

# Der Satz von Serre über die Endlichkeit der Homotopiegruppen der Sphären

Bachelorarbeit

VON

Tim Baumann

Eingereicht am

TODO: ?? . ?? . 2015



Universität Augsburg  
Institut für Mathematik

Erstgutachter: Prof. Dr. Bernhard Hanke

Zweitgutachter: TODO: ???

## Inhaltsverzeichnis

1	Homotopiegruppen der Sphären	2
2	Faserungen	4
3	Lokale Koeffizienten	9
4	Spektralsequenzen	10
5	Die Spektralsequenz eines filtrierten Komplexes	12
6	Die Serre-Spektralsequenz	14
7	Töten von Homotopiegruppen und Eilenberg-MacLane-Räume	15
8	Das Hurewicz-Mod- $\mathcal{C}$ -Theorem	16
9	Rationale Kohomologie von Räumen vom Typ $K(\mathbb{Z}, n)$	20
10	Beweis des Satzes von Serre	21
	Literatur	22
	Anhang: Tabelle der Homotopiegruppen der Sphären	24

# 1 Homotopiegruppen der Sphären

**Definition 1.** Es sei  $(X, x_0)$  ein punktierter topologischer Raum. Für  $n \geq 0$  sei

$$\pi_n(X, x_0) := [(S^n, *), (X, x_0)]$$

die Menge der basispunkterhaltenden Abbildungen  $S^n \rightarrow X$  modulo basispunkterhaltender Homotopie. Für  $n \geq 1$  heißt  $\pi_n(X)$  die  $n$ -te Homotopiegruppe von  $X$  (mit Basispunkt  $x_0$ ).

Die Gruppenstruktur auf  $\pi_n(X)$  wird induziert durch die Kogruppenstruktur auf  $S^n$ , welche durch die Abbildung  $S^n \rightarrow S^n \vee S^n$  gegeben ist, die die Südkappe  $D_+^n$  auf die erste  $S^n$ , die Nordkappe  $D_-^n$  auf die zweite  $S^n$  und den Äquator  $D_+^n \cap D_-^n$  auf den Anklebepunkt von  $S^n \vee S^n$  abbildet. Das neutrale Element der Homotopiegruppen wird repräsentiert durch die konstante Abbildung auf den Basispunkt  $x_0$ . Man kann zeigen, dass  $\pi_n(X, x_0)$  für  $n \geq 2$  abelsch ist (vgl. [Hat02, S. 340]).

Eine basispunkterhaltende Abbildung  $g : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  induziert Abbildungen  $g_* = \pi_i(g) : \pi_i(X, x_0) \rightarrow \pi_i(Y, y_0)$  durch Nachkomponieren mit  $g$ . Auf diese Weise wird  $\pi_i$  zu einem Funktor von der Kategorie der punktierten topologischen Räume in die Kategorie der (abelschen) Gruppen.

Die Menge  $\pi_0(X, x_0)$  ist die Menge der Wegzusammenhangskomponenten von  $X$ . Wir schreiben  $\pi_0(X, x_0) = 0$ , falls die einzige Wegzusammenhangskomponente von  $X$  die von  $x_0$  ist.

Falls ein Weg von  $x_0$  nach  $x'_0$  in  $X$  existiert, so sind  $\pi_n(X, x_0)$  und  $\pi_n(X, x'_0)$  isomorph. Für nicht leere, wegzusammenhängende Räume  $X$  kann man daher den Basispunkt in der Notation weglassen und von der Homotopiegruppe  $\pi_n(X)$  von  $X$  sprechen.

Für  $i < n$  gilt  $\pi_i(S^n) = 0$ : Wir können die Sphären  $S^i$  und  $S^n$  als CW-Komplexe mit jeweils einer Nullzelle und einer  $i$ -Zelle bzw.  $n$ -Zelle realisieren. Das zelluläre Approximationstheorem [Hat02, 4.8] besagt, dass jede Abbildung  $f : S^i \rightarrow S^n$  homotop relativ Basispunkt zu einer zellulären Abbildung ist, d. h. einer Abbildung  $\tilde{f} : S^i \rightarrow S^n$ , die das  $i$ -Skelett von  $S^i$  (das ist ganz  $S^i$ ) auf das  $i$ -Skelett von  $S^n$  (das ist  $\{*\}$ ) abbildet. In anderen Worten ist jede Abbildung  $S^i \rightarrow S^n$  homotop zur konstanten Abbildung und repräsentiert daher das neutrale Element in  $\pi_i(S^n)$ .

Mit der universellen Überlagerung  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $t \mapsto e^{it}$  kann man die Homotopiegruppen von  $S^1$  bestimmen: Die Fundamentalgruppe von  $S^1$  ist isomorph zur Decktransformationsgruppe dieser Überlagerung, von der man leicht zeigen kann, dass diese isomorph zu  $\mathbb{Z}$  ist. Es sei nun  $i > 1$  und  $f : S^i \rightarrow S^1$  stetig. Dann existiert eine Hochhebung  $\tilde{f} : S^i \rightarrow \mathbb{R}$ , da  $f_*(\pi_1(S^n)) = f_*(0) = 0 = p_*(\pi_0(\mathbb{R}))$ . Da  $\mathbb{R}$  zusammenziehbar ist, finden wir eine Homotopie  $H$  von  $\tilde{f}$  zur konstanten Abbildung  $x \mapsto 0$ . Dann ist  $p \circ H$  eine Homotopie zwischen  $f$  und der konstanten Abbildung. Somit ist  $\pi_i(S^1) = 0$  für  $i > 1$ .

**Definition 2.** Die (reduzierte) *Einhängung*  $\Sigma X$  eines punktierten Raumes  $(X, x_0)$  ist

$$\Sigma X := (X \times I) / (X \times \{0, 1\} \cup \{x_0\} \times I).$$

Der Basispunkt  $*$  von  $\Sigma X$  ist der auf einen Punkt zusammengezogene Teilraum.

Einhängung ist ein Endofunktor der Kategorie der punktierten topologischen Räume: Für  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  ist

$$\Sigma f : (\Sigma X, *) \rightarrow (\Sigma Y, *), \quad [(x, t)] \mapsto [(f(x), t)].$$

Die Einhängung eines CW-Komplexes ist wieder ein CW-Komplex. Man sieht leicht, dass  $\Sigma S^i \approx S^{i+1}$ . Somit induziert Einhängung eine Abbildung  $E : \pi_i(X, x_0) \rightarrow \pi_i(\Sigma X, *)$ . Da Einhängung mit den Kogruppenstruktur von  $S^i$  und  $S^{i+1}$  verträglich ist, ist  $E$  sogar ein Gruppenhomomorphismus.

**Definition 3.** Ein nicht leerer topologischer Raum  $X$  heißt  $n$ -zusammenhängend, falls  $\pi_i(X) = 0$  für  $0 \leq i \leq n$ .

**Satz 4** (Freudenthal'scher Einhängungssatz). Es sei  $n \geq 0$  und  $X$  ein  $n$ -zusammenhängender CW-Komplex. Dann ist  $E : \pi_i(X) \rightarrow \pi_{i+1}(\Sigma X)$  bijektiv für  $0 \leq i \leq 2n$  und surjektiv für  $i = 2n + 1$ .

Ein Beweis des Einhängungssatzes findet sich in [Hat02, 4.24].

Insbesondere ist die  $j$ -fach iterierte Einhängung  $\Sigma^j X$  eines  $n$ -zusammenhängenden CW-Komplexes  $X$  ein  $(n+j)$ -zusammenhängender CW-Komplex.

Für einen beliebigen CW-Komplex  $X$  ist  $\Sigma^j X$  ein  $(j-1)$ -zusammenhängender CW-Komplex und es gilt  $\pi_{n+j}(\Sigma^j X) \cong \pi_{n+j+1}(\Sigma^{j+1} X)$  für  $n+j \leq 2(j-1) \Leftrightarrow n+2 \leq j$ . Somit ist

$$\pi_{2n+2}(\Sigma^{n+2} X) \cong \pi_{2n+3}(\Sigma^{n+3} X) \cong \pi_{2n+4}(\Sigma^{n+4} X) \cong \dots \cong \operatorname{colim} \pi_{n+j}(\Sigma^j X).$$

Diese Gruppe heißt  $n$ -te stabile Homotopiegruppe von  $X$ . Im Fall der Sphären haben wir mit  $X = S^0$ :

$$\pi_{2n+2}(S^{n+2}) \cong \pi_{2n+3}(S^{n+3}) \cong \pi_{2n+4}(S^{n+4}) \cong \dots \cong \operatorname{colim}_j \pi_{n+j}(S^j) =: \pi_n^s.$$

Wir behaupten, dass  $E : \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_2(S^2)$  ein Isomorphismus ist. Aus dem Einhängungssatz folgt, dass diese Abbildung surjektiv ist. Somit ist  $\pi_2(S^2)$  eine zyklische Gruppe mit Erzeuger  $\operatorname{id}_{S^2}$ . Es sei nun  $k \in \mathbb{Z}$ . Dann ist  $H_2(k \cdot \operatorname{id}_{S^2}) : H_2(S^2) \rightarrow H_2(S^2)$  gegeben durch Multiplikation mit  $k$ . Angenommen,  $k \cdot \operatorname{id}_{S^2}$  ist nullhomotop. Dann ist auch  $H_2(k \cdot \operatorname{id}_{S^2}) = 0$  und somit  $k = 0$ . Somit ist  $E$  injektiv. Es folgt

$$\mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1) \cong \pi_2(S^2) \cong \dots \cong \pi_j(S^j) \cong \dots \cong \operatorname{colim}_j \pi_j(S^j) = \pi_0^s.$$

Dabei ist  $\operatorname{id}_{S^i}$  ein Erzeuger von  $\pi_i(S^i)$ .

Im Anhang dieser Arbeit befindet sich eine Tabelle mit einigen bekannten Homotopiegruppen von Sphären. Einige Regelmäßigkeiten sind dabei offensichtlich (z. B. die gleichen Einträge in den Spalten  $n=2$  und  $n=3$ ). Eine globale Systematik ist aber nicht erkennbar. Tatsächlich ist das explizite Ausrechnen von Homotopiegruppen selbst von so einfachen Räumen wie den Sphären ein schweres Problem. So sind die stabilen Homotopiegruppen  $\pi_n^s$  berechnet nur für  $n \leq 64$  und unbekannt für größere  $n$  (vgl. [Hat02, S. 384]).

Ziel dieser Arbeit ist es, folgenden Satz von Serre zu zeigen:

**Satz 5** (Serre, 1951). Die Homotopiegruppen  $\pi_i(S^n, *)$ ,  $i > n$ , sind endlich bis auf die Gruppen  $\pi_{4k-1}(S^{2k})$ ,  $k \geq 1$ , welche jeweils isomorph zu einer direkten Summe von  $\mathbb{Z}$  und einer endlichen Gruppe sind.

Zusammengefasst wissen wir also

**Korollar 6.**

$$\pi_i(S^n, *) \cong \begin{cases} 0, & \text{für } i < n \text{ und } i > n = 1 \\ \mathbb{Z}, & \text{für } i = n, \\ \mathbb{Z} \oplus \text{endliche Gruppe}, & \text{für } i = 2n - 1 \text{ und } n \text{ gerade}, \\ \text{endliche Gruppe}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Beweis des Satzes von Serre verwendet die Serre-Spektralsequenz. Das ist ein algebraisches Objekt, welches für eine Faserung  $p : X \rightarrow B$  eine Verbindung zwischen den Homologie- und Kohomologiegruppen von Basisraum  $B$ , Totalraum  $X$  und Faser  $F$  liefert. Wir führen zunächst Faserungen und Spektralsequenzen und die Serre-Spektralsequenz ein. Dann verwenden wir die Serre-Spektralsequenz, um zu zeigen, dass die Homotopiegruppen von einfach zusammenhängenden topologischen Räumen genau dann endlich (erzeugt) sind, wenn die Homologiegruppen endlich (erzeugt) sind. Dies wollen wir anwenden, um den Satz von Serre zu zeigen. Dazu

müssen wir allerdings zunächst den Raum  $S^n$  so abändern, sodass die  $n$ -te Homotopiegruppe verschwindet, die höheren Homotopiegruppen aber erhalten bleiben. Die Homologiegruppen dieses neuen Raumes hängen über die Serre-Spektralsequenz mit denen eines Eilenberg-MacLane-Raumes vom Typ  $K(\mathbb{Z}, n-1)$  zusammen, einem Raum mit nur einer nichtverschwindenden Homotopiegruppe. Deshalb studieren wir zunächst dessen Homologiegruppen und zeigen insbesondere, dass sie endlich erzeugt sind.

Der Aufbau dieser Arbeit orientiert sich an dem ersten Kapitel von [Hat04].

## 2 Faserungen

**Definition 7.** Eine *Serre-Faserung* ist eine stetige Abbildung  $p : E \rightarrow B$ , welche die *Homotopieliftungseigenschaft* (HLE) für die Scheiben  $D^n$  besitzt, d.h. für alle  $n \geq 0$  und für alle stetigen Abbildungen  $H, H_0$  wie unten, sodass das äußere Quadrat kommutiert, gibt es eine stetige Abbildung  $\tilde{H}$ , sodass die beiden Dreiecke kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} D^n & \xrightarrow{H_0} & E \\ i_0 \downarrow & \nearrow \exists \tilde{H} & \downarrow p \\ D^n \times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

Dabei ist  $i_0$  die Inklusion von  $D^n$  in  $D^n \times I$  als  $D^n \times \{0\}$ . Eindeutigkeit von  $\tilde{H}$  wird nicht gefordert.

**Lemma 8.** Es sei  $p : E \rightarrow B$  eine stetige Abbildung. Dann sind äquivalent:

- a)  $p$  ist eine Serre-Faserung
- b)  $p$  besitzt die *relative Homotopieliftungseigenschaft* für CW-Paare, d.h. für alle CW-Paare  $(X, A)$  und für alle  $H_0$  und  $H$  wie unten, sodass das äußere Quadrat kommutiert, gibt eine stetige Abbildung  $\tilde{H}$ , sodass die beiden Dreiecke kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} \cup A \times I & \xrightarrow{H_0} & E \\ \downarrow & \nearrow \exists \tilde{H} & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

*Bemerkung.* Eine *Hurewicz-Faserung* ist eine Serre-Faserung, welche die Homotopieliftungseigenschaft sogar für alle topologischen Räume besitzt.

*Beweis.* „b)  $\implies$  a)“ Folgt sofort mit  $(X, A) := (D^n, \emptyset)$ .

„a)  $\implies$  b)“ Wir behandeln zunächst den Fall  $(X, A) = (D^n, S^{n-1})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $(D^n \times I, D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \cup I) \approx (D^n)$  homöomorph als Raumpaare. Somit ist die relative Homotopieliftungseigenschaft in diesem Fall gleichbedeutend zur Homotopieliftungseigenschaft für die Scheibe  $D^n$ .

Es sei nun  $(X, A)$  ein beliebiges Raumpaare. Dann kann man induktiv die Homotopie  $H$  auf die  $i$ -Zellen  $e_\alpha^i$  von  $X \setminus A$  fortsetzen. Dabei ist die Homotopie auf  $S^{n-1} = \partial D^n$  durch die Komposition der bisher konstruierten Homotopie mit der anheftenden Abbildung  $\phi_\alpha : S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$  vorgegeben. Man erhält die Fortsetzung durch Anwenden des zuerst bewiesenen Falls.  $\square$

**Lemma 9.** Es sei  $p : E \rightarrow B$  eine Serre-Faserung,  $b_0 \in B$ ,  $F := p^{-1}(b_0)$  die Faser über  $b_0$  und  $f_0 \in F$ . Dann gibt es eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow \pi_n(F, f_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, f_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, f_0) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_1(B, b_0)$$

von Homotopiegruppen. Dabei ist  $i : F \hookrightarrow E$  die Inklusion.

*Beweis.* Die gesuchte exakte Sequenz ist die lange exakte Homotopiesequenz

$$\dots \rightarrow \pi_n(F, f_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, f_0) \rightarrow \pi_n(E, F, f_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, f_0) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_1(E, F, f_0)$$

des Raumpaars  $(E, F)$ . Es bleibt zu zeigen:  $\pi_n(E, F, f_0) \cong \pi_n(B, b_0)$  als Gruppe für  $n > 1$  und als punktierte Menge für  $n = 1$ . Der Isomorphismus muss außerdem so gewählt werden, dass

$$p_* = \left( \pi_n(E, f_0) \rightarrow \pi_n(E, F, f_0) \xrightarrow{\cong} \pi_n(B, b_0) \right).$$

Wir zeigen:  $p_* : \pi_n(E, F, f_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$  ist der gesuchte Isomorphismus (damit ist obige Gleichung erfüllt).

*Surjektivität:* Sei  $[g : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, b_0) \rightarrow (B, \{b_0\}, b_0)] \in \pi_{n+1}(B, b_0)$ ,  $n \geq 0$ . Sei  $\tilde{g}$  der Lift im folgenden relativen HLE-Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\text{konst } f_0} & E \\ \downarrow & \searrow \exists \tilde{g} & \downarrow p \\ I^n \times I & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

wobei  $U := I^n \times \{0\} \cup (\partial I^n) \times I \subset I^{n+1}$ . Dann kann man  $\tilde{g}$  als eine Abbildung  $(I^{n+1}, \partial I^{n+1}, U) \rightarrow (E, F, \{f_0\})$  von Raumtripeln auffassen, welche ein Element von  $\pi_{n+1}(E, F, f_0)$  repräsentiert. Es gilt  $p_*[\tilde{g}] = [p \circ \tilde{g}] = [g]$ .

*Injektivität:* Seien  $[h_0], [h_1] \in \pi_{n+1}(E, F, f_0)$  mit  $p_*[h_0] = p_*[h_1]$ . Sei

$$H : I \times I^{n+1}, \quad (t, x) \mapsto H_t(x)$$

eine Homotopie mit  $H_0 = p \circ h_0$ ,  $H_1 = p \circ h_1$ , welche zu jedem Zeitpunkt  $t \in I$  eine Abbildung  $H_t : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}) \rightarrow (B, \{b_0\})$  von Raumpaaren ist. Betrachte folgendes HLE-Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{h} & E \\ \downarrow & \searrow \exists \tilde{H} & \downarrow p \\ I^{n+1} \times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

mit  $V := I^{n+1} \times \{0\} \cup (\partial I^{n+1}) \times I \subset I^{n+2}$  und

$$h|_{\{0\} \times I^{n+1}} := h_0, \quad h|_{\{1\} \times I^{n+1}} := h_1, \quad h|_{I \times U} := \text{konst } f_0.$$

Nun ist  $\tilde{H}$  eine Homotopie von  $h_0$  nach  $h_1$ , welche zu jedem Zeitpunkt  $t$  eine Abbildung  $\tilde{H}_t : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, U) \rightarrow (E, F, \{f_0\})$  von Raumtripeln ist.  $\square$

**Definition 10.** Es seien  $p : E \rightarrow B$  und  $g : X \rightarrow B$  stetig. Der *Pullback* von  $p$  entlang  $g$  ist die Abbildung  $g^*(p) : g^*(E) \rightarrow X$ , wobei  $g^*(E) := X \times_B E$  das Faserprodukt von  $X$  und  $E$  über  $B$  vermöge  $g$  und  $p$  ist.

*Bemerkung.* Pullback ist funktoriell:  $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$  und  $\text{id}^* = \text{id}$ .

**Lemma 11.** Pullbacks von Serre-Faserungen sind Serre-Faserungen.

*Beweis.* Sei  $p : E \rightarrow B$  eine Serre-Faserung und  $g : X \rightarrow B$  stetig. Wir müssen die Existenz des Morphismus  $\tilde{H}$  im folgenden Diagramm zeigen:

$$\begin{array}{ccccc}
D^n & \xrightarrow{H_0} & g^*(E) & \xrightarrow{h} & E \\
\downarrow i_0 & \nearrow \tilde{H} & \downarrow g^*(p) & & \downarrow p \\
D^n \times I & \xrightarrow{H} & X & \xrightarrow{g} & B
\end{array}$$

Aus der HLE von  $p$  erhält wie folgt einen Morphismus  $K$ :

$$\begin{array}{ccccc}
D^n & \xrightarrow{H_0} & X \times_B E & \xrightarrow{h} & E \\
\downarrow i_0 & \nearrow K & & & \downarrow p \\
D^n \times I & \xrightarrow{H} & X & \xrightarrow{g} & B
\end{array}$$

Nun ist  $D^n \times I$  vermöge  $H$  und  $K$  ein Kegel über dem Diagramm  $(X \xrightarrow{g} B \xleftarrow{p} E)$ . Die universelle Eigenschaft von  $g^*(E)$  induziert einen Morphismus  $\tilde{H} : D^n \times I \rightarrow X \times_B E$  mit  $g^*(p) \circ \tilde{H} = H$  und  $h \circ \tilde{H} = K$ . Aus der univ. Eigenschaft von  $g^*(E)$  (Eindeutigkeit) folgt nun  $\tilde{H} \circ i_0 = H_0$ .  $\square$

**Definition 12.** Ein Morphismus  $(g, \tilde{g}) : p' \rightarrow p$  von Serre-Faserungen  $p' : E' \rightarrow B'$  und  $p : E \rightarrow B$  ist ein kommutatives Quadrat der Form

$$\begin{array}{ccc}
E' & \xrightarrow{\tilde{g}} & E \\
\downarrow p' & & \downarrow p \\
B' & \xrightarrow{g} & B
\end{array}$$

**Beispiel 13.** Pullback einer Serre-Faserung  $p$  entlang einer stetigen Abbildung  $g$  induziert einen Morphismus  $(g, \tilde{g}) : g^*(p) \rightarrow p$  von Serre-Faserungen.

**Lemma 14.** Die langen exakten Sequenzen der Homotopiegruppen von Faserungen sind natürlich: Es sei  $(g, \tilde{g}) : p' \rightarrow p$  ein Morphismus von Serre-Faserungen  $p' : E' \rightarrow B'$  und  $p : E \rightarrow B$ ,  $b'_0 \in B'$ ,  $b_0 := g(b'_0)$ ,  $F' := p'^{-1}(b'_0)$ ,  $F := p^{-1}(b_0)$ ,  $f'_0 \in F'$ ,  $f_0 := \tilde{g}(f'_0)$ . Dann gibt es eine „Leiter“ bestehend aus kommutativen Quadraten zwischen den Homotopiesequenzen:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \longrightarrow \pi_n(F', f'_0) & \xrightarrow{i'_*} & \pi_n(E', f'_0) & \xrightarrow{p'_*} & \pi_n(B', b'_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(F', f'_0) \longrightarrow \cdots \\
\downarrow (\tilde{g}|_{F'})_* & & \downarrow \tilde{g}_* & & \downarrow g_* & & \downarrow (\tilde{g}|_{F'})_* \\
\cdots \longrightarrow \pi_n(F, f_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(E, f_0) & \xrightarrow{p_*} & \pi_n(B, b_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(F, f_0) \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

*Beweis.* Folgt aus der Natürlichkeit der langen exakten Homotopiesequenz von Raumpaaren.  $\square$

Es sei  $p : E \rightarrow B$  eine Serre-Faserung,  $\gamma : I \rightarrow B$  ein stetiger Weg. Betrachte die lange exakte Sequenz

$$\cdots \rightarrow \pi_n(F_{\gamma(0)}) \rightarrow \pi_n(\gamma^*(E)) \rightarrow \pi_n(I) \rightarrow \pi_{n-1}(F_{\gamma(0)}) \rightarrow \cdots$$

der Homotopiegruppen von  $\gamma^*(p) : \gamma^*(E) \rightarrow I$  mit Faser

$$F_{\gamma(t)} := \gamma^*(p)^{-1}(t) \subset \gamma^*(E) = \{(t, e) \in I \times E \mid \gamma(t) = p(e)\}.$$

In dieser Sequenz sind die Gruppen  $\pi_n(I)$  trivial. Folglich sind die Abbildungen  $(i_{\gamma(t)})_* : \pi_n(F_{\gamma(t)}, *) \rightarrow \pi_n(\gamma^*(E), *)$  Isomorphismen. In anderen Worten:  $i_{\gamma(t)}$  ist eine schwache Äquivalenz. Aus einem Korollar des Whitehead-Theorems folgt nun, dass  $i_t$  auch in Homologie und Kohomologie Isomorphismen induziert (vgl. Spanier, AT, S. 406, Cor 7.6.25). Wir untersuchen den Isomorphismus

$$T_\gamma := (i_{\gamma(1)})^* \circ ((i_{\gamma(0)})^*)^{-1} : H^*(F_{\gamma(0)}) \xrightarrow{\cong} H^*(F_{\gamma(1)}).$$

**Lemma 15.**  $T_\gamma$  hängt lediglich von der Weghomotopieklasse von  $\gamma$  ab, d.h. ist  $\eta$  ein zweiter Weg mit  $\gamma \simeq \eta$ , so gilt  $T_\gamma = T_\eta$ .

*Beweis.* Sei  $H : I \times I \rightarrow B$  eine Homotopie zw. den Wegen  $\gamma$  und  $\eta$ , d.h.  $H_0 := H(0, -) = \gamma$ ,  $H_1 = \eta$ ,  $H(-, 0) \equiv x$  und  $H(-, 1) \equiv y$  mit  $x := \gamma(0) = \eta(0)$  und  $y := \gamma(1) = \eta(1)$ . Für festes  $s \in I$  sei  $i_s : I \rightarrow I \times I$ ,  $t \mapsto (s, t)$  die Inklusion als  $\{s\} \times I$ . Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H_s^*(E) & \xleftarrow{\tilde{i}_s} & H^*(E) & \longrightarrow & E \\ \downarrow H_s^*(p) & \ulcorner & \downarrow H^*(p) & \ulcorner & \downarrow p \\ I & \xleftarrow{i_s} & I \times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

$\curvearrowright$   $H_s$   $\curvearrowleft$

Sei  $t \in I$  fest. Sei  $F_{s,t} := (H_s^*(p))^{-1}(t) = (H^*(p))^{-1}((s, t))$  und  $f_0 \in F$ . Das linke komm. Diagramm induziert einen Morphismus zw. den langen ex. Homotopieseq. von  $H_t^*(p)$  und  $H^*(p)$ :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \pi_{n+1}(I, t) & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(F_{s,t}, f_0) & \xrightarrow{(i'_{s,t})^*} & \pi_n(H_s^*(E), f_0) & \xrightarrow{H_s^*(p)^*} & \pi_n(I, t) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow i_{s*} & & \parallel & & \downarrow (\tilde{i}_s)^* & & \downarrow i_{s*} & & \\ \dots & \longrightarrow & \pi_{n+1}(I \times I, (s, t)) & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(F_{s,t}, f_0) & \xrightarrow{(i_{s,t})^*} & \pi_n(H^*(E), f_0) & \xrightarrow{H^*(p)^*} & \pi_n(I \times I, (s, t)) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

In diesen Sequenzen verschwinden die Gruppen  $\pi_n(I, t)$  bzw.  $\pi_n(I \times I, (s, t))$ . Folglich induzieren die Abbildungen  $\tilde{i}_s$  Isomorphismen in Homotopie und in Kohomologie. Es gilt nun

$$\begin{aligned} T_\gamma &= (i'_{0,1})^* \circ ((i'_{0,0})^*)^{-1} = (i'_{0,1})^* \circ (\tilde{i}_0)^* \circ (\tilde{i}_0)^{-1} \circ ((i'_{0,0})^*)^{-1} \\ &= (i_{0,1})^* \circ ((i_{0,0})^*)^{-1} \stackrel{(\star)}{=} (i_{1,1})^* \circ ((i_{1,0})^*)^{-1} \\ &= (i'_{1,1})^* \circ (\tilde{i}_1)^* \circ (\tilde{i}_1)^{-1} \circ ((i'_{1,0})^*)^{-1} = (i'_{1,1})^* \circ ((i'_{1,0})^*)^{-1} = T_\eta. \end{aligned}$$

Die Gleichung  $(\star)$  gilt wegen  $i_{0,1} \simeq i_{1,1}$  und  $i_{0,0} \simeq i_{1,0}$ . □

Mit ganz ähnlicher Technik kann man zeigen:

**Lemma 16.** Es seien  $\gamma, \eta : I \rightarrow B$  stetige Wege mit  $\gamma(1) = \eta(0)$ . Dann gilt

$$T_\eta \circ T_\gamma = T_{\gamma \blacksquare \eta} : H^*(F_{\gamma(0)}) \xrightarrow{\cong} H^*(F_{\eta(1)}).$$

Dabei ist die Komposition  $\gamma \blacksquare \eta$  von  $\gamma$  und  $\eta$  folgender Weg:

$$\gamma \blacksquare \eta : I \rightarrow B, \quad s \mapsto \begin{cases} \gamma(2s), & \text{falls } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ \eta(2s - 1), & \text{falls } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

*Beweis.* Betrachte folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} \gamma^*(E) & \xleftarrow{\tilde{j}} & (\gamma \blacksquare \eta)^*(E) & \longrightarrow & E \\ \downarrow \gamma^*(p) & \ulcorner & \downarrow (\gamma \blacksquare \eta)^*(p) & \ulcorner & \downarrow p \\ I & \xleftarrow{j} & I & \xrightarrow{\gamma \blacksquare \eta} & B \end{array}$$

$\curvearrowright$   $\gamma$   $\curvearrowleft$



Dabei ist  $j : I \rightarrow I$  die Abbildung  $s \mapsto s/2$ . Analog zum letzten Lemma sieht man anhand des Leiterdiagramms der langen exakten Sequenzen der Faserungen  $\gamma^*(p)$  und  $(\gamma \blacksquare \eta)^*(p)$ , dass  $\tilde{j}$  einen Isomorphismus in Homotopie und Kohomologie induziert. Es gibt ein ähnliches Diagramm mit  $\eta$  statt  $\gamma$  und  $k : I \rightarrow I$ ,  $s \mapsto (1+s)/2$  statt  $j$ . Es induziert auch  $\tilde{k}$  einen Isomorphismus in Kohomologie. Es gilt nun

$$\begin{aligned}
T_\eta \circ T_\gamma &= (i_{\eta(1)})^* \circ ((i_{\eta(0)})^*)^{-1} \circ (i_{\gamma(1)})^* \circ ((i_{\gamma(0)})^*)^{-1} \\
&= (i_{\eta(1)})^* \circ \tilde{k}^* \circ (\tilde{k}^*)^{-1} \circ ((i_{\eta(0)})^*)^{-1} \circ (i_{\gamma(1)})^* \circ \tilde{j}^* \circ (\tilde{j}^*)^{-1} \circ ((i_{\gamma(0)})^*)^{-1} \\
&= (\tilde{k} \circ i_{\eta(1)})^* \circ ((\tilde{k} \circ i_{\eta(0)})^*)^{-1} \circ (\tilde{j} \circ i_{\gamma(1)})^* \circ ((\tilde{j} \circ i_{\gamma(0)})^*)^{-1} \\
&= (i_{\gamma \blacksquare \eta(1)})^* \circ ((i_{\gamma \blacksquare \eta(1/2)})^*)^{-1} \circ (i_{\gamma \blacksquare \eta(1/2)})^* \circ ((i_{\gamma \blacksquare \eta(0)})^*)^{-1} \\
&= (i_{\gamma \blacksquare \eta(1)})^* \circ ((i_{\gamma \blacksquare \eta(0)})^*)^{-1} = T_{\gamma \blacksquare \eta}. \quad \square
\end{aligned}$$

**Beispiel 17.** Das einfachste Beispiel einer Hurewicz-Faserung ist die *Produktfaserung*, die Projektion  $p_0 : X \times Y \rightarrow X$  eines Produktraumes auf einen Faktor mit Faser  $Y$ .

**Beispiel 18.** Die *Hopf-Faserung* ist eine Abbildung  $\eta : S^3 \rightarrow S^2$ , welche ein nichttriviales Element in  $\pi_3(S^2)$  repräsentiert. Wenn man  $S^3$  mit  $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x| + |y| = 1\}$  identifiziert und  $S^2$  als Riemannsche Zahlenkugel  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  auffasst, so ist  $\eta$  gegeben durch  $\eta(x, y) := x/y$  für  $y \neq 0$  und  $\eta(x, 0) := \infty$ . Man sieht leicht, dass  $\eta$  eine Faserung ist und dass die Faser

$$\eta^{-1}(c) = \{s/(|c| + 1) \cdot (c, 1) \mid s \in \mathbb{C}, |s| = 1\} \approx S^1$$

für alle  $c \in \mathbb{C}$  ist. In der langen exakten Homotopiesequenz

$$\dots \rightarrow \pi_n(S^1) \rightarrow \pi_n(S^3) \xrightarrow{\eta^*} \pi_n(S^2) \rightarrow \pi_{n-1}(S^1) \rightarrow \dots$$

dieser Faserung verschwindet für  $n \geq 3$  die erste und die letzte Gruppe und  $\eta$  liefert einen Isomorphismus zwischen  $\pi_n(S^3)$  und  $\pi_n(S^2)$ . Das ist der Grund für die Ähnlichkeit der Spalten  $n=2$  und  $n=3$  der Tabelle der Homotopiegruppen im Anhang. Die *Hopf-Invariante*  $h(p) \in \mathbb{Z}$  ist eine Homotopieinvariante von Abbildungen  $p : S^{2n-1} \rightarrow S^n$ . Man kann zeigen, dass  $h : \pi_{2n-1}(S^n) \rightarrow \mathbb{Z}$  ein Homomorphismus ist. Da  $h(\eta) = 1$ , besitzt  $\eta$  Ordnung unendlich. Allgemeiner kann man zeigen, dass  $2\mathbb{Z} \subseteq \text{im}(h : \pi_{2n-1}(S^n) \rightarrow \mathbb{Z})$  für gerade  $n$ . Somit ist  $\mathbb{Z}$  ein direkter Summand von  $\pi_{2n-1}(S^n)$  für gerade  $n$ , was einen Teil der Aussage des Satzes von Serre zeigt. Die Konstruktion von  $\eta$  kann man auch mit den Quaternionen bzw. Oktonionen statt den komplexen Zahlen durchführen. Dies ergibt Faserungen  $S^3 \rightarrow S^7 \xrightarrow{\nu} S^4$  und  $S^7 \rightarrow S^{15} \xrightarrow{\sigma} S^8$ , die ebenfalls Hopf-Faserungen genannt werden. In der langen exakten Homotopiesequenz

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & \longrightarrow & \pi_7(S^3) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \cong \pi_7(S^7) & \xrightarrow{\nu_*} & \pi_7(S^4) \longrightarrow \pi_6(S^3) \longrightarrow \pi_6(S^7) = 0 \longrightarrow \dots \\
& & & & \nwarrow & \nearrow & \\
& & & & h & & 
\end{array}$$

von  $\nu$  ist  $h$  eine Retraktion von  $\nu_*$ . Somit gilt  $\pi_7(S^4) \cong \mathbb{Z} \oplus \pi_6(S^3)$ . Die Faserung  $\sigma$  induziert analog  $\pi_{15}(S^8) \cong \mathbb{Z} \oplus \pi_{14}(S^7)$ . Für Details siehe [Hat02, 4.44-4.47 und §4.B].

**Lemma 19.** Man kann jede stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  schreiben als Komposition

$$X \xrightarrow{i} E_f \xrightarrow{p} Y$$

einer Homotopieäquivalenz  $i$  und einer Hurewicz-Faserung  $p$ . Genauer gilt

$$\begin{aligned}
E_f &:= \{(x, \gamma) \in X \times Y^I \mid f(x) = \gamma(0)\} \subset X \times Y^I, \\
i(x) &:= (x, t \mapsto f(x)), \\
p(x, \gamma) &:= \gamma(1),
\end{aligned}$$

wobei  $Y^I$  die Kompakt-Offen-Topologie trägt.

*Beweis.* Offensichtlich sind  $i$  und  $p$  stetig und es gilt  $p \circ i = f$ . Das Homotopie-Inverse von  $i$  ist  $j : E_f \rightarrow X$ ,  $(x, \gamma) \mapsto x$ . Es gilt  $j \circ i = \text{id}_X$  und eine Homotopie zwischen  $i \circ j$  und  $\text{id}_{E_f}$  ist gegeben durch

$$H : I \times E_f \rightarrow E_f, \quad (s, (x, \gamma)) \mapsto (x, \gamma(s \cdot -)).$$

Es bleibt zu zeigen, dass  $p$  eine Faserung ist. Es sei dazu ein topologischer Raum  $A$  und Abbildungen  $H_0 : A \rightarrow E_f$  und  $H : I \times A \rightarrow Y$  mit  $H \circ i_0 = p \circ H_0$  gegeben. Dann ist folgende Abbildung eine Homotopieliftung:

$$\begin{aligned} \tilde{H} : I \times A &\rightarrow E_f, \\ (s, a) &\mapsto \gamma_{s,a}, \quad \gamma_{s,a}(t) := \begin{cases} H_0(a)(t \cdot (1+s)) & \text{falls } t \cdot (1+s) \leq 1, \\ H(t \cdot (1+s) - 1, a) & \text{falls } t \cdot (1+s) \geq 1. \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

Wir betrachten die Inklusion  $i : \{x_0\} \rightarrow X$  des Basispunktes. Durch Lemma 19 erhalten wir eine Faserung  $F \rightarrow E_i \xrightarrow{p} X$  mit  $E_i \simeq \{x_0\}$  zusammenziehbar.

**Definition 20.** Der Totalraum  $PX := E_i = \{\gamma \in X^I \mid \gamma(0) = x_0\}$  heißt *Pfadraum* von  $(X, x_0)$ . Der Basispunkt von  $PX$  ist der konstante Weg  $y_0 : I \rightarrow X$ ,  $t \mapsto x_0$ . Die Faser von  $p$  über  $x_0$  ist der *Schleifenraum*  $\Omega X := \{\gamma \in X^I \mid \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\}$ . Die Faserung  $\Omega X \rightarrow PX \xrightarrow{p} X$  heißt *Pfadfaserung*.

*Bemerkung.* Es seien  $(X, x_0)$  und  $(Y, y_0)$  punktierte Räume. Dann gibt es eine in  $X$  und  $Y$  natürliche Bijektion

$$\begin{aligned} \text{Hom}((\Sigma X, x_0), (Y, y_0)) &\cong \text{Hom}((X, x_0), (\Omega Y, \gamma_0)), \\ f &\mapsto (x \mapsto t \mapsto f([(x, t)])), \\ ([(x, t)] \mapsto g(x)(t)) &\leftarrow g. \end{aligned}$$

### 3 Lokale Koeffizienten

**Definition 21.** Ein *lokales Koeffizientensystem*  $\underline{A}$  auf einem topologischen Raum  $B$  besteht aus abelschen Gruppen  $(A_b)_{b \in B}$  und Isomorphismen  $T_\gamma : A_{\gamma(0)} \xrightarrow{\cong} A_{\gamma(1)}$  für jeden stetigen Weg  $\gamma : I \rightarrow B$ , sodass gilt:

- Sind zwei Wege  $\gamma, \eta : I \rightarrow B$  homotop modulo Endpunkte, so gilt  $T_\gamma = T_\eta$ .
- Für komponierbare Wege  $\gamma, \eta : I \rightarrow B$  gilt  $T_{\gamma \bullet \eta} = T_\eta \circ T_\gamma$ .
- Für den konstanten Weg  $\gamma \equiv b$  gilt  $T_\gamma = \text{id}_{A_b}$ .

*Bemerkung.* Man kann ein lokales Koeffizientensystem auf  $B$  auch als Funktor von dem Fundamentalgruppoid von  $B$  in die Kategorie der abelschen Gruppen auffassen.

**Beispiel 22.** Im letzten Abschnitt wurde gezeigt: Bei einer Serre-Faserung  $p : E \rightarrow B$  bilden die  $q$ -ten Kohomologiegruppen  $A_b := H^q(p^{-1}(b))$  der Fasern ein lokales Koeffizientensystem. Mit dem universellen Koeffiziententheorem sieht man, dass gleiches auch für die Homologiegruppen  $A_b := H^q(p^{-1}(b); G)$  mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe  $G$  gilt. Wir bezeichnen dieses Koeffizientensystem im Folgenden mit  $\mathcal{H}^q(F_p; G)$ .

**Beispiel 23.** Für jede abelsche Gruppe  $G$  gibt es das konstante Koeffizientensystem  $\underline{G}$  mit  $G_b := G$  für alle  $b \in B$  und  $T_\gamma = \text{id}_G$  für alle  $\gamma : I \rightarrow B$ .

Sei im Folgenden  $\Delta_n(B)$  die Menge der  $n$ -Simplizes in  $B$ , also die Menge der stetigen Abbildungen  $\Delta^n \rightarrow B$  mit  $\Delta^n := \text{spann}\{e_0, \dots, e_n\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , und

$$d_n : \Delta_n(B) \rightarrow \Delta_{n-1}(B) \quad \sigma \mapsto \sigma_{\langle e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n \rangle} \quad (0 \leq i \leq n),$$

die Abbildung auf die  $i$ -Seite. Für einen  $n$ -Simplex  $\sigma$  bezeichne  $\sigma_i := \sigma_{\langle e_i \rangle} \in \Delta_0(B) = B$  die  $i$ -te Ecke und  $\sigma_{ij} := \sigma_{\langle e_i, e_j \rangle} \in \Delta_1(B)$  den Weg von  $\sigma_i$  nach  $\sigma_j$  entlang der  $ij$ -Kante von  $\sigma$  ( $0 \leq i \leq j \leq n$ ).

**Definition 24.** Sei  $B$  ein topologischer Raum,  $\underline{A}$  ein lokales Koeffizientensystem auf  $B$ . Der *Kokomplex der singulären Koketten auf  $B$  mit Koeffizienten in  $\underline{A}$*  ist folgendermaßen definiert:

$$C^n(B; \underline{A}) := \prod_{\sigma \in \Delta_n(B)} A_{\sigma_0}, \quad \delta^n((a_\tau)_{\tau \in \Delta_n(B)})_{\sigma \in \Delta_{n+1}(B)} := T_{\sigma_{01}}^{-1}(a_{d_0(\sigma)}) + \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i a_{d_i(\sigma)}.$$

Man überprüft leicht, dass  $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$  gilt. Die Kohomologie  $H^*(B; \underline{A}) := H^*(C^*(B; \underline{A}))$  dieses Kettenkomplexes heißt *singuläre Kohomologie von  $B$  mit Koeffizienten in  $\underline{A}$* .

**Beobachtung 25.** Für das konstante Koeffizientensystem  $\underline{G}$  gilt  $H^*(B; \underline{G}) \cong H^*(B; G)$ . Gewöhnliche Kohomologie mit Koeffizienten ist also ein Spezialfall von Kohomologie mit Koeffizienten in einem lokalen System.

**Definition 26.** Es sei  $\underline{R}$  ein lokales Koeffizientensystem, in dem die Gruppen  $R_b$  sogar Ringe und die Abbildungen  $T_\gamma$  Ringisomorphismen sind. Dann definiert

$$\cup : H^m(B; \underline{R}) \times H^n(B; \underline{R}) \rightarrow H^{m+n}(B; \underline{R}),$$

$$([(a_\sigma)_{\sigma \in \Delta_m(B)}] \cup [(b_\sigma)_{\sigma \in \Delta_n(B)}])_{\tau \in \Delta_{m+n}(B)} := a_{\sigma_{\langle e_1, \dots, e_m \rangle}} \cdot T_{\sigma_{0m}}^{-1}(b_{\sigma_{e_m, \dots, e_{m+n}}})$$

ein Produkt, das sogenannte *Cup-Produkt*.

## 4 Spektralsequenzen

Ein häufig verwendetes Hilfsmittel in der algebraischen Topologie sind lange exakte Sequenzen. Sie liefern einen Zusammenhang zwischen Homologie- oder Homotopiegruppen von verschiedenen Räumen. Wenn man genügend viele dieser Gruppen kennt, so kann man oft rein algebraisch die anderen Gruppen erschließen. Ein Beispiel ist die lange exakte Homotopiesequenz einer Faserung. Nun kann man sich fragen, ob es bei Faserungen auch einen Zusammenhang zwischen den Homologie- und Kohomologiegruppen von Basisraum, Totalraum und Faser gibt. Im Jahr 1951 hat Jean-Pierre Serre in seiner Dissertation [Ser51] gezeigt, dass es einen solchen tatsächlich gibt. Dieser hat jedoch nicht die Form einer langen exakten Sequenz, sondern ist kodiert in einem komplizierten algebraischen Objekt, einer Spektralsequenz.

Es sei  $A$  im Folgenden ein kommutativer Ring mit Eins.

**Definition 27.** Eine (kohomologische) *Spektralsequenz* besteht aus

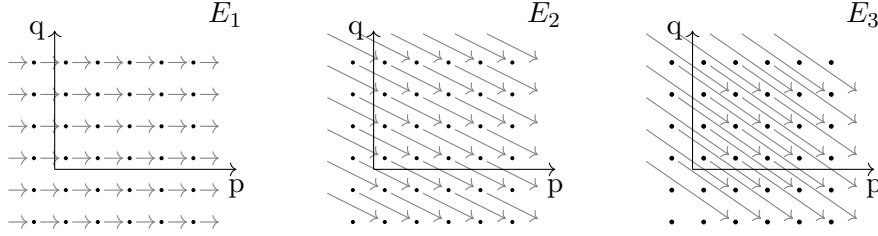
- $A$ -Moduln  $E_r^{p,q}$  für alle  $p, q \in \mathbb{Z}$  und  $r \geq 1$ ,
- $A$ -Modul-Homomorphismen  $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1}$  mit  $d_r^{p+r, q-r+1} \circ d_r^{p,q} = 0$
- und Isomorphismen  $\alpha_r^{p,q} : H^{p,q}(E_r) := \ker(d_r^{p,q}) / \text{im}(d_r^{p-r, q+r-1}) \xrightarrow{\cong} E_{r+1}^{p,q}$ .

*Bemerkung.* • Die Homomorphismen  $d_{p,q}^r$  heißen *Differentiale*.

- Die Gesamtheit der Moduln  $E_r^{p,q}$  und Differentiale  $d_r^{p,q}$  mit  $r \in \mathbb{N}$  fest heißt  $r$ -te Seite  $E_r$ .

- Die Isomorphismen  $\alpha_r^{p,q}$  werden in der Notation unterdrückt und so gerechnet, als wäre  $E_{r+1}^{p,q}$  gleich  $H^{p,q}(E_r)$ . Wenn man eine Seite einer Spektralsequenz kennt, kann man also die Einträge auf der nächsten Seite berechnen, die Differentiale jedoch im Allgemeinen nicht.

Man stellt Seiten für gewöhnlich in einem 2-dimensionalen Raster dar:



**Definition 28.** Eine Spektralsequenz *konvergiert*, falls für alle  $p, q \in \mathbb{Z}$  ein  $R \in \mathbb{N}$  existiert, sodass für alle  $r \geq R$  die Differentiale von und nach  $E_r^{p,q}$  verschwinden und damit  $E_{p,q}^\infty := E_R^{p,q} \cong E_{R+1}^{p,q} \cong \dots$ .

Der Grenzwert der SS ist die Unendlich-Seite  $E_\infty := \{E_\infty^{p,q}\}_{p,q}$ .

*Bemerkung.* Viele Spektralsequenzen sind im ersten Quadranten konzentriert, d. h.  $E_r^{p,q}$  ist nur für  $p, q \geq 0$  ungleich Null. Solche Spektralsequenzen konvergieren immer, denn für alle  $p, q \in \mathbb{Z}$  führen für  $r \geq \max(p+1, q+2)$  alle Differentiale von  $E_r^{p,q}$  aus dem ersten Quadranten heraus und alle dort eintreffenden Differentiale kommen von außerhalb des ersten Quadranten und sind daher Null.

**Definition 29.** Eine *Filtrierung* eines  $A$ -Moduls  $M$  ist eine absteigende Folge

$$M \supseteq \dots \supseteq F^{p-1}M \supseteq F^pM \supseteq F^{p+1}M \supseteq \dots$$

von Untermoduln von  $M$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ . Eine Filtrierung heißt

- *ausschöpfend*, falls  $M = \bigcup_p F^p$ ,
- *Hausdorffsch*, wenn  $0 = \bigcap_p F^pM$  und
- *regulär*, wenn sie ausschöpfend und Hausdorffsch ist.

**Definition 30.** Eine Spektralsequenz  $E$  *konvergiert gegen* einen graduierten  $A$ -Modul  $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M^n$  (notiert  $E_r^{p,q} \Rightarrow M^{p+q}$ ), falls  $E$  überhaupt konvergiert und reguläre Filtrierungen

$$M^n \supseteq \dots \supseteq F^{p-1}M^n \supseteq F^pM^n \supseteq F^{p+1}M^n \supseteq \dots$$

existieren, sodass  $E_\infty^{p,q} \cong F^pM^{p+q}/F^{p+1}M^{p+q}$  für alle  $p, q \in \mathbb{Z}$ .

In der Anwendung von Spektralsequenzen kennt man oft die Einträge der  $E_1$  oder  $E_2$ -Seite. Man versucht dann, die Einträge der  $E_\infty$ -Seite zu bestimmen, indem man sukzessive die Seiten  $E_r$  ausrechnet. Das Problem dabei ist, dass die dazu benötigten Differentiale auf diesen Seiten im Allgemeinen nicht bekannt sind. In der Praxis hofft man darauf, dass Differentiale allein deswegen verschwinden, da ihre Quell- bzw. Zielgruppe die Nullgruppe ist. Man kann auch partielle Information über die  $E_\infty$ -Seite verwenden, um Aussagen über Differentiale zu treffen, z. B. dass ein Differential ein Isomorphismus ist.

Angenommen, man hat auf diesem Weg die Seite  $E_\infty$  einer Spektralsequenz, welche gegen  $M$  konvergiert, berechnet. Dann kennt man immer noch nicht die Moduln  $M^n$ , sondern lediglich die Quotienten in einer Filtrierung von  $M^n$ . Im Fall, dass  $A$  ein Körper ist, ist  $M^n$  isomorph zur direkten Summe dieser Quotienten. Im Allgemeinen ist das aber nicht der Fall, wie das Beispiel der Filtrierung  $\mathbb{Z} \supseteq 2\mathbb{Z} \supseteq 0$  der abelschen Gruppe  $\mathbb{Z}$  zeigt.

Anders herum kann man Spektralsequenzen auch verwenden, um von  $E_\infty$  (oder den Moduln  $M^n$ ) auf  $E_2$  bzw.  $E_1$  zu schließen. Dies werden wir tun, um die Homologie von Eilenberg-MacLane-Räumen mit Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$  zu bestimmen.

## 5 Die Spektralsequenz eines filtrierten Komplexes

**Definition 31.** Eine *Filtrierung eines Kokettenkomplexes*  $C^\bullet$  ist eine absteigende Folge

$$C^\bullet \supseteq \dots \supseteq F^{p-1}C^\bullet \supseteq F^pC^\bullet \supseteq F^{p+1}C^\bullet \supseteq \dots$$

von Unterkomplexen.

**Lemma 32.** Es sei  $C^\bullet$  ein filtrierter Kokettenkomplex. Es gibt eine Spektralsequenz mit

$$E_1^{pq} = H^{p+q}(F^pC^\bullet / F^{p+1}C^\bullet).$$

Angenommen, die Filtrierung ist

- a) *gradweise nach unten beschränkt*, d. h. für alle  $q \in \mathbb{Z}$  gibt es ein  $p \in \mathbb{Z}$  mit  $F^pC^q = 0$ ,
- b) *ausschöpfend*, d. h. für alle  $q \in \mathbb{Z}$  ist  $\cup_p F^pC^q = C^q$  und
- c) für alle  $q \in \mathbb{Z}$  gibt es ein  $P \in \mathbb{Z}$ , sodass für alle  $p \leq P$  gilt: Die Inklusion  $F^pC^\bullet \hookrightarrow C^\bullet$  induziert einen Isomorphismus  $H^q(F^pC^\bullet) \cong H^q(C^\bullet)$  in Kohomologie.

Dann konvergiert die Spektralsequenz gegen  $H^*(C^\bullet)$ .

Wir führen zunächst etwas neue Notation ein. Diese hilft, den Beweis verständlicher zu formulieren. Wir fassen im Folgenden den Kettenkomplex als ein einziges Modul  $C := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} C^n$  anstatt als Folge von Moduln auf. Dieses Modul ist filtriert durch die Untermodule  $F^p := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} F^pC^n$ . Wir setzen  $F^{-\infty} := C$  und  $F^\infty := 0$ . Die Korandabbildung fassen wir als Homomorphismen  $d : C \rightarrow C$  mit  $d \circ d = 0$  auf, der die Filtrierung von  $C$  respektiert.

Wir sind interessiert an der Kohomologie von  $C^\bullet$ , also an  $H^*(C) := \ker(d)/\text{im}(d)$  und an der Kohomologie von  $F^p/F^{p+1}$ , also  $H^*(F^p/F^{p+1}) \cong (d|_{F^p})^{-1}(F^{p+1})/d(F^p)$ . Wir geben nun eine Verallgemeinerung der Definition der Kohomologie von  $C^\bullet$  und der Kohomologie des Quotientenkomplexes  $F^p/F^q$ : Statt Zykeln (d. h. Elementen  $c \in C$  mit  $d(c) = 0$ ) betrachten wir *z-Zykel*, das sind Elemente  $c \in C$  mit  $d(c) \in F^z$ . Wir teilen diese durch die Menge  $d(F^b)$  der *b-Ränder* anstatt durch die Menge  $d(C)$  der Ränder. Wir setzen

$$S[z, q, p, b] := \frac{F^p \cap d^{-1}(F^z)}{(F^p \cap d^{-1}(F^z)) \cap (F^q + d(F^b))}.$$

Wir haben als Spezialfälle

$$S[p, q, p, q] \cong F^p/F^q \quad \text{und} \quad S[q, q, p, p] \cong H^*(F^p/F^q).$$

**Lemma 33.** Es sei  $z_1 \geq q_1 \geq p_1 = z_2 \geq b_1 = q_2 \geq p_2 \geq b_2$ . Dann ist folgende Abbildung ein wohldefinierter Homomorphismus:

$$d^* : S[z_2, q_2, p_2, b_2] \rightarrow S[z_1, q_1, p_1, b_1], \quad [c] \mapsto [d(c)].$$

*Beweis.* Falls  $[c] = 0$  in  $S[z_2, q_2, p_2, b_2]$ , so existieren  $x \in F^{q_2}$  und  $y \in F^{b_2}$  mit  $c = x + d(y)$ . Somit gilt  $d^*[c] = [dc] = [d(x) + d^2(y)] = [d(x)] = 0$  in  $S[z_1, q_1, p_1, b_1]$ , da  $F^{b_1} = F^{q_2}$ .  $\square$

**Lemma 34.** Es seien Filtrierungsindizes wie folgt gegeben:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & z_3 & \geq & q_3 & \geq & p_3 & \geq & b_3 \\ & & & & \parallel & & \parallel & & & & \\ & & & & z_2 & \geq & q_2 & \geq & p_2 & \geq & b_2 \\ & & & & \parallel & & \parallel & & & & \\ z_1 & \geq & q_1 & \geq & p_1 & \geq & b_1 & & & & \end{array}$$

Dann ist

$$\alpha : S[q_1, q_2, p_2, p_3] \rightarrow \frac{\ker(d^* : S[z_2, q_2, p_2, b_2] \rightarrow S[z_1, q_1, p_1, b_1])}{\operatorname{im}(d^* : S[z_3, q_3, p_3, b_3] \rightarrow S[z_2, q_2, p_2, b_2])}, \quad [c] \mapsto [c]$$

ein wohldefinierter Isomorphismus.

*Beweis.* Sei  $A$  der Quotient auf der rechten Seite.

*Wohldefiniertheit:* Sei  $[c] = 0$  in  $S[q_1, q_2, p_2, p_3]$ , d. h. es gibt  $e \in F^{q_2} = F^{b_1}$  und  $f \in F^{p_1}$  mit  $c = e + d(f)$ . Dann ist  $d^*[c] = [d(c)] = [d(e)] = 0$  in  $S[z_1, q_1, p_1, b_1]$ , also  $c \in \ker(d^* : S[z_2, q_2, p_2, b_2] \rightarrow S[z_1, q_1, p_1, b_1])$ . Nun ist  $f \in d^{-1}(F^{z_3})$ , da  $d(f) = c - e \in F^{p_2} = F^{z_3}$ . Es gilt  $[c] = [e + d(f)] = [d(f)] = d^*[f] = 0$  in  $A$ .

*Injektivität:* Sei  $c \in F^{p_2} \cap d^{-1}(F^{q_1})$  mit  $[c] = 0$  in  $A$ . Das heißt, es gibt  $e \in F^{q_2}$ ,  $f \in F^{b_2}$  und  $g \in F^{p_3} \cap d^{-1}(F^{z_3})$  mit  $c = e + d(f) + d(g)$ . Dann ist  $[c] = [e + d(f + g)] = 0$  in  $S[q_1, q_2, p_2, p_3]$ , da  $f + g \in F^{p_3}$ .

*Surjektivität:* Sei  $\tilde{c} \in F^{p_2} \cap d^{-1}(F^{z_2})$  mit  $[\tilde{c}] \in \ker(d^* : S[z_2, q_2, p_2, b_2] \rightarrow S[z_1, q_1, p_1, b_1])$ . Das heißt, es gibt  $e \in F^{q_1}$  und  $f \in F^{b_1} = F^{q_2}$  mit  $d(\tilde{c}) = e + d(f)$ . Dann ist  $[\tilde{c}] = [\tilde{c} - f]$  in  $S[q_1, q_2, p_2, p_3]$  mit  $\tilde{c} - f \in F^{p_2} \cap d^{-1}(F^{q_1})$ , da  $d(\tilde{c} - f) = e \in F^{q_1}$ .  $\square$

*Beweis des Lemmas über Existenz der Spektralsequenz.* Wir beachten jetzt wieder, dass  $C$  und damit  $S[z, q, p, b]$  graduert und  $d$  ein Differential vom Grad  $+1$  ist. Es sei  $S[z, q, p, b]^n$  die  $n$ -te Komponente. Setze

$$E_r^{pq} := S[p+r, p+1, p, p-r+1]^{p+q}.$$

Die Differentiale sind

$$d_r^{pq} : \underbrace{S[p+r, p+1, p, p-r+1]^{p+q}}_{=E_r^{p,q}} \rightarrow \underbrace{S[p+2r, p+r+1, p+r, p+1]^{p+q+1}}_{=E_r^{p+r, q-r+1}}, \quad [c] \mapsto [d(c)].$$

Sie sind wohldefiniert nach Lemma 33. und wegen Lemma 34 ist

$$\alpha_r^{pq} : H^{p,q}(E_r) = \ker(d_r^{pq}) / \operatorname{im}(d_r^{p-r, q+r-1}) \rightarrow E_{r+1}^{pq}, \quad [c] \mapsto [c]$$

ein wohldefinierter Isomorphismus.

*Beweis der Konvergenz:* Es seien  $p, q \in \mathbb{Z}$ . Wegen Bedingung a) gibt es ein  $R_1 \geq 0$ , sodass  $F^{p+R_1}C^{p+q+1} = 0$ . Für  $r \geq R_1$  ist damit  $E_r^{p+r, q-r+1}$  als Subquotient (d. h. Quotient eines Untermoduls) von  $F^{p+R_1}C^{p+q+1}$  Null. Folglich verschwindet auch das Differential  $d_r^{pq}$ . Wegen Bedingung c) gibt es ein  $S \in \mathbb{Z}$ , sodass  $F^s C^\bullet \hookrightarrow C^\bullet$  und somit auch  $F^s C^\bullet \hookrightarrow F^{s-1} C^\bullet$  für  $s \leq S$  einen Isomorphismus in  $H^{p+q-1}$  und  $H^{p+q}$  induziert. Anhand der langen exakten Sequenz zu  $0 \rightarrow F^s C^\bullet \rightarrow F^{s-1} C^\bullet \rightarrow F^{s-1} C^\bullet / F^s C^\bullet \rightarrow 0$  sieht man, dass  $H^{p+q-1}(F^{s-1} C^\bullet / F^s C^\bullet) = 0$ . Somit ist  $E_r^{p-r, q+r-1}$  für  $r \geq R_2 := p - s + 1$  als Submodul von  $H^{p+q-1}(F^{p-r} C^\bullet / F^{p-r+1} C^\bullet)$  Null. Folglich verschwindet auch  $d_r^{p-r, q+r-1}$ . Mit  $R := \max(R_1, R_2)$  gilt dann  $E_R^{pq} \cong E_{R+1}^{pq} \cong \dots \cong E_\infty^{pq}$ .

Sei  $H^n(C^\bullet)$  absteigend filtriert durch  $F^p H^n(C^\bullet) := \operatorname{im}(i^* : H^n(F^p C^\bullet) \rightarrow H^n(C^\bullet))$ . Für  $r \geq R$  ist

$$E_\infty^{pq} \cong E_r^{pq} = \frac{F^p C^{p+q} \cap d^{-1}(0)}{(F^p C^{p+q} \cap d^{-1}(0)) \cap (F^{p+1} C^{p+q} + d(F^{p-r+1} C^{p+q-1}))} = S[\infty, p+1, p, p-r+1]^{p+q}.$$

Es ist daher  $F^p H^{p+q}(C^\bullet) / F^{p+1} H^{p+q}(C^\bullet) \cong S[\infty, p+1, p, -\infty]^{p+q}$  ein Quotient von  $E_\infty^{pq}$ . Tatsächlich gilt  $S[\infty, p+1, p, -\infty]^{p+q} \cong E_\infty^{pq}$ , denn: Sei  $c \in F^p C^{p+q} \cap d^{-1}(0)$  mit  $[c] = 0$  in  $S[\infty, p+1, p, -\infty]^{p+q}$ . Dann gibt es ein  $e \in F^{p+1} C^{p+q}$  und ein  $f \in C^{p+q-1}$  mit  $c = e + d(f)$ . Wegen Bedingung b) gibt es ein  $\tilde{p} \in \mathbb{Z}$  mit  $f \in F^{\tilde{p}} C^{p+q+1}$ . Wähle  $r$  so, dass  $r \geq R$  und  $p - r + 1 \leq \tilde{p}$ . Dann ist  $[c] = [e] + [d(f)] = 0$  in  $E_r^{pq} \cong E_\infty^{pq}$ .  $\square$

## 6 Die Serre-Spektralsequenz

**Satz 35** (Jean-Pierre Serre). Es sei  $G$  eine abelsche Gruppe. Für jede Serre-Faserung  $p : E \rightarrow B$  existiert eine Spektralsequenz mit

$$E_2^{p,q} = H^p(B; \mathcal{H}^q(F_p; G)),$$

welche gegen  $H^*(E)$  konvergiert.

*Beweis.* **TODO:** □

Kohomologie besitzt gegenüber Homologie den Vorteil, dass die Kohomologiegruppen mit dem Cup-Produkt einen graduierten Ring bilden. Diese zusätzliche Struktur ermöglicht es, Räume zu unterscheiden, die die gleichen Homologie- und damit auch Kohomologiegruppen besitzen. Solch eine multiplikative Struktur existiert auch auf der Serre-Spektralsequenz in Kohomologie:

**Satz 36.** Es sei  $R$  ein Ring,  $p : E \rightarrow B$  eine Serre-Faserung. Dann gibt es bilineare Abbildungen

$$m_r = m_r^{p,q,s,t} : E_r^{p,q} \times E_r^{s,t} \rightarrow E_r^{p+s,q+t}, \quad (x, y) \mapsto m_r(x, y) =: xy$$

mit folgenden Eigenschaften:

- (i)  $d_r$  ist derivativ:  $d_r^{p+s,q+t}(xy) = (d_r^{p,q}x)y + (-1)^{p+q}x(d_r^{s,t}y)$  für alle  $x \in E_r^{p,q}$  und  $y \in E_r^{s,t}$
- (ii) Es gilt  $m_{r+1}([x], [y]) = [m_r(x, y)]$  für alle  $x \in \ker(d_r^{p,q})$  und  $y \in \ker(d_r^{s,t})$ .  
Dabei ist  $m_r(x, y) \in \ker(d_r^{p+s,q+t})$  wegen (i).
- (iii) Auf der  $E_2$ -Seite ist  $m_2 : E_2^{p,q} \times E_2^{r,s} \rightarrow E_2^{p+r,q+s}$  das  $(-1)^{qs}$ -fache des Cup-Produkts

$$H^p(B; \mathcal{H}^q(F; R)) \times H^s(B; \mathcal{H}^t(F; R)) \rightarrow H^{p+s}(B; \mathcal{H}^{q+t}(F; R)),$$

welches für  $a = [(a_\sigma)_{\sigma \in \Delta_m(B)}] \in H^p(B; \mathcal{H}^q(F; R))$  und  $b = [(b_\sigma)_{\sigma \in \Delta_n(B)}] \in H^s(B; \mathcal{H}^t(F; R))$  definiert ist durch

$$(a \cup b)_{\sigma \in \Delta_{p+s}(B)} := a_{\sigma_{\langle e_1, \dots, e_m \rangle}} \cup T_{\sigma_{0m}}^{-1}(b_{\sigma_{\langle e_m, \dots, e_{m+n} \rangle}}).$$

- (iv) Das Cup-Produkt auf  $H^*(B; R)$  respektiert die Filtrierungen von  $H^n(B; R)$  und schränkt daher ein zu Abbildungen  $F_p^m \times F_s^n \rightarrow F_{p+s}^{m+n}$ . Die induzierte Abbildung auf dem Quotienten  $F_p^m/F_{p+1}^m \times F_s^n/F_{s+1}^n \rightarrow F_{p+s}^{m+n}/F_{p+s+1}^{m+n}$  entspricht dem Grenzwert  $m_\infty : E_\infty^{p,m-p} \times E_\infty^{s,n-s} \rightarrow E_\infty^{p+s,m+n-p-s}$  der Multiplikationen  $m_r$ .

*Beweis.* **TODO:** □

Es gibt eine Version des Satzes für Serre für Homologie anstatt Kohomologie. In Homologie wird eine andere Indizierung für Spektralsequenzen verwendet:

**Definition 37.** Eine homologische *Spektralsequenz* besteht aus

- $A$ -Moduln  $E_{p,q}^r$  für alle  $p, q \in \mathbb{Z}$  und  $r \geq 1$ ,
- $A$ -Modul-Homomorphismen  $d_{p,q}^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r$  mit  $d_{p-r,q+r-1}^r \circ d_{p,q}^r = 0$
- und Isomorphismen  $\alpha_{p,q}^r : H_{p,q}(E^r) := \ker(d_{p,q}^r) / \text{im}(d_{p+r,q-r+1}^r) \xrightarrow{\cong} E_{p,q}^{r+1}$ .

Jede homologische Spektralsequenz  $E$  liefert eine kohomologische Spektralsequenz, wenn man  $E_r^{p,q} := E_{-p,-q}^r$  setzt.

**Definition 38.** Eine homologische Spektralsequenz  $E$  *konvergiert gegen* einen graduierten  $A$ -Modul  $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$  (notiert  $E_{p,q}^r \Rightarrow M_{p+q}$ ), falls  $E$  überhaupt konvergiert und reguläre Filtrierungen

$$0 \subseteq \dots \subseteq F^{p-1}M_n \subseteq F^pM_n \subseteq F^{p+1}M_n \subseteq \dots$$

existieren, sodass  $E_{pq}^\infty \cong F^pM_{p+q}/F^{p+1}M_{p+q}$  für alle  $p, q \in \mathbb{Z}$ .

**Satz 39** (Jean-Pierre Serre). Es sei  $G$  eine abelsche Gruppe. Für jede Serre-Faserung  $p : E \rightarrow B$  existiert eine (homologische) Spektralsequenz mit

$$E_{p,q}^2 = H_p(B; \mathcal{H}_q(F_p; G)),$$

welche gegen  $H_*(E)$  konvergiert.

Dabei bilden die  $q$ -ten Homologiegruppen der Fasern ein lokales Koeffizientensystem mit  $\mathcal{H}_q(F_p; G)_b = H_q(p^{-1}(b))$ . Homologie mit einem Koeffizientensystem  $\underline{A}$  ist analog zu Kohomologie mit Koeffizientensystem definiert. Falls  $B$  einfach zusammenhängend ist oder allgemeiner  $\pi_1(B)$  trivial auf den Homologiegruppen der Faser wirkt, so gilt  $H_p(B; \mathcal{H}_q(F_p; G)) \cong H_p(B; H_q(F_p; G))$ .

## 7 Töten von Homotopiegruppen und Eilenberg-MacLane-Räume

Es sei  $X$  ein zusammenhängender CW-Komplex. Wähle Erzeuger  $\{\phi_\alpha : S^n \rightarrow X \mid \alpha \in A\}$  von  $\pi_n(X)$ . Benutze diese Abbildungen, um einen neuen CW-Komplex  $X'$  auch  $X$  durch Ankleben von  $n+1$ -Zellen  $e_\alpha^{n+1}$  zu konstruieren. Das heißt folgendes Diagramm ist ein Pushout:

$$\begin{array}{ccc} S^n \times A & \xrightarrow{\sqcup \phi_\alpha} & X \\ i \times \text{id}_A \downarrow & & \downarrow \\ D^{n+1} \times A & \xrightarrow{j} & X' \end{array}$$

**Lemma 40.** Die Abbildungen  $\pi_j(X \xrightarrow{i} X')$  sind Isomorphismen für  $j < n$  und  $\pi_n(X') = 0$ .

*Beweis.* Aus zellulärer Approximation (siehe [Hat02, 4.8]) folgt:

- Für alle  $x \in \pi_j(X')$ ,  $j \leq n$  gibt es eine Abbildung  $f : S^n \rightarrow X$  mit  $x = [i \circ f]$ .
- Falls für zwei Abbildungen  $f, g : S^j \rightarrow X$ ,  $j < n$  eine basispunkterhaltende Homotopie  $H$  zwischen  $i \circ f : S^j \rightarrow X'$  und  $i \circ g$  existiert, so auch zwischen  $f$  und  $g$ .

Somit ist  $\pi_j(i)$  bijektiv für  $j < n$  und surjektiv für  $j = n$ . Um zu sehen, dass  $\pi_n(X') = 0$ , reicht es zu zeigen, dass  $\pi_n(i)[f_\alpha] = [i \circ f_\alpha] = 0$  für alle  $\alpha \in A$ . Das gilt nach Konstruktion, da die charakteristische Abbildung  $\Phi : e_\alpha^{n+1} \rightarrow X'$  eine Fortsetzung von  $i \circ f_\alpha$  auf  $D^{n+1}$  ist.  $\square$

Wir haben jedoch keine Kontrolle über die höheren Homotopiegruppen  $\pi_j(X)$ ,  $j > n$ . Diese können von der Wahl der Erzeuger abhängen. Wir können jedoch mit dem Verfahren fortfahren, und diese Gruppen ebenfalls zu Null machen. Dazu führen wir obige Konstruktion durch und erhalten eine Folge

$$\dots = X_{n-2} = X_{n-1} := X \subseteq X' =: X_n \subseteq X_{n+1} \subseteq X_{n+2} \subseteq \dots$$

von CW-Komplexen, für die gilt:

- $X_m$  entsteht aus  $X_{m-1}$  durch Ankleben von  $(m+1)$ -Zellen.
- $\pi_j(X_m \hookrightarrow X_k)$  ist ein Isomorphismus für  $j \leq m$ .



- $\pi_j(X_m) = 0$  für  $n \leq j \leq m$

Wir setzen  $\tau_{<n} := \bigcup_{j=n}^{\infty} X_j$ .

**Lemma 41.** Die Inklusion  $i : X \rightarrow \tau_{<n}X$  induziert Isomorphismen  $\pi_j(X) \rightarrow \pi_j(\tau_{<n}X)$  für  $j < n$ . Es gilt  $\pi_j(\tau_{<n}X) = 0$  für  $j \geq n$ .

*Beweis.* Aus zellulärer Approximation folgt:

- Jedes Element  $x \in \pi_j(\tau_{<n}X)$  wird repräsentiert durch eine Abbildung  $f : S^j \rightarrow X_j$ .
- Falls  $i \circ f \sim i \circ g$  für  $f, g : S^j \rightarrow X_j$ , so gilt auch  $f \sim g$ .

Das zeigt die Behauptung, da  $\pi_j(X_j) = 0$  für  $j \geq n$ . □

Der Raum  $\tau_{<n}X$  hängt auch nicht (bis auf Homotopie) von den Wahlen der Erzeuger ab: Es seien dazu  $Y, Y' \supset X$  zwei durch obiges Verfahren aus  $X$  konstruierte Räume. Dann kann man die Inklusionsabbildung  $i : X \hookrightarrow Y'$  fortsetzen zu einer Abbildung  $f : Y \rightarrow Y'$ , indem man induktiv  $f$  auf das  $j$ -Skelett,  $j > n$  fortsetzt. Dies ist möglich, da für eine  $j$ -Zelle  $e_\beta^j$  die Einschränkung  $f|_{\partial e_\beta^j}$  nullhomotop ist. Die Abbildung  $f$  ist dann eine Homotopieäquivalenz nach dem Whitehead-Theorem.

Nun können wir mit Lemma 19 die Abbildung  $i : X \rightarrow \tau_{<n}X$  in eine Faserung  $F \rightarrow E_i \rightarrow \tau_{<n}X$  mit  $E_i \simeq X$  umwandeln. Anhand der langen exakten Sequenz von Homotopiegruppen sieht man, dass  $\pi_j(F \rightarrow E_i)$  ein Isomorphismus ist für  $j \geq n$  und dass  $\pi_j(F) = 0$  für  $j < n$ . Wir haben es also geschafft, einen  $(n-1)$ -zusammenhängenden Raum  $\tau_{\geq n}X := F$  zu konstruieren, der im Grad  $j \geq n$  dieselben Homotopiegruppen wie  $X$  besitzt. Mit anderen Worten: Wir haben die Homotopiegruppen unterhalb Grad  $n$  getötet. Die Faserung  $\tau_{\geq n}X \rightarrow X' \rightarrow \tau_{<n}X$  mit  $X' := E_i \simeq X$  wird uns im Folgenden erlauben, (die Homotopiegruppen von)  $X$  zu untersuchen, indem wir  $\tau_{\geq n}X$  und  $\tau_{<n}X$  studieren.

**Definition 42.** Sei  $G$  eine Gruppe,  $n \geq 1$ . Ein *Eilenberg-MacLane-Raum* vom Typ  $K(G, n)$  ist ein punktierter, zusammenhängender topologischer Raum  $(X, x_0)$  mit

$$\pi_q(X, x_0) = \begin{cases} G & \text{falls } q = n, \\ 0 & \text{falls } q \neq n. \end{cases}$$

**Lemma 43.** Sei  $G$  eine abelsche Gruppe,  $n \geq 2$ . Dann existiert ein CW-Komplex  $(X, x_0)$  vom Typ  $K(G, n)$ .

*Beweis.* TODO □

*Bemerkung.* Sei  $(X, x_0)$  ein  $K(G, n)$ . Dann ist  $\Omega X$  ein  $K(G, n-1)$ , denn

$$\begin{aligned} \pi_q(\Omega X, \gamma_0) &\cong \text{Hom}((S^q, *), (\Omega X, \gamma_0)) \cong \text{Hom}((\Sigma S^q, *), (X, x_0)) \cong \pi_{q+1}(X, x_0) \\ &\cong \begin{cases} G & \text{falls } q+1 = n \iff q = n-1 \\ 0 & \text{falls } q+1 \neq n. \end{cases} \end{aligned}$$

## 8 Das Hurewicz-Mod- $\mathcal{C}$ -Theorem

Sei  $(X, x_0)$  ein punktierter topologischer Raum. Für  $n \geq 1$  liefert der Hurewicz-Homomorphismus  $h_n : \pi_n(X, x_0) \rightarrow H_n(X; \mathbb{Z})$  einen Zusammenhang zwischen der  $n$ -ten Homotopiegruppe und der  $n$ -ten Homologiegruppe von  $X$ . Er ist definiert durch  $h_n([f]) := H_n(f)(\alpha)$  für einen fest gewählten Erzeuger  $\alpha \in H_n(S^n; \mathbb{Z})$ .

**Satz 44** (Hurewicz). Sei  $(X, x_0)$  ein  $(n-1)$ -zusammenhängender topologischer Raum, d. h.  $\pi_i(X, x_0) = 0$  für  $i < n$ . Dann ist  $h_i : \pi_i(X, x_0) \rightarrow H_i(X; \mathbb{Z})$  ein Isomorphismus für  $0 < i \leq n$ . Insbesondere gilt  $H_i(X; \mathbb{Z}) = 0$  für  $0 < i < n$ .

Ein Beweis dieses Satzes wird in [Hat02, 4.32] geführt.

**Definition 45.** Eine Klasse  $\mathcal{C}$  von abelschen Gruppen heißt *Serre-Klasse*, falls

1. Für jede kurze exakte Sequenz  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  von abelschen Gruppen gilt:  
 $B \in \mathcal{C} \iff A, C \in \mathcal{C}$ .
2. Für  $A, B \in \mathcal{C}$ , sind auch  $A \otimes B \in \mathcal{C}$  und  $\text{Tor}(A, B) \in \mathcal{C}$ .

*Bemerkung.* Aus der ersten Eigenschaft folgt, dass Bilder, Untergruppen und Quotienten einer Gruppe aus  $\mathcal{C}$  wieder in  $\mathcal{C}$  sind. Genauer gilt für eine ab. Gruppe  $B$  und eine Untergruppe  $A < B$ :  
 $B \in \mathcal{C} \iff A, B/A \in \mathcal{C}$ . Durch Induktion kann man zeigen, dass für eine Gruppe  $A$  mit endlicher Filtrierung  $A = F^0 A \supseteq F^1 A \supseteq \dots \supseteq F^k A = 0$  gilt:  $A \in \mathcal{C} \iff F^0 A/F^1 A, \dots, F^{k-1} A/F^k A \in \mathcal{C}$ . Außerdem ist die direkte Summe zweier Gruppen aus  $\mathcal{C}$  wieder in  $\mathcal{C}$ .

**Definition 46.** Es sei  $\mathcal{C}$  eine Serre-Klasse. Ein Morphismus  $f : A \rightarrow B$  zwischen abelschen Gruppen heißt *Isomorphismus modulo  $\mathcal{C}$* , falls  $\ker(f), \text{coker}(f) \in \mathcal{C}$ .

*Bemerkung.* Dies ist äquivalent zur Existenz einer exakten Sequenz  $K \rightarrow A \xrightarrow{f} B \rightarrow C$  mit  $K, C \in \mathcal{C}$ . Eine Gruppe, welche modulo- $\mathcal{C}$ -isomorph zu einer Gruppe aus  $\mathcal{C}$  ist, ist selbst in  $\mathcal{C}$ .

**Beispiele 47.** Man kann leicht zeigen, dass folgende Klassen die Definition 45 erfüllen:

- $\mathcal{FG} := \{ \text{endlich erzeugte ab. Gruppen} \}$
- $\mathcal{F} := \{ \text{endliche ab. Gruppen} \}$

*Beweis.* Es sei  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen. Falls  $B$  endlich ist, so □

**Satz 48** („Hurewicz-mod- $\mathcal{C}$ -Theorem“). Es sei  $\mathcal{C} \in \{\mathcal{FG}, \mathcal{F}\}$  und  $(X, x_0)$  ein einfach zusammenhängender topologischer Raum. Angenommen,  $\pi_i(X, x_0) \in \mathcal{C}$  für  $0 < i < n$ . Dann ist  $h_i : \pi_i(X, x_0) \rightarrow H_i(X; \mathbb{Z})$  ein Isomorphismus modulo  $\mathcal{C}$  für  $i \leq n$ . Insbesondere gilt  $H_i(X; \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}$  für  $0 < i < n$ .

Mit  $\mathcal{C} := \{0\}$  ist die Aussage des Satzes gerade die des gewöhnlichen Hurewicz-Theorem.

**Korollar 49.** Es sei  $\mathcal{C} \in \{\mathcal{FG}, \mathcal{F}\}$  und  $(X, x_0)$  ein einfach zusammenhängender topologischer Raum. Dann gilt für alle  $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ :

$$\forall 0 \leq n < N : \pi_n(X, x_0) \in \mathcal{C} \iff \forall 1 \leq n < N : H_n(X; \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}.$$

*Beweis.* Die Aussage folgt aus Satz 48 durch Induktion über  $N$ . □

Aus dem Korollar folgt, dass die Homotopiegruppen der Sphären alle endlich erzeugt sind, da die Homologiegruppen der Sphären endlich erzeugt sind.

**Definition 50.** Es sei  $\mathcal{C}$  eine Serre-Klasse. Ein topologischer Raum  $X$  heißt  *$\mathcal{C}$ -azyklisch*, falls  $\tilde{H}_n(X) \in \mathcal{C}$  für alle  $n \geq 0$ .

**Lemma 51.** Es sei  $F \rightarrow X \rightarrow B$  eine Faserung und die Räume  $F$ ,  $X$  und  $B$  wegzusammenhängend. Wirke  $\pi_1(B)$  trivial auf  $H_*(F)$ . Dann gilt folgende 2-aus-3-Eigenschaft: Falls zwei der Räume  $F$ ,  $X$  und  $B$   $\mathcal{C}$ -azyklisch sind, so auch der dritte.

*Beweis.* Wir betrachten die Serre-Spektralsequenz zu der Faserung mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}$ . Die Aussage, dass die Homologiegruppe  $H_n(X)$  in  $\mathcal{C}$  liegt, ist äquivalent dazu, dass die Gruppen  $E_{i,n-i}^\infty$  für  $i = 0, \dots, n$  in  $\mathcal{C}$  liegen, denn diese Gruppen sind die Quotienten einer endlichen Filtrierung von  $H_n(X)$ .

*Fall 1:  $F$  und  $B$  sind  $\mathcal{C}$ -azyklisch:* Die universelle Koeffizientenformel liefert

$$E_{pq}^2 \cong H_p(B; H_q(F; \mathbb{Z})) \cong (H_p(B) \otimes H_q(F)) \oplus \text{Tor}(H_{p-1}(B), H_q).$$

Man sieht durch Unterscheidung der Fälle  $p = 0$ ,  $p = 1$  und  $p > 1$  sowie  $q = 0$  und  $q > 0$ , dass  $E_{pq}^2 \in \mathcal{C}$  für  $(p, q) \neq (0, 0)$ . Als Subquotient von  $E_{pq}^2$ , einer Gruppe aus  $\mathcal{C}$ , ist dann auch  $E_{pq}^\infty \in \mathcal{C}$  für  $(p, q) \neq (0, 0)$ . Dies zeigt die Behauptung nach der Bemerkung am Anfang des Beweises.

*Fall 2:  $F$  und  $X$  sind  $\mathcal{C}$ -azyklisch:* Wir zeigen nun durch Induktion über  $k$ , dass  $H_p(B) \in \mathcal{C}$  für  $0 < p < k$ . Gelte dies für  $k \geq 1$ . Wir wollen zeigen, dass dann auch  $H_k(B)$  in  $\mathcal{C}$  liegt. Für alle  $r \geq 2$  gibt es eine kurze exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \rightarrow & \ker(d_{k,0}^r) & \rightarrow & E_{k,0}^r \xrightarrow{d_{k,0}^r} \text{im}(d_{k,0}^r) \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \subseteq \\ & & E_{k,0}^{r+1} & & E_{k-r,r-1}^r \end{array}$$

Man sieht unter Verwendung der Induktionsannahme und der universellen Koeffizientenformel, dass  $E_{k-r,r-1}^2$  und somit auch  $E_{k-r,r-1}^r$  in  $\mathcal{C}$  liegen. Folglich gilt auch  $\text{im}(d_{k,0}^r) \in \mathcal{C}$ , also  $E_{k,0}^r \in \mathcal{C} \iff E_{k,0}^{r+1} \in \mathcal{C}$ . Da aber  $E_{k,0}^R \cong E_{k,0}^\infty \in \mathcal{C}$  für  $R$  groß genug, gilt  $E_{k,0}^r \in \mathcal{C}$  für alle  $r \geq 2$ . Insbesondere  $H_k(B; \mathbb{Z}) \cong H_k(B; H_0(F; \mathbb{Z})) \cong E_{k,0}^2 \in \mathcal{C}$ .

*Fall 3:  $B$  und  $X$  sind  $\mathcal{C}$ -azyklisch:* Analog zum vorherigen Fall zeigt man induktiv, dass  $H_q(F) \in \mathcal{C}$  für  $0 < q < k$ . Dazu verwendet man die kurze exakte Sequenz  $0 \rightarrow \text{im}(d_{r,k-r+1}^r) \hookrightarrow E_{0,k}^r \rightarrow E_{0,k}^{r+1}$ .  $\square$

**Lemma 52.** Es sei  $G \in \mathcal{C} \in \{\mathcal{FG}, \mathcal{F}\}$ . Dann ist  $K(G, n)$   $\mathcal{C}$ -azyklisch für alle  $n \geq 1$ .

*Beweis.* Sei zunächst  $n = 1$ .

- Falls  $G = \mathbb{Z}$ , so stimmt die Aussage, denn der Kreis  $S^1$  ist ein  $K(\mathbb{Z}, 1)$  und  $H_*(S^1; \mathbb{Z}) \in \mathcal{FG}$ .
- Falls  $G = \mathbb{Z}_m$ , **TODO: begründen damit, dass der „unendliche Linsenraum“ ein  $K(\mathbb{Z}_m, 1)$  ist**
- Falls  $G = G_1 \oplus G_2$ , dann ist  $K(G_1, 1) \times K(G_2, 1)$  ein  $K(G, 1)$ . Wenn die Aussage für  $G_1$  und  $G_2$  stimmt, so folgt aus dem letzten Lemma, angewendet auf die Produktfaserung  $K(G_1, 1) \rightarrow K(G_1, 1) \times K(G_2, 1) \rightarrow K(G_2, 1)$ , dass sie auch für  $G$  gilt.

Da man jede endlich erzeugte abelsche Gruppe als direkte Summe von endlich vielen Summanden der Form  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Z}_m$  schreiben kann, gilt die Aussage für  $n = 1$ .

Induktiv zeigen wir nun, dass die Aussage für  $n$  beliebig gilt. Dazu verwenden wir die Pfadraumfaserung  $K(G, n) \rightarrow P \rightarrow K(G, n+1)$ . Es gilt  $H_k(P) = 0 \in \mathcal{C}$  und  $H_k(K(G, n)) \in \mathcal{C}$  für  $k \geq 1$  nach Induktionshypothese, also  $H_k(K(G, n+1)) \in \mathcal{C}$  für alle  $k \geq 1$  nach dem vorherigen Lemma.  $\square$

**Definition 53.** Ein *Postnikov-Turm* eines wegzusammenhängenden Raumes  $X$  ist ein kommutatives Diagramm wie rechts, für das gilt:

- $\pi_i(X \rightarrow X_n)$  ist ein Isomorphismus für  $i \leq n$  und
- $\pi_i(X_n) = 0$  für  $i > n$ .

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & X & & \\ & & & & \downarrow & & \\ \dots & \rightarrow & X_3 & \rightarrow & X_2 & \rightarrow & X_1 \end{array}$$

**TODO: Bemerkung zur Konstruktion von Postnikov-Türmen**

*Bemerkung.* Es sei ein Postnikov-Turm  $\dots \rightarrow X_2 \rightarrow X_1$  gegeben. Dann kann man durch wiederholtes Anwenden der in Lemma 19 beschriebenen Konstruktion einen neuen Postnikovturm  $\dots \rightarrow X'_2 \rightarrow X'_1$  und Homotopieäquivalenzen  $X_i \simeq X'_i$  konstruieren, sodass die Abbildungen  $X'_{i+1} \rightarrow X'_i$  Hurewicz-Faserungen sind. Man sieht anhand der langen exakten Sequenz von Homotopiegruppen, dass die Faser von  $X'_{i+1} \rightarrow X'_i$  ein  $K(\pi_{n+1}(X), n+1)$  ist.

**Lemma 54.** Es sei  $\mathcal{C} \in \{\mathcal{FG}, \mathcal{F}\}$  und  $X$  einfach zusammenhängend mit  $\pi_i(X, x_0) \in \mathcal{C}$  für alle  $i \geq 0$ . Dann ist  $X$   $\mathcal{C}$ -azyklisch, d. h. es gilt  $H_i(X) \in \mathcal{C}$  für  $i \geq 1$ .

*Beweis.* Es sei  $\dots \rightarrow X_{i+1} \rightarrow X_i \rightarrow \dots \rightarrow X_1$  ein Postnikov-Turm von  $X$ , dessen Abbildungen  $X_{i+1} \rightarrow X_i$  Hurewicz-Faserungen sind. Wir zeigen, dass  $H_i(X_k; \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}$  für alle  $i, k > 0$ . Die Aussage stimmt für  $k = 1$ , da alle Homotopiegruppen und somit auch Homologiegruppen von  $X_1$  gleich Null sind. Gelte die Aussage nun für ein  $k \geq 1$ . Wir verwenden die Faserung  $K(\pi_{k+1}(X), k+1) \rightarrow X_{k+1} \rightarrow X_k$ . Nach Lemma 52 sind die Homologiegruppen der Faser in  $\mathcal{C}$ . Gleiches gilt für den Basisraum nach Induktionsvoraussetzung, und somit auch für  $X_k$  nach Lemma 51.

Es gilt  $H_i(X; \mathbb{Z}) \cong H_i(X_k; \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}$  für  $k \geq i$ , da  $\pi_i(X \rightarrow X_k)$  und nach einem Korollar der relativen Version des Hurewicz-Theorems damit auch  $H_i(X \rightarrow X_k)$  ein Isomorphismus für  $i \leq k$  ist.  $\square$

*Beweis von Satz 48.* Aufgrund der Natürlichkeit des Hurewicz-Homomorphismus kommutiert folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X) & \xrightarrow{\cong} & \pi_n(X_n) \\ \downarrow h_n & & \downarrow h_n \\ H_n(X) & \xrightarrow{\cong} & H_n(X_n) \end{array}$$

Es genügt daher zu zeigen, dass  $h_n : \pi_n(X_n) \rightarrow H_n(X_n; \mathbb{Z})$  ein Isomorphismus modulo  $\mathcal{C}$  ist. Wir betrachten die Serre-Spektralsequenz zur Faserung  $F_n \rightarrow X_n \rightarrow X_{n-1}$ .

$$E_{pq}^2 \cong H_p(X_{n-1}; \underbrace{H_q(K(\pi_n(X), n); \mathbb{Z})}_{=0 \text{ für } 0 < q < n}),$$

Es verschwinden also alle Einträge zwischen der 0-ten und der  $n$ -ten Zeile. Für diese gilt Wir betrachten die exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} H_{n+1}(X_{n-1}) & & H_n(F_n) & & 0 & & 0 & & H_n(X_{n-1}) \\ \downarrow \text{"} & & \downarrow \text{"} & & \searrow & & \swarrow & & \downarrow \text{"} \\ E_{n+1,0}^2 & & E_{0,n}^2 & & & & E_{0,n}^\infty & & E_{n,0}^2 \\ \downarrow \text{"} & & \downarrow \text{"} & & \nearrow & & \searrow & & \downarrow \text{"} \\ E_{n+1,0}^n & \xrightarrow{d_{n+1,0}^r} & E_{0,n}^n & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & E_{0,n}^\infty & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & H_n(X_n) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & E_{n,0}^\infty \longrightarrow 0 \end{array}$$

welche sich aus zwei kurzen Sequenzen zusammensetzt:

- Die linke Sequenz ist exakt, da  $E_{0,n}^\infty \cong E_{0,n}^{n+1} \cong \ker(d_{0,n}^r) / \text{im}(d_{n+1,0}^r) = E_{0,n}^n / \text{im}(d_{n+1,0}^r)$ .
- Die rechte Sequenz ist exakt, da  $E_{0,n}^\infty = F^0 H_n(X_n)$  und  $E_{n,0}^\infty = F^n H_n(X_n) / F^{n-1} H_n(X_n)$  für eine Filtrierung  $0 = F^{-1} H_n(X_n) \subseteq F^0 H_n(X_n) \subseteq \dots \subseteq F^n H_n(X_n) = H_n(X_n)$ . Da  $F^p H_n(X_n) / F^{p-1} H_n(X_n) = E_{p,n-p}^\infty = 0$  für  $p = 1, \dots, n-1$ , gilt  $F^0 H_n(X_n) = \dots = F^{n-1} H_n(X_n)$ .

Aus Lemma folgt, dass  $E_{n+1,0}^n, E_{n,0}^\infty \in \mathcal{C}$ . Somit ist der mittlere Morphismus  $H_n(F_n) = E_{0,n}^n \rightarrow H_n(X_n)$  ein Isomorphismus modulo  $\mathcal{C}$ . **TODO: Begründen, warum dieser Morphismus genau der von der Inklusion  $F_n \hookrightarrow X_n$  induzierte Morphismus ist.** Betrachte nun das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\pi_n(F_n) & \xrightarrow{\cong} & \pi_n(X_n) \\
\cong \downarrow h_n & & \downarrow h_n \\
H_n(F_n) & \longrightarrow & H_n(X_n)
\end{array}$$

Dabei sind die vertikalen Morphismen die Hurewicz-Homomorphismen und die horizontalen Morphismen werden durch die Inklusion induziert. Der linke Hurewicz-Homomorphismus ist nach dem Hurewicz-Theorem ein Isomorphismus, da  $F_n$   $(n-1)$ -zusammenhängend ist. Der obere Morphismus ist ein Isomorphismus, wie man anhand der langen exakten Sequenz der Faserung  $F_n \rightarrow X_n \rightarrow X_{n-1}$  sehen kann. Der untere Morphismus ist ein Isomorphismus modulo  $\mathcal{C}$ , wie wir gerade eben gesehen haben. Somit ist auch der rechte Morphismus im Diagramm ein Isomorphismus modulo  $\mathcal{C}$ .  $\square$

*Bemerkung.* Man kann in diesem Kapitel die Voraussetzung, dass  $X$  einfach zusammenhängend ist, ersetzen durch die Forderung, dass  $X$  wegzusammenhängend und abelsch ist, d. h. die Wirkung der Fundamentalgruppe  $\pi_1(X)$  auf den höheren Homotopiegruppen  $\pi_n(X)$  trivial ist.

## 9 Rationale Kohomologie von Räumen vom Typ $K(\mathbb{Z}, n)$

**Satz 55.** Für  $n \geq 1$  gilt

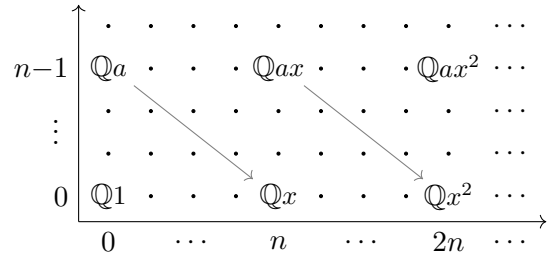
$$H^*(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q}[x], & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \Lambda_{\mathbb{Q}}[x], & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

als graduierte Ringe mit Erzeuger  $x \in H^n(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q})$ . Dabei bezeichnet  $\Lambda_{\mathbb{Q}}[x]$  die äußere Algebra mit Erzeuger  $x$ .

*Beweis.* Durch Induktion über  $n$ . Der Satz gilt für  $n = 1$ , denn der Kreis  $S^1$  ist ein  $K(\mathbb{Z}, 1)$  und es gilt bekanntermaßen  $H^*(S^1; R) \cong \Lambda_R[x]$  für  $R = \mathbb{Z}$  und somit auch für  $R = \mathbb{Q}$ .

Im Induktionsschritt nutzen wir die Pfadraumfaserung  $F := K(\mathbb{Z}, n-1) \rightarrow P \rightarrow B := K(\mathbb{Z}, n)$ . Da  $K(\mathbb{Z}, n)$  für  $n \geq 2$  einfach zusammenhängend ist, gilt für deren zugehörige Serre-Spektralsequenz  $E_2^{p,q} \cong H^p(B; H^q(F))$ .

*Falls  $n$  gerade:* Dann sieht die Spektralsequenz auf der Seite  $E_r$ ,  $r \leq n$  aus wie rechts skizziert (dabei stehen die Gitterpunkte für die Nullgruppe). Das sieht man folgendermaßen: Zunächst ist  $E_2^{pq} = 0$  und somit  $E_r^{pq} = 0$  außer für  $q \in \{0, n-1\}$ , denn nach Induktionsvoraussetzung gilt  $H^*(F; \mathbb{Q}) \cong \Lambda_{\mathbb{Q}}[x]$ . Es folgt, dass nur auf der  $n$ -ten Seite  $E_n$  nicht verschwindende Differentiale existieren können und  $E_2 \cong E_n$  und  $E_{n+1} \cong E_{\infty}$  gilt. Außerdem ist  $E_n^{0,0} \cong E_2^{0,0} \cong \mathbb{Q}$  und  $E_n^{0,n-1} \cong E_2^{0,n-1} \cong \mathbb{Q}$ , da  $B$  zusammenhängend ist. Die Spektralsequenz konvergiert gegen  $H^*(P; \mathbb{Q})$ . Da  $P$  zusammenziehbar ist, gilt  $H^0(P; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$  und  $H^n(P; \mathbb{Q}) = 0$  für  $n > 0$ . Folglich ist  $E_{n+1}^{pq} \cong E_{\infty}^{pq} = 0$  außer für  $p = q = 0$ . Insbesondere gilt  $E_{n+1}^{0,n-1} \cong E_{\infty}^{0,n-1} = 0$ . Das eingezeichnete Differential  $d_n^{0,n-1} : E_n^{0,n-1} \rightarrow E_n^{n,0}$  ist nun injektiv, denn  $\ker(d_n^{0,n-1}) \cong E_{n+1}^{0,n-1} = 0$ . Dieses Differential ist auch surjektiv, denn  $\text{coker}(d_n^{0,n-1}) \cong E_{n+1}^{n,0} \cong E_{\infty}^{n,0} = 0$ , also ein Isomorphismus. Somit  $H^n(B; \mathbb{Q}) \cong E_2^{n,0} \cong E_n^{n,0} \cong E_n^{0,n-1} \cong \mathbb{Q}$ . Der zweite Isomorphismus kommt daher, da für  $r \leq n-1$  alle Differentiale von und nach  $E_r^{n,0}$  Null sind. Damit ist  $E_2^{n,n-1} \cong H^n(B; H^{n-1}(F; \mathbb{Q})) \cong H^n(B; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ . Induktiv sieht man nun, dass die Abbildungen  $d_n^{kn,n-1}$  Isomorphismen sind und dass  $H^{kn}(B; \mathbb{Q}) \cong E_2^{kn,0} \cong E_2^{k,n-1} \cong \mathbb{Q}$  für alle  $k \geq 0$ . Damit haben wir gezeigt, dass die graduierte, additive Struktur von  $H^*(B; \mathbb{Q})$  wie behauptet ist.



Es sei nun  $a \in E_n^{0,n-1} \cong H^0(B; H^{n-1}(F; \mathbb{Q}))$  ungleich Null und  $x := d_n^{0,n-1}(a) \in E_n^{n,0} \cong H^n(B; H^0(F; \mathbb{Q})) \cong H^n(B; \mathbb{Q})$ . Dann gilt auch  $x \neq 0$  und  $ax := m_r(a, x) \neq 0$ , da wegen (ii) und (iii) das Produkt  $m_r$  gerade dem kanonischen Produkt  $H^n(B; H^0(F; \mathbb{Q})) \times H^0(B; H^{n-1}(F; \mathbb{Q})) \rightarrow H^n(B; H^{n-1}(F; \mathbb{Q}))$  entspricht. Es gilt  $0 \neq d_n^{n,n-1}(ax) = d_n^{0,n-1}(a)x - ad_n^{n,0}(x) = xx$ . Da das Produkt  $xx \in E_n^{2n,0}$  gerade dem Cup-Produkt  $x \cup x \in H^{2n}(B; \mathbb{Q})$  entspricht, ist  $x \cup x \neq 0$ , also ein Erzeuger von  $H^{2n}(B; \mathbb{Q})$ . Induktiv ist nun  $0 \neq d_n^{kn,n-1}(ax^k) = x^{k+1} \in E_n^{kn,0}$  da ja  $0 \neq ax^k$ . Somit ist für alle  $k$  das  $k$ -fache Cup-Produkt  $x^k \in H^{kn}(B; \mathbb{Q})$  ein Erzeuger.

*Falls  $n$  ungerade:* Dann ist  $E_r^{p,q} = 0$  für alle  $q$ , die kein Vielfaches von  $n-1$  sind. Somit verschwinden alle Differentiale auf  $E_r$  für  $r < n$  und  $E_2 \cong E_n$ . Für  $0 < m < n$  verschwinden alle Differentiale von und nach  $E_r^{m,0}$  und daher ist  $H^m(B; \mathbb{Q}) \cong E_2^{m,0} \cong E_\infty^{m,0} = 0$  und folglich  $E_2^{m,k} = 0$  für alle  $k \geq 0$ . Selbiges gilt folglich auch für  $n < m < 2n$  und allgemeiner für solche  $m$ , die kein Vielfaches von  $n$  sind. Analog wie im vorherigen Fall sieht man, dass das eingezeichnete Differential  $d_n^{0,n-1}$  ein Isomorphismus ist. Somit  $H^n(B; \mathbb{Q}) \cong H^n(B; H^0(F; \mathbb{Q})) \cong \mathbb{Q}$  und  $E_2^{n,k(n-1)} \cong \mathbb{Q}$  für alle  $k \geq 0$ . Sei  $a \in H^0(B; H^{n-1}(F; \mathbb{Q}))$  ungleich Null und  $x := d_n^{0,n-1}(a)$ . Dann ist auch  $a^2 \neq 0 \in E_n^{0,2n-2}$ . Also ist  $d_n^{0,2n-2}(a^2) = d_n^{0,n-1}(a)a + d_n^{0,n-1}(a)a = xa + ax = (-1)^{0 \cdot n + (n-1) \cdot 0} ax + ax = 2ax \neq 0$ . Also ist  $d_n^{0,2n-2}$  ein Isomorphismus. Analog sieht man, dass  $d_n^{0,k(n-1)}$  für alle  $k \geq 1$  ein Isomorphismus ist. Es bleibt zu zeigen, dass  $H^{kn}(B; \mathbb{Q}) = 0$  für  $k > 1$ . Das einzige potentiell nichttriviale Differential, das bei  $E_r^{2n,0}$  ankommt, ist  $d_n^{n,n-1}$ . Dieses ist aber Null, da  $\ker(d_n^{n,n-1}) = \text{im}(d_n^{0,2n-2}) = E_n^{n,n-1}$ . Also  $H^{2n}(B; \mathbb{Q}) \cong E_2^{2n,0} \cong E_\infty^{2n,0} = 0$  und  $E_2^{2n,k} = 0$  für alle  $k \geq 0$ . Für  $k > 2$  sieht man durch Induktion, dass alle Differentiale von und nach  $E_r^{2n,0}$  verschwinden und daher  $H^{kn}(B; \mathbb{Q}) = 0$ .  $\square$

## 10 Beweis des Satzes von Serre

**Lemma 56.** Es sei  $n \geq 3$  ungerade und  $X$  ein  $(n-1)$ -zusammenhängender topologischer Raum. Angenommen,  $H^k(X; \mathbb{Z}) = 0$  für  $k > n$  und  $H_n(X) \cong \pi_n(X)$  ist die direkte Summe von  $\mathbb{Z}$  und einer endlichen Gruppe. Dann sind die Homotopiegruppen  $\pi_k(X, x_0)$ ,  $k > n$  endlich.

*Beweis.* Durch Töten der höheren Homotopiegruppen bekommen wir eine Abbildung  $f : X \rightarrow K(\pi_n(X), n) \approx K(\mathbb{Z}, n) \times K(G, n)$ , wobei  $G$  eine endliche Gruppe ist. Wir führen die in Lemma 19 beschriebene Konstruktion durch und erhalten einen zu  $X$  homotopieäquivalenten Raum  $X'$  und eine Hurewicz-Faserung  $p : X' \rightarrow K(\pi_n(X), n)$  mit Faser  $F$ . Anhand der langen exakten Sequenz dieser Faserung sehen wir, dass

$$\pi_i(F) \cong \begin{cases} 0, & \text{für } i \leq n, \\ \pi_i(X') \cong \pi_i(X), & \text{für } i > n. \end{cases}$$

Wir wenden dieselbe Konstruktion auf die Inklusion  $F \hookrightarrow X'$  an und bekommen einen zu  $F$  homotopieäquivalenten Raum  $F'$  und eine Faserung  $q : F' \rightarrow X'$ . Aus der langen exakten Homotopiesequenz ergibt sich, dass die Faser  $\tilde{F}$  dieser Faserung ein  $K(\pi_n(X), n-1)$  ist.

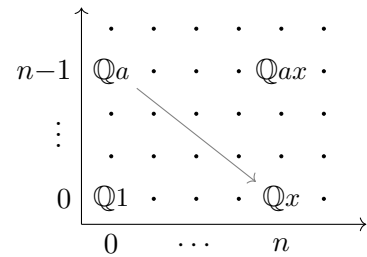
Wir wollen die Serre-Spektralsequenz der Faserung  $\tilde{F} \rightarrow F' \rightarrow X'$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$  verwenden. Dazu untersuchen wir zunächst die rationale Kohomologie von Faser und Basisraum. Lemma 52 impliziert, dass die Homotopiegruppen und wegen Korollar 49 auch die reduzierten Homologiegruppen von  $K(G, n-1)$  endlich sind. Nach der universellen Koeffizientenformel verschwinden somit alle reduzierten Kohomologiegruppen von  $K(G, n-1)$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$ . Wir sehen nun an der Serre-Spektralsequenz der Produktfaserung  $K(G, n-1) \rightarrow$

$K(\pi_n(X), n-1) \rightarrow K(\mathbb{Z}, n-1)$  und Lemma 55, dass  $H^*(K(\pi_n(X), n-1); \mathbb{Q}) \cong H^*(K(\mathbb{Z}, n-1); \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[x]$  mit Erzeuger  $x \in H^{n-1}(K(\pi_n(X), n-1); \mathbb{Q})$ . Für den Basisraum folgt aus der universellen Koeffizientenformel, dass die rationale Kohomologie von  $X'$  gleich  $\mathbb{Q}$  ist in Grad 0 und in Grad  $n$ , und Null sonst.

Wir wissen nun, dass  $E_2^{pq} = 0$  außer falls  $p \in \{0, n\}$  und  $n-1 \mid q$  gilt. Die Spektralsequenz besitzt also auf der  $E_2$ -Seite und damit auch auf der  $E_n$ -Seite die gleichen Einträge wie die Spektralsequenz aus dem zweiten Fall ( $n$  ungerade) des vorhergehenden Lemmas. Genau wie dort schließen wir, dass  $d_n^{0, n-1}$  ein Isomorphismus ist (denn  $H^n(X'; \mathbb{Q}) = 0$ ) und dass aufgrund der multiplikativen Struktur der Spektralsequenz auch die Differentiale  $d_n^{0, k(n-1)}$  für  $k \geq 1$  Isomorphismen sind. Somit ist  $E_{n+1}^{pq} = 0$  außer für  $p = q = 0$ . Es folgt, dass  $H^n(F'; \mathbb{Q}) = 0$  für  $n > 0$ . Somit gilt auch  $H_n(F'; \mathbb{Z}) \times \mathbb{Q} \cong H_n(F'; \mathbb{Q}) \cong H^n(F'; \mathbb{Q}) = 0$ , es ist also  $H_n(F'; \mathbb{Z})$  eine Torsionsgruppe. Da  $X' \simeq X$  und  $K(\pi_n(X), n)$   $\mathcal{FG}$ -azyklisch sind, ist auch  $F' \simeq F$   $\mathcal{FG}$ -azyklisch, d. h. die Homologiegruppen  $H_n(F'; \mathbb{Z})$ ,  $n > 0$  sind endlich erzeugt. Somit sind diese Homologiegruppen schon endlich. Nach Korollar 49 sind damit alle Homotopiegruppen von  $F'$  endlich. Diese entsprechen im Grad  $k > n$  aber gerade den Homotopiegruppen von  $X$ .  $\square$

*Beweis des Satzes von Serre (Satz 5).* Im Fall  $n = 1$  stimmt die Aussage, denn die universelle Überlagerung von  $S^1$  ist  $\mathbb{R}$ . Wir können daher  $n \geq 2$  annehmen. Im Fall, dass  $n \geq 3$  ungerade ist, folgt die Aussage aus dem vorhergehenden Lemma. Es bleibt der Fall, dass  $n \geq 2$  gerade ist.

Wir wenden dieselbe Konstruktion wie im Beweis des vorhergehenden Lemmas für den Raum  $X = S^n$  an. Da  $n$  gerade ist, haben wir aber  $H^*(K(\pi_n(X), n-1)) \cong H^*(K(\pi_n(X), n-1)) \cong \Lambda[x]$ . Die  $E_n$ -Seite der Serre-Spektralsequenz der Faserung  $K(\pi_n(X), n-1) \rightarrow F' \rightarrow X'$  ist daher wie rechts abgebildet. Der Eintrag  $\mathbb{Q}$  auf Position  $E_2^{n, n-1}$  überlebt die Spektralsequenz. Somit ist  $H^*(F'; \mathbb{Q}) \cong \Lambda[b]$  mit  $b \in H^{2n-1}(F'; \mathbb{Q})$ . Es folgt  $H_i(F'; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} \cong H_i(F'; \mathbb{Q}) = 0$  für  $i < 2n-1$ . Da die Homologiegruppen von  $F'$  endlich erzeugt sind, ist  $H_i(F'; \mathbb{Z}) \in \mathcal{F}$  für  $i < 2n-1$  und  $H_{2n-1}(F'; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus G$ , wobei  $G$  eine endliche Gruppe ist. Das Hurewicz-modulo- $\mathcal{C}$ -Theorem impliziert, dass damit auch die Homotopiegruppen  $\pi_i(F')$  endlich sind für  $i < 2n-1$  und dass  $\pi_{2n-1}(F) \cong \mathbb{Z} \oplus G'$  für eine endliche Gruppe  $G'$ . Indem wir höhere Homotopiegruppen töten, erhalten wir eine Abbildung  $F' \rightarrow Y$ , wobei  $\pi_i(Y) = 0$  für  $i \geq 2n-1$ . Wir konvertieren diese Abbildung zu einer Faserung  $F'' \rightarrow Y$  mit Faser  $Z$ . Anhand der langen exakten Homotopiesequenz dieser Faserung sehen wir, dass



$$\pi_m(Z) = \begin{cases} 0, & \text{für } m < 2n-1, \\ \pi_m(F'') \cong \pi_m(F) \cong \pi_m(S^n), & \text{für } m \geq 2n-1. \end{cases}$$

Wir bemerken, dass alle Homotopiegruppen und somit auch Homologiegruppen von  $Y$  endlich sind. Daher gilt  $\tilde{H}^*(Y; \mathbb{Q}) = 0$ . Da die Serre-Spektralsequenz zur Faserung  $Z \rightarrow F'' \rightarrow Y$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$  auf der  $E_2$ -Seite also nur Einträge in der Spalte  $p = 0$  besitzt, gilt  $H^*(Z; \mathbb{Q}) \cong H^*(F''; \mathbb{Q}) \cong \Lambda[b]$ . Die Aussage folgt nun aus dem vorhergehenden Lemma mit  $X := Z$ .  $\square$

## Literatur

- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [Hat04] Allen Hatcher. "Spectral Sequences in Algebraic Topology". 2004. URL: <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/SSAT/SSATpage.html>.

- [Ser51] Jean-Pierre Serre. “Homologie singulière des espaces fibrés”. In: *Annals of Mathematics*. Second Series 54.3 (1951), S. 425–505.
- [Tod63] Hirosi Toda. *Composition methods in homotopy groups of spheres*. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 1963.



$\pi_{n+k}(S^n)$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$	$n=11$	$\pi_k^s$
$k=0$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\mathbb{Z}$
$k=1$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\mathbb{Z}_2$
$k=2$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\mathbb{Z}_2$
$k=3$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3$
$k=4$	0	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	0
$k=5$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	0
$k=6$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3^2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\mathbb{Z}_2$
$k=7$	0	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_{16} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$	$\dots$	$\dots$	$\mathbb{Z}_{16} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$
$k=8$	0	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\dots$	$\mathbb{Z}_2^2$
$k=9$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\mathbb{Z}_2^5$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^3$

Tabelle 1: Die ersten Homotopiegruppen der Sphären. Der stabile Bereich besteht aus allen Gruppen oberhalb der Treppenlinie. Unendliche Gruppen sind grau hinterlegt. Quelle: [Tod63]