H^*(C^*(B; \underline{A}))$ dieses Kettenkomplexes heißt *singuläre Kohomologie von B mit Koeffizienten in $\underline{A}$*.

Beobachtung 1. Für das konstante Koeffizientensystem $\underline{G}$ gilt $H^*(B; \underline{G}) \cong H^*(B; G)$. Gewöhnliche Kohomologie mit Koeffizienten ist also ein Spezialfall von Kohomologie mit Koeffizienten in einem lokalen System.

Definition 6. Es sei $\underline{R}$ ein lokales Koeffizientensystem, in dem die Gruppen R_b sogar Ringe und die Abbildungen T_γ Ringisomorphismen sind. Dann definiert

$$\begin{aligned}&\cup : H^m(B;\underline{R}) \times H^n(B;\underline{R}) \to H^{m+n}(B;\underline{R}),\\ &([(a_\sigma)_{\sigma\in\Delta_m(B)}] \cup [(b_\sigma)_{\sigma\in\Delta_n(B)}])_{\tau\in\Delta_{m+n}(B)} := a_{\sigma_{\langle e_1,\dots,e_m\rangle}} \cdot T^{-1}_{\sigma_{0m}}(b_{\sigma_{e_m,\dots,e_{m+n}}})\end{aligned}$$

ein Produkt, das sogenannte *Cup-Produkt*.

1.3 Spektralsequenzen

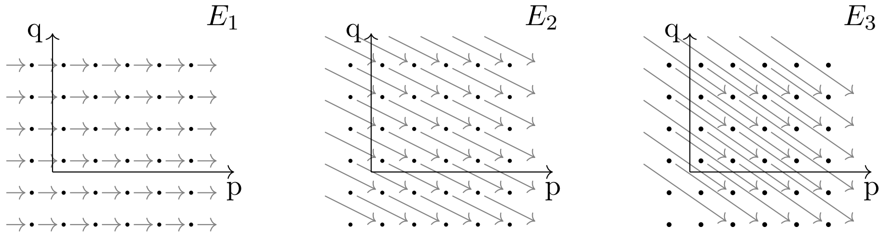
Es sei A im Folgenden ein kommutativer Ring mit Eins.

Definition 7. Eine (kohomologische) *Spektralsequenz* besteht aus

- A-Moduln $E_r^{p,q}$ für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ und $r \geqslant 1$,
- A-Modul-Homomorphismen $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$ mit $d_r^{p+r,q-r+1} \circ d_r^{p,q} = 0$
- und Isomorphismen $\alpha_r^{p,q} : H^{p,q}(E_r) := \ker(d_r^{p,q})/\operatorname{im}(d_r^{p-r,q+r-1}) \xrightarrow{\cong} E_{r+1}^{p,q}$.

Bemerkung.

- Die Homomorphismen $d^r_{p,q}$ heißen *Differentiale*.
- Die Gesamtheit der Module $E^r_{p,q}$ und Differentiale d_r^{pq} mit $r \in \mathbb{N}$ fest heißt r-te *Seite* E^r.
- Man stellt Seiten für gewöhnlich in einem 2-dimensionalen Raster dar:



Definition 8. Eine Spektralsequenz *konvergiert*, falls für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ ein $R \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $r \geqslant R$ die Differentiale von und nach $E_r^{p,q}$ null sind und damit $E^\infty_{p,q} := E_R^{p,q} \cong E_{R+1}^{p,q} \cong \dots$ Der Grenzwert der SS ist die Unendlich-Seite $E_\infty := \{E_\infty^{p,q}\}_{p,q}$.

Bemerkung. Viele Spektralsequenzen sind im ersten Quadranten konzentriert, d. h. $E_r^{p,q}$ ist nur für $p, q \geqslant 0$ ungleich Null. Solche Spektralsequenzen konvergieren immer, denn für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ führen für $r \geqslant \max(p + 1, q + 2)$ alle Differentiale von $E_r^{p,q}$ aus dem ersten Quadranten heraus und alle dort eintreffenden Differentiale kommen von außerhalb des ersten Quadranten und sind daher Null.

Definition 9. Eine *Filtrierung* eines A-Moduls M ist eine absteigende Folge

$$M \supseteq \dots \supseteq F^{p-1}M \supseteq F^pM \supseteq F^{p+1}M \supseteq \dots$$

von Untermoduln von M, $p\in\mathbb{Z}$. Eine Filtrierung heißt

- *ausschöpfend*, falls $M = \cup_p F^p$,
- *Hausdorffsch*, wenn $0 = \cap_p F^pM$ und
- *regulär*, wenn sie ausschöpfend und Hausdorffsch ist.

Definition 10. Eine Spektralsequenz E *konvergiert gegen* einen graduierten A-Modul $M = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} M^n$ (notiert $E_r^{p,q} \Rightarrow M^{p+q}$), falls E überhaupt konvergiert und reguläre Filtrierungen

$$M^n \supseteq \dots \supseteq F^{p-1}M^n \supseteq F^pM^n \supseteq F^{p+1}M^n \supseteq \dots$$

existieren, sodass $E^{pq}_\infty \cong F^pM^{p+q}/F^{p+1}M^{p+q}$ für alle $p, q \in \mathbb{Z}$.

1.4 Die Spektralsequenz eines filtrierten Komplexes

Definition 11. Eine *Filtrierung eines Kokettenkomplexes* $C^\bullet$ ist eine absteigende Folge

$$C^\bullet \supseteq \ldots \supseteq F^{p-1}C^\bullet \supseteq F^pC^\bullet \supseteq F^{p+1}C^\bullet \supseteq \ldots$$

von Unterkomplexen.

Lemma 7. Es sei $C^\bullet$ ein filtrierter Kokettenkomplex. Es gibt eine Spektralsequenz mit

$$E_1^{pq} = H^{p+q}(F^pC^\bullet/F^{p+1}C^\bullet).$$

Angenommen, die Filtrierung ist

a) *gradweise nach unten beschränkt*, d. h. für alle $q \in \mathbb{Z}$ gibt es ein $p \in \mathbb{Z}$ mit $F^pC^q = 0$,

b) *ausschöpfend*, d. h. für alle $q \in \mathbb{Z}$ ist $\cup_p F^pC^q = C^q$ und

c) für alle $q \in \mathbb{Z}$ gibt es ein $P \in \mathbb{Z}$, sodass für alle $p \leqslant P$ gilt: Die Inklusion $F^pC^\bullet \hookrightarrow C^\bullet$ induziert einen Isomorphismus $H^q(F^pC^\bullet) \cong H^q(C^\bullet)$ in Kohomologie.

Dann konvergiert die Spektralsequenz gegen $H^*(C^\bullet)$.

Wir führen zunächst etwas neue Notation ein. Diese hilft, den Beweis verständlicher zu formulieren. Wir fassen im Folgenden den Kettenkomplex als ein einziges Modul $C := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} C^n$ anstatt als Folge von Modulen auf. Dieses Modul ist filtriert durch die Untermodule $F^p := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} F^pC^n$. Wir setzen $F^{-\infty} := C$ und $F^\infty := 0$. Die Korandabbildung fassen wir als Homomorphismen $d : C \to C$ mit $d \circ d = 0$ auf, der die Filtrierung von C respektiert.

Wir sind interessiert an der Kohomologie von $C^\bullet$, also an $H^*(C) := \ker(d)/\operatorname{im}(d)$ und an der Kohomologie von F^p/F^{p+1}, also $H^*(F^p/F^{p+1}) \cong (d|_{F^p})^{-1}(F^{p+1})/d(F^p)$. Wir geben nun eine Verallgemeinerung der Definition der Kohomologie von $C^\bullet$ und der Kohomologie des Quotientenkomplexes F^p/F^q: Statt Zykeln (d. h. Elementen $c \in C$ mit $d(c) = 0$) betrachten wir *z-Zykel*, das sind Elemente $c \in C$ mit $d(c) \in F^z$. Wir teilen diese durch die Menge $d(F^b)$ der *b-Ränder* anstatt durch die Menge $d(C)$ der Ränder. Wir setzen

$$S[z, q, p, b] := \frac{F^p \cap d^{-1}(F^z)}{(F^p \cap d^{-1}(F^z)) \cap (F^q + d(F^b))}.$$

Wir haben als Spezialfälle

$$S[p, q, p, q] \cong F^p/F^q \quad \text{und} \quad S[q, q, p, p] \cong H^*(F^p/F^q).$$

Lemma 8. Es sei $z_1 \geqslant q_1 \geqslant p_1 = z_2 \geqslant b_1 = q_2 \geqslant p_2 \geqslant b_2$. Dann ist folgende Abbildung ein wohldefinierter Homomorphismus:

$$d^* : S[z_2, q_2, p_2, b_2] \to S[z_1, q_1, p_1, b_1], \quad [c] \mapsto [d(c)].$$

Beweis. Falls $[c] = 0$ in $S[z_2, q_2, p_2, b_2]$, so existieren $x \in F^{q_2}$ und $y \in F^{b_2}$ mit $c = x + d(y)$. Somit gilt $d^*[c] = [dc] = [d(x) + d^2(y)] = [d(x)] = 0$ in $S[z_1, q_1, p_1, b_1]$, da $F^{b_1} = F^{q_2}$. $\square$

Lemma 9. Es seien Filtrierungsindizes wie folgt gegeben:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & z_3 & \geqslant & q_3 & \geqslant & p_3 & \geqslant & b_3 \\
 & & & & & & \| & & \| & & & & \\
 & & & z_2 & \geqslant & q_2 & \geqslant & p_2 & \geqslant & b_2 & & & \\
 & & & \| & & \| & & & & & & & \\
z_1 & \geqslant & q_1 & \geqslant & p_1 & \geqslant & b_1 & & & & & &
\end{array}$$

Dann ist

$$\alpha : S[q_1, q_2, p_2, p_3] \to \frac{\ker(d^* : S[z_2, q_2, p_2, b_2] \to S[z_1, q_1, p_1, b_1])}{\operatorname{im}(d^* : S[z_3, q_3, p_3, b_3] \to S[z_2, q_2, p_2, b_2])}, \quad [c] \mapsto [c]$$

ein wohldefinierter Isomorphismus.

Beweis. Sei A der Quotient auf der rechten Seite.
Wohldefiniertheit: Sei $[c] = 0$ in $S[q_1, q_2, p_2, p_3]$, d. h. es gibt $e \in F^{q_2} = F^{b_1}$ und $f \in F^{p_1}$ mit $c = e + d(f)$. Dann ist $d^*[c] = [d(c)] = [d(e)] = 0$ in $S[z_1, q_1, p_1, b_1]$, also $c \in \ker(d^* : S[z_2, q_2, p_2, b_2] \to S[z_1, q_1, p_1, b_1])$. Nun ist $f \in d^{-1}(F^{z_3})$, da $d(f) = c - e \in F^{p_2} = F^{z_3}$. Es gilt $[c] = [e + d(f)] = [d(f)] = d^*[f] = 0$ in A.
Injektivität: Sei $c \in F^{p_2} \cap d^{-1}(F^{q_1})$ mit $[c] = 0$ in A. Das heißt, es gibt $e \in F^{q_2}$, $f \in F^{b_2}$ und $g \in F^{p_3} \cap d^{-1}(F^{z_3})$ mit $c = e + d(f) + d(g)$. Dann ist $[c] = [e + d(f + g)] = 0$ in $S[q_1, q_2, p_2, p_3]$, da $f + g \in F^{p_3}$.
Surjektivität: Sei $\tilde{c} \in F^{p_2} \cap d^{-1}(F^{z_2})$ mit $[\tilde{c}] \in \ker(d^* : S[z_2, q_2, p_2, b_2] \to S[z_1, q_1, p_1, b_1])$. Das heißt, es gibt $e \in F^{q_1}$ und $f \in F^{b_1} = F^{q_2}$ mit $d(\tilde{c}) = e + d(f)$. Dann ist $[\tilde{c}] = [\tilde{c} - f]$ in $S[q_1, q_2, p_2, p_3]$ mit $\tilde{c} - f \in F^{p_2} \cap d^{-1}(F^{q_1})$, da $d(\tilde{c} - f) = e \in F^{q_1}$. □

Beweis des Lemmas über Existenz der Spektralsequenz. Wir beachten jetzt wieder, dass C und damit $S[z, q, p, b]$ graduiert und d ein Differential vom Grad $+1$ ist. Es sei $S[z, q, p, b]^n$ die n-te Komponente. Setze

$$E_r^{pq} := S[p+r, p+1, p, p-r+1]^{p+q}.$$

Die Differentiale sind

$$d_r^{pq} \;:\; \underbrace{S[p+r, p+1, p, p-r+1]^{p+q}}_{=E_r^{p,q}} \to \underbrace{S[p+2r, p+r+1, p+r, p+1]^{p+q+1}}_{=E_r^{p+r,q-r+1}}, \quad [c] \mapsto [d(c)].$$

Sie sind wohldefiniert nach Lemma 8.und wegen Lemma 9 ist

$$\alpha_r^{pq} : H^{p,q}(E_r) = \ker(d_r^{pq}) / \operatorname{im}(d_r^{p-r,q+r-1}) \to E_{r+1}^{pq}, \quad [c] \mapsto [c]$$

ein wohldefinierter Isomorphismus.

Beweis der Konvergenz: Es seien $p, q \in \mathbb{Z}$. Wegen Bedingung a) gibt es ein $R_1 \geqslant 0$, sodass $F^{p+R_1}C^{p+q+1} = 0$. Für $r \geqslant R_1$ ist damit $E_r^{p+r,q-r+1}$ als Subquotient (d. h. Quotient eines Untermoduls) von $F^{p+R_1}C^{p+q+1}$ Null. Folglich verschwindet auch das Differential d_r^{pq}. Wegen Bedingung c) gibt es ein $S \in \mathbb{Z}$, sodass $F^sC^\bullet \hookrightarrow C^\bullet$ und somit auch $F^sC^\bullet \hookrightarrow F^{s-1}C^\bullet$ für $s \leqslant S$ einen Isomorphismus in H^{p+q-1} und H^{p+q} induziert. Anhand der langen exakten Sequenz zu $0 \to F^sC^\bullet \to F^{s-1}C^\bullet \to F^{s-1}C^\bullet/F^sC^\bullet \to 0$ sieht man, dass $H^{p+q-1}(F^{s-1}C^\bullet/F^sC^\bullet) = 0$. Somit ist $E_r^{p-r,q+r-1}$ für $r \geqslant R_2 := p-s+1$ als Submodul von $H^{p+q-1}(F^{p-r}C^\bullet/F^{p-r+1}C^\bullet)$ Null. Folglich verschwindet auch $d_r^{p-r,q+r-1}$. Mit $R := \max(R_1, R_2)$ gilt dann $E_R^{pq} \cong E_{R+1}^{pq} \cong \ldots \cong E_\infty^{pq}$.

Sei $H^n(C^\bullet)$ absteigend filtriert durch $F^pH^n(C^\bullet) := \operatorname{im}(i^* : H^n(F^pC^\bullet) \to H^n(C^\bullet))$. Für $r \geqslant R$ ist

$$E_\infty^{pq} \cong E_r^{pq} = \frac{F^pC^{p+q} \cap d^{-1}(0)}{(F^pC^{p+q} \cap d^{-1}(0)) \cap (F^{p+1}C^{p+q} + d(F^{p-r+1}C^{p+q-1}))} = S[\infty, p+1, p, p-r+1]^{p+q}.$$

Es ist daher $F^pH^{p+q}(C^\bullet)/F^{p+1}H^{p+q}(C^\bullet) \cong S[\infty, p+1, p, -\infty]^{p+q}$ ein Quotient von E_∞^{pq}. Tatsächlich gilt $S[\infty, p+1, p, -\infty]^{p+q} \cong E_\infty^{pq}$, denn: Sei $c \in F^pC^{p+q} \cap d^{-1}(0)$ mit $[c] = 0$ in $S[\infty, p+1, p, -\infty]^{p+q}$. Dann gibt es ein $e \in F^{p+1}C^{p+q}$ und ein $f \in C^{p+q-1}$ mit $c = e + d(f)$. Wegen Bedingung b) gibt es ein $\tilde{p} \in \mathbb{Z}$ mit $f \in F^{\tilde{p}}C^{p+q+1}$. Wähle r so, dass $r \geqslant R$ und $p - r + 1 \leqslant \tilde{p}$. Dann ist $[c] = [e] + [d(f)] = 0$ in $E_r^{pq} \cong E_\infty^{pq}$. □

1.5 Die Serre-Spektralsequenz

Satz 1 (Jean-Pierre Serre)**.** Es sei G eine abelsche Gruppe. Für jede Serre-Faserung $p: E \to B$ existiert eine Spektralsequenz mit

$$E_2^{p,q} = H^p(B; \mathcal{H}^q(F_p; G)),$$

welche gegen $H^*(E)$ konvergiert.

Beweis. TODO: □

1.6 Multiplikative Struktur der Serre-Spektralsequenz

Satz 2. Es sei R ein Ring, $p: E \to B$ eine Serre-Faserung. Dann gibt es bilineare Abbildungen

$$m_r : E_r^{p,q} \times E_r^{s,t} \to E_r^{p+s,q+t}, \quad (x, y) \mapsto m_r(x, y) =: xy$$

mit folgenden Eigenschaften:

(i) d_r ist derivativ: $d_r^{p+s,q+t}(xy) = (d_r^{p,q}x)y + (-1)^{p+q}x(d_r^{s,t}y)$

(ii) Es gilt $m_{r+1}([x], [y]) = [m_r(x, y)]$ für alle $x \in \ker(d_r^{p,q})$, $y \in \ker(d_r^{s,t})$.

(iii) $m_2 : E_2^{p,q} \times E_2^{r,s} \to E_2^{p+s,q+t}$ ist das $(-1)^{qs}$-fache des Cup-Produkts

$$H^p(B; \mathcal{H}^q(F; R)) \times H^s(B; \mathcal{H}^t(F; R)) \to H^{p+s}(B; \mathcal{H}^{q+t}(F; R)),$$

welches für $a = [(a_\sigma)_{\sigma \in \Delta_m(B)}] \in H^p(B; \mathcal{H}^q(F; R))$ und $b = [(b_\sigma)_{\sigma \in \Delta_n(B)}] \in H^s(B; \mathcal{H}^t(F; R))$ definiert ist durch

$$(a \cup b)_{\sigma \in \Delta_{p+s}(B)} := a_{\sigma_{\langle e_1, \ldots, e_m \rangle}} \cup T_{\sigma 0m}^{-1}(b_{\sigma_{\langle e_m, \ldots, e_{m+n} \rangle}}).$$

(iv) Das Cup-Produkt auf $H^*(B; R)$ respektiert die Filtrierungen von $H^n(B; R)$ und schränkt daher ein zu Abbildungen $F_p^m \times F_s^n \to F_{p+s}^{m+n}$. Die induzierte Abbildung auf dem Quotienten $F_p^m / F_{p+1}^m \times F_s^n / F_{s+1}^n \to F_{p+s}^{m+n} / F_{p+s+1}^{m+n}$ entspricht dem Grenzwert $m_\infty : E_\infty^{p,m-p} \times E_\infty^{s,n-s} \to E_\infty^{p+s,m+n-p-s}$ der Multiplikationen m_r.

Beweis. TODO: □

1.7 Die Serre-Spektralsequenz für Homologie

Es gibt eine Version des Satzes für Serre für Homologie anstatt Kohomologie. In Homologie wird eine andere Indizierung für Spektralsequenzen verwendet:

Definition 12. Eine homologische *Spektralsequenz* besteht aus

- A-Moduln $E_{p,q}^r$ für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ und $r \geqslant 1$,
- A-Modul-Homomorphismen $d_{p,q}^r : E_{p,q}^r \to E_{p-r,q+r-1}^r$ mit $d_{p-r,q+r-1}^r \circ d_{p,q}^r = 0$
- und Isomorphismen $\alpha_{p,q}^r : H_{p,q}(E^r) := \ker(d_{p,q}^r) / \operatorname{im}(d_{p+r,q-r+1}^r) \xrightarrow{\cong} E_{p,q}^{r+1}$.

Jede homologische Spektralsequenz E liefert eine kohomologische Spektralsequenz, wenn man $E_r^{p,q} := E_{-p,-q}^r$ setzt.

Definition 13. Eine homologische Spektralsequenz E *konvergiert gegen* einen graduierten A-Modul $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$ (notiert $E_{p,q}^r \Rightarrow M_{p+q}$), falls E überhaupt konvergiert und reguläre Filtrierungen

$$0 \subseteq \ldots \subseteq F^{p-1} M_n \subseteq F^p M_n \subseteq F^{p+1} M_n \subseteq \ldots$$

existieren, sodass $E_{pq}^\infty \cong F^p M_{p+q} / F^{p-1} M_{p+q}$ für alle $p, q \in \mathbb{Z}$.

Satz 3 (Jean-Pierre Serre)**.** Es sei G eine abelsche Gruppe. Für jede Serre-Faserung $p : E \to B$ existiert eine (homologische) Spektralsequenz mit

$$E^2_{p,q} = H_p(B; \mathcal{H}_q(F_p; G)),$$

welche gegen $H_*(E)$ konvergiert.

Dabei bilden die q-ten Homologiegruppen der Fasern ein lokales Koeffizientensystem mit $\mathcal{H}_q(F_p; G)_b = H_q(p^{-1}(b))$. Homologie mit einem Koeffizientensystem $\underline{A}$ ist ähnlich definiert wie Homologie. Falls B einfach zusammenhängend ist oder allgemeiner $\pi_1(B)$ trivial auf den Homologiegruppen der Faser wirkt, so gilt $H_p(B; \mathcal{H}_q(F_p; G)) \cong H_p(B; H_q(F_p; G))$.

2 Endlichkeit der Homotopiegruppen der Sphären

2.1 Die Pfadfaserung

Definition 14. Der *Pfadraum* eines punktierten topologischer Raum (X, x_0) ist

$$PX := \{\gamma \in X^I \mid \gamma(0) = x_0\} \subset X^I$$

mit der Unterraumtopologie des Raumes X^I, welcher die Kompakt-Offen-Topologie besitzt. Der Basispunkt von PX ist der konstante Weg $y_0 : I \to X,\ t \mapsto x_0$.

Bemerkung. Der Raum PX ist zusammenziehbar: Die Abbildung

$$H : I \times PX \to PX, \quad (t, \gamma) \mapsto \gamma(t \cdot -)$$

ist eine Homotopie zwischen der konstanten Abbildung mit Wert γ_0 und id_{PX}.

Lemma 10. Die Abbildung $p : PX \to X,\ \gamma \mapsto \gamma(1)$ ist eine Hurewicz-Faserung.

Beweis. Es sei ein topologischer Raum A und stetige Abbildungen $H_0 : A \to PX$, $H : I \times A \to X$ mit $H \circ i_0 = p \circ H_0$ gegeben. Dann ist eine Homotopieliftung gegeben durch

$$\begin{aligned} &\tilde{H} : I \times A \to PX, \\ &(s, a) \mapsto \gamma_{s,a}, \quad \gamma_{s,a}(t) := \begin{cases} H_0(a)(t \cdot (1+s)) & \text{falls } t \cdot (1+s) \leqslant 1, \\ H(t \cdot (1+s) - 1, a) & \text{falls } t \cdot (1+s) \geqslant 1. \end{cases} \end{aligned} \qquad \square$$

Die Faserung $p : PX \to X$ wird *Pfadfaserung* genannt.

Bemerkung. Die Faser von p über x_0 ist

$$\Omega X := \{\gamma \in X^I \mid \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\}.$$

Der Raum ΩX heißt *Schleifenraum* von X.

Bemerkung. Seien (X, x_0) und (Y, y_0) punktierte Räume. Es gibt eine in X und Y natürliche Bijektion

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}((\Sigma X, x_0), (Y, y_0)) &\cong \mathrm{Hom}((X, x_0), (\Omega Y, \gamma_0)), \\ f &\mapsto (x \mapsto t \mapsto f([(x,t)])), \\ ([(x,t)] \mapsto g(x)(t)) &\leftarrow g. \end{aligned}$$

Lemma 11. Man kann jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ schreiben als Komposition

$$X \xrightarrow{i} E_f \xrightarrow{p} Y$$

einer Homotopieäquivalenz i und einer Hurewicz-Faserung p. Genauer gilt

$$\begin{aligned} E_f &:= \{(x, \gamma) \in X \times X^I \mid f(x) = \gamma(0)\} \subset X \times Y^I, \\ i(x) &:= (x, t \mapsto f(x)), \\ p(x, \gamma) &:= \gamma(1). \end{aligned}$$

Beweis. Offensichtlich sind i und p stetig und es gilt $p \circ i = f$. Das Homotopie-Inverse von i ist $j : E_f \to X,\ (x, \gamma) \mapsto x$. Es gilt $j \circ i = \mathrm{id}_X$ und eine Homotopie zwischen $i \circ j$ und id_{E_f} ist gegeben durch

$$H : I \times E_f \to E_f, \quad (s, (x, \gamma)) \mapsto (x, \gamma(s \cdot -)).$$

Es bleibt zu zeigen, dass p eine Faserung ist. Es sei dazu ein topologischer Raum A und Abbildungen $H_0 : A \to E_f$ und $H : I \times A \to Y$ mit $H \circ i_0 = p \circ H_0$ gegeben. Dann ist folgende Abbildung eine Homotopieliftung:

$$\begin{aligned} &\tilde{H} : I \times A \to E_f, \\ &(s, a) \mapsto \gamma_{s,a}, \quad \gamma_{s,a}(t) := \begin{cases} H_0(a)(t \cdot (1 + s)) & \text{falls } t \cdot (1 + s) \leqslant 1, \\ H(t \cdot (1 + s) - 1, a) & \text{falls } t \cdot (1 + s) \geqslant 1. \end{cases} \end{aligned}$$ □

2.2 Eilenberg-MacLane-Räume

Definition 15. Sei G eine Gruppe, $n \geqslant 1$. Ein *Eilenberg-MacLane-Raum* vom Typ $K(G, n)$ ist ein punktierter, zusammenhängender topologischer Raum (X, x_0) mit

$$\pi_q(X, x_0) = \begin{cases} G & \text{falls } q = n, \\ 0 & \text{falls } q \neq n. \end{cases}$$

Lemma 12. Sei G eine abelsche Gruppe, $n \geqslant 2$. Dann existiert ein CW-Komplex (X, x_0) vom Typ $K(G, n)$.

Beweis. TODO: □

Bemerkung. Sei (X, x_0) ein $K(G, n)$. Dann ist ΩX ein $K(G, n - 1)$, denn

$$\begin{aligned} \pi_q(\Omega X, \gamma_0) &\cong \mathrm{Hom}((S^q, *), (\Omega X, \gamma_0)) \cong \mathrm{Hom}((\Sigma S^q, *), (X, x_0)) \cong \pi_{q+1}(X, x_0) \\ &\cong \begin{cases} G & \text{falls } q + 1 = n \iff q = n - 1 \\ 0 & \text{falls } q + 1 \neq n. \end{cases} \end{aligned}$$

2.3 Das Hurewicz-Mod-$\mathcal{C}$-Theorem

Sei (X, x_0) ein punktierter topologischer Raum. Für $n \geqslant 1$ liefert der Hurewicz-Homomorphismus $h_n : \pi_n(X, x_0) \to H_n(X; \mathbb{Z})$ einen Zusammenhang zwischen der n-ten Homotopiegruppe und der n-ten Homologiegruppe von X. Er ist definiert durch $h_n([f]) := H_n(f)(\alpha)$ für einen fest gewählten Erzeuger $\alpha \in H_n(S^n; \mathbb{Z})$.

Satz 4 (Hurewicz)**.** Sei (X, x_0) ein $(n-1)$-zusammenhängender topologischer Raum, d. h. $\pi_i(X, x_0) = 0$ für $i < n$. Dann ist $h_i : \pi_i(X, x_0) \to H_i(X; \mathbb{Z})$ ein Isomorphismus für $0 < i \leqslant n$. Insbesondere gilt $H_i(X; \mathbb{Z}) = 0$ für $0 < i < n$.

Ein Beweis dieses Satzes wird in [Hat02, S. 366ff] geführt.

Definition 16. Eine Klasse $\mathcal{C}$ von abelschen Gruppen heißt *Serre-Klasse*, falls

1. Für jede kurze exakte Sequenz $0 \to A \to B \to C \to 0$ von abelschen Gruppen gilt: $B \in \mathcal{C} \iff A, B \in \mathcal{C}$.

2. Für $A, B \in \mathcal{C}$, sind auch $A \otimes B \in \mathcal{C}$ und $\mathrm{Tor}(A, B) \in \mathcal{C}$.

Bemerkung. Aus der ersten Eigenschaft folgt, dass Bilder, Untergruppen und Quotienten einer Gruppe aus $\mathcal{C}$ wieder in $\mathcal{C}$ sind. Genauer gilt für eine ab. Gruppe B und eine Untergruppe $A < B$: $B \in \mathcal{C} \iff A, B/A \in \mathcal{C}$. Durch Induktion kann man zeigen, dass für eine Gruppe A mit endlicher Filtrierung $A = F^0A \supseteq F^1A \supseteq \ldots \supseteq F^kA = 0$ gilt: $A \in \mathcal{C} \iff F^0A/F^1A, \ldots, F^{k-1}A/F^kA \in \mathcal{C}$. Außerdem ist die direkte Summe zweier Gruppen aus $\mathcal{C}$ wieder in $\mathcal{C}$.

Definition 17. Es sei $\mathcal{C}$ eine Serre-Klasse. Ein Morphismus $f : A \to B$ zwischen abelschen Gruppen heißt *Isomorphimus modulo* $\mathcal{C}$, falls $\ker(f), \mathrm{coker}(f) \in \mathcal{C}$.

Bemerkung. Dies ist äquivalent zur Existenz einer exakten Sequenz $K \to A \xrightarrow{f} B \to C$ mit $K, C \in \mathcal{C}$. Eine Gruppe, welche modulo-$\mathcal{C}$-isomorph zu einer Gruppe aus $\mathcal{C}$ ist, ist selbst in $\mathcal{C}$.

Beispiele 1. Man kann leicht zeigen, dass folgende Klassen die Definition erfüllen:

- $\mathcal{FG} := \{\,\text{endlich erzeugte Gruppen}\,\}$
- $\mathcal{F} := \{\,\text{endliche Gruppen}\,\}$

Satz 5 („Hurewicz-mod-$\mathcal{C}$-Theorem“)**.** Es sei $\mathcal{C} \in \{\mathcal{FG}, \mathcal{F}\}$ und (X, x_0) ein einfach zusammenhängender topologischer Raum. Angenommen, $\pi_i(X, x_0) \in \mathcal{C}$ für $0 < i < n$. Dann ist $h_i : \pi_i(X, x_0) \to H_i(X; \mathbb{Z})$ ein Isomorphismus modulo $\mathcal{C}$ für $i \leqslant n$. Insbesondere gilt $H_i(X; \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}$ für $0 < i < n$.

Korollar 1. Es sei $\mathcal{C} \in \{\mathcal{FG}, \mathcal{F}\}$ und (X, x_0) ein einfach zusammenhängender topologischer Raum. Dann gilt für alle $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$:

$$\forall\, 0 \leqslant n < N \,:\, \pi_n(X, x_0) \in \mathcal{C} \quad\iff\quad \forall\, 1 \leqslant n < N \,:\, H_n(X; \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}.$$

Beweis. Die Aussage folgt aus Satz 5 durch Induktion über N. □

Aus dem Korollar folgt, dass die Homotopiegruppen der Sphären alle endlich erzeugt sind, da die Homologiegruppen der Sphären endlich erzeugt sind.

Definition 18. Es sei $\mathcal{C}$ eine Serre-Klasse. Wir nennen einen topologischen Raum X *$\mathcal{C}$-azyklisch*, falls $\widetilde{H}_i(X) \in \mathcal{C}$ für alle $i \geqslant 0$.

Lemma 13. Es sei $F \to X \to B$ eine Faserung und die Räume F, X und B wegzusammenhängend. Wirke $\pi_1(B)$ trivial auf $H_*(F)$. Dann gilt folgende 2-aus-3-Eigenschaft: Falls zwei der Räume F, X und B $\mathcal{C}$-azyklisch sind, so auch der dritte.

Beweis. Wir betrachten die Serre-Spektralsequenz zu der Faserung mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$. Die Aussage, dass die Homologiegruppe $H_n(X)$ in $\mathcal{C}$ liegt, ist äquivalent dazu, dass die Gruppen $E^\infty_{i,n-i}$ für $i = 0, \ldots, n$ in $\mathcal{C}$ liegen, denn diese Gruppen sind die Quotienten einer endlichen Filtrierung von $H_n(X)$.

Fall 1: F und B sind $\mathcal{C}$-azyklisch: Die universelle Koeffizientenformel liefert

$$E^2_{pq} \cong H_p(B; H_q(F; \mathbb{Z})) \cong (H_p(B) \otimes H_q(F)) \oplus \mathrm{Tor}(H_{p-1}(B), H_q).$$

Man sieht durch Unterscheidung der Fälle $p = 0$, $p = 1$ und $p > 1$ sowie $q = 0$ und $q > 0$, dass $E^2_{pq} \in \mathcal{C}$ für $(p, q) \neq (0, 0)$. Als Subquotient von E^2_{pq}, einer Gruppe aus $\mathcal{C}$, ist dann auch $E^\infty_{pq} \in \mathcal{C}$ für $(p, q) \neq (0, 0)$. Dies zeigt die Behauptung nach der Bemerkung am Anfang des Beweises.

Fall 2: F und X sind $\mathcal{C}$-azyklisch: Wir zeigen nun durch Induktion über k, dass $H_p(B) \in \mathcal{C}$ für $0 < p < k$. Gelte dies für $k \geqslant 1$. Wir wollen zeigen, dass dann auch $H_k(B)$ in $\mathcal{C}$ liegt. Für alle $r \geqslant 2$ gibt es eine kurze exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \ker(d^r_{k,0}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & E^r_{k,0} \arrow[r, "d^r_{k,0}"] & \operatorname{im}(d^r_{k,0}) \arrow[r] \arrow[d, hook, "\subseteq"] & 0 \\ & E^{r+1}_{k,0} & & E^r_{k-r,r-1} & \end{tikzcd}$$

Man sieht unter Verwendung der Induktionsannahme und der universellen Koeffizientenformel, dass $E^2_{k-r,r-1}$ und somit auch $E^r_{k-r,r-1}$ in $\mathcal{C}$ liegen. Folglich gilt auch $\operatorname{im}(d^r_{k,0}) \in \mathcal{C}$, also $E^r_{k,0} \in \mathcal{C} \iff E^{r+1}_{k,0} \in \mathcal{C}$. Da aber $E^R_{k,0} \cong E^\infty_{k,0} \in \mathcal{C}$ für R groß genug, gilt $E^r_{k,0} \in \mathcal{C}$ für alle $r \geqslant 2$. Insbesondere $H_k(B; \mathbb{Z}) \cong H_k(B; H_0(F; \mathbb{Z})) \cong E^2_{k,0} \in \mathcal{C}$.

Fall 3: B und X sind $\mathcal{C}$-azyklisch: Analog zum vorherigen Fall zeigt man induktiv, dass $H_q(F) \in \mathcal{C}$ für $0 < q < k$. Dazu verwendet man die kurze exakte Sequenz $0 \to \operatorname{im}(d^r_{r,k-r+1}) \hookrightarrow E^r_{0,k} \to E^{r+1}_{0,k}$. □

Lemma 14. Es sei $G \in \mathcal{C} \in \{\mathcal{FG}, \mathcal{F}\}$. Dann ist $K(G, n)$ $\mathcal{C}$-azyklisch für alle $n \geqslant 1$.

Beweis. Sei zunächst $n = 1$.

- Falls $G = \mathbb{Z}$, so stimmt die Aussage, denn der Kreis S^1 ist ein $K(\mathbb{Z}, 1)$ und $H_*(S^1; \mathbb{Z}) \in \mathcal{FG}$.
- Falls $G = \mathbb{Z}_m$, TODO: begründen damit, dass der „unendliche Linsenraum“ ein $K(\mathbb{Z}_m, 1)$ ist
- Falls $G = G_1 \oplus G_2$, dann ist $K(G_1, 1) \times K(G_2, 1)$ ein $K(G, 1)$. Wenn die Aussage für G_1 und G_2 stimmt, so folgt aus dem letzten Lemma, angewendet auf die Produktfaserung $K(G_1, 1) \to K(G_1, 1) \times K(G_2, 1) \to K(G_2, 1)$, dass sie auch für G gilt.

Da man jede endlich erzeugte abelsche Gruppe als direkte Summe von endlich vielen Summanden der Form $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}_m$ schreiben kann, gilt die Aussage für $n = 1$.

Induktiv zeigen wir nun, dass die Aussage für n beliebig gilt. Dazu verwenden wir die Pfadraumfaserung $K(G, n) \to P \to K(G, n+1)$. Es gilt $H_k(P) = 0 \in \mathcal{C}$ und $H_k(K(G, n)) \in \mathcal{C}$ für $k \geqslant 1$ nach Induktionshypothese, also $H_k(K(G, n+1)) \in \mathcal{C}$ für alle $k \geqslant 1$ nach dem vorherigen Lemma. □

Definition 19. Ein *Postnikov-Turm* eines wegzusammenhängenden Raumes X ist ein kommutatives Diagramm wie rechts, für das gilt:
- $\pi_i(X \to X_n)$ ist ein Isomorphismus für $i \leqslant n$ und
- $\pi_i(X_n) = 0$ für $i > n$.

$$\begin{tikzcd} & & & X \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[d] \\ \ldots \arrow[r] & X_3 \arrow[r] & X_2 \arrow[r] & X_1 \end{tikzcd}$$

TODO: Bemerkung zur Konstruktion von Postnikov-Türmen

Bemerkung. Es sei ein Postnikov-Turm $\ldots \to X_2 \to X_1$ gegeben. Dann kann man durch wiederholtes Anwenden der in Lemma 11 beschriebenen Konstruktion einen neuen Postnikovturm $\ldots \to X'_2 \to X'_1$ und Homotopieäquivalenzen $X_i \simeq X'_i$ konstruieren, sodass die Abbildungen $X'_{i+1} \to X'_i$ Hurewicz-Faserungen sind. Man sieht anhand der langen exakten Sequenz von Homotopiegruppen, dass die Faser von $X'_{i+1} \to X'_i$ ein $K(\pi_{n+1}(X), n+1)$ ist.

Lemma 15. Es sei $\mathcal{C} \in \{\mathcal{FG}, \mathcal{F}\}$ und X einfach zusammenhängend mit $\pi_i(X, x_0) \in \mathcal{C}$ für alle $i \geqslant 0$. Dann ist X $\mathcal{C}$-azyklisch, d. h. es gilt $H_i(X) \in \mathcal{C}$ für $i \geqslant 1$.

Beweis. Es sei $\ldots \to X_{i+1} \to X_i \to \ldots \to X_1$ ein Postnikov-Turm von X, dessen Abbildungen $X_{i+1} \to X_i$ Hurewicz-Faserungen sind. Wir zeigen, dass $H_i(X_k;\mathbb{Z}) \in \mathcal{C}$ für alle $i, k > 0$. Die Aussage stimmt für $k = 1$, da alle Homotopiegruppen und somit auch Homologiegruppen von X_1 gleich Null sind. Gelte die Aussage nun für ein $k \geqslant 1$. Wir verwenden die Faserung $K(\pi_{k+1}(X), k{+}1) \to X_{k+1} \to X_k$. Nach Lemma 14 sind die Homologiegruppen der Faser in $\mathcal{C}$. Gleiches gilt für den Basisraum nach Induktionsvoraussetzung, und somit auch für X_k nach Lemma 13.

Es gilt $H_i(X;\mathbb{Z}) \cong H_i(X_k;\mathbb{Z}) \in \mathcal{C}$ für $k \geqslant i$, da $\pi_i(X \to X_k)$ und nach einem Korollar der relativen Version des Hurewicz-Theorems damit auch $H_i(X \to X_k)$ ein Isomorphismus für $i \leqslant k$ ist. □

Beweis von Satz 5. Aufgrund der Natürlichkeit des Hurewicz-Homomorphismus kommutiert folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "h_n"] & \pi_n(X_n) \arrow[d, "h_n"] \\
H_n(X) \arrow[r, "\cong"] & H_n(X_n)
\end{tikzcd}$$

Es genügt daher zu zeigen, dass $h_n : \pi_n(X_n) \to H_n(X_n;\mathbb{Z})$ ein Isomorphismus modulo $\mathcal{C}$ ist. Wir betrachten die Serre-Spektralsequenz zur Faserung $F_n \to X_n \to X_{n-1}$.

$$E^2_{pq} \cong H_p(X_{n-1}; \underbrace{H_q(K(\pi_n(X), n);\mathbb{Z})}_{=0 \text{ für } 0<q<n}),$$

Es verschwinden also alle Einträge zwischen der 0-ten und der n-ten Zeile. Für diese gilt Wir betrachten die exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd}
H_{n+1}(X_{n-1}) \arrow[d, equal] & H_n(F_n) \arrow[d, equal] & 0 \arrow[dr] & & 0 & & H_n(X_{n-1}) \arrow[d, equal] & \\
E^2_{n+1,0} \arrow[d, equal] & E^2_{0,n} \arrow[d, equal] & & E^\infty_{0,n} \arrow[ur] \arrow[drr] & & & E^2_{n,0} \arrow[d, equal] & \\
E^n_{n+1,0} \arrow[r, "d^r_{n+1,0}"] & E^n_{0,n} \arrow[urr] \arrow[rrrr] & & & & H_n(X_n) \arrow[r] & E^\infty_{n,0} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

welche sich aus zwei kurzen Sequenzen zusammensetzt:

- Die linke Sequenz ist exakt, da $E^\infty_{0,n} \cong E^{n+1}_{0,n} \cong \ker(d^r_{0,n})/\operatorname{im}(d^r_{n+1,0}) = E^n_{0,n}/\operatorname{im}(d^r_{n+1,0})$.
- Die rechte Sequenz ist exakt, da $E^\infty_{0,n} = F^0 H_n(X_n)$ und $E^\infty_{n,0} = F^n H_n(X_n)/F^{n-1}H_n(X_n)$ für eine Filtrierung $0 = F^{-1}H_n(X_n) \subseteq F^0 H_n(X_n) \subseteq \ldots \subseteq F^n H_n(X_n) = H_n(X_n)$. Da $F^p H_n(X_n)/F^{p-1}H_n(X_n) = E^\infty_{p,n-p} = 0$ für $p = 1, \ldots, n-1$, gilt $F^0 H_n(X_n) = \ldots = F^{n-1}H_n(X_n)$.

Aus Lemma folgt, dass $E^n_{n+1,0}, E^\infty_{n,0} \in \mathcal{C}$. Somit ist der mittlere Morphismus $H_n(F_n) = E^n_{0,n} \to H_n(X_n)$ ein Isomorphismus modulo $\mathcal{C}$. TODO: Begründen, warum dieser Morphismus genau der von der Inklusion $F_n \hookrightarrow X_n$ induzierte Morphismus ist. Betrachte nun das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(F_n) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "h_n", "\cong"'] & \pi_n(X_n) \arrow[d, "h_n"] \\
H_n(F_n) \arrow[r] & H_n(X_n)
\end{tikzcd}$$

Dabei sind die vertikalen Morphismen die Hurewicz-Homomorphismen und die horizontalen Morphismen werden durch die Inklusion induziert. Der linke Hurewicz-Homomorphismus ist nach dem Hurewicz-Theorem ein Isomorphismus, da F_n $(n{-}1)$-zusammenhängend ist. Der obere Morphismus ist ein Isomorphismus, wie man anhand der langen exakten Sequenz der Faserung

$F_n \to X_n \to X_{n-1}$ sehen kann. Der untere Morphismus ist ein Isomorphismus modulo $\mathcal{C}$, wie wir gerade eben gesehen haben. Somit ist auch der rechte Morphismus im Diagramm ein Isomorphismus modulo $\mathcal{C}$. $\square$

Bemerkung. Man kann in diesem Kapitel die Voraussetzung, dass X einfach zusammenhängend ist, ersetzen durch die Forderung, dass X wegzusammenhängend und abelsch ist, d. h. die Wirkung der Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ auf den höheren Homotopiegruppen $\pi_n(X)$ trivial ist.

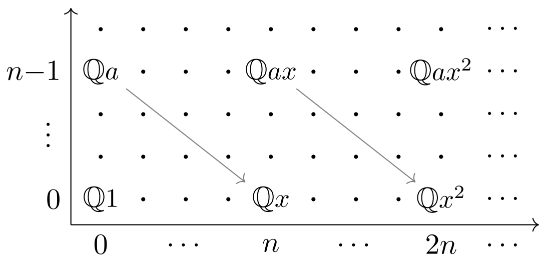
2.4 Rationale Kohomologie von Räumen vom Typ $K(\mathbb{Z}, n)$

Satz 6. Für $n \geqslant 1$ gilt

$$H^*(K(\mathbb{Z},n);\mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q}[x], & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \Lambda_{\mathbb{Q}}[x], & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

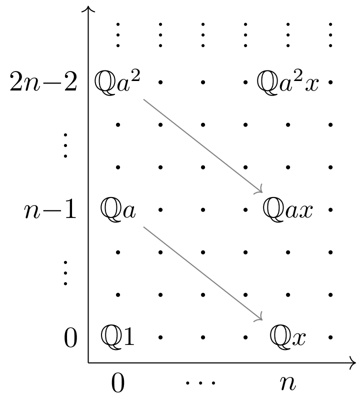
als graduierte Ringe mit Erzeuger $x \in H^n(K(\mathbb{Z},n);\mathbb{Q})$. Dabei bezeichnet $\Lambda_{\mathbb{Q}}[x]$ die äußere Algebra mit Erzeuger x.

Beweis. Durch Induktion über n. Der Satz gilt für $n = 1$, denn der Kreis S^1 ist ein $K(\mathbb{Z}, 1)$ und es gilt bekanntermaßen $H^*(S^1; R) \cong \Lambda_R[x]$ für $R = \mathbb{Z}$ und somit auch für $R = \mathbb{Q}$.
Im Induktionsschritt nutzen wir die Pfadraumfaserung $F := K(\mathbb{Z}, n-1) \to P \to B := K(\mathbb{Z}, n)$. Da $K(\mathbb{Z}, n)$ für $n \geqslant 2$ einfach zusammenhängend ist, gilt für deren zugehörige Serre-Spektralsequenz $E_2^{p,q} \cong H^p(B; H^q(F))$.



Falls n gerade: Dann sieht die Spektralsequenz auf der Seite E_r, $r \leqslant n$ aus wie rechts skizziert (dabei stehen die Gitterpunkte für die Nullgruppe). Das sieht man folgendermaßen: Zunächst ist $E_2^{pq} = 0$ und somit $E_r^{pq} = 0$ außer für $q \in \{0, n-1\}$, denn nach Induktionsvoraussetzung gilt $H^*(F;\mathbb{Q}) \cong \Lambda_{\mathbb{Q}}[x]$. Es folgt, dass nur auf der n-ten Seite E_n nicht verschwindende Differentiale existieren können und $E_2 \cong E_n$ und $E_{n+1} \cong E_\infty$ gilt. Außerdem ist $E_n^{0,0} \cong E_2^{0,0} \cong \mathbb{Q}$ und $E_n^{0,n-1} \cong E_2^{0,n-1} \cong \mathbb{Q}$, da B zusammenhängend ist. Die Spektralsequenz konvergiert gegen $H^*(P;\mathbb{Q})$. Da P zusammenziehbar ist, gilt $H^0(P;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ und $H^n(P;\mathbb{Q}) = 0$ für $n > 0$. Folglich ist $E_{n+1}^{pq} \cong E_\infty^{pq} = 0$ außer für $p = q = 0$. Insbesondere gilt $E_{n+1}^{0,n-1} \cong E_\infty^{0,n-1} = 0$. Das eingezeichnete Differential $d_n^{0,n-1} : E_n^{0,n-1} \to E_n^{n,0}$ ist nun injektiv, denn $\ker(d_n^{0,n-1}) \cong E_{n+1}^{0,n-1} = 0$. Dieses Differential ist auch surjektiv, denn $\operatorname{coker}(d_n^{0,n-1}) \cong E_{n+1}^{n,0} \cong E_\infty^{n,0} = 0$, also ein Isomorphismus. Somit $H^n(B;\mathbb{Q}) \cong E_2^{n,0} \cong E_n^{n,0} \cong E_n^{0,n-1} \cong \mathbb{Q}$. Der zweite Isomorphismus kommt daher, da für $r \leqslant n-1$ alle Differentiale von und nach $E_r^{n,0}$ Null sind. Damit ist $E_2^{n,n-1} \cong H^n(B; H^{n-1}(F;\mathbb{Q})) \cong H^n(B;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$. Induktiv sieht man nun, dass die Abbildungen $d_n^{kn,n-1}$ Isomorphismen sind und dass $H^{kn}(B;\mathbb{Q}) \cong E_2^{kn,0} \cong E_2^{kn,n-1} \cong \mathbb{Q}$ für alle $k \geqslant 0$. Damit haben wir gezeigt, dass die graduierte, additive Struktur von $H^*(B;\mathbb{Q})$ wie behauptet ist.

Es sei nun $a \in E_n^{0,n-1} \cong H^0(B; H^{n-1}(F;\mathbb{Q}))$ ungleich Null und $x := d_n^{0,n-1}(a) \in E_n^{n,0} \cong H^n(B; H^0(F;\mathbb{Q})) \cong H^n(B;\mathbb{Q})$. Dann gilt auch $x \neq 0$ und $ax := m_r(a, x) \neq 0$, da wegen (ii) und (iii) das Produkt m_r gerade dem kanonischen Produkt $H^n(B; H^0(F;\mathbb{Q})) \times H^0(B; H^{n-1}(F;\mathbb{Q})) \to H^n(B; H^{n-1}(F;\mathbb{Q}))$ entspricht. Es gilt $0 \neq d_n^{n,n-1}(ax) = d_n^{0,n-1}(a)x - ad_n^{n,0}(x) = xx$. Da das Produkt $xx \in E_n^{2n,0}$ gerade dem Cup-Produkt $x \cup x \in H^{2n}(B;\mathbb{Q})$ entspricht, ist $x \cup x \neq 0$, also ein Erzeuger von $H^{2n}(B;\mathbb{Q})$. Induktiv ist nun $0 \neq d_n^{kn,n-1}(ax^k) = x^{k+1} \in E_n^{kn,0}$ da ja $0 \neq ax^k$. Somit ist für alle k das k-fache Cup-Produkt $x^k \in H^{kn}(B;\mathbb{Q})$ ein Erzeuger.



Falls n ungerade: Dann ist $E_r^{p,q} = 0$ für alle q, die kein Vielfaches von $n-1$ sind. Somit verschwinden alle Differentiale auf E_r für $r < n$ und $E_2 \cong E_n$. Für $0 < m < n$ verschwinden alle Differentiale von und nach $E_r^{m,0}$ und daher ist $H^m(B;\mathbb{Q}) \cong E_2^{m,0} \cong E_\infty^{m,0} = 0$ und folglich $E_2^{m,k} = 0$ für alle $k \geqslant 0$. Selbiges gilt folglich auch für $n < m < 2n$ und allgemeiner für solche m, die kein Vielfaches von n sind. Analog wie im vorherigen Fall sieht man, dass das eingezeichnete Differential $d_n^{0,n-1}$ ein Isomorphismus ist. Somit $H^n(B;\mathbb{Q}) \cong H^n(B;H^0(F;\mathbb{Q})) \cong \mathbb{Q}$ und $E_2^{n,k(n-1)} \cong \mathbb{Q}$ für alle $k \geqslant 0$. Sei $a \in H^0(B;H^{n-1}(F;\mathbb{Q}))$ ungleich Null und $x := d_n^{0,n-1}$. Dann ist auch $a^2 \neq 0 \in E_n^{0,2n-2}$ und $d_n^{0,2n-2}(a^2) = d_n^{0,n-1}(a)a + d_n^{0,n-1}(a)a = xa+ax = (-1)^{0\cdot n+(n-1)\cdot 0}ax+ax = 2ax \neq 0$. Also ist $d_n^{0,2n-2}$ ein Isomorphismus. Analog sieht man, dass $d_n^{0,k(n-1)}$ für alle $k \geqslant 1$ ein Isomorphismus ist. Es bleibt zu zeigen, dass $H^{kn}(B;\mathbb{Q}) = 0$ für $k > 1$. Das einzige potentiell nichttriviale Differential, das bei $E_r^{2n,0}$ ankommt, ist $d_n^{n,n-1}$. Dieses ist aber Null, da $\ker(d_n^{n,n-1}) = \operatorname{im}(d_n^{0,2n-2}) = E_n^{n,n-1}$. Also $H^{2n}(B;\mathbb{Q}) \cong E_2^{2n,0} \cong E_\infty^{2n,0} = 0$ und $E_2^{2n,k} = 0$ für alle $k \geqslant 0$. Für $k > 2$ sieht man durch Induktion, dass alle Differentiale von und nach $E_r^{2n,0}$ verschwinden und daher $H^{kn}(B;\mathbb{Q}) = 0$. □

2.5 Satz von Serre

Lemma 16. Es sei $n \geqslant 3$ ungerade und X ein $(n-1)$-zusammenhängender topologischer Raum. Angenommen, $H^k(X;\mathbb{Z}) = 0$ für $k > n$ und $H_n(X) \cong \pi_n(X)$ ist die direkte Summe von $\mathbb{Z}$ und einer endlichen Gruppe. Dann sind die Homotopiegruppen $\pi_k(X,x_0)$, $k > n$ endlich.

Beweis. Durch Töten der höheren Homotopiegruppen bekommen wir eine Abbildung $f : X \to K(\pi_n(X),n) \approx K(\mathbb{Z},n)\times K(G,n)$, wobei G eine endliche Gruppe ist. Wir führen die in Lemma 11 beschriebene Konstruktion durch und erhalten einen zu X homotopieäquivalenten Raum X' und eine Hurewicz-Faserung $p : X' \to K(\pi_n(X),n)$ mit Faser F. Anhand der langen exakten Sequenz dieser Faserung sehen wir, dass

$$\pi_i(F) \cong \begin{cases} 0, & \text{für } i \leqslant n, \\ \pi_i(X') \cong \pi_i(X), & \text{für } i > n. \end{cases}$$

Wir wenden diesselbe Konstruktion auf die Inklusion $F \hookrightarrow X'$ an und bekommen einen zu F homotopieäquivalenten Raum F' und eine Faserung $q : F' \to X'$. Aus der langen exakten Homotopiesequenz ergibt sich, dass die Faser $\tilde{F}$ dieser Faserung ein $K(\pi_n(X), n-1)$ ist.

Wir wollen die Serre-Spektralsequenz der Faserung $\tilde{F} \to F' \to X'$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ verwenden. Dazu untersuchen wir zunächst die rationale Kohomologie von Faser und Basisraum. Lemma 14 impliziert, dass die Homotopiegruppen und wegen Korollar 1 auch die reduzierten Homologiegruppen von $K(G,n-1)$ endlich sind. Nach der universellen Koeffizientenformel verschwinden somit alle reduzierten Kohomologiegruppen von $K(G,n-1)$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$. Wir sehen nun an der Serre-Spektralsequenz der Produktfaserung $K(G,n-1) \to K(\pi_n(X),n-1) \to K(\mathbb{Z},n-1)$ und Lemma 6, dass $H^*(K(\pi_n(X),n-1);\mathbb{Q}) \cong H^*(K(\mathbb{Z},n-1);\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[x]$ mit Erzeuger $x \in H^{n-1}(K(\pi_n(X),n-1);\mathbb{Q})$. Für den Basisraum folgt aus der universellen Koeffizientenformel, dass die rationale Kohomologie von X' gleich $\mathbb{Q}$ ist in Grad 0 und in Grad n, und Null sonst.

Wir wissen nun, dass $E_2^{pq} = 0$ außer falls $p \in \{0,n\}$ und $n-1 \mid q$ gilt. Die Spektralsequenz besitzt also auf der E_2-Seite und damit auch auf der E_n-Seite die gleichen Einträge wie die Spektralsequenz aus dem zweiten Fall (n ungerade) des vorhergehenden Lemmas. Genau wie dort schließen wir, dass $d_n^{0,n-1}$ ein Isomorphismus ist (denn $H^n(X';\mathbb{Q}) = 0$) und dass aufgrund der multiplikativen Struktur der Spektralsequenz auch die Differentiale $d_n^{0,k(n-1)}$ für $k \geqslant 1$

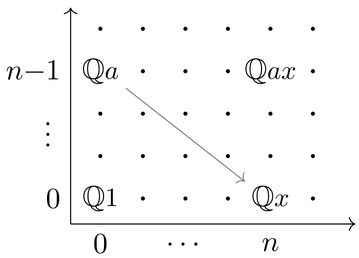
Isomorphismen sind. Somit ist $E_{n+1}^{pq} = 0$ außer für $p = q = 0$. Es folgt, dass $H^n(F';\mathbb{Q}) = 0$ für $n > 0$. Somit gilt auch $H_n(F';\mathbb{Z}) \times \mathbb{Q} \cong H_n(F';\mathbb{Q}) \cong H^n(F';\mathbb{Q}) = 0$, es ist also $H_n(F';\mathbb{Z})$ eine Torsionsgruppe. Da $X' \simeq X$ und $K(\pi_n(X), n)$ $\mathcal{FG}$-azyklisch sind, ist auch $F' \simeq F$ $\mathcal{FG}$-azyklisch, d. h. die Homologiegruppen $H_n(F';\mathbb{Z})$, $n > 0$ sind endlich erzeugt. Somit sind diese Homologiegruppen schon endlich. Nach Korollar 1 sind damit alle Homotopiegruppen von F' endlich. Diese entsprechen im Grad $k > n$ aber gerade den Homotopiegruppen von X. $\square$

Satz 7. Die Homotopiegruppen $\pi_i(S^n, *)$, $i > n$, sind endlich bis auf die Gruppen $\pi_{4k-1}(S^{2k})$, $k \geqslant 1$, welche jeweils isomorph zu einer direkten Summe von $\mathbb{Z}$ mit einer endlichen Gruppe sind.

Zusammengefasst wissen wir also

$$\pi_i(S^n, *) \cong \begin{cases} 0, & \text{für } i < n, \\ \mathbb{Z}, & \text{für } i = n, \\ \mathbb{Z} \oplus \text{endliche Gruppe}, & \text{für } i = 2n-1 \text{ und } n \text{ gerade}, \\ \text{endliche Gruppe}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Im Fall $n = 1$ stimmt die Aussage, denn die universelle Überlagerung von S^1 ist $\mathbb{R}$. Wir können daher $n \geqslant 2$ annehmen. Im Fall, dass $n \geqslant 3$ ungerade ist, folgt die Aussage aus dem vorhergehenden Lemma. Es bleibt der Fall, dass $n \geqslant 2$ gerade ist.



Wir wenden diesselbe Konstruktion wie im Beweis des vorhergehenden Lemmas für den Raum $X = S^n$ an. Da n gerade ist, haben wir aber $H^*(K(\pi_n(X), n-1)) \cong H^*(K(\pi_n(X), n-1)) \cong \Lambda[x]$. Die E_n-Seite der Serre-Spektralsequenz der Faserung $K(\pi_n(X), n-1) \to F' \to X'$ ist daher wie rechts abgebildet. Der Eintrag $\mathbb{Q}$ auf Position $E_2^{n,n-1}$ überlebt die Spektralsequenz. Somit ist $H^*(F';\mathbb{Q}) \cong \Lambda[b]$ mit $b \in H^{2n-1}(F';\mathbb{Q})$. Es folgt $H_i(F';\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} \cong H_i(F';\mathbb{Q}) = 0$ für $i < 2n-1$. Da die Homologiegruppen von F' endlich erzeugt sind, ist $H_i(F';\mathbb{Z}) \in \mathcal{F}$ für $i < 2n-1$ und $H_{2n-1}(F';\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus G$, wobei G eine endliche Gruppe ist. Das Hurewicz-modulo-$\mathcal{C}$-Theorem impliziert, dass damit auch die Homotopiegruppen $\pi_i(F')$ endlich sind für $i < 2n-1$ und dass $\pi_{2n-1}(F) \cong \mathbb{Z} \oplus G'$ für eine endliche Gruppe G'. Indem wir höhere Homotopiegruppen killen, erhalten wir eine Abbildung $F' \to Y$, wobei $\pi_i(Y) = 0$ für $i \geqslant 2n-1$. Wir konvertieren diese Abbildung zu einer Faserung $F'' \to Y$ mit Faser Z. Anhand der langen exakten Homotopiesequenz dieser Faserung sehen wir, dass

$$\pi_m(Z) = \begin{cases} 0, & \text{für } m < 2n-1, \\ \pi_m(F'') \cong \pi_m(F) \cong \pi_m(S^n), & \text{für } m \geqslant 2n-1. \end{cases}$$

Wir bemerken, dass alle Homotopiegruppen und somit auch Homologiegruppen von Y endlich sind. Daher gilt $\widetilde{H}^*(Y;\mathbb{Q}) = 0$. Da die Serre-Spektralsequenz zur Faserung $Z \to F'' \to Y$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ auf der E_2-Seite also nur Einträge in der Spalte $p = 0$ besitzt, gilt $H^*(Z;\mathbb{Q}) \cong H^*(F'';\mathbb{Q}) \cong \Lambda[b]$. Die Aussage folgt nun aus dem vorhergehenden Lemma mit $X := Z$.

$\square$

Literatur

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.

[Hat04] Allen Hatcher. "Spectral Sequences in Algebraic Topology". 2004. URL: `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/SSAT/SSATpage.html`.

[Ser51] Jean-Pierre Serre. “Homologie singulière des espaces fibrés”. In: *Annals of Mathematics.* Second Series 54.3 (1951), S. 425–505.