

# Der Satz von Serre über die Endlichkeit der Homotopiegruppen der Sphären

Bachelorarbeit

VON

Tim Baumann

Eingereicht am

TODO: ?? . ?? . 2015



Universität Augsburg  
Institut für Mathematik

Erstgutachter: Prof. Dr. Bernhard Hanke

Zweitgutachter: TODO: ???

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Homotopiegruppen der Sphären

**Definition 1.** Es sei  $(X, x_0)$  ein punktierter topologischer Raum. Für  $n \geq 0$  sei

$$\pi_n(X, x_0) := [(S^n, *), (X, x_0)]$$

die Menge der basispunkterhaltenden Abbildungen  $S^n \rightarrow X$  modulo basispunkterhaltender Homotopie. Für  $n \geq 1$  heißt  $\pi_n(X)$  die  $n$ -te *Homotopiegruppe* von  $X$  (mit Basispunkt  $x_0$ ).

Die Gruppenstruktur auf  $\pi_n(X)$  wird induziert durch die Kogruppenstruktur auf  $S^n$ , welche durch die Abbildung  $S^n \rightarrow S^n \vee S^n$  gegeben ist, die die Südkappe  $D_+^n$  auf die erste  $S^n$ , die Nordkappe  $D_-^n$  auf die zweite  $S^n$  und den Äquator  $D_+^n \cap D_-^n$  auf den Anklebepunkt von  $S^n \vee S^n$  abbildet. Das neutrale Element der Homotopiegruppen wird repräsentiert durch die konstante Abbildung auf den Basispunkt  $x_0$ . Die erste Homotopiegruppe  $\pi_1(X, x_0)$  kann man auffassen als die Menge der geschlossenen Wege bei  $x_0$  modulo Homotopie mit der Verkettung von Wegen als Gruppenverknüpfung. Diese Gruppe wird auch *Fundamentalgruppe* genannt. Man kann zeigen, dass  $\pi_n(X, x_0)$  für  $n \geq 2$  abelsch ist (vgl. [Hat02, S. 340]).

Eine basispunkterhaltende Abbildung  $g : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  induziert Abbildungen  $g_* = \pi_i(g) : \pi_i(X, x_0) \rightarrow \pi_i(Y, y_0)$  durch Nachkomponieren mit  $g$ . Auf diese Weise wird  $\pi_i$  zu einem Funktor von der Kategorie der punktierten topologischen Räume in die Kategorie der (abelschen) Gruppen.

Die Menge  $\pi_0(X, x_0)$  ist die Menge der Wegzusammenhangskomponenten von  $X$ . Wir schreiben  $\pi_0(X, x_0) = 0$ , falls die einzige Wegzusammenhangskomponente von  $X$  die von  $x_0$  ist.

Falls ein Weg von  $x_0$  nach  $x'_0$  in  $X$  existiert, so sind  $\pi_n(X, x_0)$  und  $\pi_n(X, x'_0)$  isomorph. Für nicht leere, wegzusammenhängende Räume  $X$  kann man daher den Basispunkt in der Notation weglassen und von der Homotopiegruppe  $\pi_n(X)$  von  $X$  sprechen.

**TODO: Motivation für Studium der Homotopiegruppen der Sphären**

Für  $i < n$  gilt  $\pi_i(S^n) = 0$ : Wir können die Sphären  $S^i$  und  $S^n$  als CW-Komplexe mit jeweils einer Nullzelle und einer  $i$ -Zelle bzw.  $n$ -Zelle realisieren. Aus dem zellulären Approximationstheorem (siehe [Hat02, Thm 4.8]) folgt, dass jede Abbildung  $f : S^i \rightarrow S^n$  homotop relativ Basispunkt zu einer zellulären Abbildung ist, d. h. einer Abbildung  $\tilde{f} : S^i \rightarrow S^n$ , die das  $i$ -Skelett von  $S^i$  (das ist ganz  $S^i$ ) auf das  $i$ -Skelett von  $S^n$  (das ist  $\{*\}$ ) abbildet. In anderen Worten ist jede Abbildung  $S^i \rightarrow S^n$  homotop zur konstanten Abbildung und repräsentiert daher das neutrale Element in  $\pi_i(S^n)$ .

Mit der universellen Überlagerung  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $t \mapsto e^{it}$  kann man die Homotopiegruppen von  $S^1$  bestimmen: Die Fundamentalgruppe  $\pi_1(S^1)$  ist isomorph zur Decktransformationsgruppe dieser Überlagerung, also isomorph zu  $\mathbb{Z}$ , wie man leicht zeigen kann. Die höheren Homotopiegruppen  $\pi_i(S^1)$  mit  $i > 1$  sind Null. Dies folgt aus der Zusammenziehbarkeit von  $\mathbb{R}$  und aus der allgemeinen Tatsache, dass eine Überlagerung  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  Isomorphismen  $\pi_i(p) : \pi_i(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_i(X, x_0)$  auf den höheren Homotopiegruppen induziert (siehe [Hat02, Prop 4.1]).

**Definition 2.** Die (*reduzierte*) *Einhängung*  $(\Sigma X, *)$  eines punktierten Raumes  $(X, x_0)$  ist

$$\Sigma X := (X \times I) / (X \times \{0, 1\} \cup \{x_0\} \times I).$$

Der Basispunkt  $*$  von  $\Sigma X$  ist der auf einen Punkt zusammengezogene Teilraum.

Einhängung ist ein Endofunktor der Kategorie der punktierten topologischen Räume: Für  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  ist

$$\Sigma f : (\Sigma X, *) \rightarrow (\Sigma Y, *), \quad [(x, t)] \mapsto [(f(x), t)].$$

Man sieht leicht, dass  $\Sigma S^i \approx S^{i+1}$ . Somit induziert Einhängung eine Abbildung  $E : \pi_i(X, x_0) \rightarrow \pi_{i+1}(\Sigma X, *)$ . Da Einhängung mit den Kogruppenstruktur von  $S^i$  und  $S^{i+1}$  verträglich ist, ist  $E$  sogar ein Gruppenhomomorphismus.

**Definition 3.** Ein nicht leerer topologischer Raum  $X$  heißt  $n$ -zusammenhängend, falls  $\pi_i(X) = 0$  für  $0 \leq i \leq n$ .

**Satz 4** (Freudenthal'scher Einhängungssatz). Es sei  $n \geq 0$  und  $X$  ein  $n$ -zusammenhängender CW-Komplex. Dann ist  $E : \pi_i(X) \rightarrow \pi_{i+1}(\Sigma X)$  bijektiv für  $0 \leq i \leq 2n$  und surjektiv für  $i = 2n + 1$ .

Ein Beweis des Einhängungssatzes findet sich in [Hat02, 4.24].

Insbesondere ist die  $j$ -fach iterierte Einhängung  $\Sigma^j X$  eines  $n$ -zusammenhängenden CW-Komplexes  $X$  ein  $(n+j)$ -zusammenhängender CW-Komplex. (Um den Einhängungssatz mehrfach anwenden zu können, muss man sich klar machen, dass die Einhängung eines CW-Komplexes wieder ein CW-Komplex ist.)

Für einen beliebigen CW-Komplex  $X$  ist  $\Sigma^j X$  ein  $(j-1)$ -zusammenhängender CW-Komplex und es gilt  $\pi_{n+j}(\Sigma^j X) \cong \pi_{n+j+1}(\Sigma^{j+1} X)$  für  $n+j \leq 2(j-1) \Leftrightarrow n+2 \leq j$ . Somit ist

$$\pi_{2n+2}(\Sigma^{n+2} X) \cong \pi_{2n+3}(\Sigma^{n+3} X) \cong \pi_{2n+4}(\Sigma^{n+4} X) \cong \dots \cong \operatorname{colim}_j \pi_{n+j}(\Sigma^j X).$$

Die Gruppe  $\operatorname{colim}_j \pi_{n+j}(\Sigma^j X)$  heißt  $n$ -te stabile Homotopiegruppe von  $X$ . Im Fall der Sphären haben wir mit  $X = S^0$ :

$$\pi_{2n+2}(S^{n+2}) \cong \pi_{2n+3}(S^{n+3}) \cong \pi_{2n+4}(S^{n+4}) \cong \dots \cong \operatorname{colim}_j \pi_{n+j}(S^j) =: \pi_n^s.$$

Wir behaupten, dass  $E : \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_2(S^2)$  ein Isomorphismus ist. Aus dem Einhängungssatz folgt, dass diese Abbildung surjektiv ist. Somit ist  $\pi_2(S^2)$  eine zyklische Gruppe mit Erzeuger  $\operatorname{id}_{S^2}$ . Es sei nun  $k \in \mathbb{Z}$ . Dann ist  $H_2(k \cdot \operatorname{id}_{S^2}) : H_2(S^2) \rightarrow H_2(S^2)$  gegeben durch Multiplikation mit  $k$ . Angenommen,  $k \cdot \operatorname{id}_{S^2}$  ist nullhomotop. Dann ist auch  $H_2(k \cdot \operatorname{id}_{S^2}) = 0$  und somit  $k = 0$ . Somit ist  $E$  injektiv. Es folgt

$$\mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1) \cong \pi_2(S^2) \cong \dots \cong \pi_j(S^j) \cong \dots \cong \operatorname{colim}_j \pi_j(S^j) = \pi_0^s.$$

Dabei ist  $[\operatorname{id}_{S^i}]$  ein Erzeuger von  $\pi_i(S^i)$  für alle  $i \geq 0$ .

Im Anhang dieser Arbeit befindet sich eine Tabelle mit einigen bekannten Homotopiegruppen von Sphären. Einige Regelmäßigkeiten sind dabei offensichtlich (z. B. die gleichen Einträge in den Spalten  $n=2$  und  $n=3$ ). Eine globale Systematik ist aber nicht erkennbar. Tatsächlich ist das explizite Ausrechnen von Homotopiegruppen selbst von so einfachen Räumen wie den Sphären ein schweres Problem. So sind die stabilen Homotopiegruppen  $\pi_n^s$  nur für  $n \leq 64$  berechnet und unbekannt für größere  $n$  (vgl. [Hat02, S. 384]).

Das Ziel dieser Arbeit ist es, folgenden Satz von Serre zu beweisen:

**Satz 5** (Serre, 1951). Die Homotopiegruppen  $\pi_i(S^n, *)$ ,  $i > n$ , sind endlich bis auf die Gruppen  $\pi_{4k-1}(S^{2k})$ ,  $k \geq 1$ , welche jeweils isomorph zu einer direkten Summe von  $\mathbb{Z}$  und einer endlichen Gruppe sind.

Zusammengefasst werden wir also gezeigt haben, dass

**Korollar 6.**

$$\pi_i(S^n, *) \cong \begin{cases} 0 & \text{für } i < n \text{ und } i > n = 1, \\ \mathbb{Z} & \text{für } i = n, \\ \mathbb{Z} \oplus \text{endliche Gruppe} & \text{für } i = 2n - 1 \text{ und } n \text{ gerade,} \\ \text{endliche Gruppe} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Beweis des Satzes von Serre verwendet die Serre-Spektralsequenz. Das ist ein algebraisches Objekt, welches für eine Faserung  $p : X \rightarrow B$  eine Verbindung zwischen den Homologie- und Kohomologiegruppen von Basisraum  $B$ , Totalraum  $X$  und Faser  $F$  liefert. Wir führen

zunächst Faserungen und Spektralsequenzen und die Serre-Spektralsequenz ein. Dann verwenden wir die Serre-Spektralsequenz, um zu zeigen, dass die Homotopiegruppen von einfach zusammenhängenden topologischen Räumen genau dann endlich (erzeugt) sind, wenn die Homologiegruppen endlich (erzeugt) sind. Dies wollen wir anwenden, um den Satz von Serre zu zeigen. Dazu müssen wir allerdings zunächst den Raum  $S^n$  so abändern, sodass die  $n$ -te Homotopiegruppe verschwindet, die höheren Homotopiegruppen aber erhalten bleiben. Die Homologiegruppen dieses neuen Raumes hängen über die Serre-Spektralsequenz mit denen eines Eilenberg-MacLane-Raumes vom Typ  $K(\mathbb{Z}, n-1)$  zusammen, einem Raum mit nur einer nichtverschwindenden Homotopiegruppe. Deshalb studieren wir zunächst dessen Homologiegruppen und zeigen insbesondere, dass sie endlich erzeugt sind.

Der Aufbau dieser Arbeit orientiert sich an dem ersten Kapitel von [Hat04].

## 2 Faserungen

**Definition 7.** Eine (*Hurewicz-*) *Faserung* ist eine stetige Abbildung  $p : E \rightarrow B$ , welche die *Homotopieliftungseigenschaft* (HLE) für die topologischen Räume  $X$  besitzt, d. h. für alle  $n \geq 0$  und für alle stetigen Abbildungen  $H, H_0$  wie unten, sodass das äußere Quadrat kommutiert, gibt es eine stetige Abbildung  $\tilde{H}$ , sodass die beiden inneren Dreiecke kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{H_0} & E \\ i_0 \downarrow & \nearrow \exists \tilde{H} & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

Dabei ist  $i_0$  die Inklusion von  $X$  in  $X \times I$  als  $X \times \{0\}$ . Eindeutigkeit von  $\tilde{H}$  wird nicht gefordert. Der Raum  $E$  wird *Totalraum* und  $B$  *Basisraum* genannt.

*Bemerkung.* Allgemeiner ist eine *Serre-Faserung* eine stetige Abbildung  $p : E \rightarrow B$ , welche die Homotopieliftungseigenschaft bezüglich der Scheiben  $\{D^n \mid n \geq 0\}$  oder äquivalent allen CW-Komplexen, aber nicht unbedingt allen topologischen Räumen besitzt. Man kann viele Resultate über Hurewicz-Faserungen, wie beispielsweise die Existenz der Serre-Spektralsequenz, auch für Serre-Faserungen zeigen. Es bedarf aber etwas mehr an Arbeit, die grundlegenden Eigenschaften dieser Faserungen zu zeigen. Deshalb beschränke ich mich in dieser Arbeit auf Hurewicz-Faserungen.

**Beispiel 8.** Das einfachste Beispiel einer Faserung ist die *Produktfaserung*, die Projektion  $p_0 : B \times F \rightarrow B$  eines Produktraumes auf einen Faktor.

Seien zur Nachweis der Homotopieliftungseigenschaft ein Raum  $X$  sowie  $H : X \times I \rightarrow B$  und  $H_0 : X \rightarrow B \times F$  wie in Definition 7 gegeben. Dann bringt folgende Abbildung das Diagramm zum Kommutieren:

$$\tilde{H} : X \times I \rightarrow B \times F, \quad (x, t) \mapsto (H(x, t), \pi_2(H_0(x))).$$

Bei dieser Produktfaserung sind die *Fasern*, das heißt die Urbilder  $\{p^{-1}(\{b\}) \mid b \in B\}$  von Einpunktmengen mit der Teilraumtopologie, alle homöomorph zu dem festen Raum  $F$ . Allgemein sind bei Faserungen über wegzusammenhängenden Basisräumen alle Fasern zwar nicht immer homöomorph, aber homotopieäquivalent, wie das folgende Lemma zeigt.

**Lemma 9.** Es sei nun  $p : E \rightarrow B$  eine Faserung. Für jeden stetigen Weg  $\gamma : I \rightarrow B$  von  $a := \gamma(0)$  nach  $b := \gamma(1)$  definieren wir nun eine Abbildung  $L_\gamma : p^{-1}(\{a\}) \rightarrow p^{-1}(\{b\})$ . Wegen der HLE gibt es ein  $\tilde{H}_\gamma$ , sodass

$$\begin{array}{ccc}
p^{-1}(\{a\}) & \xrightarrow{\quad} & E \\
i_0 \downarrow & \nearrow \exists \tilde{H}_\gamma & \downarrow p \\
p^{-1}(\{a\}) \times I & \xrightarrow{(f,t) \mapsto \gamma(t)} & B
\end{array}$$

kommutiert. Wir setzen

$$L_\gamma : p^{-1}(\{a\}) \rightarrow p^{-1}(\{b\}), \quad f \mapsto \tilde{H}_\gamma(f, 1).$$

Dann gilt für stetige Wege  $\gamma, \eta, \epsilon$  mit und  $\gamma(1) = \epsilon(0)$ :

- (i)  $L_\gamma$  hängt bis auf Homotopie nicht von der Wahl des Lifts  $\tilde{H}_\gamma$  ab.
- (ii) Falls  $\gamma \simeq \eta \text{ rel } \{0, 1\}$ , so gilt  $L_\gamma \simeq L_\eta$ .
- (iii)  $L_{\gamma \cdot \epsilon} \simeq L_\epsilon \circ L_\gamma$  (dabei ist  $\gamma \cdot \epsilon$  die Verkettung von  $\gamma$  und  $\epsilon$ )
- (iv)  $L_\gamma$  ist eine Homotopieäquivalenz.

*Beweis.* Wir halten zunächst fest, dass Faserungen auch eine relative Homotopieliftungseigenschaft erfüllen: Sei dazu das äußere Quadrat im Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
(X \times I \times \{0\}) \cup (X \times \partial I \times I) & \xrightarrow{H_0} & E \\
i_0 \downarrow & \nearrow \exists \tilde{H} & \downarrow p \\
X \times I \times I & \xrightarrow{H} & B
\end{array}$$

gegeben. Dann gibt es eine stetige Abbildung  $\tilde{H}$ , sodass das Diagramm kommutiert. Der Unterschied zu Definition 7 besteht darin, dass der Lift der Homotopie nicht nur zum Zeitpunkt  $t = 0$ , sondern auch auf dem Rand  $X \times \partial I \times I$  vorgegeben ist. Um dies zu zeigen, verwenden wir die Existenz eines Homöomorphismus  $\psi : (I \times I, I \times \{0\}) \rightarrow (I \times I, I \times \{0\} \cup \partial I \times I)$  von Raumpaaren (d. h.  $\psi$  schränkt ein zu einem Homöomorphismus  $\psi|_{I \times \{0\}} : I \times \{0\} \rightarrow I \times \{0\} \cup \partial I \times I$ ). Wir benutzen nun die gewöhnliche Homotopieliftungseigenschaft mit  $H' := H \circ (\text{id}_X \times \psi)$  und  $H'_0 := H_0 \circ (\text{id}_X \times \psi|_{I \times \{0\}})$  und erhalten einen Lift  $\tilde{H}'$ . Dann kann man leicht nachrechnen, dass  $\tilde{H} := \tilde{H}' \circ (\text{id}_X \times \psi^{-1})$  ein geeigneter Lift im obigen Diagramm ist.

Zu (i) und (ii): Es sei  $K : I \times I \rightarrow B$  eine Homotopie relativ der Endpunkte zwischen  $\gamma = K|_{\{0\} \times I}$  und  $\eta = K|_{\{1\} \times I}$  sowie  $\tilde{H}_\gamma, \tilde{H}_\eta : p^{-1}(\{a\}) \times I \rightarrow E$  gegeben. Wir verwenden nun die relative Homotopieliftungseigenschaft mit

$$H : p^{-1}(\{a\}) \times I \times I \rightarrow B, \quad (f, t, s) \mapsto K(t, s)$$

sowie

$$\begin{aligned}
H_0 &: (p^{-1}(\{a\}) \times I \times \{0\}) \cup (p^{-1}(\{a\}) \times \partial I \times I) \rightarrow E, \\
H_0(f, t, 0) &:= f, \quad H_0(f, 0, s) := \tilde{H}_\gamma(f, s), \quad H_0(f, 1, s) := \tilde{H}_\eta(f, s).
\end{aligned}$$

und erhalten einen Lift  $\tilde{H} : (p^{-1}(\{a\}) \times I \times I \rightarrow E$ . Die gesuchte Homotopie zwischen  $L_\gamma$  und  $L_\eta$  ist  $\tilde{H}(-, -, 1) : p^{-1}(\{a\}) \times I \rightarrow p^{-1}(\{b\})$ .

Zu (iii): Die Behauptung folgt daraus, dass man

$$\tilde{H}_{\gamma \cdot \epsilon}(f, t) := \begin{cases} \tilde{H}_\gamma(f, 2t) & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \tilde{H}_\epsilon(\tilde{H}_\gamma(f, 1), 2t - 1) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

wählen kann.

Zu (iv): Aus (ii) und (iii) folgt, dass  $L_{\gamma^{-1}}$  homotopieinvers zu  $L_\gamma$  ist. □

*Bemerkung.* Man notiert eine Faserung  $p : E \rightarrow B$  häufig als  $F \rightarrow E \rightarrow B$ , wobei  $F$  eine typische Faser ist, also ein Raum, zu dem die Fasern  $\{p^{-1}(\{b\}) \mid b \in B\}$  homotopieäquivalent sind. Da homotopieäquivalente Räume dieselben (Ko-) Homologiegruppen besitzen, kann man von der Homologie  $H_*(F; G)$  bzw. Kohomologie  $H^*(F; R)$  der Faser sprechen.

**Korollar 10.** Es sei  $p : E \rightarrow B$  eine Faserung,  $b \in B$ . Dann ist

$$\pi_1(B, b) \rightarrow \text{Aut}(H_m(p^{-1}(\{b\}); G)), \quad [\gamma] \mapsto L_{\gamma*}$$

eine Wirkung der Fundamentalgruppe von  $B$  auf der  $m$ -ten Homologiegruppe der Faser.

Diese Wirkung ist *trivial*, falls  $L_{\gamma*} = \text{id}$  für alle geschlossenen Wege  $[\gamma] \in \pi_1(B, b)$ . Zum Beispiel ist die Wirkung bei Produktfaserungen immer trivial.

**Beispiel 11.** Die Kleinsche Flasche  $K$  ist der topologische Raum

$$K := (I \times I)/\sim, \quad (x, 0) \sim (x, 1), \quad (0, y) \sim (1, 1 - y).$$

Sie ist Teil einer Faserung  $S^1 \rightarrow K \xrightarrow{p} S^1$  mit  $p[(x, y)] := [x] \in I/_{0 \sim 1}$ . Die Wirkung von  $\pi_1(S^1)$  auf der Homologie  $H_1(S^1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$  der Faser ist *nicht* trivial, denn für  $\gamma = \text{id} : S^1 \rightarrow S^1$  ist  $L_\gamma$  homotop zu einer Spiegelung von  $S^1$  entlang einer Achse und induziert damit die Negationsabbildung auf  $H_1(S^1; \mathbb{Z})$ .

**Lemma 12.** Es sei  $p : E \rightarrow B$  eine Faserung,  $b_0 \in B$ ,  $F := p^{-1}(b_0)$  die Faser über  $b_0$  und  $f_0 \in F$ . Dann gibt es eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow \pi_n(F, f_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, f_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, f_0) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_1(B, b_0)$$

von Homotopiegruppen. Dabei ist  $i : F \hookrightarrow E$  die Inklusion.

*Beweis.* Die gesuchte exakte Sequenz ist die lange exakte Homotopiesequenz

$$\dots \rightarrow \pi_n(F, f_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, f_0) \rightarrow \pi_n(E, F, f_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, f_0) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_1(E, F, f_0)$$

des Raumpaars  $(E, F)$ . Es bleibt zu zeigen:  $\pi_n(E, F, f_0) \cong \pi_n(B, b_0)$  als Gruppe für  $n > 1$  und als punktierte Menge für  $n = 1$ . Der Isomorphismus muss außerdem so gewählt werden, dass

$$p_* = \left( \pi_n(E, f_0) \rightarrow \pi_n(E, F, f_0) \xrightarrow{\cong} \pi_n(B, b_0) \right).$$

Wir zeigen:  $p_* : \pi_n(E, F, f_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$  ist der gesuchte Isomorphismus (damit ist obige Gleichung erfüllt).

*Surjektivität:* Sei  $[g : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, b_0) \rightarrow (B, \{b_0\}, b_0)] \in \pi_{n+1}(B, b_0)$ ,  $n \geq 0$ . Sei  $\tilde{g}$  der Lift im folgenden relativen HLE-Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\text{konst } f_0} & E \\ \downarrow & \nearrow \exists \tilde{g} & \downarrow p \\ I^n \times I & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

wobei  $U := I^n \times \{0\} \cup (\partial I^n) \times I \subset I^{n+1}$ . Dann kann man  $\tilde{g}$  als eine Abbildung  $(I^{n+1}, \partial I^{n+1}, U) \rightarrow (E, F, \{f_0\})$  von Raumtripeln auffassen, welche ein Element von  $\pi_{n+1}(E, F, f_0)$  repräsentiert. Es gilt  $p_*[\tilde{g}] = [p \circ \tilde{g}] = [g]$ .

*Injektivität:* Seien  $[h_0], [h_1] \in \pi_{n+1}(E, F, f_0)$  mit  $p_*[h_0] = p_*[h_1]$ . Sei

$$H : I \times I^{n+1}, \quad (t, x) \mapsto H_t(x)$$

eine Homotopie mit  $H_0 = p \circ h_0$ ,  $H_1 = p \circ h_1$ , welche zu jedem Zeitpunkt  $t \in I$  eine Abbildung  $H_t : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}) \rightarrow (B, \{b_0\})$  von Raumpaaren ist. Betrachte folgendes HLE-Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
V & \xrightarrow{h} & E \\
\downarrow & \searrow \exists \tilde{H} & \downarrow p \\
I^{n+1} \times I & \xrightarrow{H} & B
\end{array}$$

mit  $V := I^{n+1} \times \{0\} \cup (\partial I^{n+1}) \times I \subset I^{n+2}$  und

$$h|_{\{0\} \times I^{n+1}} := h_0, \quad h|_{\{1\} \times I^{n+1}} := h_1, \quad h|_{I \times U} := \text{konst } f_0.$$

Nun ist  $\tilde{H}$  eine Homotopie von  $h_0$  nach  $h_1$ , welche zu jedem Zeitpunkt  $t$  eine Abbildung  $\tilde{H}_t : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, U) \rightarrow (E, F, \{b_0\})$  von Raumtripeln ist.  $\square$

**Beispiel 13.** Die *Hopf-Faserung* ist eine Abbildung  $\eta : S^3 \rightarrow S^2$ , welche ein nichttriviales Element in  $\pi_3(S^2)$  repräsentiert. Wenn man  $S^3$  mit  $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x| + |y| = 1\}$  identifiziert und  $S^2$  als Riemannsche Zahlenkugel  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  auffasst, so ist  $\eta$  gegeben durch  $\eta(x, y) := x/y$  für  $y \neq 0$  und  $\eta(x, 0) := \infty$ . Man sieht leicht, dass  $\eta$  eine Faserung ist und dass die Faser

$$\eta^{-1}(c) = \{s/(|c| + 1) \cdot (c, 1) \mid s \in \mathbb{C}, |s| = 1\} \approx S^1$$

für alle  $c \in \mathbb{C}$  ist. In der langen exakten Homotopiesequenz

$$\dots \rightarrow \pi_n(S^1) \rightarrow \pi_n(S^3) \xrightarrow{\eta_*} \pi_n(S^2) \rightarrow \pi_{n-1}(S^1) \rightarrow \dots$$

dieser Faserung verschwindet für  $n \geq 3$  die erste und die letzte Gruppe und  $\eta$  liefert einen Isomorphismus zwischen  $\pi_n(S^3)$  und  $\pi_n(S^2)$ . Das ist der Grund für die Ähnlichkeit der Spalten  $n=2$  und  $n=3$  der Tabelle der Homotopiegruppen im Anhang. Die *Hopf-Invariante*  $h(p) \in \mathbb{Z}$  ist eine Homotopieinvariante von Abbildungen  $p : S^{2n-1} \rightarrow S^n$ . Man kann zeigen, dass  $h : \pi_{2n-1}(S^n) \rightarrow \mathbb{Z}$  ein Homomorphismus ist. Da  $h(\eta) = 1$ , besitzt  $\eta$  Ordnung unendlich. Allgemeiner kann man zeigen, dass  $2\mathbb{Z} \subseteq \text{im}(h : \pi_{2n-1}(S^n) \rightarrow \mathbb{Z})$  für gerade  $n$ . Somit ist  $\mathbb{Z}$  ein direkter Summand von  $\pi_{2n-1}(S^n)$  für gerade  $n$ , was einen Teil der Aussage des Satzes von Serre zeigt. Die Konstruktion von  $\eta$  kann man auch mit den Quaternionen bzw. Oktonionen statt den komplexen Zahlen durchführen. Dies ergibt Faserungen  $S^3 \rightarrow S^7 \xrightarrow{\nu} S^4$  und  $S^7 \rightarrow S^{15} \xrightarrow{\sigma} S^8$ , die ebenfalls Hopf-Faserungen genannt werden. In der langen exakten Homotopiesequenz

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & \longrightarrow & \pi_7(S^3) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \cong \pi_7(S^7) & \xrightarrow{\nu_*} & \pi_7(S^4) \longrightarrow \pi_6(S^3) \longrightarrow \pi_6(S^7) = 0 \longrightarrow \dots \\
& & & & \nwarrow & \swarrow & \\
& & & & h & & 
\end{array}$$

von  $\nu$  ist  $h$  eine Retraktion von  $\nu_*$ . Somit gilt  $\pi_7(S^4) \cong \mathbb{Z} \oplus \pi_6(S^3)$ . Die Faserung  $\sigma$  induziert analog  $\pi_{15}(S^8) \cong \mathbb{Z} \oplus \pi_{14}(S^7)$ . Für Details siehe [Hat02, 4.44-4.47 und §4.B].

**Lemma 14.** Man kann jede stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  schreiben als Komposition

$$X \xrightarrow{i} E_f \xrightarrow{p} Y$$

einer Homotopieäquivalenz  $i$  und einer Faserung  $p$ . Genauer gilt

$$\begin{aligned}
E_f &:= \{(x, \gamma) \in X \times Y^I \mid f(x) = \gamma(0)\} \subset X \times Y^I, \\
i(x) &:= (x, t \mapsto f(x)), \\
p(x, \gamma) &:= \gamma(1),
\end{aligned}$$

wobei  $Y^I$  die Kompakt-Offen-Topologie trägt.



*Beweis.* Offensichtlich sind  $i$  und  $p$  stetig und es gilt  $p \circ i = f$ . Das Homotopieinverse von  $i$  ist  $j : E_f \rightarrow X$ ,  $(x, \gamma) \mapsto x$ . Es gilt  $j \circ i = \text{id}_X$  und eine Homotopie zwischen  $i \circ j$  und  $\text{id}_{E_f}$  ist gegeben durch

$$H : I \times E_f \rightarrow E_f, \quad (s, (x, \gamma)) \mapsto (x, \gamma(s \cdot -)).$$

Es bleibt zu zeigen, dass  $p$  eine Faserung ist. Es sei dazu ein topologischer Raum  $A$  und Abbildungen  $H_0 : A \rightarrow E_f$  und  $H : I \times A \rightarrow Y$  mit  $H \circ i_0 = p \circ H_0$  gegeben. Dann ist folgende Abbildung eine Homotopieliftung:

$$\begin{aligned} \tilde{H} : I \times A &\rightarrow E_f, \\ (s, a) &\mapsto \gamma_{s,a}, \quad \gamma_{s,a}(t) := \begin{cases} H_0(a)(t \cdot (1+s)) & \text{falls } t \cdot (1+s) \leq 1, \\ H(t \cdot (1+s) - 1, a) & \text{falls } t \cdot (1+s) \geq 1. \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

Wir betrachten die Inklusion  $i : \{x_0\} \rightarrow X$  des Basispunktes. Durch Lemma 14 erhalten wir eine Faserung  $F \rightarrow E_i \xrightarrow{p} X$  mit  $E_i \simeq \{x_0\}$  zusammenziehbar.

**Definition 15.** Der Totalraum  $PX := E_i = \{\gamma \in X^I \mid \gamma(0) = x_0\}$  heißt *Pfadraum* von  $(X, x_0)$ . Der Basispunkt von  $PX$  ist der konstante Weg  $\gamma_0 : I \rightarrow X$ ,  $t \mapsto x_0$ . Die Faser von  $p$  über  $x_0$  ist der *Schleifenraum*  $\Omega X := \{\gamma \in X^I \mid \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\}$ . Die Faserung  $\Omega X \rightarrow PX \xrightarrow{p} X$  heißt *Pfadfaserung*.

Die Randoperatoren aus der langen exakten  $F \rightarrow PX \xrightarrow{p} X$  sind Isomorphismen  $\pi_{i+1}(Y, y_0) \cong \pi_i(\Omega Y, \gamma_0)$  für  $i \geq 0$ , da die Homotopiegruppen von  $PX$  null sind. Die Einhängung bewirkt also eine Gradverschiebung der Homotopiegruppen.

### 3 Spektralsequenzen

Ein häufig verwendetes Hilfsmittel in der algebraischen Topologie sind lange exakte Sequenzen. Sie liefern einen Zusammenhang zwischen Homologie- oder Homotopiegruppen von verschiedenen Räumen. Wenn man genügend viele dieser Gruppen kennt, so kann man oft rein algebraisch die anderen Gruppen erschließen. Ein Beispiel ist die lange exakte Homotopiesequenz einer Faserung. Nun kann man sich fragen, ob es bei Faserungen auch einen Zusammenhang zwischen den Homologie- und Kohomologiegruppen von Basisraum, Totalraum und Faser gibt. Im Jahr 1951 hat Jean-Pierre Serre in seiner Dissertation [Ser51] gezeigt, dass es einen solchen tatsächlich gibt. Dieser hat jedoch nicht die Form einer langen exakten Sequenz, sondern ist kodiert in einem komplexerem algebraischen Objekt, einer Spektralsequenz.

Es sei  $A$  im Folgenden ein kommutativer Ring mit Eins.

**Definition 16.** Eine (homologische) *Spektralsequenz*  $E$  besteht aus

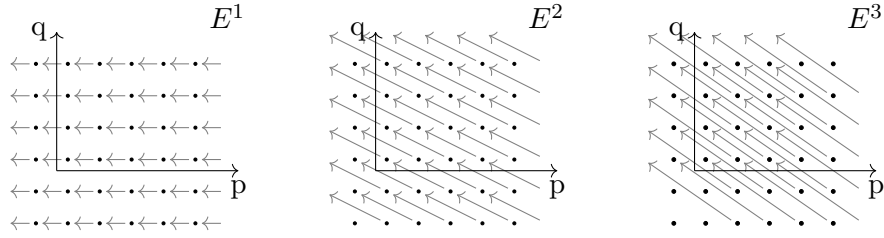
- $A$ -Moduln  $E_{p,q}^r$  für alle  $p, q \in \mathbb{Z}$  und  $r \geq 1$ ,
- $A$ -Modul-Homomorphismen  $d_{p,q}^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r$  mit  $d_{p-r,q+r-1}^r \circ d_{p,q}^r = 0$
- und Isomorphismen  $\alpha_{p,q}^r : H_{p,q}(E^r) := \ker(d_{p,q}^r) / \text{im}(d_{p+r,q-r+1}^r) \xrightarrow{\cong} E_{p,q}^{r+1}$ .

*Bemerkung.* • Die Homomorphismen  $d_{p,q}^r$  heißen *Differentiale*.

- Die Gesamtheit der Moduln  $E_{p,q}^r$  und Differentiale  $d_{p,q}^r$  mit  $r \in \mathbb{N}$  fest heißt *r-te Seite*  $E^r$ .
- Die Isomorphismen  $\alpha_{p,q}^r$  werden in der Notation unterdrückt und so gerechnet, als wäre  $E_{p,q}^{r+1}$  gleich  $H_{p,q}(E^r)$ .
- Wenn man eine Seite einer Spektralsequenz kennt, kann man also die Einträge auf der nächsten Seite berechnen, die Differentiale jedoch im Allgemeinen nicht.

- Der Eintrag  $E_{p,q}^r$  ist ein *Subquotient* (d. h. ein Quotientenmodul eines Untermoduls) von  $E_{p,q}^s$  falls  $s \leq r$ .

Man stellt Seiten für gewöhnlich in einem 2-dimensionalen Raster dar:



**Definition 17.** Eine Spektralsequenz *konvergiert*, falls für alle  $p, q \in \mathbb{Z}$  ein  $R \in \mathbb{N}$  existiert, sodass für alle  $r \geq R$  die Differentiale von und nach  $E_{p,q}^r$  verschwinden und damit

$$E_{p,q}^\infty := E_{p,q}^R \cong E_{p,q}^{R+1} \cong E_{p,q}^{R+2} \cong \dots$$

Der Grenzwert der Spektralsequenz ist die Unendlich-Seite  $E^\infty := \{E_{p,q}^\infty\}_{p,q \in \mathbb{Z}}$ .

Viele Spektralsequenzen sind im ersten Quadranten konzentriert, d. h.  $E_{p,q}^r$  ist nur für  $p, q \geq 0$  ungleich null. Solche Spektralsequenzen konvergieren immer, denn für alle  $p, q \in \mathbb{Z}$  führen für  $r \geq \max(p+1, q+2)$  alle Differentiale von  $E_{p,q}^r$  aus dem ersten Quadranten heraus und alle dort eintreffenden Differentiale kommen von außerhalb des ersten Quadranten und sind daher null.

**Definition 18.** Eine *Filtrierung* eines  $A$ -Moduls  $M$  ist eine aufsteigende Folge

$$0 \subseteq \dots \subseteq F^{p-1}M \subseteq F^pM \subseteq F^{p+1}M \subseteq \dots \subseteq M$$

von Untermoduln von  $M$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ . Eine Filtrierung heißt

- *ausschöpfend*, falls  $M = \bigcup_p F^pM$ ,
- *Hausdorffsch*, wenn  $0 = \bigcap_p F^pM$  und
- *regulär*, wenn sie ausschöpfend und Hausdorffsch ist.

**Definition 19.** Eine Spektralsequenz  $E$  *konvergiert gegen* einen graduierten  $A$ -Modul  $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$  (notiert  $E_{p,q}^r \Rightarrow M_{p+q}$ ), falls  $E$  überhaupt konvergiert und reguläre Filtrierungen

$$0 \subseteq \dots \subseteq F^{p-1}M_n \subseteq F^pM_n \subseteq F^{p+1}M_n \subseteq \dots \subseteq M_n$$

existieren, sodass  $E_{p,q}^\infty \cong F^pM_{p+q}/F^{p-1}M_{p+q}$  für alle  $p, q \in \mathbb{Z}$ .

In der Anwendung von Spektralsequenzen kennt man oft die Einträge der  $E^1$  oder  $E^2$ -Seite. Man versucht dann, die Einträge der  $E^\infty$ -Seite zu bestimmen, indem man sukzessive die Seiten  $E^r$  ausrechnet. Das Problem dabei ist, dass die dazu benötigten Differentiale auf diesen Seiten im Allgemeinen nicht bekannt sind. In der Praxis hofft man darauf, dass Differentiale allein deswegen verschwinden, da ihre Quell- bzw. Zielgruppe die Nullgruppe ist. Man kann auch bereits bekannte Information über die  $E^\infty$ -Seite verwenden, um Aussagen über Differentiale zu treffen, z. B. dass ein Differential ein Isomorphismus ist.

Angenommen, man hat auf diesem Weg die Seite  $E^\infty$  einer Spektralsequenz, welche gegen  $M$  konvergiert, berechnet. Dann kennt man immer noch nicht die Moduln  $M_n$ , sondern lediglich die Quotienten in einer Filtrierung von  $M_n$ . Im Fall, dass  $A$  ein Körper ist, ist  $M_n$  isomorph zur direkten Summe dieser Quotienten. Im Allgemeinen ist das aber nicht der Fall, wie das Beispiel der Filtrierung  $0 \subset 2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$  der abelschen Gruppe  $\mathbb{Z}$  zeigt.

Anders herum kann man Spektralsequenzen auch verwenden, um von  $E^\infty$  (oder den Moduln  $M_n$ ) auf die Seite  $E^2$  bzw.  $E^1$  zu schließen. Dies werden wir tun, um die Homologie von Eilenberg-MacLane-Räumen mit Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$  zu bestimmen.

## 4 Die Serre-Spektralsequenz

**Satz 20.** Es sei  $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$  eine Faserung mit wegzusammenhängendem Basisraum  $B$  und  $G$  eine abelsche Gruppe. Angenommen,  $\pi_1(B)$  wirkt trivial auf  $H_*(F; G)$ . Dann existiert eine (homologische) Spektralsequenz mit

$$E_{p,q}^2 = H_p(B; H_q(F; G)),$$

welche gegen  $H_*(E; G)$  konvergiert.

Die Existenz dieser Spektralsequenz wurde von Jean-Pierre Serre in seiner Doktorarbeit [Ser51] gezeigt. Sie wird daher ihm zu Ehren *Serre-Spektralsequenz* mit Koeffizienten in  $G$  genannt. Serre verwendet für den Beweis eine Definition von singulärer Homologie mittels Kuben anstatt von Simplizes. Ein Beweis, der ohne dieses technische Hilfsmittel auskommt, findet sich in [Hat04, Thm 1.3].

Im Falle einer nichttrivialen Wirkung der Fundamentalgruppe existiert ebenfalls eine Serre-Spektralsequenz. Die Einträge auf der  $E^2$ -Seite haben dann die Form  $E_{p,q}^2 = H_p(B; \mathcal{H}_q(F; G))$ . Dabei ist  $\mathcal{H}_q(F; G)$  keine feste Gruppe, sondern ein sogenanntes *lokales Koeffizientensystem*. Dies ist eine Familie von Gruppen  $(G_b)_{b \in B}$ , welche in einem gewissen Sinn stetig vom Punkt  $b \in B$  abhängen können. Am Punkt  $b \in B$  ist  $\mathcal{H}_q(F; G)_b = H_q(p^{-1}(b))$ . Ein stetiger Weg  $\gamma$  zwischen Punkten  $b_0, b_1 \in B$  induziert einen Isomorphismus  $\gamma_* : \mathcal{H}_q(F; G)_{b_0} \rightarrow \mathcal{H}_q(F; G)_{b_1}$ . Dieser Isomorphismus hängt nur von der Homotopieklasse von  $\gamma$  ab. Wenn  $\pi_1(B)$  trivial auf der Homologie der Faser wirkt, so hängt der Isomorphismus überhaupt nicht vom gewählten Weg ab. Dann ist  $H_p(B; \mathcal{H}_q(F; G)) \cong H_p(B; H_q(F; G))$ . Für Details siehe [McC01, S. 133-185]

Es gibt eine Version des Satzes für Serre für Kohomologie anstatt Homologie. In Kohomologie wird eine andere Indizierung für Spektralsequenzen verwendet:

**Definition 21.** Eine kohomologische *Spektralsequenz*  $E$  besteht aus

- $A$ -Moduln  $E_r^{p,q}$  für alle  $p, q \in \mathbb{Z}$  und  $r \geq 1$ ,
- $A$ -Modul-Homomorphismen  $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1}$  mit  $d_r^{p+r, q-r+1} \circ d_r^{p,q} = 0$
- und Isomorphismen  $\alpha_r^{p,q} : H^{p,q}(E_r) := \ker(d_r^{p,q}) / \text{im}(d_r^{p-r, q+r-1}) \xrightarrow{\cong} E_{r+1}^{p,q}$ .

Jede homologische Spektralsequenz  $E$  liefert eine kohomologische Spektralsequenz, wenn man  $E_r^{p,q} := E_{-p, -q}^r$  setzt.

**Definition 22.** Eine kohomologische Spektralsequenz  $E$  *konvergiert gegen* einen graduierten  $A$ -Modul  $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M^n$  (notiert  $E_r^{p,q} \Rightarrow M^{p+q}$ ), falls  $E$  überhaupt konvergiert und reguläre Filtrierungen

$$M^n \supseteq \dots \supseteq F^{p-1} M^n \supseteq F^p M^n \supseteq F^{p+1} M^n \supseteq \dots \supset 0$$

existieren, sodass  $E_{\infty}^{p,q} \cong F^p M^{p+q} / F^{p+1} M^{p+q}$  für alle  $p, q \in \mathbb{Z}$ .

**Satz 23.** Es sei  $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$  eine Faserung mit wegzusammenhängendem Basisraum  $B$  und  $G$  eine abelsche Gruppe. Angenommen,  $\pi_1(B)$  wirkt trivial auf  $H^*(F; G)$ . Dann existiert eine kohomologische Spektralsequenz mit

$$E_2^{p,q} = H^p(B; H^q(F; G)),$$

welche gegen  $H^*(E; G)$  konvergiert.

Dieser Satz wird bewiesen in [Hat04, Thm 1.14]. Eine Version mit lokalen Koeffizienten findet sich in [McC01, Thm 5.2].

Kohomologie besitzt gegenüber Homologie den Vorteil, dass die Kohomologiegruppen mit dem Cup-Produkt einen graduierten Ring bilden. Diese zusätzliche Struktur ermöglicht es, Räume zu unterscheiden, die die gleichen Homologie- und damit auch Kohomologiegruppen besitzen. Solch eine multiplikative Struktur existiert auch auf der Serre-Spektralsequenz in Kohomologie:

**Satz 24.** Es sei  $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$  eine Faserung mit wegzusammenhängendem Basisraum  $B$  und  $R$  ein Ring. Angenommen,  $\pi_1(B)$  wirkt trivial auf  $H^*(F; R)$ . Es sei  $E$  die Serre-Spektralsequenz der Faserung in Kohomologie mit Koeffizienten in  $R$ . Dann gibt es bilineare Abbildungen

$$m_r = m_r^{p,q,s,t} : E_r^{p,q} \times E_r^{s,t} \rightarrow E_r^{p+s,q+t}, \quad (x, y) \mapsto m_r(x, y) =: xy$$

mit folgenden Eigenschaften:

- (i)  $d_r$  ist derivativ:  $d_r^{p+s,q+t}(xy) = (d_r^{p,q}x)y + (-1)^{p+q}x(d_r^{s,t}y)$  für alle  $x \in E_r^{p,q}$  und  $y \in E_r^{s,t}$
- (ii) Es gilt  $m_{r+1}([x], [y]) = [m_r(x, y)]$  für alle  $x \in \ker(d_r^{p,q})$  und  $y \in \ker(d_r^{s,t})$ .  
Dabei ist  $m_r(x, y) \in \ker(d_r^{p+s,q+t})$  wegen (i).
- (iii) Auf der  $E_2$ -Seite ist  $m_2 : E_2^{p,q} \times E_2^{s,t} \rightarrow E_2^{p+s,q+t}$  das  $(-1)^{qs}$ -fache des Cup-Produkts

$$H^p(B; H^q(F; R)) \times H^s(B; H^t(F; R)) \rightarrow H^{p+s}(B; \mathcal{H}^{q+t}(F; R)),$$

welches für  $a = [(a_\sigma)_{\sigma \in \Delta_p(B)}] \in H^p(B; H^q(F; R))$  und  $b = [(b_\sigma)_{\sigma \in \Delta_s(B)}] \in H^s(B; H^t(F; R))$  definiert ist durch

$$(a \cup b)_{\sigma \in \Delta_{p+s}(B)} := a_{\sigma_{\langle e_0, \dots, e_p \rangle}} \cup b_{\sigma_{\langle e_{p+1}, \dots, e_{p+s} \rangle}}.$$

- (iv) Das Cup-Produkt auf  $H^*(B; R)$  respektiert die Filtrierungen

$$H^n := H^n(B; R) \supset \dots \supset F^{p-1}H^n \supset F^pH^n \supset F^{p+1}H^n \supset \dots \supset 0$$

und schränkt daher ein zu Abbildungen  $F^pH^m \times F^sH^n \rightarrow F^{p+s}H^{m+n}$ . Die induzierte Abbildung auf dem Quotienten  $F^pH^m/F^{p+1}H^m \times F^sH^n/F^{s+1}H^n \rightarrow F^{p+s}H^{m+n}/F^{p+s+1}H^{m+n}$  entspricht dem Grenzwert  $m_\infty^{p,m-p,s,n-s} : E_\infty^{p,m-p} \times E_\infty^{s,n-s} \rightarrow E_\infty^{p+s,m+n-p-s}$  der Multiplikationen  $m_r^{p,m-p,s,n-s}$ . Dieser Grenzwert existiert aufgrund von (ii).

Ein Beweis dieses Satzes wird in [McC01, Abschnitt 5.3] geführt.

## 5 Töten von Homotopiegruppen und Eilenberg-MacLane-Räume

Beim Studium von topologischen Räumen ist es oft sinnvoll, den betrachteten Raum etwas abzuändern, sodass er leichter zu untersuchen sind, indem man z.B. bestimmte Sätze anwendet, und dann die Ergebnisse auf den ursprünglichen Raum überträgt. Eine Möglichkeit einen Raum abzuändern ist es, bestimmte Homotopiegruppen zu null zu machen, zu „töten“. Der Raum wird damit aus Sicht der Homotopietheorie einfacher, aber geometrisch und aus Sicht der Homologietheorie komplexer.

Es sei dazu  $X$  ein zusammenhängender CW-Komplex. Wähle Erzeuger  $\{\phi_\alpha : S^n \rightarrow X \mid \alpha \in A\}$  von  $\pi_n(X)$ . Benutze diese Abbildungen, um einen neuen CW-Komplex  $X'$  aus  $X$  durch Ankleben von  $n+1$ -Zellen  $e_\alpha^{n+1}$  zu konstruieren. Mit anderen Worten ist folgendes Diagramm ein Pushout:

$$\begin{array}{ccc} S^n \times A & \xrightarrow{\sqcup \phi_\alpha} & X \\ i \times \text{id}_A \downarrow & & \downarrow i \\ D^{n+1} \times A & \longrightarrow & X' \end{array}$$

**Lemma 25.** Die Abbildungen  $\pi_j(X \xrightarrow{i} X')$  sind Isomorphismen für  $j < n$  und  $\pi_n(X') = 0$ .

*Beweis.* Aus zellulärer Approximation (siehe [Hat02, 4.8]) folgt:

- Für alle  $x \in \pi_j(X')$ ,  $j \leq n$  gibt es eine Abbildung  $f : S^n \rightarrow X$  mit  $x = [i \circ f]$ .

- Falls für zwei Abbildungen  $f, g : S^j \rightarrow X$ ,  $j < n$  eine basispunkterhaltende Homotopie  $H$  zwischen  $i \circ f : S^j \rightarrow X'$  und  $i \circ g$  existiert, so auch zwischen  $f$  und  $g$ .

Somit ist  $\pi_j(X \xrightarrow{i} X')$  bijektiv für  $j < n$  und surjektiv für  $j = n$ . Um zu sehen, dass  $\pi_n(X') = 0$ , reicht es zu zeigen, dass  $\pi_n(i)[\phi_\alpha] = [i \circ \phi_\alpha] = 0$  für alle  $\alpha \in A$ . Das gilt nach Konstruktion, da die charakteristische Abbildung  $\Phi : e_\alpha^{n+1} \rightarrow X'$  eine Fortsetzung von  $i \circ \phi_\alpha$  auf  $D^{n+1}$  ist.  $\square$

Wir haben jedoch keine Kontrolle über die höheren Homotopiegruppen  $\pi_j(X)$ ,  $j > n$ . Diese können von der Wahl der Erzeuger  $\phi_\alpha$  abhängen. Wir können aber mit dem Verfahren fortfahren, und diese Gruppen ebenfalls zu Null machen. Dazu führen wir obige Konstruktion durch und erhalten eine Folge

$$\dots = X_{n-2} = X_{n-1} := X \subseteq X' =: X_n \subseteq X_{n+1} \subseteq X_{n+2} \subseteq \dots$$

von CW-Komplexen, für die gilt:

- $X_m$  entsteht aus  $X_{m-1}$  durch Ankleben von  $(m+1)$ -Zellen.
- $\pi_j(X_m \hookrightarrow X_k) : \pi_j(X_m) \rightarrow \pi_j(X_k)$  ist ein Isomorphismus für  $j \leq m \leq k$ .
- $\pi_j(X_m) = 0$  für  $n \leq j \leq m$

Wir setzen  $\tau_{<n}X := \tau_{\leq n+1}X \bigcup_{j=n}^{\infty} X_j$ .

**Lemma 26.** Die Inklusion  $i : X \rightarrow \tau_{<n}X$  induziert Isomorphismen  $\pi_j(X) \rightarrow \pi_j(\tau_{<n}X)$  für  $j < n$ . Es gilt  $\pi_j(\tau_{<n}X) = 0$  für  $j \geq n$ .

*Beweis.* Der Satz über zelluläre Approximation impliziert:

- Jedes Element  $x \in \pi_j(\tau_{<n}X)$  wird repräsentiert durch eine Abbildung  $f : S^j \rightarrow X_j$ .
- Falls  $i \circ f \sim i \circ g$  für  $f, g : S^j \rightarrow X_j$ , so gilt auch  $f \sim g$ .

Das zeigt die Behauptung, da  $\pi_j(X_j) = 0$  für  $j \geq n$ .  $\square$

Der Raum  $\tau_{<n}X$  hängt auch nicht (bis auf Homotopie) von den Wahlen der Erzeuger ab: Es seien dazu  $Y, Y' \supset X$  zwei durch obiges Verfahren aus  $X$  konstruierte Räume. Dann kann man die Inklusionsabbildung  $i : X \hookrightarrow Y'$  fortsetzen zu einer Abbildung  $f : Y \rightarrow Y'$ , indem man induktiv  $f$  auf das  $j$ -Skelett von  $Y$ ,  $j > n$  fortsetzt. Dies ist möglich, da für eine  $j$ -Zelle  $e_\beta^j \subset Y$  die Einschränkung  $f|_{\partial e_\beta^j}$  nullhomotop ist. Die Abbildung  $f$  ist dann eine Homotopieäquivalenz nach dem Whitehead-Theorem (siehe [Hat02, Thm 4.5]), da sie Isomorphismen auf allen Homotopiegruppen induziert.

Nun können wir mit Lemma 14 die Abbildung  $i : X \rightarrow \tau_{<n}X$  in eine Faserung  $F \rightarrow E_i \rightarrow \tau_{<n}X$  mit  $E_i \simeq X$  umwandeln. Anhand der langen exakten Sequenz von Homotopiegruppen sieht man, dass  $\pi_j(F \rightarrow E_i)$  für  $j \geq n$  ein Isomorphismus ist und dass  $\pi_j(F) = 0$  für  $j < n$ . Wir haben es also geschafft, einen  $(n-1)$ -zusammenhängenden Raum  $\tau_{\geq n}X := \tau_{>n-1}X := F$  zu konstruieren, der im Grad  $j \geq n$  dieselben Homotopiegruppen wie  $X$  besitzt. Mit anderen Worten: Wir haben die Homotopiegruppen unterhalb Grad  $n$  getötet. Die Faserung  $\tau_{\geq n}X \rightarrow X' \rightarrow \tau_{<n}X$  mit  $X' := E_i \simeq X$  wird uns im Folgenden erlauben,  $X$  zu untersuchen, indem wir  $\tau_{\geq n}X$  und  $\tau_{<n}X$  getrennt studieren. Wir werden insbesondere die Faserung  $\tau_{>n}S^n \rightarrow S^n \rightarrow \tau_{\leq n}S^n$  verwenden, um die Homotopiegruppen von  $S^n$  zu untersuchen. Der Raum  $\tau_{\leq n}S^n$  besitzt nur eine nicht verschwindende Homotopiegruppe, nämlich  $\pi_n(\tau_{\leq n}S^n) \cong \pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ . Solche Räume spielen eine wichtige Rolle in der Homotopietheorie und haben deshalb einen eigenen Namen:

**Definition 27.** Es sei  $G$  eine Gruppe und  $n \geq 1$ . Ein *Eilenberg-MacLane-Raum* vom Typ  $K(G, n)$  ist ein punktierter, zusammenhängender topologischer Raum  $(X, x_0)$  mit

$$\pi_q(X, x_0) = \begin{cases} G & \text{falls } q = n, \\ 0 & \text{falls } q \neq n. \end{cases}$$

Mit anderen Worten ist  $\tau_{\leq n} S^n$  ein  $K(\mathbb{Z}, n)$ . Man kann zeigen (siehe [Hat02, S. 365-366]):

**Satz 28.** Sei  $n \geq 1$  und  $G$  eine Gruppe, abelsch für  $n \geq 2$ . Dann existiert ein CW-Komplex  $(X, x_0)$  vom Typ  $K(G, n)$ . Der CW-Komplex  $X$  ist eindeutig bis auf Homotopieäquivalenz, d. h. ist  $X'$  ein weiterer CW-Komplex vom Typ  $K(G, n)$ , so gilt  $X \simeq X'$ .

*Bemerkung.* Es sei  $(X, x_0)$  ein  $K(G, n)$ . Dann ist  $\Omega X$  ein  $K(G, n-1)$ , denn

$$\pi_q(\Omega X, \gamma_0) \cong \pi_{q+1}(X, x_0) \cong \begin{cases} G & \text{falls } q+1 = n \iff q = n-1, \\ 0 & \text{falls } q+1 \neq n \iff q \neq n-1. \end{cases}$$

Die Homologiegruppen von Räumen vom Typ  $K(G, n)$  kann man über die Pfadfaserung  $K(G, n-1) \rightarrow PK(G, n) \rightarrow K(G, n)$  untersuchen.

## 6 Das Hurewicz-Mod- $\mathcal{C}$ -Theorem

Es sei  $(X, x_0)$  ein punktierter topologischer Raum. Der Hurewicz-Homomorphismus  $h_n : \pi_n(X, x_0) \rightarrow H_n(X; \mathbb{Z})$  verläuft zwischen der  $n$ -ten Homotopiegruppe und der  $n$ -ten Homologiegruppe von  $X$ . Er ist definiert durch  $h_n([f]) := H_n(f)(\alpha)$  für einen fest gewählten Erzeuger  $\alpha \in H_n(S^n; \mathbb{Z})$ . In diesem Abschnitt werden wir folgenden klassischen Satz verallgemeinern:

**Satz 29** (Hurewicz). Sei  $(X, x_0)$  ein  $(n-1)$ -zusammenhängender topologischer Raum, d. h.  $\pi_i(X, x_0) = 0$  für  $i < n$ . Dann ist  $h_i : \pi_i(X, x_0) \rightarrow H_i(X; \mathbb{Z})$  ein Isomorphismus für  $0 < i \leq n$ . Insbesondere gilt  $H_i(X; \mathbb{Z}) = 0$  für  $0 < i < n$ .

Ein Beweis dieses Satzes wird in [Hat02, 4.32] geführt.

**Definition 30.** Eine Klasse  $\mathcal{C}$  von abelschen Gruppen heißt *Serre-Klasse*, falls

1. Für jede kurze exakte Seq.  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  von ab. Gruppen gilt:  $B \in \mathcal{C} \iff A, C \in \mathcal{C}$ .
2. Für  $A, B \in \mathcal{C}$  sind auch  $A \otimes B \in \mathcal{C}$  und  $\text{Tor}(A, B) \in \mathcal{C}$ .

*Bemerkung.* Aus der ersten Eigenschaft folgt, dass Bilder, Untergruppen und Quotienten einer Gruppe aus  $\mathcal{C}$  wieder in  $\mathcal{C}$  sind. Genauer gilt für eine ab. Gruppe  $B$  und eine Untergruppe  $A < B$ :  $B \in \mathcal{C} \iff A, B/A \in \mathcal{C}$ . Durch Induktion kann man zeigen, dass für eine Gruppe  $A$  mit endlicher Filtrierung  $A = F^0 A \supseteq F^1 A \supseteq \dots \supseteq F^k A = 0$  gilt:  $A \in \mathcal{C} \iff F^0 A/F^1 A, \dots, F^{k-1} A/F^k A \in \mathcal{C}$ . Außerdem liegt die direkte Summe zweier Gruppen aus  $\mathcal{C}$  wieder in  $\mathcal{C}$ .

**Definition 31.** Es sei  $\mathcal{C}$  eine Serre-Klasse. Ein Morphismus  $f : A \rightarrow B$  zwischen abelschen Gruppen heißt *Isomorphismus modulo  $\mathcal{C}$* , falls  $\ker(f), \text{coker}(f) \in \mathcal{C}$ .

*Bemerkung.* Dies ist äquivalent zur Existenz einer exakten Sequenz  $K \rightarrow A \xrightarrow{f} B \rightarrow C$  mit  $K, C \in \mathcal{C}$ . Eine Gruppe, welche modulo- $\mathcal{C}$ -isomorph zu einer Gruppe aus  $\mathcal{C}$  ist, ist selbst in  $\mathcal{C}$ .

**Lemma 32.** Folgende Klassen sind Serre-Klassen:

- a)  $\mathcal{F} := \{\text{endliche abelsche Gruppen}\}$
- b)  $\mathcal{FG} := \{\text{endlich erzeugte abelsche Gruppen}\}$

*Beweis.* a) Es sei  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$  eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen. Falls  $B$  endlich ist, so sind  $A$  und  $C$  offensichtlich auch endlich. Angenommen,  $A$  und  $C$  sind endlich. Wir behaupten, dass  $|g^{-1}(c)| = |A|$  für alle  $c \in C$ . Für  $c = 0$  gilt die Aussage wegen Exaktheit. Sei nun  $c \in C$  beliebig. Wähle ein Urbild  $a \in g^{-1}(c)$ . Dann ist Rechtsmultiplikation mit  $a^{-1}$  eine Bijektion  $x \mapsto x \cdot a^{-1} : g^{-1}(c) \rightarrow g^{-1}(0)$  mit Umkehrabbildung  $x \mapsto x \cdot a$ . Somit ist  $|g^{-1}(c)| = |g^{-1}(0)| = |A|$ . Damit ist die Behauptung gezeigt. Es folgt, dass  $|B| = |A| \cdot |C| < \infty$ . Es bleibt, den zweiten Teil der Definition zu zeigen. Für  $n, m > 0$  gilt  $\mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Z}_m \cong \text{Tor}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \cong \mathbb{Z}_{\text{ggT}(n,m)}$ . Wegen des Hauptsatzes über endlich erzeugte abelsche Gruppen kann jede endliche abelsche Gruppe als endliche direkte Summe von zyklischen Gruppen schreiben. Es seien daher nun  $A = \bigoplus_{i=1}^N \mathbb{Z}_{n_i}$  und  $B = \bigoplus_{j=1}^M \mathbb{Z}_{m_j}$ . Dann ist  $\text{Tor}(A, B) \cong A \otimes B \cong \bigoplus_{i=1}^N \bigoplus_{j=1}^M \mathbb{Z}_{\text{ggT}(n_i, m_j)}$  ebenfalls endlich.

b) Wir betrachten nun wieder die kurze exakte Sequenz  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$  von abelschen Gruppen. Falls  $B$  endlich erzeugt ist, so ist  $C$  offensichtlich endlich erzeugt und  $A$  ist ebenfalls endlich erzeugt als Untergruppe einer endlich erzeugten abelschen Gruppe. Es seien nun  $A$  und  $C$  endlich erzeugt,  $A = \langle a_1, \dots, a_N \rangle$  und  $C = \langle c_1, \dots, c_M \rangle$ . Dann ist  $\ker(g) = \langle f(a_1), \dots, f(a_N) \rangle$ . Wähle für  $j = 1, \dots, M$  ein Element  $b_j \in g^{-1}(c_j)$ . Wir behaupten, dass  $B = \langle f(a_1), \dots, f(a_N), b_1, \dots, b_M \rangle$ . Sei dazu  $b \in B$  beliebig. Schreibe  $g(b) = m_1 \cdot c_1 + \dots + m_M \cdot c_M$  mit  $m_1, \dots, m_M \in \mathbb{Z}$ . Dann ist  $\tilde{b} := b - (m_1 \cdot b_1 + \dots + m_M \cdot b_M) \in \ker(g)$ , d. h. es gibt  $n_1, \dots, n_N \in \mathbb{Z}$  mit  $\tilde{b} = n_1 \cdot f(a_1) + \dots + n_N \cdot f(a_N)$ . Somit  $b = m_1 \cdot c_1 + \dots + m_M \cdot c_M + n_1 \cdot a_1 + \dots + n_N \cdot a_N$ . Damit ist der erste Teil der Definition gezeigt. Für den zweiten Teil seien  $A$  und  $B$  endlich erzeugte abelsche Gruppen und  $n, n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N}$  und  $m, m_1, \dots, m_M \in \mathbb{N}$  mit  $A \cong \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{n_N}$  und  $B \cong \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{m_M}$ . Es gilt  $A \otimes B = \mathbb{Z}^{nm} \oplus (\mathbb{Z}_{m_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{m_M})^n \oplus (\mathbb{Z}_{n_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{n_N})^m \oplus \bigoplus_{i=1}^N \bigoplus_{j=1}^M \mathbb{Z}_{\text{ggT}(n_i, m_j)}$  und  $\text{Tor}(A, B) = \bigoplus_{i=1}^N \bigoplus_{j=1}^M \mathbb{Z}_{\text{ggT}(n_i, m_j)}$ , es sind also  $A \otimes B$  und  $\text{Tor}(A, B)$  ebenfalls endlich erzeugt.  $\square$

**Satz 33** („Hurewicz-mod- $\mathcal{C}$ -Theorem“). Es sei  $\mathcal{C} \in \{\mathcal{FG}, \mathcal{F}\}$  und  $(X, x_0)$  ein einfach zusammenhängender topologischer Raum. Angenommen,  $\pi_i(X, x_0) \in \mathcal{C}$  für  $0 < i < n$ . Dann ist  $h_i : \pi_i(X, x_0) \rightarrow H_i(X; \mathbb{Z})$  ein Isomorphismus modulo  $\mathcal{C}$  für  $i \leq n$ . Insbesondere gilt  $H_i(X; \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}$  für  $0 < i < n$ .

Mit  $\mathcal{C} := \{0\}$  ist die Aussage des Satzes gerade die des gewöhnlichen Hurewicz-Theorem. Durch Induktion kann man zeigen:

**Korollar 34.** Es sei  $\mathcal{C} \in \{\mathcal{FG}, \mathcal{F}\}$  und  $(X, x_0)$  ein einfach zusammenhängender topologischer Raum. Dann gilt für alle  $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ :

$$\forall 0 \leq n < N : \pi_n(X, x_0) \in \mathcal{C} \iff \forall 1 \leq n < N : H_n(X; \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}.$$

Aus dem Korollar folgt, dass die Homotopiegruppen der Sphären alle endlich erzeugt sind, da die Homologiegruppen der Sphären endlich erzeugt sind.

**Definition 35.** Es sei  $\mathcal{C}$  eine Serre-Klasse. Ein topologischer Raum  $X$  heißt  $\mathcal{C}$ -azyklisch, falls  $\tilde{H}_n(X) \in \mathcal{C}$  für alle  $n \geq 0$ .

**Lemma 36.** Es sei  $F \rightarrow X \rightarrow B$  eine Faserung von wegzusammenhängenden Räumen  $F$ ,  $X$  und  $B$ . Es wirke  $\pi_1(B)$  trivial auf  $H_*(F)$ . Dann gilt folgende 2-aus-3-Eigenschaft: Falls zwei der Räume  $F$ ,  $X$  und  $B$   $\mathcal{C}$ -azyklisch sind, so auch der dritte.

*Beweis.* Wir betrachten die Serre-Spektralsequenz zu der Faserung mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}$ . Zunächst gilt  $H_n(X) \in \mathcal{C}$  genau dann, wenn die Gruppen  $E_{i, n-i}^\infty$  für  $i = 0, \dots, n$  alle in  $\mathcal{C}$  liegen, denn diese Gruppen sind die Quotienten einer endlichen Filtrierung von  $H_n(X)$  (vgl. Bemerkung nach Definition 30).

*Fall 1:  $F$  und  $B$  sind  $\mathcal{C}$ -azyklisch:* Die universelle Koeffizientenformel liefert

$$E_{p,q}^2 \cong H_p(B; H_q(F; \mathbb{Z})) \cong (H_p(B; \mathbb{Z}) \otimes H_q(F; \mathbb{Z})) \oplus \text{Tor}(H_{p-1}(B; \mathbb{Z}), H_q(F; \mathbb{Z})).$$

Man sieht durch Unterscheidung der Fälle  $p = 0$ ,  $p = 1$  und  $p > 1$  sowie  $q = 0$  und  $q > 0$ , dass  $E_{p,q}^2 \in \mathcal{C}$  für  $(p, q) \neq (0, 0)$ . Als Subquotient von  $E_{p,q}^2$  liegt nun auch  $E_{p,q}^\infty$  in  $\mathcal{C}$  für  $(p, q) \neq (0, 0)$ . Dies zeigt die Behauptung nach der Bemerkung am Anfang des Beweises.

*Fall 2:  $F$  und  $X$  sind  $\mathcal{C}$ -azyklisch:* Wir zeigen nun durch Induktion über  $k$ , dass  $H_p(B) \in \mathcal{C}$  für  $0 < p < k$ . Gelte dies für  $k \geq 1$ . Wir wollen zeigen, dass dann auch  $H_k(B)$  in  $\mathcal{C}$  liegt. Für alle  $r \geq 2$  gibt es eine kurze exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \ker(d_{k,0}^r) & \rightarrow & E_{k,0}^r & \xrightarrow{d_{k,0}^r} & \operatorname{im}(d_{k,0}^r) \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & & & \downarrow \subseteq \\ & & E_{k,0}^{r+1} & & & & E_{k-r,r-1}^r \end{array}$$

Man sieht unter Verwendung der Induktionsannahme und der universellen Koeffizientenformel wie in Fall 1, dass  $E_{k-r,r-1}^2$  und somit auch  $E_{k-r,r-1}^r$  in  $\mathcal{C}$  liegen. Damit gilt auch  $\operatorname{im}(d_{k,0}^r) \in \mathcal{C}$ . Aus der ersten Eigenschaft von Serre-Klassen folgt  $E_{k,0}^r \in \mathcal{C} \iff E_{k,0}^{r+1} \in \mathcal{C}$  für alle  $r \geq 1$ . Da aber  $E_{k,0}^R \cong E_{k,0}^\infty \in \mathcal{C}$  für  $R$  groß genug, gilt  $E_{k,0}^r \in \mathcal{C}$  für alle  $r \geq 2$ . Insbesondere  $H_k(B; \mathbb{Z}) \cong H_k(B; H_0(F; \mathbb{Z})) \cong E_{k,0}^2 \in \mathcal{C}$ .

*Fall 3:  $B$  und  $X$  sind  $\mathcal{C}$ -azyklisch:* Analog zum vorherigen Fall zeigt man induktiv, dass  $H_q(F) \in \mathcal{C}$  für  $0 < q < k$ . Dazu verwendet man die kurze exakte Sequenz  $0 \rightarrow \operatorname{im}(d_{r,k-r+1}^r) \hookrightarrow E_{0,k}^r \rightarrow E_{0,k}^{r+1}$ .  $\square$

**Lemma 37.** Es sei  $G \in \mathcal{C} \in \{\mathcal{FG}, \mathcal{F}\}$ . Dann ist  $K(G, n)$   $\mathcal{C}$ -azyklisch für alle  $n \geq 1$ .

*Beweis.* Es sei zunächst  $n = 1$ .

- Falls  $G = \mathbb{Z}$ , so stimmt die Aussage, denn der Kreis  $S^1$  ist ein  $K(\mathbb{Z}, 1)$  und  $H_*(S^1; \mathbb{Z}) \in \mathcal{FG}$ .
- Falls  $G = \mathbb{Z}_m$ , so kann man einen  $K(\mathbb{Z}_m, 1)$  als unendlich-dimensionalen Linsenraum  $L_m$  konstruieren.<sup>1</sup> Dieser besitzt Homologiegruppen  $\tilde{H}_i(L_m) \cong \mathbb{Z}_m$  für  $i > 0$  ungerade und  $\tilde{H}_i(L_m) \cong 0$  sonst (vgl. [Hat02, 2.43]).
- Falls  $G = G_1 \oplus G_2$ , dann ist  $K(G_1, 1) \times K(G_2, 1)$  ein  $K(G, 1)$ . Wenn die Aussage für  $G_1$  und  $G_2$  stimmt, so folgt aus dem letzten Lemma, angewendet auf die Produktfaserung  $K(G_1, 1) \rightarrow K(G_1, 1) \times K(G_2, 1) \rightarrow K(G_2, 1)$ , dass sie auch für  $G$  gilt.

Da man jede endlich erzeugte abelsche Gruppe als direkte Summe von endlich vielen Summanden der Form  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Z}_m$  schreiben kann, gilt die Aussage für  $n = 1$ .

Induktiv zeigen wir nun, dass die Aussage für beliebiges  $n$  gilt. Dazu verwenden wir die Pfadfaserung  $K(G, n) \rightarrow P \rightarrow K(G, n+1)$ . Es gilt  $H_k(P) = 0 \in \mathcal{C}$  und  $H_k(K(G, n)) \in \mathcal{C}$  für  $k \geq 1$  nach Induktionshypothese, also  $H_k(K(G, n+1)) \in \mathcal{C}$  für alle  $k \geq 1$  nach dem vorhergehenden Lemma.  $\square$

Für den Beweis des nächsten Lemmas benötigen wir einen weiteren Begriff.

**Definition 38.** Ein *Postnikov-Turm* eines wegzusammenhängenden Raumes  $X$  ist ein kommutatives Diagramm wie rechts, für das gilt:

- $\pi_i(X \rightarrow X_n)$  ist ein Isomorphismus für  $i \leq n$  und
- $\pi_i(X_n) = 0$  für  $i > n$ .

$$\begin{array}{c} X \\ \swarrow \quad \searrow \quad \downarrow \\ \dots \rightarrow X_3 \rightarrow X_2 \rightarrow X_1 \end{array}$$

Postnikov-Türme kann man folgendermaßen konstruieren: Setze  $X_n := \tau_{\leq n} X$ . Dabei wird  $\tau_{\leq n} X$  wie im letzten Abschnitt beschrieben aus  $X$  durch Ankleben von Zellen der Dimension

<sup>1</sup>Sei dazu  $S^\infty \subset \mathbb{C}^\infty$  die unendlich-dimensionale Sphäre. Es wirke  $\mathbb{Z}_m$  auf jedem Faktor  $\mathbb{C}$  von  $\mathbb{C}^\infty$  durch Rotation  $(m, x) \mapsto x \cdot e^{2\pi i m}$ . Dies induziert eine eigentlich diskontinuierliche Gruppenwirkung  $\mathbb{Z}_m \rightarrow \operatorname{Aut}(S^\infty)$ . Dann ist  $L_m := S^\infty / \mathbb{Z}_m$  ein  $K(\mathbb{Z}_m, 1)$ : Die Überlagerung  $S^\infty \rightarrow S^\infty / \mathbb{Z}_m$  hat Decktransformationsgruppe  $\mathbb{Z}_m$  ist universell, da  $S^\infty$  zusammenziehbar ist (vgl. [Hat02, 1B.3-1B.4]). Somit ist  $\pi_1(L_m) \cong \mathbb{Z}_m$ . Für die höheren Homotopiegruppen gilt  $\pi_n(L_m) \cong \pi_n(S^\infty) = 0$ .



*Bemerkung.* Es sei ein Postnikov-Turm  $\dots \rightarrow X_2 \rightarrow X_1$  gegeben. Dann kann man durch wiederholtes Anwenden der in Lemma 14 beschriebenen Konstruktion einen neuen Postnikovturm  $\dots \rightarrow X'_2 \rightarrow X'_1$  und Homotopieäquivalenzen  $X_i \simeq X'_i$  konstruieren, sodass die Abbildungen  $X'_{i+1} \rightarrow X'_i$  Faserungen sind. Man sieht anhand der langen exakten Sequenz von Homotopiegruppen, dass die Faser von  $X'_{i+1} \rightarrow X'_i$  ein  $K(\pi_{n+1}(X), n+1)$  ist.

**Lemma 39.** Es sei  $\mathcal{C} \in \{\mathcal{FG}, \mathcal{F}\}$  und  $X$  einfach zusammenhängend mit  $\pi_i(X, x_0) \in \mathcal{C}$  für alle  $i \geq 0$ . Dann ist  $X$   $\mathcal{C}$ -azyklisch, d. h. es gilt  $H_i(X) \in \mathcal{C}$  für  $i \geq 1$ .

Es gilt  $H_i(X; \mathbb{Z}) \cong H_i(X_k; \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}$  für  $k \geq i$ , da  $\pi_i(X \rightarrow X_k)$  und nach einem Korollar der relativen Version des Hurewicz-Theorems damit auch  $H_i(X \rightarrow X_k)$  ein Isomorphismus für  $i \leq k$  ist. **TODO: Verweis oder Beweis zu dem letzten Satz**  $\square$

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X) & \xrightarrow{\cong} & \pi_n(X_n) \\ \downarrow h_n & & \downarrow h_n \\ H_n(X) & \xrightarrow{\cong} & H_n(X_n) \end{array}$$
$$E_{p,q}^2 \cong H_p(X_{n-1}; \underbrace{H_q(K(\pi_n(X), n); \mathbb{Z})}_{=0 \text{ f\"ur } 0 < q < n}),$$
$$\begin{array}{ccccccc}
H_{n+1}(X_{n-1}) & & H_n(F_n) & & 0 & \searrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & & \nearrow & \\
E_{n+1,0}^2 & & E_{0,n}^2 & & & & E_{n,0}^2 \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
E_{n+1,0}^n & \xrightarrow{d_{n+1,0}^r} & E_{0,n}^n & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & E_{0,n}^\infty & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & H_n(X_n) \longrightarrow E_{n,0}^\infty \longrightarrow 0 \\
& & \searrow & & \swarrow & & \\
& & & & & & 
\end{array}$$

- Die linke Sequenz ist exakt, da  $E_{0,n}^\infty \cong E_{0,n}^{n+1} \cong \ker(d_{0,n}^r)/\operatorname{im}(d_{n+1,0}^r) = E_{0,n}^n/\operatorname{im}(d_{n+1,0}^r)$ .

- Die rechte Sequenz ist exakt, da  $E_{0,n}^\infty = F^0 H_n(X_n)$  und  $E_{n,0}^\infty = F^n H_n(X_n)/F^{n-1} H_n(X_n)$  für eine Filtrierung  $0 = F^{-1} H_n(X_n) \subseteq F^0 H_n(X_n) \subseteq \dots \subseteq F^n H_n(X_n) = H_n(X_n)$ . Da  $F^p H_n(X_n)/F^{p-1} H_n(X_n) = E_{p,n-p}^\infty = 0$  für  $p = 1, \dots, n-1$ , gilt  $F^0 H_n(X_n) = \dots = F^{n-1} H_n(X_n)$ .

Aus Lemma ?? folgt, dass  $E_{n+1,0}^n, E_{n,0}^\infty \in \mathcal{C}$ . Somit ist der mittlere Morphismus  $H_n(F_n) = E_{0,n}^n \rightarrow H_n(X_n)$  ein Isomorphismus modulo  $\mathcal{C}$ . **TODO: Begründen, warum dieser Morphismus genau der von der Inklusion  $F_n \hookrightarrow X_n$  induzierte Morphismus ist.** Betrachte nun das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(F_n) & \xrightarrow{\cong} & \pi_n(X_n) \\ \cong \downarrow h_n & & \downarrow h_n \\ H_n(F_n) & \longrightarrow & H_n(X_n) \end{array}$$

Dabei sind die vertikalen Morphismen die Hurewicz-Homomorphismen und die horizontalen Morphismen werden durch die Inklusion induziert. Der linke Hurewicz-Homomorphismus ist nach dem Hurewicz-Theorem ein Isomorphismus, da  $F_n$   $(n-1)$ -zusammenhängend ist. Der obere Morphismus ist ein Isomorphismus, wie man anhand der langen exakten Sequenz der Faserung  $F_n \rightarrow X_n \rightarrow X_{n-1}$  sehen kann. Der untere Morphismus ist ein Isomorphismus modulo  $\mathcal{C}$ , wie wir gerade eben gesehen haben. Somit ist auch der rechte Morphismus im Diagramm ein Isomorphismus modulo  $\mathcal{C}$ .  $\square$

*Bemerkung.* Man kann in diesem Abschnitt die Voraussetzung, dass  $X$  einfach zusammenhängend ist, ersetzen durch die Forderung, dass  $X$  wegzusammenhängend und abelsch ist, d. h. die Wirkung der Fundamentalgruppe  $\pi_1(X)$  auf den höheren Homotopiegruppen  $\pi_n(X)$  trivial ist.

## 7 Rationale Kohomologie von Räumen vom Typ $K(\mathbb{Z}, n)$

Wir wollen zeigen, dass die Homotopiegruppen von gewissen Räumen  $X$  alle endlich sind. Nach Korollar 34 können wir dazu zeigen, dass die Homologiegruppen in positiven Graden endlich sind. Angenommen, wir wissen bereits, dass die Homologiegruppen von  $X$  endlich erzeugt sind. Dann ist  $H_i(X; \mathbb{Z})$  genau dann endlich, wenn  $H_i(X; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} = 0$ . Allgemeiner ist die  $i$ -te Bettizahl  $b_i := \dim_{\mathbb{Q}}(H_i(X; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q})$  die Dimension des freien Anteils von  $H_i(X; \mathbb{Z})$ . Da  $\mathbb{Q}$  flach ist, gilt  $H_i(X; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} \cong H_i(X; \mathbb{Q})$ . Außerdem gilt  $H_i(X; \mathbb{Q}) \cong \text{Hom}(H_i(X; \mathbb{Q}), \mathbb{Q}) \cong H^i(X; \mathbb{Q})$ , wenn die Homologiegruppen von  $X$  endlich erzeugt sind. Das ist der Grund, warum wir uns für Homologie- und Kohomologiegruppen mit Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$  interessieren. Der Vorteil gegenüber Homologie- und Kohomologiegruppen mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}$  besteht darin, dass diese Gruppen leichter zu bestimmen sind. Konkret haben wir für  $X = K(\mathbb{Z}, n)$ :

**Satz 40.** Für  $n \geq 1$  gilt

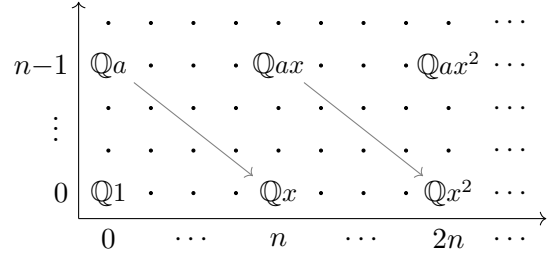
$$H^*(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q}[x] & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \Lambda_{\mathbb{Q}}[x] & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

als graduierte Ringe mit Erzeuger  $x \in H^n(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q})$ . Dabei bezeichnet  $\Lambda_{\mathbb{Q}}[x]$  die äußere Algebra mit Erzeuger  $x$ .

*Beweis.* Durch Induktion über  $n$ . Der Satz gilt für  $n = 1$ , denn der Kreis  $S^1$  ist ein  $K(\mathbb{Z}, 1)$  und es gilt bekanntermaßen  $H^*(S^1; R) \cong \Lambda_R[x]$  für  $R = \mathbb{Z}$  und somit auch für  $R = \mathbb{Q}$ .

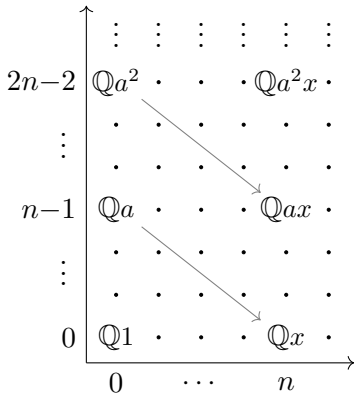
Im Induktionsschritt nutzen wir die Pfadfaserung  $F := K(\mathbb{Z}, n-1) \rightarrow P \rightarrow B := K(\mathbb{Z}, n)$ . Da  $K(\mathbb{Z}, n)$  für  $n \geq 2$  einfach zusammenhängend ist, gilt für deren zugehörige Serre-Spektralsequenz  $E_2^{p,q} \cong H^p(B; H^q(F))$ .

Falls  $n$  gerade: Dann sieht die Spektralsequenz auf der Seite  $E_r$ ,  $r \leq n$  aus wie rechts skizziert (dabei stehen die Gitterpunkte für die Nullgruppe). Das sieht man folgendermaßen: Zunächst ist  $E_2^{p,q} = 0$  und somit  $E_r^{p,q} = 0$  außer für  $q \in \{0, n-1\}$ , denn nach Induktionsvoraussetzung gilt  $H^*(F; \mathbb{Q}) \cong \Lambda_{\mathbb{Q}}[x]$ . Es folgt, dass nur auf der  $n$ -ten Seite  $E_n$  nicht verschwindende



Differentiale existieren können und  $E_2 \cong E_n$  und  $E_{n+1} \cong E_{\infty}$  gilt. Außerdem ist  $E_n^{0,0} \cong E_2^{0,0} \cong \mathbb{Q}$  und  $E_n^{0,n-1} \cong E_2^{0,n-1} \cong \mathbb{Q}$ , da  $B$  zusammenhängend ist. Die Spektralsequenz konvergiert gegen  $H^*(P; \mathbb{Q})$ . Da  $P$  zusammenziehbar ist, gilt  $H^0(P; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$  und  $H^n(P; \mathbb{Q}) = 0$  für  $n > 0$ . Folglich ist  $E_{n+1}^{p,q} \cong E_{\infty}^{p,q} = 0$  außer für  $p = q = 0$ . Insbesondere gilt  $E_{n+1}^{0,n-1} \cong E_{\infty}^{0,n-1} = 0$ . Das eingezeichnete Differential  $d_n^{0,n-1} : E_n^{0,n-1} \rightarrow E_n^{n,0}$  ist nun injektiv, denn  $\ker(d_n^{0,n-1}) \cong E_{n+1}^{0,n-1} = 0$ . Dieses Differential ist auch surjektiv, denn  $\text{coker}(d_n^{0,n-1}) \cong E_{n+1}^{n,0} \cong E_{\infty}^{n,0} = 0$ , also ein Isomorphismus. Somit  $H^n(B; \mathbb{Q}) \cong E_2^{n,0} \cong E_n^{n,0} \cong E_n^{0,n-1} \cong \mathbb{Q}$ . Der zweite Isomorphismus kommt daher, da für  $r \leq n-1$  alle Differentiale von und nach  $E_r^{n,0}$  Null sind. Damit ist  $E_2^{n,n-1} \cong H^n(B; H^{n-1}(F; \mathbb{Q})) \cong H^n(B; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ . Induktiv sieht man nun, dass die Abbildungen  $d_n^{kn,n-1}$  Isomorphismen sind und dass  $H^{kn}(B; \mathbb{Q}) \cong E_2^{kn,0} \cong E_2^{kn,n-1} \cong \mathbb{Q}$  für alle  $k \geq 0$ . Damit haben wir gezeigt, dass die graduierte, additive Struktur von  $H^*(B; \mathbb{Q})$  wie behauptet ist.

Es sei nun  $a \in E_n^{0,n-1} \cong H^0(B; H^{n-1}(F; \mathbb{Q}))$  ungleich Null und  $x := d_n^{0,n-1}(a) \in E_n^{n,0} \cong H^n(B; H^0(F; \mathbb{Q})) \cong H^n(B; \mathbb{Q})$ . Dann gilt auch  $x \neq 0$  und  $ax := m_r(a, x) \neq 0$ , da wegen (ii) und (iii) das Produkt  $m_r$  gerade dem kanonischen Produkt  $H^n(B; H^0(F; \mathbb{Q})) \times H^0(B; H^{n-1}(F; \mathbb{Q})) \rightarrow H^n(B; H^{n-1}(F; \mathbb{Q}))$  entspricht. Es gilt  $0 \neq d_n^{n,n-1}(ax) = d_n^{0,n-1}(a)x - ad_n^{n,0}(x) = xx$ . Da das Produkt  $xx \in E_n^{2n,0}$  gerade dem Cup-Produkt  $x \cup x \in H^{2n}(B; \mathbb{Q})$  entspricht, ist  $x \cup x \neq 0$ , also ein Erzeuger von  $H^{2n}(B; \mathbb{Q})$ . Induktiv ist nun  $0 \neq d_n^{kn,n-1}(ax^k) = x^{k+1} \in E_n^{kn,0}$  da ja  $0 \neq ax^k$ . Somit ist für alle  $k$  das  $k$ -fache Cup-Produkt  $x^k \in H^{kn}(B; \mathbb{Q})$  ein Erzeuger.



Falls  $n$  ungerade: Dann ist  $E_r^{p,q} = 0$  für alle  $q$ , die kein Vielfaches von  $n-1$  sind. Somit verschwinden alle Differentiale auf  $E_r$  für  $r < n$  und  $E_2 \cong E_n$ . Für  $0 < m < n$  verschwinden alle Differentiale von und nach  $E_r^{m,0}$  und daher ist  $H^m(B; \mathbb{Q}) \cong E_2^{m,0} \cong E_{\infty}^{m,0} = 0$  und folglich  $E_2^{m,k} = 0$  für alle  $k \geq 0$ . Selbiges gilt folglich auch für  $n < m < 2n$  und allgemeiner für solche  $m$ , die kein Vielfaches von  $n$  sind. Analog wie im vorherigen Fall sieht man, dass das eingezeichnete Differential  $d_n^{0,n-1}$  ein Isomorphismus ist. Somit  $H^n(B; \mathbb{Q}) \cong H^n(B; H^0(F; \mathbb{Q})) \cong \mathbb{Q}$  und  $E_2^{n,k(n-1)} \cong \mathbb{Q}$  für alle  $k \geq 0$ . Sei  $a \in H^0(B; H^{n-1}(F; \mathbb{Q}))$  ungleich Null und  $x := d_n^{0,n-1}(a)$ . Dann ist auch  $a^2 \neq 0 \in E_n^{0,2n-2}$  und  $d_n^{0,2n-2}(a^2) = d_n^{0,n-1}(a)a + d_n^{0,n-1}(a)a = xa + ax = (-1)^{0 \cdot n + (n-1) \cdot 0} ax + ax = 2ax \neq 0$ . Also ist  $d_n^{0,2n-2}$  ein Isomorphismus. Analog sieht man, dass  $d_n^{0,k(n-1)}$  für alle  $k \geq 1$  ein Isomorphismus ist. Es bleibt zu zeigen, dass  $H^{kn}(B; \mathbb{Q}) = 0$  für  $k > 1$ . Das einzige potentiell nichttriviale Differential, das bei  $E_r^{2n,0}$  ankommt, ist  $d_n^{n,n-1}$ . Dieses ist aber Null, da  $\ker(d_n^{n,n-1}) = \text{im}(d_n^{0,2n-2}) = E_n^{n,n-1}$ . Also  $H^{2n}(B; \mathbb{Q}) \cong E_2^{2n,0} \cong E_{\infty}^{2n,0} = 0$  und  $E_2^{2n,k} = 0$  für alle  $k \geq 0$ . Für  $k > 2$  sieht man durch Induktion, dass alle Differentiale von und nach  $E_r^{2n,0}$  verschwinden und daher  $H^{kn}(B; \mathbb{Q}) = 0$ .  $\square$

## 8 Beweis des Satzes von Serre

**Lemma 41.** Es sei  $n \geq 3$  ungerade und  $X$  ein  $(n-1)$ -zusammenhängender topologischer Raum. Angenommen,  $H^k(X; \mathbb{Z}) = 0$  für  $k > n$  und  $H_n(X) \cong \pi_n(X)$  ist die direkte Summe von  $\mathbb{Z}$  und

einer endlichen Gruppe. Dann sind die Homotopiegruppen  $\pi_k(X, x_0)$ ,  $k > n$  endlich.

*Beweis.* Durch Töten der höheren Homotopiegruppen bekommen wir eine Abbildung  $f : X \rightarrow K(\pi_n(X), n) \approx K(\mathbb{Z}, n) \times K(G, n)$ , wobei  $G$  eine endliche Gruppe ist. Wir führen die in Lemma 14 beschriebene Konstruktion durch und erhalten einen zu  $X$  homotopieäquivalenten Raum  $X'$  und eine Faserung  $p : X' \rightarrow K(\pi_n(X), n)$  mit Faser  $F$ . Anhand der langen exakten Sequenz dieser Faserung sehen wir, dass

$$\pi_i(F) \cong \begin{cases} 0 & \text{für } i \leq n, \\ \pi_i(X') \cong \pi_i(X) & \text{für } i > n. \end{cases}$$

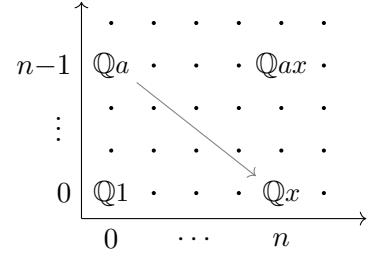
Wir wenden diesselbe Konstruktion auf die Inklusion  $F \hookrightarrow X'$  an und bekommen einen zu  $F$  homotopieäquivalenten Raum  $F'$  und eine Faserung  $q : F' \rightarrow X'$ . Aus der langen exakten Homotopiesequenz ergibt sich, dass die Faser  $\tilde{F}$  dieser Faserung ein  $K(\pi_n(X), n-1)$  ist.

Wir wollen die Serre-Spektralsequenz der Faserung  $\tilde{F} \rightarrow F' \rightarrow X'$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$  verwenden. Dazu untersuchen wir zunächst die rationale Kohomologie von Faser und Basisraum. Lemma ?? impliziert, dass die Homotopiegruppen und wegen Korollar 34 auch die reduzierten Homologiegruppen von  $K(G, n-1)$  endlich sind. Nach der universellen Koeffizientenformel verschwinden somit alle reduzierten Kohomologiegruppen von  $K(G, n-1)$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$ . Wir sehen nun an der Serre-Spektralsequenz der Produktfaserung  $K(G, n-1) \rightarrow K(\pi_n(X), n-1) \rightarrow K(\mathbb{Z}, n-1)$  und Lemma ??, dass  $H^*(K(\pi_n(X), n-1); \mathbb{Q}) \cong H^*(K(\mathbb{Z}, n-1); \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[x]$  mit Erzeuger  $x \in H^{n-1}(K(\pi_n(X), n-1); \mathbb{Q})$ . Für den Basisraum folgt aus der universellen Koeffizientenformel, dass die rationale Kohomologie von  $X'$  gleich  $\mathbb{Q}$  ist in Grad 0 und in Grad  $n$ , und Null sonst.

Wir wissen nun, dass  $E_2^{p,q} = 0$  außer falls  $p \in \{0, n\}$  und  $n-1 \mid q$  gilt. Die Spektralsequenz besitzt also auf der  $E_2$ -Seite und damit auch auf der  $E_n$ -Seite die gleichen Einträge wie die Spektralsequenz aus dem zweiten Fall ( $n$  ungerade) des vorhergehenden Lemmas. Genau wie dort schließen wir, dass  $d_n^{0,n-1}$  ein Isomorphismus ist (denn  $H^n(X'; \mathbb{Q}) = 0$ ) und dass aufgrund der multiplikativen Struktur der Spektralsequenz auch die Differentiale  $d_n^{0,k(n-1)}$  für  $k \geq 1$  Isomorphismen sind. Somit ist  $E_{n+1}^{p,q} = 0$  außer für  $p = q = 0$ . Es folgt, dass  $H^n(F'; \mathbb{Q}) = 0$  für  $n > 0$ . Somit gilt auch  $H_n(F'; \mathbb{Z}) \times \mathbb{Q} \cong H_n(F'; \mathbb{Q}) \cong H^n(F'; \mathbb{Q}) = 0$ , es ist also  $H_n(F'; \mathbb{Z})$  eine Torsionsgruppe. Da  $X' \simeq X$  und  $K(\pi_n(X), n)$   $\mathcal{FG}$ -azyklisch sind, ist auch  $F' \simeq F$   $\mathcal{FG}$ -azyklisch, d. h. die Homologiegruppen  $H_n(F'; \mathbb{Z})$ ,  $n > 0$  sind endlich erzeugt. Somit sind diese Homologiegruppen schon endlich. Nach Korollar 34 sind damit alle Homotopiegruppen von  $F'$  endlich. Diese entsprechen im Grad  $k > n$  aber gerade den Homotopiegruppen von  $X$ .  $\square$

*Beweis des Satzes von Serre (Satz 5).* Im Fall  $n = 1$  stimmt die Aussage, denn die universelle Überlagerung von  $S^1$  ist  $\mathbb{R}$ . Wir können daher  $n \geq 2$  annehmen. Im Fall, dass  $n \geq 3$  ungerade ist, folgt die Aussage aus dem vorhergehenden Lemma. Es bleibt der Fall, dass  $n \geq 2$  gerade ist.

Wir wenden diesselbe Konstruktion wie im Beweis des vorhergehenden Lemmas für den Raum  $X = S^n$  an. Da  $n$  gerade ist, haben wir aber  $H^*(K(\pi_n(X), n-1)) \cong H^*(K(\pi_n(X), n-1)) \cong \Lambda[x]$ . Die  $E_n$ -Seite der Serre-Spektralsequenz der Faserung  $K(\pi_n(X), n-1) \rightarrow F' \rightarrow X'$  ist daher wie rechts abgebildet. Der Eintrag  $\mathbb{Q}$  auf Position  $E_2^{n, n-1}$  überlebt die Spektralsequenz. Somit ist  $H^*(F'; \mathbb{Q}) \cong \Lambda[b]$  mit  $b \in H^{2n-1}(F'; \mathbb{Q})$ . Es folgt  $H_i(F'; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} \cong H_i(F'; \mathbb{Q}) = 0$  für  $i < 2n-1$ . Da die Homologiegruppen von  $F'$  endlich erzeugt sind, ist  $H_i(F'; \mathbb{Z}) \in \mathcal{F}$  für  $i < 2n-1$  und  $H_{2n-1}(F'; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus G$ , wobei  $G$  eine endliche Gruppe ist. Das Hurewicz-modulo- $\mathcal{C}$ -Theorem impliziert, dass damit auch die Homotopiegruppen  $\pi_i(F')$  endlich sind für  $i < 2n-1$  und dass  $\pi_{2n-1}(F) \cong \mathbb{Z} \oplus G'$  für eine endliche Gruppe  $G'$ . Indem wir höhere Homotopiegruppen töten, erhalten wir eine Abbildung  $F' \rightarrow Y$ , wobei  $\pi_i(Y) = 0$  für  $i \geq 2n-1$ . Wir konvertieren diese Abbildung zu einer Faserung  $F'' \rightarrow Y$  mit Faser  $Z$ . Anhand der langen exakten Homotopiesequenz dieser Faserung sehen wir, dass



$$\pi_m(Z) = \begin{cases} 0 & \text{für } m < 2n-1, \\ \pi_m(F'') \cong \pi_m(F) \cong \pi_m(S^n) & \text{für } m \geq 2n-1. \end{cases}$$

Wir bemerken, dass alle Homotopiegruppen und somit auch Homologiegruppen von  $Y$  endlich sind. Daher gilt  $\tilde{H}^*(Y; \mathbb{Q}) = 0$ . Da die Serre-Spektralsequenz zur Faserung  $Z \rightarrow F'' \rightarrow Y$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$  auf der  $E_2$ -Seite also nur Einträge in der Spalte  $p = 0$  besitzt, gilt  $H^*(Z; \mathbb{Q}) \cong H^*(F''; \mathbb{Q}) \cong \Lambda[b]$ . Die Aussage folgt nun aus dem vorhergehenden Lemma mit  $X := Z$ .  $\square$

## Literatur

- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [Hat04] Allen Hatcher. “Spectral Sequences in Algebraic Topology”. 2004. URL: <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/SSAT/SSATpage.html>.
- [McC01] John McCleary. *A User’s Guide to Spectral Sequences*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2001.
- [Ser51] Jean-Pierre Serre. “Homologie singulière des espaces fibrés”. In: *Annals of Mathematics*. Second Series 54.3 (1951), S. 425–505.

$\pi_{n+k}(S^n)$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$	$n=11$	$\pi_k^s$
$k=0$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	$\mathbb{Z}$
$k=1$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	...	...	...	...	...	...	...	...	$\mathbb{Z}_2$
$k=2$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	...	...	...	...	...	...	...	$\mathbb{Z}_2$
$k=3$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3$	...	...	...	...	...	...	$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3$
$k=4$	0	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2$	0	...	...	...	...	...	0
$k=5$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	...	...	...	...	0
$k=6$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3^2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	...	...	...	$\mathbb{Z}_2$
$k=7$	0	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_{16} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$	...	...	$\mathbb{Z}_{16} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$
$k=8$	0	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^2$	...	$\mathbb{Z}_2^2$
$k=9$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\mathbb{Z}_2^5$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^3$

Tabelle 1: Die ersten Homotopiegruppen der Sphären. Der stabile Bereich besteht aus allen Gruppen oberhalb der Treppenlinie. Unendliche Gruppen sind grau hinterlegt. Quelle: **toda:composition**