

# Spektralsequenzen und der Satz von Serre

Tim Baumann

Geboren am 15. Juni 1994 in Friedberg

27. Juni 2015

Bachelorarbeit Mathematik

Betreuer: Prof. Dr. Bernhard Hanke

Zweitgutachter: Prof. Dr. X Y

INSTITUT FÜR MATHEMATIK

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICH-TECHNISCHE FAKULTÄT

UNIVERSITÄT AUGSBURG



# 1 Spektralsequenzen

## 1.1 Faserungen

**Definition.** Eine *Serre-Faserung* ist eine stetige Abbildung  $p : E \rightarrow B$ , welche die *Homotopieliftungseigenschaft* (HLE) für die Scheiben  $D^n$  besitzt, d. h. für alle  $n \geq 0$  und für alle stetigen Abbildungen  $H, H_0$  wie unten, sodass das äußere Quadrat kommutiert, gibt es eine stetige Abbildung  $\tilde{H}$ , sodass die beiden Dreiecke kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} D^n & \xrightarrow{H_0} & E \\ i_0 \downarrow & \searrow \exists \tilde{H} & \downarrow p \\ D^n \times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

Dabei ist  $i_0$  die Inklusion von  $D^n$  in  $D^n \times I$  als  $D^n \times \{0\}$ .  
Eindeutigkeit von  $\tilde{H}$  wird nicht gefordert.

**Lemma.** Es sei  $p : E \rightarrow B$  eine stetige Abbildung. Dann sind äquivalent:

- a)  $p$  ist eine Serre-Faserung
- b)  $p$  besitzt die *relative Homotopieliftungseigenschaft* für CW-Paare, d. h. für alle CW-Paare  $(X, A)$  und für alle  $H_0$  und  $H$  wie unten, sodass das äußere Quadrat kommutiert, gibt eine stetige Abbildung  $\tilde{H}$ , sodass die beiden Dreiecke kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} \cup A \times I & \xrightarrow{H_0} & E \\ \downarrow & \searrow \exists \tilde{H} & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

*Beweis.* „b)  $\implies$  a)“ Folgt sofort mit  $(X, A) := (D^n, \emptyset)$ .

„a)  $\implies$  b)“ Wir behandeln zunächst den Fall  $(X, A) = (D^n, S^{n-1})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $(D^n \times I, D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \cup I) \approx (D^n)$  homöomorph als Raumpaare. Somit ist die relative Homotopieliftungseigenschaft in diesem Fall gleichbedeutend zur Homotopieliftungseigenschaft für die Scheibe  $D^n$ .

Es sei nun  $(X, A)$  ein beliebiges Raumpaare. Dann kann man induktiv die Homotopie  $H$  auf die  $i$ -Zellen  $e_\alpha^i$  von  $X \setminus A$  fortsetzen. Dabei ist die Homotopie auf  $S^{n-1} = \partial D^n$  durch die Komposition der bisher konstruierten Homotopie mit der anheftenden Abbildung  $\phi_\alpha : S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$  vorgegeben. Man erhält die Fortsetzung durch Anwenden des zuerst bewiesenen Falls.  $\square$

**Lemma.** Es seien  $p : E \rightarrow B$  eine Serre-Faserung,  $b_0 \in B$ ,  $F := p^{-1}(b_0)$  die Faser über  $b_0$  und  $f_0 \in F$ . Dann gibt es eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow \pi_n(F, f_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, f_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, f_0) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_1(B, b_0)$$

von Homotopiegruppen. Dabei ist  $i : F \hookrightarrow E$  die Inklusion.

*Beweis.* Die gesuchte exakte Sequenz ist die lange exakte Homotopiesequenz

$$\dots \rightarrow \pi_n(F, f_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, f_0) \rightarrow \pi_n(E, F, f_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, f_0) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_1(E, F, f_0)$$

des Raumpaars  $(E, F)$ . Es bleibt zu zeigen:  $\pi_n(E, F, f_0) \cong \pi_n(B, b_0)$  als Gruppe für  $n > 1$  und als punktierte Menge für  $n = 1$ . Der Isomorphismus muss außerdem so gewählt werden, dass

$$p_* = \left( \pi_n(E, f_0) \rightarrow \pi_n(E, F, f_0) \xrightarrow{\cong} \pi_n(B, b_0) \right).$$

Wir zeigen:  $p_* : \pi_n(E, F, f_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$  ist der gesuchte Isomorphismus (damit ist obige Gleichung erfüllt).

*Surjektivität:* Sei  $[g : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, b_0) \rightarrow (B, \{b_0\}, b_0)] \in \pi_{n+1}(B, b_0)$ ,  $n \geq 0$ . Sei  $\tilde{g}$  der Lift im folgenden relativen HLE-Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\text{konst } f_0} & E \\ \downarrow & \nearrow \exists \tilde{g} & \downarrow p \\ I^n \times I & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

wobei  $U := I^n \times \{0\} \cup (\partial I^n) \times I \subset I^{n+1}$ . Dann kann man  $\tilde{g}$  als eine Abbildung  $(I^{n+1}, \partial I^{n+1}, U) \rightarrow (E, F, \{f_0\})$  von Raumtripeln auffassen, welche ein Element von  $\pi_{n+1}(E, F, f_0)$  repräsentiert. Es gilt  $p_*[\tilde{g}] = [p \circ \tilde{g}] = [g]$ .

*Injektivität:* Seien  $[h_0], [h_1] \in \pi_{n+1}(E, F, f_0)$  mit  $p_*[h_0] = p_*[h_1]$ . Sei

$$H : I \times I^{n+1}, \quad (t, x) \mapsto H_t(x)$$

eine Homotopie mit  $H_0 = p \circ h_0$ ,  $H_1 = p \circ h_1$ , welche zu jedem Zeitpunkt  $t \in I$  eine Abbildung  $H_t : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}) \rightarrow (B, \{b_0\})$  von Raumpaaren ist. Betrachte folgendes HLE-Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{h} & E \\ \downarrow & \nearrow \exists \tilde{H} & \downarrow p \\ I^{n+1} \times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

mit  $V := I^{n+1} \times \{0\} \cup (\partial I^{n+1}) \times I \subset I^{n+2}$  und

$$h|_{\{0\} \times I^{n+1}} := h_0, \quad h|_{\{1\} \times I^{n+1}} := h_1, \quad h|_{I \times U} := \text{konst } f_0.$$

Nun ist  $\tilde{H}$  eine Homotopie von  $h_0$  nach  $h_1$ , welche zu jedem Zeitpunkt  $t$  eine Abbildung  $\tilde{H}_t : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, U) \rightarrow (E, F, \{b_0\})$  von Raumtripeln ist.  $\square$

**Definition.** Es seien  $p : E \rightarrow B$  und  $g : X \rightarrow B$  stetig. Der *Pullback* von  $p$  entlang  $g$  ist die Abbildung  $g^*(p) : g^*(E) \rightarrow X$ , wobei  $g^*(E) := X \times_B E$  das Faserprodukt von  $X$  und  $E$  über  $B$  vermöge  $g$  und  $p$  ist.

*Bemerkung.* Pullback ist funktoriell:  $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$  und  $\text{id}^* = \text{id}$ .

**Lemma.** Pullbacks von Serre-Faserungen sind Serre-Faserungen.

*Beweis.* Sei  $p : E \rightarrow B$  eine Serre-Faserung und  $g : X \rightarrow B$  stetig. Wir müssen die Existenz des Morphismus  $\tilde{H}$  im folgenden Diagramm zeigen:

$$\begin{array}{ccccc} D^n & \xrightarrow{H_0} & g^*(E) & \xrightarrow{h} & E \\ \downarrow i_0 & & \downarrow g^*(p) & \lrcorner & \downarrow p \\ D^n \times I & \xrightarrow{H} & X & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

Aus der HLE von  $p$  erhält wie folgt einen Morphismus  $K$ :

$$\begin{array}{ccccc} D^n & \xrightarrow{H_0} & X \times_B E & \xrightarrow{h} & E \\ \downarrow i_0 & & & \nearrow K & \downarrow p \\ D^n \times I & \xrightarrow{H} & X & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

Nun ist  $D^n \times I$  vermöge  $H$  und  $K$  ein Kegel über dem Diagramm  $(X \xrightarrow{g} B \xleftarrow{p} E)$ . Die universelle Eigenschaft von  $g^*(E)$  induziert einen Morphismus  $\tilde{H} : D^n \times I \rightarrow X \times_B E$  mit  $g^*(p) \circ \tilde{H} = H$  und  $h \circ \tilde{H} = K$ . Aus der univ. Eigenschaft von  $g^*(E)$  (Eindeutigkeit) folgt nun  $\tilde{H} \circ i_0 = H_0$ .  $\square$

**Definition.** Ein Morphismus  $(g, \tilde{g}) : p' \rightarrow p$  von Serre-Faserungen  $p' : E' \rightarrow B'$  und  $p : E \rightarrow B$  ist ein kommutatives Quadrat der Form

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\tilde{g}} & E \\ \downarrow p' & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

**Beispiel.** Pullback einer Serre-Faserung  $p$  entlang einer stetigen Abbildung  $g$  induziert einen Morphismus  $(g, \tilde{g}) : g^*(p) \rightarrow p$  von Serre-Faserungen.

**Lemma.** Die langen exakten Sequenzen der Homotopiegruppen von Faserungen sind natürlich: Es sei  $(g, \tilde{g}) : p' \rightarrow p$  ein Morphismus von Serre-Faserungen  $p' : E' \rightarrow B'$  und  $p : E \rightarrow B$ ,  $b'_0 \in B'$ ,  $b_0 := g(b'_0)$ ,  $F' := p'^{-1}(b'_0)$ ,  $F := p^{-1}(b_0)$ ,  $f'_0 \in F'$ ,  $f_0 := \tilde{g}(f'_0)$ . Dann gibt es eine „Leiter“ bestehend aus kommutativen Quadraten zwischen den Homotopiesequenzen:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \pi_n(F', f'_0) & \xrightarrow{i'_*} & \pi_n(E', f'_0) & \xrightarrow{p'_*} & \pi_n(B', b'_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F', f'_0) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow (\tilde{g}|_{F'})_* & & \downarrow \tilde{g}_* & & \downarrow g_* & & \downarrow (\tilde{g}|_{F'})_* \\ \dots & \longrightarrow & \pi_n(F, f_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(E, f_0) & \xrightarrow{p_*} & \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, f_0) \longrightarrow \dots \end{array}$$

*Beweis.* Folgt aus der Natürlichkeit der langen exakten Homotopiesequenz von Raumpaaren.  $\square$

Es sei  $p : E \rightarrow B$  eine Serre-Faserung,  $\gamma : I \rightarrow B$  ein stetiger Weg. Betrachte die lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow \pi_n(F_{\gamma(0)}) \rightarrow \pi_n(\gamma^*(E)) \rightarrow \pi_n(I) \rightarrow \pi_{n-1}(F_{\gamma(0)}) \rightarrow \dots$$

der Homotopiegruppen von  $\gamma^*(p) : \gamma^*(E) \rightarrow I$  mit Faser

$$F_{\gamma(t)} := \gamma^*(p)^{-1}(t) \subset \gamma^*(E) = \{(t, e) \in I \times E \mid \gamma(t) = p(e)\}.$$

In dieser Sequenz sind die Gruppen  $\pi_n(I)$  trivial. Folglich sind die Abbildungen  $(i_{\gamma(t)})_* : \pi_n(F_{\gamma(t)}, *) \rightarrow \pi_n(\gamma^*(E), *)$  Isomorphismen. In anderen Worten:  $i_{\gamma(t)}$  ist eine schwache Äquivalenz. Aus einem Korollar des Whitehead-Theorems folgt nun, dass  $i_t$  auch in Homologie und Kohomologie Isomorphismen induziert (vgl. Spanier, AT, S. 406, Cor 7.6.25). Wir untersuchen den Isomorphismus

$$T_\gamma := (i_{\gamma(1)})^* \circ ((i_{\gamma(0)})^*)^{-1} : H^*(F_{\gamma(0)}) \xrightarrow{\cong} H^*(F_{\gamma(1)}).$$

**Lemma.**  $T_\gamma$  hängt lediglich von der Weghomotopieklasse von  $\gamma$  ab, d. h. ist  $\eta$  ein zweiter Weg mit  $\gamma \simeq \eta$ , so gilt  $T_\gamma = T_\eta$ .

*Beweis.* Sei  $H : I \times I \rightarrow B$  eine Homotopie zw. den Wegen  $\gamma$  und  $\eta$ , d. h.  $H_0 := H(0, -) = \gamma$ ,  $H_1 = \eta$ ,  $H(-, 0) \equiv x$  und  $H(-, 1) \equiv y$  mit  $x := \gamma(0) = \eta(0)$  und  $y := \gamma(1) = \eta(1)$ . Für festes  $s \in I$  sei  $i_s : I \rightarrow I \times I$ ,  $t \mapsto (s, t)$  die Inklusion als  $\{s\} \times I$ . Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H_s^*(E) & \xleftarrow{\tilde{i}_s} & H^*(E) & \longrightarrow & E \\ \downarrow H_s^*(p) & \lrcorner & \downarrow H^*(p) & \lrcorner & \downarrow p \\ I & \xleftarrow{i_s} & I \times I & \xrightarrow{H} & B \\ & & \searrow H_s & & \end{array}$$

Sei  $t \in I$  fest. Sei  $F_{s,t} := (H_s^*(p))^{-1}(t) = (H^*(p))^{-1}((s, t))$  und  $f_0 \in F$ . Das linke komm. Diagramm induziert einen Morphismus zw. den langen ex. Homotopieseq. von  $H_t^*(p)$  und  $H^*(p)$ :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \pi_{n+1}(I, t) & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(F_{s,t}, f_0) & \xrightarrow{(i'_{s,t})^*} & \pi_n(H_s^*(E), f_0) \xrightarrow{H_s^*(p)^*} \pi_n(I, t) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow i_{s*} & & \parallel & & \downarrow (\tilde{i}_s)^* \\ \dots & \longrightarrow & \pi_{n+1}(I \times I, (s, t)) & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(F_{s,t}, f_0) & \xrightarrow{(i_{s,t})^*} & \pi_n(H^*(E), f_0) \xrightarrow{H^*(p)^*} \pi_n(I \times I, (s, t)) \longrightarrow \dots \\ & & & & & & \downarrow i_{s*} \end{array}$$

In diesen Sequenzen verschwinden die Gruppen  $\pi_n(I, t)$  bzw.  $\pi_n(I \times I, (s, t))$ . Folglich induzieren die Abbildungen  $\tilde{i}_s$  Isomorphismen in Homotopie und in Kohomologie. Es gilt nun

$$\begin{aligned} T_\gamma &= (i'_{0,1})^* \circ ((i'_{0,0})^*)^{-1} = (i'_{0,1})^* \circ (\tilde{i}_0)^* \circ (\tilde{i}_0)^{-1} \circ ((i'_{0,0})^*)^{-1} \\ &= (i_{0,1})^* \circ ((i_{0,0})^*)^{-1} \stackrel{(\star)}{=} (i_{1,1})^* \circ ((i_{1,0})^*)^{-1} \\ &= (i'_{1,1})^* \circ (\tilde{i}_1)^* \circ (\tilde{i}_1)^{-1} \circ ((i'_{1,0})^*)^{-1} = (i'_{1,1})^* \circ ((i'_{1,0})^*)^{-1} = T_\eta. \end{aligned}$$

Die Gleichung  $(\star)$  gilt wegen  $i_{0,1} \simeq i_{1,1}$  und  $i_{0,0} \simeq i_{1,0}$ . □

Mit ganz ähnlicher Technik kann man zeigen:

**Lemma.** Seien  $\gamma, \eta : I \rightarrow B$  stetige Wege mit  $\gamma(1) = \eta(0)$ . Dann gilt

$$T_\eta \circ T_\gamma = T_{\gamma \cdot \eta} : H^*(F_{\gamma(0)}) \xrightarrow{\cong} H^*(F_{\eta(1)}).$$

Dabei ist die Komposition von  $\gamma$  und  $\eta$  folgender Weg:

$$\gamma \cdot \eta : I \rightarrow B, \quad s \mapsto \begin{cases} \gamma(2s), & \text{falls } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ \eta(2s - 1), & \text{falls } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

*Beweis.* Betrachte folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} \gamma^*(E) & \xleftarrow{\tilde{j}} & (\gamma \cdot \eta)^*(E) & \longrightarrow & E \\ \downarrow \gamma^*(p) & \lrcorner & \downarrow (\gamma \cdot \eta)^*(p) & \lrcorner & \downarrow p \\ I & \xrightarrow{j} & I & \xrightarrow{\gamma \cdot \eta} & B \\ & \searrow \gamma & & & \end{array}$$

Dabei ist  $j : I \rightarrow I$  die Abbildung  $s \mapsto s/2$ . Analog zum letzten Lemma sieht man anhand des Leiterdiagramms der langen exakten Sequenzen der Faserungen  $\gamma^*(p)$  und  $(\gamma \cdot \eta)^*(p)$ , dass  $\tilde{j}$  einen Isomorphismus in Homotopie und Kohomologie induziert. Es gibt ein ähnliches Diagramm mit  $\eta$  statt  $\gamma$  und  $k : I \rightarrow I$ ,  $s \mapsto (1+s)/2$  statt  $j$ . Es induziert auch  $\tilde{k}$  einen Isomorphismus in Kohomologie. Es gilt nun

$$\begin{aligned} T_\eta \circ T_\gamma &= (i_{\eta(1)})^* \circ ((i_{\eta(0)})^*)^{-1} \circ (i_{\gamma(1)})^* \circ ((i_{\gamma(0)})^*)^{-1} \\ &= (i_{\eta(1)})^* \circ \tilde{k}^* \circ (\tilde{k})^{-1} \circ ((i_{\eta(0)})^*)^{-1} \circ (i_{\gamma(1)})^* \circ \tilde{j}^* \circ (\tilde{j})^{-1} \circ ((i_{\gamma(0)})^*)^{-1} \\ &= (\tilde{k} \circ i_{\eta(1)})^* \circ ((\tilde{k} \circ i_{\eta(0)})^*)^{-1} \circ (\tilde{j} \circ i_{\gamma(1)})^* \circ ((\tilde{j} \circ i_{\gamma(0)})^*)^{-1} \\ &= (i_{\gamma \cdot \eta(1)})^* \circ ((i_{\gamma \cdot \eta(1/2)})^*)^{-1} \circ (i_{\gamma \cdot \eta(1/2)})^* \circ ((i_{\gamma \cdot \eta(0)})^*)^{-1} \\ &= (i_{\gamma \cdot \eta(1)})^* \circ ((i_{\gamma \cdot \eta(0)})^*)^{-1} = T_{\gamma \cdot \eta}. \end{aligned} \quad \square$$

## 1.2 Lokale Koeffizienten

**Definition.** Ein *lokales Koeffizientensystem*  $\underline{A}$  auf einem topologischen Raum  $B$  besteht aus abelschen Gruppen  $(A_b)_{b \in B}$  und Isomorphismen  $T_\gamma : A_{\gamma(0)} \xrightarrow{\cong} A_{\gamma(1)}$  für jeden stetigen Weg  $\gamma : I \rightarrow B$ , sodass gilt:

- Sind zwei Wege  $\gamma, \eta : I \rightarrow B$  homotop modulo Endpunkte, so gilt  $T_\gamma = T_\eta$ .
- Für komponierbare Wege  $\gamma, \eta : I \rightarrow B$  gilt  $T_{\gamma \cdot \eta} = T_\eta \circ T_\gamma$ .
- Für den konstanten Weg  $\gamma \equiv b$  gilt  $T_\gamma = \text{id}_{A_b}$ .

*Bemerkung.* Man kann ein lokales Koeffizientensystem auf  $B$  auch als Funktor aus dem Fundamentalgruppoid von  $B$  in die Kategorie der abelschen Gruppen auffassen.

**Beispiel.** Im letzten Abschnitt wurde gezeigt: Bei einer Serre-Faserung  $p : E \rightarrow B$  bilden die  $q$ -ten Kohomologiegruppen  $A_b := H^q(p^{-1}(b))$  der Fasern ein lokales Koeffizientensystem. Wir bezeichnen dieses Koeffizientensystem im Folgenden mit  $\mathcal{H}^q(F_p)$ .

**Beispiel.** Für jede abelsche Gruppe  $G$  gibt es das konstante Koeffizientensystem  $\underline{G}$  mit  $G_b := G$  für alle  $b \in B$  und  $T_\gamma = \text{id}_G$  für alle  $\gamma : I \rightarrow B$ .

Sei im Folgenden  $\Delta_n(B)$  die Menge der  $n$ -Simplizes in  $B$ , also die Menge der stetigen Abbildungen  $\Delta^n \rightarrow B$  mit  $\Delta^n := \text{spann}\{e_0, \dots, e_n\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , und

$$d_n : \Delta_n(B) \rightarrow \Delta_{n-1}(B) \quad \sigma \mapsto \sigma_{\langle e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n \rangle} \quad (0 \leq i \leq n),$$

die Abbildung auf die  $i$ -Seite. Für einen  $n$ -Simplex  $\sigma$  bezeichne  $\sigma_i := \sigma_{\langle e_i \rangle} \in \Delta_0(B) = B$  die  $i$ -te Ecke und  $\sigma_{ij} := \sigma_{\langle e_i, e_j \rangle} \in \Delta_1(B)$  den Weg von  $\sigma_i$  nach  $\sigma_j$  entlang der  $ij$ -Kante von  $\sigma$  ( $0 \leq i \leq j \leq n$ ).

**Definition.** Sei  $B$  ein topologischer Raum,  $\underline{A}$  ein lokales Koeffizientensystem auf  $B$ . Der *Komplex der singulären Koketten auf  $B$  mit Koeffizienten in  $\underline{A}$*  ist folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} C^n(B; \underline{A}) &:= \{ \text{Abbildungen } f, \text{ welche einem } n\text{-Simplex } \sigma \in \Delta_n(B) \\ &\quad \text{ein Element } f(\sigma) \in A_{\sigma_0} \text{ zuordnen} \} \\ \delta^n(f) &:= (\sigma \in \Delta_{n+1}(B)) \mapsto T_{\sigma_{01}}^{-1}(f(d_0(\sigma))) + \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i f(d_i(\sigma)). \end{aligned}$$

Man überprüft leicht, dass  $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$  gilt. Die Kohomologie  $H^*(B; \underline{A}) := H^*(C^*(B; \underline{A}))$  dieses Kettenkomplexes heißt *singuläre Kohomologie von  $B$  mit Koeffizienten in  $\underline{A}$* .

**Beobachtung.** Für das konstante Koeffizientensystem  $\underline{G}$  gilt  $H^*(B; \underline{G}) \cong H^*(B; G)$ . Gewöhnliche Kohomologie mit Koeffizienten ist also ein Spezialfall von Kohomologie mit Koeffizienten in einem lokalen System.

## 1.3 Spektralsequenzen

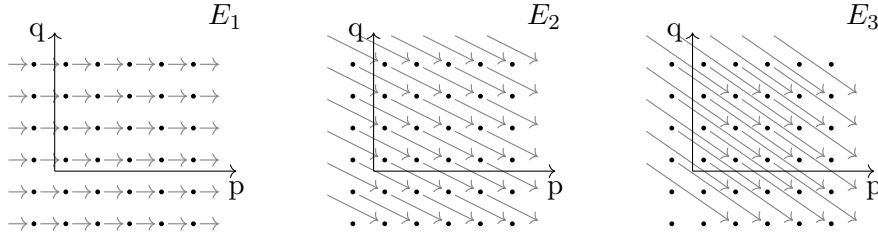
Es sei  $A$  im Folgenden ein kommutativer Ring mit Eins.

**Definition.** Eine (kohomologische) *Spektralsequenz* besteht aus

- $A$ -Moduln  $E_r^{p,q}$  für alle  $p, q \in \mathbb{Z}$  und  $r \geq 1$ ,
- $A$ -Modul-Homomorphismen  $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1}$  mit  $d_r^{p+r, q-r+1} \circ d_r^{p,q} = 0$
- und Isomorphismen  $\alpha_r^{p,q} : H^{p,q}(E_r) := \ker(d_r^{p,q}) / \text{im}(d_r^{p-r, q+r-1}) \xrightarrow{\cong} E_{r+1}^{p,q}$ .

*Bemerkung.* • Die Homomorphismen  $d_{p,q}^r$  heißen *Differentiale*.

- Die Gesamtheit der Module  $E_{p,q}^r$  und Differentiale  $d_r^{pq}$  mit  $r \in \mathbb{N}$  fest heißt  $r$ -te *Seite*  $E^r$ .
- Man stellt Seiten für gewöhnlich in einem 2-dimensionalen Raster dar:



**Definition.** Eine Spektralsequenz *konvergiert*, falls für alle  $p, q \in \mathbb{Z}$  ein  $R \in \mathbb{N}$  existiert, sodass für alle  $r \geq R$  die Differentiale von und nach  $E_r^{p,q}$  null sind und damit  $E_{p,q}^\infty := E_R^{p,q} \cong E_{R+1}^{p,q} \cong \dots$ . Der Grenzwert der SS ist die Unendlich-Seite  $E_\infty := \{E_\infty^{p,q}\}_{p,q}$ .

*Bemerkung.* Viele Spektralsequenzen sind im ersten Quadranten konzentriert, d. h.  $E_r^{p,q}$  ist nur für  $p, q \geq 0$  ungleich Null. Solche Spektralsequenzen konvergieren immer, denn für alle  $p, q \in \mathbb{Z}$  führen für  $r \geq \max(p+1, q+2)$  alle Differentiale von  $E_r^{p,q}$  aus dem ersten Quadranten heraus und alle dort eintreffenden Differentiale kommen von außerhalb des ersten Quadranten und sind daher Null.

**Definition.** Eine *Filtrierung* eines  $A$ -Moduls  $M$  ist eine absteigende Folge  $\dots \supseteq F^p M \supseteq F_{p+1} M \supseteq \dots$  von Untermoduln von  $M$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ . Eine Filtrierung heißt *regulär*, falls

$$0 = \cap_p F^p M := \lim_{p \rightarrow \infty} F^p M \quad \text{und} \quad M = \cup_p F^p M := \operatorname{colim}_{p \rightarrow -\infty} F^p M.$$

**Definition.** Eine Spektralsequenz  $E$  *konvergiert gegen* einen graduierten  $A$ -Modul  $M = \oplus_{n \in \mathbb{Z}} M^n$  (notiert  $E_r^{p,q} \Rightarrow M^{p+q}$ ), falls  $E$  überhaupt konvergiert und Filtrierungen  $\dots \supseteq F^p M_n \supseteq F_{p+1} M_n \supseteq \dots$  existieren, sodass für alle  $p, q \in \mathbb{Z}$  der Eintrag  $E_\infty^{p+q}$  isomorph zum Quotienten  $F^p M^{p+q} / F^{p+1} M^{p+q}$  ist.

## 1.4 Die Spektralsequenz eines filtrierten Komplexes

**Definition.** Eine *Filtrierung eines Kokettenkomplexes*  $C^\bullet$  ist eine absteigende Folge von Unterkomplexen  $\dots \supseteq F^p C^\bullet \supseteq F^{p+1} C^\bullet \supseteq \dots \supseteq C^\bullet$ .

**Lemma.** Es sei  $C^\bullet$  ein filtrierter Kokettenkomplex. Es gibt eine Spektralsequenz mit  $E_2^{pq} = H^q(F^p C^\bullet / F^{p+1} C^\bullet)$ . Falls die Filtrierung **TODO : welche Bedingung braucht man hier?** so konvergiert diese Spektralsequenz gegen  $H^*(C^\bullet)$ .

Wir führen zunächst etwas neue Notation ein. Diese hilft, den Beweis verständlicher zu formulieren. Wir fassen im folgenden den Kettenkomplex als ein einziges Modul  $C := \oplus_{n \in \mathbb{Z}} C^n$  anstatt als Folge von Modulen auf. Dieses Modul ist filtriert durch die Untermodule  $F^p := \oplus_{n \in \mathbb{Z}} F^p C^n$ . Wir setzen  $F^{-\infty} := C$  und  $F^\infty := 0$ . Die Korandabbildung fassen wir als Homomorphismen  $d : C \rightarrow C$  mit  $d \circ d = 0$  auf, der die Filtrierung von  $C$  respektiert.

Wir sind interessiert an der Kohomologie von  $C^\bullet$ , also an  $H^*(C) := \ker(d) / \operatorname{im}(d)$  und an der Kohomologie von  $F^p / F^{p+1}$ , also  $H^*(F^p / F^{p+1}) \cong (d|_{F^p})^{-1}(F^{p+1}) / d(F^p)$ . Wir geben nun eine Verallgemeinerung der Definition der Kohomologie von  $C^\bullet$  und der Kohomologie des Quotientenkomplexes  $F^p / F^q$ : Statt Zykeln (d. h. Elementen  $c \in C$  mit  $d(c) = 0$ ) betrachten wir  $z$ -Zykel, das sind Elemente  $c \in C$  mit  $d(c) \in F^z$ . Wir teilen diese durch die Menge  $d(F^b)$  der  $b$ -Ränder anstatt durch die Menge  $d(C)$  der Ränder. Wir setzen



$$S[z, q, p, b] := \frac{F^p \cap d^{-1}(F^z)}{(F^p \cap d^{-1}(F^z)) \cap (F^q + d(F^b))}.$$

Wir haben als Spezialfälle

$$S[p, q, p, q] \cong F^p/F^q \quad \text{und} \quad S[q, q, p, p] \cong H^*(F^p/F^q).$$

**Lemma.** Es sei  $z_1 \geq q_1 \geq p_1 = z_2 \geq b_1 = q_2 \geq p_2 \geq b_2$ . Dann ist folgende Abbildung ein wohldefinierter Homomorphismus:

$$d^* : S[z_2, q_2, p_2, b_2] \rightarrow S[z_1, q_1, p_1, b_1], \quad [c] \mapsto [d(c)].$$

*Beweis.* Falls  $[c] = 0$  in  $S[z_2, q_2, p_2, b_2]$ , so existieren  $x \in F^{q_2}$  und  $y \in F^{b_2}$  mit  $c = x + d(y)$ . Somit gilt  $d^*[c] = [dc] = [d(x) + d^2(y)] = [d(x)] = 0$  in  $S[z_1, q_1, p_1, b_1]$ , da  $F^{b_1} = F^{q_2}$ .  $\square$

**Lemma.** Es seien Filtrierungsindizes wie folgt gegeben:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & z_3 & \geq & q_3 & \geq & p_3 & \geq & b_3 \\ & & & \parallel & & \parallel & & & & \\ & & z_2 & \geq & q_2 & \geq & p_2 & \geq & b_2 \\ & & \parallel & & \parallel & & & & & \\ z_1 & \geq & q_1 & \geq & p_1 & \geq & b_1 \end{array}$$

Dann ist

$$\alpha : S[q_1, q_2, p_2, p_3] \rightarrow \frac{\ker(d^* : S[z_2, q_2, p_2, b_2] \rightarrow S[z_1, q_1, p_1, b_1])}{\text{im}(d^* : S[z_3, q_3, p_3, b_3] \rightarrow S[z_2, q_2, p_2, b_2])}, \quad [c] \mapsto [c]$$

ein wohldefinierter Isomorphismus.

*Beweis.* Sei  $A$  der Quotient auf der rechten Seite.

*Wohldefiniertheit:* Sei  $[c] = 0$  in  $S[q_1, q_2, p_2, p_3]$ , d.h. es gibt  $e \in F^{q_2} = F^{b_1}$  und  $f \in F^{p_1}$  mit  $c = e + d(f)$ . Dann ist  $d^*[c] = [d(c)] = [d(e)] = 0$  in  $S[z_1, q_1, p_1, b_1]$ , also  $c \in \ker(d^* : S[z_2, q_2, p_2, b_2] \rightarrow S[z_1, q_1, p_1, b_1])$ . Nun ist  $f \in d^{-1}(F^{z_3})$ , da  $d(f) = c - e \in F^{p_2} = F^{z_3}$ . Es gilt  $[c] = [e + d(f)] = [d(f)] = d^*[f] = 0$  in  $A$ .

*Injektivität:* Sei  $c \in F^{p_2} \cap d^{-1}(F^{q_1})$  mit  $[c] = 0$  in  $A$ . Das heißt, es gibt  $e \in F^{q_2}$ ,  $f \in F^{b_2}$  und  $g \in F^{p_3} \cap d^{-1}(F^{z_3})$  mit  $c = e + d(f) + d(g)$ . Dann ist  $[c] = [e + d(f + g)] = 0$  in  $S[q_1, q_2, p_2, p_3]$ , da  $f + g \in F^{p_3}$ .

*Surjektivität:* Sei  $\tilde{c} \in F^{p_2} \cap d^{-1}(F^{z_2})$  mit  $[\tilde{c}] \in \ker(d^* : S[z_2, q_2, p_2, b_2] \rightarrow S[z_1, q_1, p_1, b_1])$ . Das heißt, es gibt  $e \in F^{q_1}$  und  $f \in F^{b_1} = F^{q_2}$  mit  $d(\tilde{c}) = e + d(f)$ . Dann ist  $[\tilde{c}] = [\tilde{c} - f]$  in  $S[q_1, q_2, p_2, p_3]$  mit  $\tilde{c} - f \in F^{p_2} \cap d^{-1}(F^{q_1})$ , da  $d(\tilde{c} - f) = e \in F^{q_1}$ .  $\square$

*Beweis des Lemmas über Existenz der Spektralsequenz.* Wir beachten jetzt wieder, dass  $C$  und damit  $S[z, q, p, b]$  graduiert und  $d$  ein Differential vom Grad  $+1$  ist. Es sei  $S[z, q, p, b]^n$  die  $n$ -te Komponente. Setze

$$E_r^{pq} := S[p+r, p+1, p, p-r+1]^{p+q}.$$

Die Differentiale sind

$$d_r^{pq} : \underbrace{S[p+r, p+1, p, p-r+1]^{p+q}}_{=E_r^{p,q}} \rightarrow \underbrace{S[p+2r, p+r+1, p+r, p+1]^{p+q+1}}_{=E_r^{p+r, q-r+1}}.$$

Sie sind wohldefiniert nach Lemma **TODO: Nr.** Wegen Lemma **TODO: Nr** ist

$$\alpha_r^{pq} : H^{p,q}(E_r) = \ker(d_r^{pq}) / \text{im}(d_r^{p-r, q+r-1}) \rightarrow E_{r+1}^{pq}, \quad [c] \mapsto [c]$$

ein wohldefinierter Isomorphismus.  $\square$

## 1.5 Die Serre-Spektralsequenz

**Satz** (Jean-Pierre Serre). Für jede Serre-Faserung  $p : E \rightarrow B$  existiert eine Spektralsequenz mit

$$E_2^{p,q} = H^p(B; \mathcal{H}^q(F_p)),$$

welche gegen  $H^*(E)$  konvergiert.