

# Der Endlichkeitssatz von Serre über die Homotopiegruppen der Sphären

Bachelorarbeit

VON

**Tim Baumann**

Eingereicht am  
23. 12. 2015



Universität Augsburg  
Institut für Mathematik

Erstgutachter: Prof. Dr. Bernhard Hanke  
Zweitgutachter: Prof. Dr. Wolfgang Steimle

# Inhaltsverzeichnis

1	Homotopiegruppen der Sphären	2
2	Faserungen	4
3	Spektralsequenzen	8
4	Die Serre-Spektralsequenz	10
5	Töten von Homotopiegruppen und Eilenberg-MacLane-Räume	11
6	Serre-Klassen	13
7	Das Modulo- $\mathcal{C}$ -Hurewicz-Theorem	16
8	Rationale Kohomologie von Räumen vom Typ $K(\mathbb{Z}, n)$	19
9	Homologie der Stiefel-Mannigfaltigkeit $V_{m+1,2}$	20
10	Beweis des Satzes von Serre	21
11	Die erste Homotopiegruppe von $S^n$ mit $p$ -Torsion	22
	Literatur	25
	Anhang: Tabelle der Homotopiegruppen der Sphären	26

# 1 Homotopiegruppen der Sphären

**Definition 1.** Es sei  $(X, x_0)$  ein punktierter topologischer Raum. Für  $n \geq 0$  sei

$$\pi_n(X, x_0) := [(S^n, *), (X, x_0)]$$

die Menge der basispunkterhaltenden Abbildungen  $S^n \rightarrow X$  modulo basispunkterhaltender Homotopie. Für  $n \geq 1$  heißt  $\pi_n(X)$  die  $n$ -te *Homotopiegruppe* von  $X$  (mit Basispunkt  $x_0$ ).

Die Gruppenstruktur auf  $\pi_n(X)$  wird induziert durch die Kogruppenstruktur auf  $S^n$ , welche durch die Abbildung  $S^n \rightarrow S^n \vee S^n$  gegeben ist, die die Südkappe  $D_+^n$  auf die erste  $S^n$ , die Nordkappe  $D_-^n$  auf die zweite  $S^n$  und den Äquator  $D_+^n \cap D_-^n$  auf den Anklebepunkt von  $S^n \vee S^n$  abbildet. Das neutrale Element der Homotopiegruppen wird repräsentiert durch die konstante Abbildung auf den Basispunkt  $x_0$ . Die erste Homotopiegruppe  $\pi_1(X, x_0)$  kann man auffassen als die Menge der geschlossenen Wege bei  $x_0$  modulo Homotopie relativ der Endpunkte mit der Verkettung von Wegen als Gruppenverknüpfung. Diese Gruppe wird auch *Fundamentalgruppe* genannt. Man kann zeigen, dass  $\pi_n(X, x_0)$  für  $n \geq 2$  abelsch ist (vgl. [Hat02, S. 340]).

Eine basispunkterhaltende Abbildung  $g : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  induziert Abbildungen  $g_* = \pi_i(g) : \pi_i(X, x_0) \rightarrow \pi_i(Y, y_0)$  durch Nachkomponieren mit  $g$ . Auf diese Weise wird  $\pi_i$  zu einem Funktor von der Kategorie der punktierten topologischen Räume in die Kategorie der (abelschen) Gruppen.

Die Menge  $\pi_0(X, x_0)$  ist die Menge der Wegzusammenhangskomponenten von  $X$ . Wir schreiben  $\pi_0(X, x_0) = 0$ , falls die einzige Wegzusammenhangskomponente von  $X$  die von  $x_0$  ist.

Falls ein Weg von  $x_0$  nach  $x'_0$  in  $X$  existiert, so sind  $\pi_n(X, x_0)$  und  $\pi_n(X, x'_0)$  isomorph. Für nicht leere, wegzusammenhängende Räume  $X$  kann man daher den Basispunkt in der Notation weglassen und von der Homotopiegruppe  $\pi_n(X)$  von  $X$  sprechen.

Eine Verallgemeinerung der Homotopiegruppen sind die *relativen Homotopiegruppen*  $\pi_n(X, A, x_0)$  eines Raumpaars  $(X, A)$  mit Basispunkt  $x_0 \in A$ . Die Gruppe  $\pi_n(X, A, x_0)$  ist für  $n \geq 1$  definiert als Menge der stetigen Abbildungen

$$(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0) \quad \text{wobei} \quad J^{n-1} := (\{0\} \times I^{n-1}) \cup (I \times \partial I^{n-1})$$

modulo Homotopie, wobei die Homotopie zu jedem Zeitpunkt eine Abbildung vom gleichen Typ ist. Äquivalent dazu kann man  $\pi_n(X, A, x_0)$  als Menge der stetigen Abbildungen

$$(D^n, \partial D^n, *) \rightarrow (X, A, x_0)$$

modulo Homotopie durch denselben Typ von Abbildung definieren. Für  $n \geq 2$  ist  $\pi_n(X, A, x_0)$  eine Gruppe und für  $n \geq 3$  abelsch. Analog zur langen exakten Homologiesequenz gibt es für jedes Raumpaar  $(X, A, x_0)$  auch eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow \pi_n(A, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_{n-1}(A, x_0) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_0(X, x_0)$$

von absoluten und relativen Homotopiegruppen (siehe [Hat02, Thm 4.3]).

In dieser Arbeit werden wir die Homotopiegruppen der Sphären, also die Menge der stetigen Abbildungen zwischen Sphären in (verschiedenen) Dimensionen, studieren. Wir zeigen zunächst ein paar grundlegende Fakten über diese Homotopiegruppen.

Für  $i < n$  gilt  $\pi_i(S^n) = 0$ : Wir können die Sphäre  $S^i$  als CW-Komplex mit einer 0-Zelle und einer  $i$ -Zelle realisieren. Aus dem zellulären Approximationstheorem (siehe [Hat02, Thm 4.8]) folgt, dass jede Abbildung  $f : S^i \rightarrow S^n$  homotop relativ Basispunkt zu einer zellulären Abbildung ist, d. h. zu einer Abbildung  $\tilde{f} : S^i \rightarrow S^n$ , die das  $i$ -Skelett von  $S^i$  (das ist ganz  $S^i$ ) auf das  $i$ -Skelett von  $S^n$  (das ist  $\{*\}$ ) abbildet. In anderen Worten ist jede Abbildung  $S^i \rightarrow S^n$  homotop zur konstanten Abbildung und repräsentiert daher das neutrale Element in  $\pi_i(S^n)$ .

Mit der universellen Überlagerung  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto e^{it}$  kann man die Homotopiegruppen von  $S^1$  bestimmen: Die Fundamentalgruppe  $\pi_1(S^1)$  ist isomorph zur Decktransformationsgruppe dieser Überlagerung, also isomorph zu  $\mathbb{Z}$ . Die höheren Homotopiegruppen  $\pi_i(S^1)$  mit  $i > 1$  sind Null. Dies folgt aus der Zusammenziehbarkeit von  $\mathbb{R}$  und aus der allgemeinen Tatsache, dass eine Überlagerung  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  Isomorphismen  $\pi_i(p) : \pi_i(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_i(X, x_0)$  auf den höheren Homotopiegruppen induziert (siehe [Hat02, Prop 4.1]).

**Definition 2.** Die (*reduzierte*) *Einhängung*  $(\Sigma X, *)$  eines punktierten Raumes  $(X, x_0)$  ist

$$\Sigma X := (X \times I) / (X \times \{0, 1\} \cup \{x_0\} \times I).$$

Der Basispunkt  $*$  von  $\Sigma X$  ist der auf einen Punkt zusammengezogene Teilraum.

Einhängung ist ein Endofunktor der Kategorie der punktierten topologischen Räume:  
Für  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  ist

$$\Sigma f : (\Sigma X, *) \rightarrow (\Sigma Y, *), \quad [(x, t)] \mapsto [(f(x), t)].$$

Man sieht leicht, dass  $\Sigma S^i \approx S^{i+1}$ . Des Weiteren gilt  $f \simeq g \implies \Sigma f \simeq \Sigma g$ . Somit induziert Einhängung eine Abbildung  $E : \pi_i(X, x_0) \rightarrow \pi_{i+1}(\Sigma X, *)$ . Da Einhängung mit den Kogruppenstruktur von  $S^i$  und  $S^{i+1}$  verträglich ist, ist  $E$  sogar ein Gruppenhomomorphismus.

**Definition 3.** Ein nicht leerer topologischer Raum  $X$  heißt *n-zusammenhängend*, falls  $\pi_i(X) = 0$  für  $0 \leq i \leq n$ .

**Satz 4** (Freudenthal'scher Einhängungssatz). Es sei  $n \geq 0$  und  $X$  ein  $n$ -zusammenhängender CW-Komplex. Dann ist  $E : \pi_i(X) \rightarrow \pi_{i+1}(\Sigma X)$  bijektiv für  $0 \leq i \leq 2n$  und surjektiv für  $i = 2n + 1$ .

Ein Beweis des Einhängungssatzes findet sich in [Hat02, Kor 4.24].

Insbesondere ist die  $j$ -fach iterierte Einhängung  $\Sigma^j X$  eines  $n$ -zusammenhängenden CW-Komplexes  $X$  ein  $(n+j)$ -zusammenhängender CW-Komplex. (Um den Einhängungssatz mehrfach anwenden zu können, muss man sich klar machen, dass die Einhängung eines CW-Komplexes wieder ein CW-Komplex ist.)

Für einen beliebigen CW-Komplex  $X$  ist  $\Sigma^j X$  ein  $(j-1)$ -zusammenhängender CW-Komplex und es gilt  $\pi_{n+j}(\Sigma^j X) \cong \pi_{n+j+1}(\Sigma^{j+1} X)$  für  $n+j \leq 2(j-1) \Leftrightarrow n+2 \leq j$ . Somit ist

$$\pi_{2n+2}(\Sigma^{n+2} X) \cong \pi_{2n+3}(\Sigma^{n+3} X) \cong \pi_{2n+4}(\Sigma^{n+4} X) \cong \dots \cong \operatorname{colim}_j \pi_{n+j}(\Sigma^j X).$$

Die Gruppe  $\operatorname{colim}_j \pi_{n+j}(\Sigma^j X)$  heißt *n-te stabile Homotopiegruppe* von  $X$ . Im Fall der Sphären haben wir mit  $X = S^0$ :

$$\pi_{2n+2}(S^{n+2}) \cong \pi_{2n+3}(S^{n+3}) \cong \pi_{2n+4}(S^{n+4}) \cong \dots \cong \operatorname{colim}_j \pi_{n+j}(S^j) =: \pi_n^s.$$

Wir behaupten, dass auch  $E : \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_2(S^2)$  ein Isomorphismus ist. Aus dem Einhängungssatz folgt lediglich, dass diese Abbildung surjektiv ist. Somit ist  $\pi_2(S^2)$  eine zyklische Gruppe mit Erzeuger  $\operatorname{id}_{S^2}$ . Es sei nun  $k \in \mathbb{Z}$ . Dann ist  $H_2(k \cdot \operatorname{id}_{S^2}) : H_2(S^2) \rightarrow H_2(S^2)$  gegeben durch Multiplikation mit  $k$ . Angenommen,  $k \cdot \operatorname{id}_{S^2}$  ist nullhomotop. Dann ist auch  $H_2(k \cdot \operatorname{id}_{S^2}) = 0$  und somit  $k = 0$ . Somit ist  $E$  injektiv. Es folgt

$$\mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1) \cong \pi_2(S^2) \cong \dots \cong \pi_j(S^j) \cong \dots \cong \operatorname{colim}_j \pi_j(S^j) = \pi_0^s.$$

Dabei ist  $[\operatorname{id}_{S^i}]$  ein Erzeuger von  $\pi_i(S^i)$  für alle  $i \geq 0$ .

Im Anhang dieser Arbeit befindet sich eine Tabelle mit einigen bekannten Homotopiegruppen von Sphären. Einige Regelmäßigkeiten sind dabei offensichtlich (z. B. die gleichen (um eine Zeile verschobenen) Einträge in den Spalten  $n=2$  und  $n=3$ ). Eine globale Systematik ist aber nicht erkennbar. Tatsächlich ist das explizite Ausrechnen von Homotopiegruppen selbst von so einfachen Räumen wie den Sphären ein schweres Problem. So sind die stabilen Homotopiegruppen  $\pi_n^s$  nur für  $n \leq 64$  berechnet und unbekannt für größere  $n$  (vgl. [Hat02, S. 384]).

Ein Ziel dieser Arbeit ist es, folgenden Satz aus der Dissertation von Jean-Pierre Serre zu beweisen:

**Satz 5** ([Ser51]). Die Homotopiegruppen  $\pi_i(S^n, *)$ ,  $i > n$ , sind endlich bis auf die Gruppen  $\pi_{4k-1}(S^{2k})$ ,  $k \geq 1$ , welche jeweils isomorph zu einer direkten Summe von  $\mathbb{Z}$  und einer endlichen Gruppe sind.

Zusammengefasst werden wir also gezeigt haben, dass

**Korollar 6.**

$$\pi_i(S^n, *) \cong \begin{cases} 0 & \text{für } i < n \text{ und } i > n = 1, \\ \mathbb{Z} & \text{für } i = n, \\ \mathbb{Z} \oplus \text{endliche Gruppe} & \text{für } i = 2n - 1 \text{ und } n \text{ gerade,} \\ \text{endliche Gruppe} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Beweis des Satzes von Serre verwendet an mehreren Stellen die Serre-Spektralsequenz. Das ist ein algebraisches Objekt, welches für eine Faserung  $p : X \rightarrow B$  eine Verbindung zwischen den Homologie- und Kohomologiegruppen von Basisraum  $B$ , Totalraum  $X$  und Faser  $F$  liefert. Wir führen zunächst Faserungen, Spektralsequenzen und die Serre-Spektralsequenz ein. Wir zeigen dann mit dem Modulo- $\mathcal{C}$ -Hurewicz-Theorem, dass die Homologie- und Homotopiegruppen (unterhalb eines bestimmten Grades) bestimmte algebraische Eigenschaften teilen, z. B. die Eigenschaft, endlich zu sein. Besonders wichtig wird eine relative Version des Modulo- $\mathcal{C}$ -Hurewicz-Theorems, aus der wir folgern, dass eine stetige Abbildung genau dann in Homologie „Fast-Isomorphismen“ induziert, wenn sie in Homotopie „Fast-Isomorphismen“ induziert. Dies wenden wir an auf die Abbildung  $f : S^n \rightarrow K(\mathbb{Z}, n)$ , die man durch Töten der Homotopiegruppen von  $S^n$  im Grad  $> n$  erhält und zeigen so den Satz von Serre für ungerade  $n$ . Dafür müssen wir zuerst die Homologiegruppen (bis auf Torsion) der Eilenberg-MacLane-Räume  $K(\mathbb{Z}, n)$  mit Hilfe von Spektralsequenzen ausrechnen. Für gerade  $n$  benutzen wir einen Zusammenhang zwischen den Homotopiegruppen von  $S^n$ , von  $S^{n-1}$  und von der Stiefel-Mannigfaltigkeit  $V_{n+1,2}$ .

Im letzten Abschnitt zeigen wir ein weiteres Resultat aus Jean-Pierre Serres Dissertation über die erste Homotopiegruppe von  $S^n$  mit  $p$ -Torsion. Wir führen einen neuen Beweis dieses Resultats basierend auf dem relativen Modulo- $\mathcal{C}$ -Hurewicz-Theorems.

## 2 Faserungen

**Definition 7.** Eine (*Hurewicz-*)*Faserung* ist eine stetige Abbildung  $p : E \rightarrow B$ , welche die *Homotopieliftungseigenschaft* (HLE) für die topologischen Räume  $X$  besitzt, d. h. für alle  $n \geq 0$  und für alle stetigen Abbildungen  $H, H_0$  wie unten, sodass das äußere Quadrat kommutiert, gibt es eine stetige Abbildung  $\tilde{H}$ , sodass die beiden inneren Dreiecke kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{H_0} & E \\ i_0 \downarrow & \exists \tilde{H} \nearrow & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

Dabei ist  $i_0$  die Inklusion von  $X$  in  $X \times I$  als  $X \times \{0\}$ . Eindeutigkeit von  $\tilde{H}$  wird nicht gefordert. Der Raum  $E$  wird *Totalraum* und  $B$  wird *Basisraum* genannt.

*Bemerkung.* Allgemeiner ist eine *Serre-Faserung* eine stetige Abbildung  $p : E \rightarrow B$ , welche die Homotopieliftungseigenschaft bezüglich der Scheiben  $\{D^n \mid n \geq 0\}$  oder äquivalent allen CW-Komplexen, aber nicht unbedingt allen topologischen Räume besitzt. Man kann viele Resultate über Hurewicz-Faserungen, wie beispielsweise die Existenz der Serre-Spektralsequenz, auch für Serre-Faserungen zeigen. Es bedarf aber etwas mehr an Arbeit, die grundlegenden Eigenschaften dieser Faserungen zu zeigen. Deshalb beschränke ich mich in dieser Arbeit auf Hurewicz-Faserungen.

**Beispiel 8.** Das einfachste Beispiel einer Faserung ist die *Produktfaserung*, die Projektion  $p_1 : B \times F \rightarrow B$  eines Produktraumes auf einen Faktor.

Seien zur Nachweis der Homotopieliftungseigenschaft ein Raum  $X$  sowie  $H : X \times I \rightarrow B$  und  $H_0 : X \rightarrow B \times F$  wie in Definition 7 gegeben. Dann bringt folgende Abbildung das Diagramm zum Kommutieren:

$$\tilde{H} : X \times I \rightarrow B \times F, \quad (x, t) \mapsto (H(x, t), p_2(H_0(x))).$$

Bei dieser Produktfaserung sind die *Fasern*, das heißt die Urbilder  $\{p^{-1}(\{b\}) \mid b \in B\}$  von Einpunktmengen versehen mit der Teilraumtopologie, alle homöomorph zu dem festen Raum  $F$ . Allgemein sind bei Faserungen über wegzusammenhängenden Basisräumen alle Fasern zwar nicht immer homöomorph, aber homotopieäquivalent:

**Lemma 9** ([Hat02, Prop 4.61]). Es sei  $p : E \rightarrow B$  eine Faserung und  $\gamma : I \rightarrow B$  ein stetiger Weg von  $a := \gamma(0)$  nach  $b := \gamma(1)$ . Wegen der Homotopieliftungseigenschaft gibt es ein  $\tilde{H}_\gamma$ , sodass

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(\{a\}) & \xhookrightarrow{\quad} & E \\ \downarrow i_0 & \nearrow \exists \tilde{H}_\gamma & \downarrow p \\ p^{-1}(\{a\}) \times I & \xrightarrow{(f,t) \mapsto \gamma(t)} & B \end{array}$$

kommutiert. Wir setzen

$$L_\gamma : p^{-1}(\{a\}) \rightarrow p^{-1}(\{b\}), \quad f \mapsto \tilde{H}_\gamma(f, 1).$$

Dann gilt für stetige Wege  $\gamma, \eta, \epsilon$  mit  $\gamma(1) = \epsilon(0)$ :

- (i)  $L_\gamma$  hängt bis auf Homotopie nicht von der Wahl des Lifts  $\tilde{H}_\gamma$  ab.
- (ii) Falls  $\gamma \simeq \eta$  rel  $\{0, 1\}$ , so gilt  $L_\gamma \simeq L_\eta$ .
- (iii)  $L_{\gamma \cdot \epsilon} \simeq L_\epsilon \circ L_\gamma$  (dabei ist  $\gamma \cdot \epsilon$  die Verkettung von  $\gamma$  und  $\epsilon$ )
- (iv)  $L_\gamma$  ist eine Homotopieäquivalenz.

*Beweis.* Wir halten zunächst fest, dass jede Faserung  $p$  auch folgende relative Homotopieliftungseigenschaft erfüllt: Sei das äußere kommutative Quadrat im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (X \times I \times \{0\}) \cup (X \times \partial I \times I) & \xrightarrow{H_0} & E \\ \downarrow i_0 & \nearrow \exists \tilde{H} & \downarrow p \\ X \times I \times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

gegeben. Dann gibt es eine stetige Abbildung  $\tilde{H}$ , sodass das Diagramm kommutiert. Der Unterschied zu Definition 7 besteht darin, dass der Lift der Homotopie nicht nur zum Zeitpunkt  $t = 0$ , sondern auch auf dem Rand  $X \times \partial I \times I$  vorgegeben ist. Um dies zu zeigen, verwenden wir die Existenz eines Homöomorphismus  $\psi : (I \times I, I \times \{0\}) \rightarrow (I \times I, I \times \{0\} \cup \partial I \times I)$  von Raumpaaren (d. h.  $\psi$  schränkt ein zu einem Homöomorphismus  $\psi|_{I \times \{0\}} : I \times \{0\} \rightarrow I \times \{0\} \cup \partial I \times I$ ). Wir benutzen dann die gewöhnliche Homotopieliftungseigenschaft mit  $H' := H \circ (\text{id}_X \times \psi)$  und  $H'_0 := H_0 \circ (\text{id}_X \times \psi|_{I \times \{0\}})$  und erhalten einen Lift  $\tilde{H}'$ . Dann kann man leicht nachrechnen, dass  $\tilde{H} := \tilde{H}' \circ (\text{id}_X \times \psi^{-1})$  ein geeigneter Lift im obigen Diagramm ist.

Zu (i) und (ii): Es sei  $K : I \times I \rightarrow B$  eine Homotopie relativ der Endpunkte zwischen  $\gamma = K|_{\{0\} \times I}$  und  $\eta = K|_{\{1\} \times I}$  sowie  $\tilde{H}_\gamma, \tilde{H}_\eta : p^{-1}(\{a\}) \times I \rightarrow E$  gegeben. Wir verwenden nun die relative Homotopieliftungseigenschaft mit

$$H : p^{-1}(\{a\}) \times I \times I \rightarrow B, \quad (f, t, s) \mapsto K(t, s)$$

sowie

$$\begin{aligned} H_0 &: (p^{-1}(\{a\}) \times I \times \{0\}) \cup (p^{-1}(\{a\}) \times \partial I \times I) \rightarrow E, \\ H_0(f, t, 0) &:= f, \quad H_0(f, 0, s) := \tilde{H}_\gamma(f, s), \quad H_0(f, 1, s) := \tilde{H}_\eta(f, s). \end{aligned}$$

und erhalten einen Lift  $\tilde{H} : (p^{-1}(\{a\}) \times I \times I \rightarrow E$ . Die gesuchte Homotopie zwischen  $L_\gamma$  und  $L_\eta$  ist  $\tilde{H}(-, -, 1) : p^{-1}(\{a\}) \times I \rightarrow p^{-1}(\{b\})$ .

Zu (iii): Die Behauptung folgt daraus, dass man

$$\tilde{H}_{\gamma \cdot \epsilon}(f, t) := \begin{cases} \tilde{H}_\gamma(f, 2t) & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \tilde{H}_\epsilon(\tilde{H}_\gamma(f, 1), 2t - 1) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

wählen kann.

Zu (iv): Aus (ii) und (iii) folgt, dass  $L_{\gamma^{-1}}$  homotopieinvers zu  $L_\gamma$  ist.  $\square$

*Bemerkung.* Man notiert eine Faserung  $p : E \rightarrow B$  häufig als  $F \rightarrow E \rightarrow B$ , wobei  $F$  eine typische Faser ist, also ein Raum, zu dem die Fasern  $\{p^{-1}(\{b\}) \mid b \in B\}$  homotopieäquivalent sind. Da homotopieäquivalente Räume dieselben (Ko-) Homologiegruppen besitzen, kann man von der Homologie  $H_*(F; G)$  bzw. Kohomologie  $H^*(F; R)$  der Faser sprechen.

**Korollar 10.** Es sei  $p : E \rightarrow B$  eine Faserung,  $b \in B$ . Dann ist

$$\pi_1(B, b) \rightarrow \text{Aut}(H_m(p^{-1}(\{b\}); G)), \quad [\gamma] \mapsto L_{\gamma*}$$

eine Wirkung der Fundamentalgruppe von  $B$  auf der  $m$ -ten Homologiegruppe der Faser.

Diese Wirkung ist *trivial*, falls  $L_{\gamma*} = \text{id}$  für alle geschlossenen Wege  $[\gamma] \in \pi_1(B, b)$ . Zum Beispiel ist die Wirkung bei Produktfaserungen immer trivial.

**Beispiel 11.** Die Kleinsche Flasche  $K$  ist der topologische Raum

$$K := (I \times I)/\sim, \quad (x, 0) \sim (x, 1), \quad (0, y) \sim (1, 1 - y).$$

Sie ist Teil einer Faserung  $S^1 \rightarrow K \xrightarrow{p} S^1$  mit  $p[(x, y)] := [x] \in I/0 \sim 1$ . Die Wirkung von  $\pi_1(S^1)$  auf der Homologie  $H_1(S^1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$  der Faser ist *nicht* trivial, denn für  $\gamma = \text{id} : S^1 \rightarrow S^1$  ist  $L_\gamma$  homotop zu einer Spiegelung von  $S^1$  entlang einer Achse und induziert damit die Negationsabbildung auf  $H_1(S^1; \mathbb{Z})$ .

**Lemma 12** ([Hat02, Thm 4.41]). Es sei  $p : E \rightarrow B$  eine Faserung,  $b_0 \in B$ ,  $F := p^{-1}(b_0)$  die Faser über  $b_0$  und  $f_0 \in F$ . Dann gibt es eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow \pi_n(F, f_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, f_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, f_0) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_1(B, b_0)$$

von Homotopiegruppen. Dabei ist  $i : F \hookrightarrow E$  die Inklusion.

*Beweis.* Die gesuchte exakte Sequenz ist die lange exakte Homotopiesequenz

$$\dots \rightarrow \pi_n(F, f_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, f_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(E, F, f_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, f_0) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_1(E, F, f_0)$$

des Raumpaares  $(E, F)$ . Es bleibt zu zeigen:  $\pi_n(E, F, f_0) \cong \pi_n(B, b_0)$  als Gruppe für  $n > 1$  und als punktierte Menge für  $n = 1$ . Der Isomorphismus muss außerdem so gewählt werden, dass

$$p_* = \left( \pi_n(E, f_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(E, F, f_0) \xrightarrow{\cong} \pi_n(B, b_0) \right).$$

Wir zeigen:  $p_* : \pi_n(E, F, f_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$  ist der gesuchte Isomorphismus (damit ist obige Gleichung erfüllt).

*Surjektivität:* Sei  $[g : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, *) \rightarrow (B, \{b_0\}, b_0)] \in \pi_{n+1}(B, b_0)$ ,  $n \geq 0$ . Sei  $\tilde{g}$  der Lift im relativen HLE-Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\text{konst } f_0} & E \\ \downarrow & \nearrow \exists \tilde{g} & \downarrow p \\ I^n \times I & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

wobei  $U := (I^n \times \{0\}) \cup (\partial I^n \times I) \subset I^{n+1}$ . Dann kann man  $\tilde{g}$  als eine Abbildung  $(I^{n+1}, \partial I^{n+1}, U) \rightarrow (E, F, \{f_0\})$  von Raumtripeln auffassen, welche ein Element von  $\pi_{n+1}(E, F, f_0)$  repräsentiert. Es gilt  $p_*[\tilde{g}] = [p \circ \tilde{g}] = [g]$ .

*Injektivität:* Seien  $[h_0], [h_1] \in \pi_{n+1}(E, F, f_0)$  mit  $p_*[h_0] = p_*[h_1]$ . Sei

$$H : (I \times I^{n+1}, I \times \partial I^n) \rightarrow (B, \{b_0\}), \quad (t, x) \mapsto H_t(x)$$

eine Homotopie mit  $H_0 = p \circ h_0$ ,  $H_1 = p \circ h_1$ , welche zu jedem Zeitpunkt  $t \in I$  eine Abbildung  $H_t : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}) \rightarrow (B, \{b_0\})$  von Raumpaaren ist. Betrachte folgendes HLE-Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{h} & E \\ \downarrow & \searrow \exists \tilde{H} & \downarrow p \\ I^{n+1} \times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

mit  $V := (I^{n+1} \times \{0\}) \cup (\partial I^{n+1} \times I) = (\{0, 1\} \times I^{n+1}) \cup I \times U \subset I^{n+2}$  und

$$h|_{\{0\} \times I^{n+1}} := h_0, \quad h|_{\{1\} \times I^{n+1}} := h_1, \quad h|_{I \times U} := \text{konst } f_0.$$

Nun ist  $\tilde{H}$  eine Homotopie von  $h_0$  nach  $h_1$ , welche zu jedem Zeitpunkt  $t$  eine Abbildung  $\tilde{H}_t : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, U) \rightarrow (E, F, \{f_0\})$ ,  $x \mapsto \tilde{H}(t, x)$  von Raumtripeln ist.  $\square$

**Beispiel 13.** Die *Hopf-Faserung* ist eine Abbildung  $\eta : S^3 \rightarrow S^2$ , welche ein nichttriviales Element in  $\pi_3(S^2)$  repräsentiert. Wenn man  $S^3$  mit  $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x| + |y| = 1\}$  identifiziert und  $S^2$  als Riemannsche Zahlenkugel  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  auffasst, so ist  $\eta$  gegeben durch  $\eta(x, y) := x/y$  für  $y \neq 0$  und  $\eta(x, 0) := \infty$ . Man sieht leicht, dass  $\eta$  eine Faserung ist und dass die Faser

$$\eta^{-1}(c) = \{s/\|(c, 1)^T\| \cdot (c, 1)^T \mid s \in \mathbb{C}, |s| = 1\} \approx S^1$$

für alle  $c \in \mathbb{C}$  ist. In der langen exakten Homotopiesequenz

$$\dots \rightarrow \pi_n(S^1) \rightarrow \pi_n(S^3) \xrightarrow{\eta_*} \pi_n(S^2) \rightarrow \pi_{n-1}(S^1) \rightarrow \dots$$

dieser Faserung verschwindet für  $n \geq 3$  die erste und die letzte Gruppe und  $\eta$  liefert einen Isomorphismus zwischen  $\pi_n(S^3)$  und  $\pi_n(S^2)$ . Das ist der Grund für die Ähnlichkeit der Spalten  $n=2$  und  $n=3$  der Tabelle der Homotopiegruppen im Anhang.

Die *Hopf-Invariante*  $h(p) \in \mathbb{Z}$  ist eine Homotopieinvariante von Abbildungen  $p : S^{2n-1} \rightarrow S^n$ . Man kann zeigen, dass  $h : \pi_{2n-1}(S^n) \rightarrow \mathbb{Z}$  ein Homomorphismus ist. Da  $h(\eta) = 1$ , besitzt  $\eta$  Ordnung unendlich. Allgemeiner kann man zeigen, dass  $2\mathbb{Z} \subseteq \text{im}(h : \pi_{2n-1}(S^n) \rightarrow \mathbb{Z})$  für gerade  $n$ . Somit ist  $\mathbb{Z}$  ein direkter Summand von  $\pi_{2n-1}(S^n)$  für gerade  $n$ , was einen Teil der Aussage des Satzes von Serre zeigt. Die Konstruktion von  $\eta$  kann man auch mit den Quaternionen bzw. Oktonionen statt den komplexen Zahlen durchführen. Dies ergibt Faserungen  $S^3 \rightarrow S^7 \xrightarrow{\nu} S^4$  und  $S^7 \rightarrow S^{15} \xrightarrow{\sigma} S^8$ , die ebenfalls Hopf-Faserungen genannt werden. In der langen exakten Homotopiesequenz

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \pi_7(S^3) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \cong \pi_7(S^7) & \xrightarrow{\nu_*} & \pi_7(S^4) \longrightarrow \pi_6(S^3) \longrightarrow \pi_6(S^7) = 0 \longrightarrow \dots \\ & & & & \nwarrow h & & \end{array}$$

von  $\nu$  ist  $h$  eine Retraktion von  $\nu_*$ . Somit gilt  $\pi_7(S^4) \cong \mathbb{Z} \oplus \pi_6(S^3)$ . Die Faserung  $\sigma$  induziert analog  $\pi_{15}(S^8) \cong \mathbb{Z} \oplus \pi_{14}(S^7)$ . Für Details siehe [Hat02, 4.44-4.47 und §4.B].

**Lemma 14** ([Hat02, Prop 4.64]). Man kann jede stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  schreiben als Komposition

$$X \xrightarrow{i} E_f \xrightarrow{p} Y$$



einer Homotopieäquivalenz  $i$  und einer Faserung  $p$ . Genauer gilt

$$\begin{aligned} E_f &:= \{(x, \gamma) \in X \times Y^I \mid f(x) = \gamma(0)\} \subset X \times Y^I, \\ i(x) &:= (x, t \mapsto f(x)), \\ p(x, \gamma) &:= \gamma(1), \end{aligned}$$

wobei  $Y^I$  die Kompakt-Offen-Topologie trägt.

*Beweis.* Offensichtlich sind  $i$  und  $p$  stetig und es gilt  $p \circ i = f$ . Das Homotopieinverse von  $i$  ist  $j : E_f \rightarrow X$ ,  $(x, \gamma) \mapsto x$ . Es gilt  $j \circ i = \text{id}_X$  und eine Homotopie zwischen  $i \circ j$  und  $\text{id}_{E_f}$  ist gegeben durch

$$H : I \times E_f \rightarrow E_f, \quad (s, (x, \gamma)) \mapsto (x, \gamma(s \cdot -)).$$

Es bleibt zu zeigen, dass  $p$  eine Faserung ist. Es sei dazu ein topologischer Raum  $A$  und Abbildungen  $H_0 : A \rightarrow E_f$  und  $H : I \times A \rightarrow Y$  mit  $H \circ i_0 = p \circ H_0$  gegeben. Dann ist

$$\begin{aligned} \tilde{H} : I \times A &\rightarrow E_f, \\ (s, a) &\mapsto (p_1(H_0(a)), \gamma_{s,a}), \quad \gamma_{s,a}(t) := \begin{cases} p_2(H_0(a))(t \cdot (1+s)) & \text{falls } t \cdot (1+s) \leq 1, \\ H(t \cdot (1+s) - 1, a) & \text{falls } t \cdot (1+s) \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

eine Homotopieliftung. □

Wir betrachten die Inklusion  $i : \{x_0\} \rightarrow X$  des Basispunktes. Durch Lemma 14 erhalten wir eine Faserung  $F \rightarrow E_i \xrightarrow{p} X$  mit  $E_i \simeq \{x_0\}$  zusammenziehbar.

**Definition 15.** Der Totalraum  $PX := E_i = \{\gamma \in X^I \mid \gamma(0) = x_0\}$  heißt *Pfadraum* von  $(X, x_0)$ . Der Basispunkt von  $PX$  ist der konstante Weg  $\gamma_0 : I \rightarrow X$ ,  $t \mapsto x_0$ . Die Faser von  $p$  über  $x_0$  ist der *Schleifenraum*  $\Omega X := \{\gamma \in X^I \mid \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\}$ . Die Faserung  $\Omega X \rightarrow PX \xrightarrow{p} X$  heißt *Pfadfaserung*.

Die Randoperatoren aus der langen exakten Sequenz  $F \rightarrow PX \xrightarrow{p} X$  sind Isomorphismen  $\pi_{i+1}(Y, y_0) \cong \pi_i(\Omega Y, \gamma_0)$  für  $i \geq 0$ , da die Homotopiegruppen von  $PX$  null sind. Die Bildung des Schleifenraums bewirkt also eine Gradverschiebung der Homotopiegruppen.

### 3 Spektralsequenzen

Ein essentielles Hilfsmittel in der algebraischen Topologie sind lange exakte Sequenzen. Sie liefern einen Zusammenhang zwischen Homologie- oder Homotopiegruppen von verschiedenen Räumen. Wenn man genügend viele dieser Gruppen kennt, so kann man oft rein algebraisch die anderen Gruppen erschließen. Ein Beispiel ist die lange exakte Homotopiesequenz einer Faserung. Nun kann man sich fragen, ob es bei Faserungen auch einen Zusammenhang zwischen den Homologie- und Kohomologiegruppen von Basisraum, Totalraum und Faser gibt. Im Jahr 1951 hat Jean-Pierre Serre in seiner Dissertation [Ser51] gezeigt, dass es einen solchen tatsächlich gibt. Dieser hat jedoch nicht die Form einer langen exakten Sequenz, sondern ist kodiert in einem komplexeren algebraischen Objekt, einer Spektralsequenz.

Es sei  $A$  im Folgenden ein kommutativer Ring mit Eins.

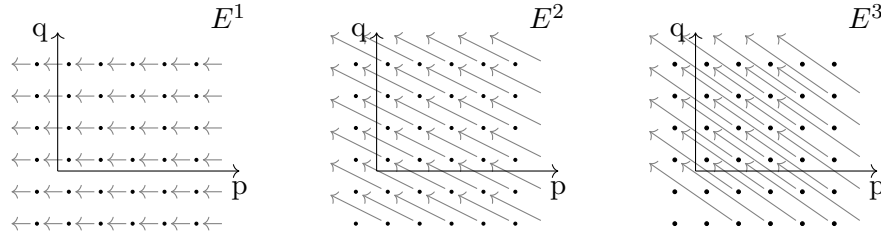
**Definition 16.** Eine (homologische) *Spektralsequenz*  $E$  besteht aus

- $A$ -Moduln  $E_{p,q}^r$  für alle  $p, q \in \mathbb{Z}$  und  $r \geq 1$ ,
- $A$ -Modul-Homomorphismen  $d_{p,q}^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r$  mit  $d_{p-r,q+r-1}^r \circ d_{p,q}^r = 0$
- und Isomorphismen  $\alpha_{p,q}^r : H_{p,q}(E^r) := \ker(d_{p,q}^r) / \text{im}(d_{p+r,q-r+1}^r) \xrightarrow{\cong} E_{p,q}^{r+1}$ .

*Bemerkungen.* • Die Homomorphismen  $d_{p,q}^r$  heißen *Differentiale*.

- Die Gesamtheit der Moduln  $E_{p,q}^r$  und Differentiale  $d_{p,q}^r$  mit  $r \in \mathbb{N}$  fest heißt  $r$ -te Seite  $E^r$ .
- Die Isomorphismen  $\alpha_{p,q}^r$  werden in der Notation unterdrückt und so gerechnet, als wäre  $E_{p,q}^{r+1}$  gleich  $H_{p,q}(E^r)$ .
- Wenn man eine Seite einer Spektralsequenz kennt, kann man also die Einträge auf der nächsten Seite berechnen, die Differentiale jedoch im Allgemeinen nicht.
- Der Eintrag  $E_{p,q}^r$  ist ein *Subquotient* (d. h. ein Quotientenmodul eines Untermoduls) von  $E_{p,q}^s$  falls  $s \leq r$ .

Man stellt Seiten für gewöhnlich in einem 2-dimensionalen Raster dar:



**Definition 17.** Eine Spektralsequenz *konvergiert*, falls für alle  $p, q \in \mathbb{Z}$  ein  $R \in \mathbb{N}$  existiert, sodass für alle  $r \geq R$  die Differentiale von und nach  $E_{p,q}^r$  verschwinden und damit

$$E_{p,q}^\infty := E_{p,q}^R \cong E_{p,q}^{R+1} \cong E_{p,q}^{R+2} \cong \dots$$

Der „Grenzwert“ der Spektralsequenz ist die Unendlich-Seite  $E^\infty := \{E_{p,q}^\infty\}_{p,q \in \mathbb{Z}}$ .

Viele Spektralsequenzen sind im ersten Quadranten konzentriert, d. h.  $E_{p,q}^r$  ist nur für  $p, q \geq 0$  ungleich null. Solche Spektralsequenzen konvergieren immer, denn für alle  $p, q \in \mathbb{Z}$  führen für  $r \geq \max(p+1, q+2)$  alle Differentiale von  $E_{p,q}^r$  aus dem ersten Quadranten heraus und alle dort eintreffenden Differentiale kommen von außerhalb des ersten Quadranten und sind daher null.

**Definition 18.** Eine *Filtrierung* eines  $A$ -Moduls  $M$  ist eine aufsteigende Folge

$$0 \subseteq \dots \subseteq F^{p-1}M \subseteq F^pM \subseteq F^{p+1}M \subseteq \dots \subseteq M$$

von Untermoduln von  $M$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ . Eine Filtrierung heißt

- *ausschöpfend*, falls  $M = \bigcup_p F^pM$ ,
- *Hausdorffsch*, wenn  $0 = \bigcap_p F^pM$  und
- *regulär*, wenn sie ausschöpfend und Hausdorffsch ist.

**Definition 19.** Eine Spektralsequenz  $E$  *konvergiert gegen* einen graduierten  $A$ -Modul  $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$  (notiert  $E_{p,q}^r \Rightarrow M_{p+q}$ ), falls  $E$  überhaupt konvergiert und reguläre Filtrierungen

$$0 \subseteq \dots \subseteq F^{p-1}M_n \subseteq F^pM_n \subseteq F^{p+1}M_n \subseteq \dots \subseteq M_n$$

existieren, sodass  $E_{p,q}^\infty \cong F^pM_{p+q}/F^{p+1}M_{p+q}$  für alle  $p, q \in \mathbb{Z}$ .

In der Anwendung von Spektralsequenzen kennt man oft die Einträge der  $E^1$  oder  $E^2$ -Seite. Man versucht dann, die Einträge der  $E^\infty$ -Seite zu bestimmen, indem man sukzessive die Seiten  $E^r$  ausrechnet. Das Problem dabei ist, dass die dazu benötigten Differentiale auf diesen Seiten im Allgemeinen nicht bekannt sind. In der Praxis hofft man darauf, dass Differentiale allein deswegen verschwinden, da ihre Quell- bzw. Zielgruppe die Nullgruppe ist. Man kann auch bereits bekannte Information über die  $E^\infty$ -Seite verwenden, um Aussagen über Differentiale zu treffen, z. B. dass ein Differential ein Isomorphismus ist.

Angenommen, man hat auf diesem Weg die Seite  $E^\infty$  einer Spektralsequenz, welche gegen  $M$  konvergiert, berechnet. Dann kennt man immer noch nicht die Moduln  $M_n$ , sondern lediglich die Quotienten in einer Filtrierung von  $M_n$ . Im Fall, dass  $A$  ein Körper ist, ist  $M_n$  isomorph zur direkten Summe dieser Quotienten. Im Allgemeinen ist das aber nicht der Fall, wie das Beispiel der Filtrierung  $0 \subset 2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$  der abelschen Gruppe  $\mathbb{Z}$  zeigt.

Anders herum kann man Spektralsequenzen auch verwenden, um von  $E^\infty$  (oder den Moduln  $M_n$ ) auf die Seite  $E^2$  bzw.  $E^1$  zu schließen. Dies werden wir tun, um die Homologie von Eilenberg-MacLane-Räumen mit Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$  zu bestimmen.

## 4 Die Serre-Spektralsequenz

**Satz 20.** Es sei  $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$  eine Faserung mit wegzusammenhängendem Basisraum  $B$  und  $G$  eine abelsche Gruppe. Angenommen,  $\pi_1(B)$  wirkt trivial auf  $H_*(F; G)$ . Dann existiert eine (homologische) Spektralsequenz mit

$$E_{p,q}^2 = H_p(B; H_q(F_p; G)),$$

welche gegen  $H_*(E; G)$  konvergiert.

Die Existenz dieser Spektralsequenz wurde von Jean-Pierre Serre in seiner Doktorarbeit [Ser51] gezeigt. Sie wird daher ihm zu Ehren *Serre-Spektralsequenz* mit Koeffizienten in  $G$  genannt. Serre verwendet für den Beweis eine Definition von singulärer Homologie mittels Kuben anstatt von Simplizes. Ein Beweis, der ohne dieses technische Hilfsmittel auskommt, findet sich in [Hat04, Thm 1.3].

Im restlichen Teil dieser Arbeit ist die Wirkung von  $\pi_1(B)$  trivial, da  $\pi_1(B)$  selbst schon die triviale Gruppe ist.

*Bemerkung.* Im Falle einer nichttrivialen Wirkung der Fundamentalgruppe existiert ebenfalls eine Serre-Spektralsequenz. Die Einträge auf der  $E^2$ -Seite haben dann die Form  $E_{p,q}^2 = H_p(B; \mathcal{H}_q(F; G))$ . Dabei ist  $\mathcal{H}_q(F; G)$  keine feste Gruppe, sondern ein sogenanntes *lokales Koeffizientensystem*. Dies ist eine Familie von Gruppen  $(G_b)_{b \in B}$ , welche in einem gewissen Sinn stetig vom Punkt  $b \in B$  abhängen können. Am Punkt  $b \in B$  ist  $\mathcal{H}_q(F; G)_b = H_q(p^{-1}(b))$ . Ein stetiger Weg  $\gamma$  zwischen Punkten  $b_0, b_1 \in B$  induziert einen Isomorphismus  $\gamma_* : \mathcal{H}_q(F; G)_{b_0} \rightarrow \mathcal{H}_q(F; G)_{b_1}$ . Dieser Isomorphismus hängt nur von der Homotopieklasse von  $\gamma$  ab. Wenn  $\pi_1(B)$  trivial auf der Homologie der Faser wirkt, so hängt der Isomorphismus überhaupt nicht vom gewählten Weg ab. Dann ist  $H_p(B; \mathcal{H}_q(F; G)) \cong H_p(B; H_q(F; G))$ . Für Details siehe [McC01, S. 133–185]

Es gibt auch eine Version des Satzes für Serre für Kohomologie anstatt Homologie. In Kohomologie wird eine andere Indizierung für Spektralsequenzen verwendet:

**Definition 21.** Eine kohomologische *Spektralsequenz*  $E$  besteht aus

- $A$ -Moduln  $E_r^{p,q}$  für alle  $p, q \in \mathbb{Z}$  und  $r \geq 1$ ,
- $A$ -Modul-Homomorphismen  $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1}$  mit  $d_r^{p+r, q-r+1} \circ d_r^{p,q} = 0$
- und Isomorphismen  $\alpha_r^{p,q} : H^{p,q}(E_r) := \ker(d_r^{p,q}) / \text{im}(d_r^{p-r, q+r-1}) \xrightarrow{\cong} E_{r+1}^{p,q}$ .

Jede homologische Spektralsequenz  $E$  liefert eine kohomologische Spektralsequenz, wenn man  $E_r^{p,q} := E_{-p, -q}^r$  setzt.

**Definition 22.** Eine kohomologische Spektralsequenz  $E$  *konvergiert gegen* einen graduierten  $A$ -Modul  $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M^n$  (notiert  $E_r^{p,q} \Rightarrow M^{p+q}$ ), falls  $E$  überhaupt konvergiert und reguläre Filtrierungen

$$M^n \supseteq \dots \supseteq F^{p-1}M^n \supseteq F^pM^n \supseteq F^{p+1}M^n \supseteq \dots \supseteq 0$$

existieren, sodass  $E_\infty^{p,q} \cong F^pM^{p+q} / F^{p+1}M^{p+q}$  für alle  $p, q \in \mathbb{Z}$ .

**Satz 23.** Es sei  $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$  eine Faserung mit wegzusammenhängendem Basisraum  $B$  und  $G$  eine abelsche Gruppe. Angenommen,  $\pi_1(B)$  wirkt trivial auf  $H^*(F; G)$ . Dann existiert eine kohomologische Spektralsequenz mit

$$E_2^{p,q} = H^p(B; H^q(F; G)),$$

welche gegen  $H^*(E; G)$  konvergiert.

Dieser Satz wird bewiesen in [Hat04, Thm 1.14]. Eine Version mit lokalen Koeffizienten findet sich in [McC01, Thm 5.2].

Kohomologie besitzt gegenüber Homologie den Vorteil, dass die Kohomologiegruppen mit dem Cup-Produkt einen graduerten Ring bilden. Diese zusätzliche Struktur ermöglicht es, Räume zu unterscheiden, die die gleichen Homologie- und damit auch Kohomologiegruppen besitzen. Solch eine multiplikative Struktur existiert auch auf der Serre-Spektralsequenz in Kohomologie:

**Satz 24.** Es sei  $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$  eine Faserung mit wegzusammenhängendem Basisraum  $B$  und  $R$  ein Ring. Angenommen,  $\pi_1(B)$  wirkt trivial auf  $H^*(F; R)$ . Es sei  $E$  die Serre-Spektralsequenz der Faserung in Kohomologie mit Koeffizienten in  $R$ . Dann gibt es bilineare Abbildungen

$$m_r = m_r^{p,q,s,t} : E_r^{p,q} \times E_r^{s,t} \rightarrow E_r^{p+s,q+t}, \quad (x, y) \mapsto m_r(x, y) =: xy$$

mit folgenden Eigenschaften:

- (i)  $d_r$  ist derivativ:  $d_r^{p+s,q+t}(xy) = (d_r^{p,q}x)y + (-1)^{p+q}(d_r^{s,t}y)x$  für alle  $x \in E_r^{p,q}$  und  $y \in E_r^{s,t}$
- (ii) Es gilt  $m_{r+1}([x], [y]) = [m_r(x, y)]$  für alle  $x \in \ker(d_r^{p,q})$  und  $y \in \ker(d_r^{s,t})$ .  
Dabei ist  $m_r(x, y) \in \ker(d_r^{p+s,q+t})$  wegen (i).
- (iii) Auf der  $E_2$ -Seite ist  $m_2 : E_2^{p,q} \times E_2^{s,t} \rightarrow E_2^{p+s,q+t}$  das  $(-1)^{qs}$ -fache des Cup-Produkts

$$\cup : H^p(B; H^q(F; R)) \times H^s(B; H^t(F; R)) \rightarrow H^{p+s}(B; H^{q+t}(F; R)),$$

welches für  $a = [(a_\sigma)_{\sigma \in \Delta_p(B)}] \in H^p(B; H^q(F; R))$  und  $b = [(b_\sigma)_{\sigma \in \Delta_s(B)}] \in H^s(B; H^t(F; R))$  definiert ist durch

$$(a \cup b)_{\sigma \in \Delta_{p+s}(B)} := a_{\sigma_{\langle e_0, \dots, e_p \rangle}} \cup b_{\sigma_{\langle e_{p+1}, \dots, e_{p+s} \rangle}} \in H^{q+t}(F; R).$$

- (iv) Das Cup-Produkt auf  $H^*(B; R)$  respektiert die Filtrierungen

$$H^n := H^n(B; R) \supseteq \dots \supseteq F^{p-1}H^n \supseteq F^pH^n \supseteq F^{p+1}H^n \supseteq \dots \supseteq 0,$$

d. h. es schränkt ein zu Abbildungen  $F^pH^m \times F^sH^n \rightarrow F^{p+s}H^{m+n}$ . Die induzierte Abbildung auf dem Quotienten  $F^pH^m/F^{p+1}H^m \times F^sH^n/F^{s+1}H^n \rightarrow F^{p+s}H^{m+n}/F^{p+s+1}H^{m+n}$  entspricht dem Grenzwert  $m_\infty^{p,m-p,s,n-s} : E_\infty^{p,m-p} \times E_\infty^{s,n-s} \rightarrow E_\infty^{p+s,m+n-p-s}$  der Multiplikationen  $m_r^{p,m-p,s,n-s}$ . Dieser Grenzwert existiert aufgrund von (ii).

Ein Beweis dieses Satzes wird in [McC01, Abschnitt 5.3] geführt.

## 5 Töten von Homotopiegruppen und Eilenberg-MacLane-Räume

Beim Studium von topologischen Räumen ist es oft sinnvoll, den betrachteten Raum etwas abzuändern, sodass er leichter zu untersuchen sind, indem man z. B. bestimmte Sätze anwendet, und dann die Ergebnisse auf den ursprünglichen Raum überträgt. Eine Möglichkeit einen Raum abzuändern ist es, bestimmte Homotopiegruppen zu null zu machen, zu „töten“. Der Raum wird damit aus Sicht der Homotopietheorie einfacher, aber geometrisch und aus Sicht der Homologietheorie komplexer.

Es sei dazu  $X$  ein zusammenhängender CW-Komplex. Wähle Erzeuger  $\{\phi_\alpha : S^n \rightarrow X \mid \alpha \in A\}$  von  $\pi_n(X)$ . Wir benutzen diese Abbildungen, um einen neuen CW-Komplex  $X'$  aus  $X$  durch Ankleben von  $n+1$ -Zellen  $e_\alpha^{n+1}$  zu konstruieren. Mit anderen Worten ist folgendes Diagramm ist ein Pushout:

$$\begin{array}{ccc}
S^n \times A & \xrightarrow{\Pi \phi_\alpha} & X \\
i \times \text{id}_A \downarrow & & \downarrow i \\
D^{n+1} \times A & \longrightarrow & X'
\end{array}$$

**Lemma 25.** Die Abbildungen  $\pi_j(X \xrightarrow{i} X')$  sind Isomorphismen für  $j < n$  und  $\pi_n(X') = 0$ .

*Beweis.* Aus zellulärer Approximation (siehe [Hat02, Thm 4.8]) folgt:

- Für alle  $x \in \pi_j(X')$ ,  $j \leq n$  gibt es eine Abbildung  $f : S^n \rightarrow X$  mit  $x = [i \circ f]$ .
- Falls für zwei Abbildungen  $f, g : S^j \rightarrow X$ ,  $j < n$  eine basispunkterhaltende Homotopie  $H$  zwischen  $i \circ f : S^j \rightarrow X'$  und  $i \circ g$  existiert, so auch zwischen  $f$  und  $g$ .

Somit ist  $\pi_j(X \xrightarrow{i} X')$  bijektiv für  $j < n$  und surjektiv für  $j = n$ . Um zu sehen, dass  $\pi_n(X') = 0$ , reicht es zu zeigen, dass  $\pi_n(i)[\phi_\alpha] = [i \circ \phi_\alpha] = 0$  für alle  $\alpha \in A$ . Das gilt nach Konstruktion, da die charakteristische Abbildung  $\Phi : e_\alpha^{n+1} \rightarrow X'$  eine Fortsetzung von  $i \circ \phi_\alpha$  auf  $D^{n+1}$  ist.  $\square$

Wir haben jedoch keine Kontrolle über die höheren Homotopiegruppen  $\pi_j(X)$ ,  $j > n$ . Diese können von der Wahl der Erzeuger  $\phi_\alpha$  abhängen. Wir können aber mit dem Verfahren fortfahren, und diese Gruppen ebenfalls zu null machen. Dazu führen wir obige Konstruktion durch und erhalten eine Folge

$$\dots = X_{n-2} = X_{n-1} := X \subseteq X' =: X_n \subseteq X_{n+1} \subseteq X_{n+2} \subseteq \dots$$

von CW-Komplexen, für die gilt:

- $X_m$  entsteht aus  $X_{m-1}$  durch Ankleben von  $(m+1)$ -Zellen.
- $\pi_j(X_m \hookrightarrow X_k) : \pi_j(X_m) \rightarrow \pi_j(X_k)$  ist ein Isomorphismus für  $j \leq m \leq k$ .
- $\pi_j(X_m) = 0$  für  $n \leq j \leq m$

Wir setzen  $\tau_{<n}X := \tau_{\leq n-1}X := \bigcup_{j=n}^{\infty} X_j$ .

**Lemma 26.** Die Inklusion  $i : X \rightarrow \tau_{<n}X$  induziert Isomorphismen  $\pi_j(X) \rightarrow \pi_j(\tau_{<n}X)$  für  $j < n$ . Es gilt  $\pi_j(\tau_{<n}X) = 0$  für  $j \geq n$ .

*Beweis.* Der Satz über zelluläre Approximation impliziert:

- Jedes Element  $x \in \pi_j(\tau_{<n}X)$  wird repräsentiert durch eine Abbildung  $f : S^j \rightarrow X_j$ .
- Falls  $i \circ f \sim i \circ g$  für  $f, g : S^j \rightarrow X_j$ , so gilt auch  $f \sim g$ .

Das zeigt die Behauptung, da  $\pi_j(X_j) = 0$  für  $j \geq n$ .  $\square$

Der Raum  $\tau_{<n}X$  hängt auch nicht (bis auf Homotopie) von den Wahlen der Erzeuger ab: Es seien  $Y, Y' \supseteq X$  zwei durch obiges Verfahren aus  $X$  konstruierte Räume. Dann kann man die Inklusionsabbildung  $i : X \hookrightarrow Y'$  fortsetzen zu einer Abbildung  $f : Y \rightarrow Y'$ , indem man induktiv  $f$  auf das  $j$ -Skelett von  $Y$ ,  $j > n$  fortsetzt. Dies ist möglich, da für eine  $j$ -Zelle  $e_\beta^j \subset Y$  die Einschränkung  $f|_{\partial e_\beta^j}$  nullhomotop ist. Die Abbildung  $f$  ist dann eine Homotopieäquivalenz nach dem Whitehead-Theorem (siehe [Hat02, Thm 4.5]), da sie Isomorphismen auf allen Homotopiegruppen induziert.

Nun können wir mit Lemma 14 die Abbildung  $i : X \rightarrow \tau_{<n}X$  in eine Faserung  $F \rightarrow E_i \rightarrow \tau_{<n}X$  mit  $E_i \simeq X$  umwandeln. Anhand der langen exakten Sequenz von Homotopiegruppen sieht man, dass  $\pi_j(F \rightarrow E_i)$  für  $j \geq n$  ein Isomorphismus ist und dass  $\pi_j(F) = 0$  für  $j < n$ . Wir haben es also geschafft, einen  $(n-1)$ -zusammenhängenden Raum  $\tau_{\geq n}X := \tau_{>n-1}X := F$  zu konstruieren, der im Grad  $j \geq n$  dieselben Homotopiegruppen wie  $X$  besitzt. Mit anderen Worten: Wir haben die Homotopiegruppen unterhalb Grad  $n$  getötet. Die Faserung  $\tau_{\geq n}X \rightarrow X' \rightarrow \tau_{<n}X$  mit  $X' := E_i \simeq X$  wird uns im Folgenden erlauben,  $X$  zu untersuchen, indem wir  $\tau_{\geq n}X$  und  $\tau_{<n}X$  getrennt studieren. Der Raum  $\tau_{\leq n}S^n$  besitzt nur eine nicht verschwindende Homotopiegruppe, nämlich  $\pi_n(\tau_{\leq n}S^n) \cong \pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ . Solche Räume spielen eine wichtige Rolle in der Homotopietheorie und haben deshalb einen eigenen Namen:

**Definition 27.** Es sei  $G$  eine Gruppe und  $n \geq 1$ . Ein *Eilenberg-MacLane-Raum* vom Typ  $K(G, n)$  ist ein punktierter, zusammenhängender topologischer Raum  $(X, x_0)$  mit

$$\pi_q(X, x_0) = \begin{cases} G & \text{falls } q = n, \\ 0 & \text{falls } q \neq n. \end{cases}$$

Mit anderen Worten ist  $\tau_{\leq n} S^n$  ein  $K(\mathbb{Z}, n)$ . Man kann zeigen (siehe [Hat02, S. 365-366]):

**Satz 28.** Sei  $n \geq 1$  und  $G$  eine Gruppe, abelsch für  $n \geq 2$ . Dann existiert ein CW-Komplex  $(X, x_0)$  vom Typ  $K(G, n)$ . Der CW-Komplex  $X$  ist eindeutig bis auf Homotopieäquivalenz, d. h. ist  $X'$  ein weiterer CW-Komplex vom Typ  $K(G, n)$ , so gilt  $X \simeq X'$ .

*Bemerkung.* Es sei  $(X, x_0)$  ein  $K(G, n)$ . Dann ist  $\Omega X$  ein  $K(G, n-1)$ , denn

$$\pi_q(\Omega X, \gamma_0) \cong \pi_{q+1}(X, x_0) \cong \begin{cases} G & \text{falls } q+1 = n \iff q = n-1, \\ 0 & \text{falls } q+1 \neq n \iff q \neq n-1. \end{cases}$$

Die Homologiegruppen von Räumen vom Typ  $K(G, n)$  kann man über die Pfadfaserung  $K(G, n-1) \rightarrow PK(G, n) \rightarrow K(G, n)$  untersuchen.

## 6 Serre-Klassen

Es sei  $(X, x_0)$  ein punktierter topologischer Raum. Der Hurewicz-Homomorphismus  $h_n : \pi_n(X, x_0) \rightarrow H_n(X; \mathbb{Z})$  verläuft zwischen der  $n$ -ten Homotopiegruppe und der  $n$ -ten Homologiegruppe von  $X$ . Er ist definiert durch  $h_n([f]) := H_n(f)(\alpha)$  für einen fest gewählten Erzeuger  $\alpha \in H_n(S^n; \mathbb{Z})$ . Im nächsten Abschnitt werden wir folgenden klassischen Satz verallgemeinern:

**Satz 29** (Hurewicz). Sei  $(X, x_0)$  ein  $(n-1)$ -zusammenhängender topologischer Raum, d. h.  $\pi_i(X, x_0) = 0$  für  $i < n$ . Dann ist  $h_i : \pi_i(X, x_0) \rightarrow H_i(X; \mathbb{Z})$  ein Isomorphismus für  $0 < i \leq n$ . Insbesondere gilt  $H_i(X; \mathbb{Z}) = 0$  für  $0 < i < n$ .

Ein Beweis dieses Satzes wird in [Hat02, Thm 4.32] geführt. Genauer wollen wir die Bedingung, dass bestimmte Homotopiegruppen von  $X$  null sind, ersetzen durch die Forderung, dass diese Homotopiegruppen eine bestimmte Eigenschaft erfüllen, z. B. endlich erzeugt zu sein. Wir müssen dann auch den Begriff des Isomorphismus entsprechend verallgemeinern. Wir können natürlich nicht erwarten, dass wir jede beliebige Eigenschaft verwenden können. Damit das Vorhaben gelingt, muss die Klasse aller abelschen Gruppen, die diese Eigenschaft besitzen, folgende Bedingung erfüllen:

**Definition 30.** Eine Klasse  $\mathcal{C}$  von abelschen Gruppen heißt *Serre-Klasse*, falls

- (I) Für jede kurze exakte Seq.  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  von ab. Gruppen gilt:  $B \in \mathcal{C} \iff A, C \in \mathcal{C}$ .
- (II) Für  $A, B \in \mathcal{C}$  sind auch  $A \otimes B \in \mathcal{C}$  und  $\text{Tor}(A, B) \in \mathcal{C}$ .

*Bemerkung.* Aus der ersten Eigenschaft folgt, dass Bilder, Untergruppen und Quotienten einer Gruppe aus  $\mathcal{C}$  wieder in  $\mathcal{C}$  sind. Genauer gilt für eine ab. Gruppe  $B$  und eine Untergruppe  $A < B$ :  $B \in \mathcal{C} \iff A, B/A \in \mathcal{C}$ . Durch Induktion kann man zeigen, dass für eine Gruppe  $A$  mit endlicher Filtrierung  $A = F^0 A \supseteq F^1 A \supseteq \dots \supseteq F^k A = 0$  gilt:  $A \in \mathcal{C} \iff F^0 A/F^1 A, \dots, F^{k-1} A/F^k A \in \mathcal{C}$ . Außerdem liegt die direkte Summe zweier Gruppen aus  $\mathcal{C}$  wieder in  $\mathcal{C}$ .

**Definition 31.** Es sei  $\mathcal{C}$  eine Serre-Klasse. Ein Morphismus  $f : A \rightarrow B$  zwischen abelschen Gruppen heißt *Isomorphismus modulo  $\mathcal{C}$* , falls  $\ker(f), \text{coker}(f) \in \mathcal{C}$ .

Dies ist äquivalent zur Existenz einer exakten Sequenz  $K \rightarrow A \xrightarrow{f} B \rightarrow C$  mit  $K, C \in \mathcal{C}$ . Eine Gruppe, welche modulo- $\mathcal{C}$ -isomorph zu einer Gruppe aus  $\mathcal{C}$  ist, ist selbst in  $\mathcal{C}$ .

*Bemerkung.* Für jede Serre-Klasse  $\mathcal{C}$  gibt es eine abelsche Kategorie  $\mathbf{AbGrp}/\mathcal{C}$ , die *Serre-Quotientenkategorie*, und einen wesentlich surjektiven, exakten Funktor  $F : \mathbf{AbGrp} \rightarrow \mathbf{AbGrp}/\mathcal{C}$ , dessen Kern genau  $\mathcal{C}$  ist. Ein Morphismus  $f$  in  $\mathbf{AbGrp}$  ist genau dann ein Isomorphismus modulo  $\mathcal{C}$ , wenn  $F(f)$  ein Isomorphismus in  $\mathbf{AbGrp}/\mathcal{C}$  ist. Analog kann man eine Reihe weiterer Modulo- $\mathcal{C}$ -Begriffe einführen: Ein Morphismus heißt Mono- bzw. Epimorphismus modulo  $\mathcal{C}$ , wenn sein Bild unter  $F$  ein Mono- bzw. Epimorphismus ist, ein Kettenkomplex heißt exakt modulo  $\mathcal{C}$ , wenn sein Bild unter  $F$  exakt ist, etc. Da  $\mathbf{AbGrp}/\mathcal{C}$  eine abelsche Kategorie ist, gelten in  $\mathbf{AbGrp}/\mathcal{C}$  typische Sätze der homologischen Algebra, wie das Fünfer- oder das Schlangenlemma. Es gibt daher Modulo- $\mathcal{C}$ -Versionen dieser Sätze. Konstruiert werden kann  $\mathbf{AbGrp}/\mathcal{C}$  als Lokalisierung von  $\mathbf{AbGrp}$  nach der Klasse der Modulo- $\mathcal{C}$ -Isomorphismen, siehe [Stacks, Section 02MN].

**Lemma 32.** Folgende Klassen sind Serre-Klassen:

- a)  $\mathcal{T}_P := \{ \text{endl. ab. Gruppen, deren Ordnung nur durch Primzahlen in } P \subseteq \mathbb{P} \text{ teilbar ist} \}$ ,  
wobei  $\mathbb{P}$  die Menge aller Primzahlen bezeichnet,
- b)  $\mathcal{F} := \mathcal{T}_{\mathbb{P}} = \{ \text{endliche abelsche Gruppen} \}$
- c)  $\mathcal{FG} := \{ \text{endlich erzeugte abelsche Gruppen} \}$

*Beweis.* a) Es sei  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$  eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen. Wir behaupten, dass  $|g^{-1}(c)| = |A|$  für alle  $c \in C$ . Für  $c = 0$  gilt dies wegen Exaktheit. Sei nun  $c \in C$  beliebig. Wähle ein Urbild  $a \in g^{-1}(c)$ . Dann ist Rechtsmultiplikation mit  $a^{-1}$  eine Bijektion  $x \mapsto x \cdot a^{-1} : g^{-1}(c) \rightarrow g^{-1}(0)$  mit Umkehrabbildung  $x \mapsto x \cdot a$ . Somit ist  $|g^{-1}(c)| = |g^{-1}(0)| = |A|$ . Also gilt  $|A| \cdot |C| = |B| \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Daraus folgt Axiom (I).

Es bleibt, (II) zu zeigen. Für  $\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m \in \mathcal{T}_P$  (d. h.  $n$  und  $m$  sind Produkte von Primzahlen aus  $P$ ) gilt  $\mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Z}_m \cong \text{Tor}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \cong \mathbb{Z}_{\text{ggT}(n,m)} \in \mathcal{T}_P$ . Wegen des Hauptsatzes über endlich erzeugte abelsche Gruppen kann jede endliche abelsche Gruppe als endliche direkte Summe von zyklischen Gruppen schreiben. Es seien daher nun  $A = \bigoplus_{i=1}^N \mathbb{Z}_{n_i}$  und  $B = \bigoplus_{j=1}^M \mathbb{Z}_{m_j}$  mit  $\mathbb{Z}_{n_i}, \mathbb{Z}_{m_j} \in \mathcal{T}_P$  für  $i = 1, \dots, N$  und  $j = 1, \dots, M$ . Dann ist auch  $\text{Tor}(A, B) \cong A \otimes B \cong \bigoplus_{i=1}^N \bigoplus_{j=1}^M \mathbb{Z}_{\text{ggT}(n_i, m_j)} \in \mathcal{T}_P$ .

c) Wir betrachten nun wieder die kurze exakte Sequenz  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$  von abelschen Gruppen. Falls  $B$  endlich erzeugt ist, so ist  $C$  offensichtlich endlich erzeugt und  $A$  ist ebenfalls endlich erzeugt als Untergruppe einer endlich erzeugten abelschen Gruppe. Es seien nun  $A$  und  $C$  endlich erzeugt,  $A = \langle a_1, \dots, a_N \rangle$  und  $C = \langle c_1, \dots, c_M \rangle$ . Dann ist  $\ker(g) = \langle f(a_1), \dots, f(a_N) \rangle$ . Wähle für  $j = 1, \dots, M$  ein Element  $b_j \in g^{-1}(c_j)$ . Wir behaupten, dass  $B = \langle f(a_1), \dots, f(a_N), b_1, \dots, b_M \rangle$ . Sei dazu  $b \in B$  beliebig. Schreibe  $g(b) = m_1 \cdot c_1 + \dots + m_M \cdot c_M$  mit  $m_1, \dots, m_M \in \mathbb{Z}$ . Dann ist  $\tilde{b} := b - (m_1 \cdot b_1 + \dots + m_M \cdot b_M) \in \ker(g)$ , d. h. es gibt  $n_1, \dots, n_N \in \mathbb{Z}$  mit  $\tilde{b} = n_1 \cdot f(a_1) + \dots + n_N \cdot f(a_N)$ . Somit  $b = m_1 \cdot c_1 + \dots + m_M \cdot c_M + n_1 \cdot a_1 + \dots + n_N \cdot a_N$ . Damit ist (I) gezeigt.

Für den (II) seien  $A$  und  $B$  endlich erzeugte abelsche Gruppen und  $n, n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N}$  und  $m, m_1, \dots, m_M \in \mathbb{N}$  mit  $A \cong \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{n_N}$  und  $B \cong \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{m_M}$ . Es gilt  $A \otimes B = \mathbb{Z}^{nm} \oplus (\mathbb{Z}_{m_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{m_M})^n \oplus (\mathbb{Z}_{n_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{n_N})^M \oplus \bigoplus_{i=1}^N \bigoplus_{j=1}^M \mathbb{Z}_{\text{ggT}(n_i, m_j)}$  und  $\text{Tor}(A, B) = \bigoplus_{i=1}^N \bigoplus_{j=1}^M \mathbb{Z}_{\text{ggT}(n_i, m_j)}$ , es sind also  $A \otimes B$  und  $\text{Tor}(A, B)$  ebenfalls endlich erzeugt.  $\square$

**Definition 33.** Es sei  $\mathcal{C}$  eine Serre-Klasse. Ein topologischer Raum  $X$  heißt  $\mathcal{C}$ -azyklisch, falls  $\tilde{H}_n(X) \in \mathcal{C}$  für alle  $n \geq 0$ .

*Bemerkung.* Ein Raum ist also genau dann  $\mathcal{F}$ -azyklisch ( $\mathcal{FG}$ -azyklisch), wenn seine reduzierten Homologiegruppen endlich (erzeugt) sind.

**Lemma 34.** Es sei  $\mathcal{C}$  eine Serre-Klasse und  $F \rightarrow X \rightarrow B$  eine Faserung von wegzusammenhängenden Räumen  $F$ ,  $X$  und  $B$ . Es wirke  $\pi_1(B)$  trivial auf  $H_*(F)$ . Dann gilt folgende 2-aus-3-Eigenschaft: Falls zwei der Räume  $F$ ,  $X$  und  $B$   $\mathcal{C}$ -azyklisch sind, so auch der dritte.

*Beweis.* Wir betrachten die Serre-Spektralsequenz zu der Faserung mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}$ . Zunächst gilt  $H_n(X) \in \mathcal{C}$  genau dann, wenn die Gruppen  $E_{i,n-i}^\infty$  für  $i = 0, \dots, n$  alle in  $\mathcal{C}$  liegen, denn diese Gruppen sind die Quotienten einer endlichen Filtrierung von  $H_n(X)$ .

*Fall 1:  $F$  und  $B$  sind  $\mathcal{C}$ -azyklisch:* Die universelle Koeffizientenformel liefert

$$E_{p,q}^2 \cong H_p(B; H_q(F; \mathbb{Z})) \cong (H_p(B; \mathbb{Z}) \otimes H_q(F; \mathbb{Z})) \oplus \text{Tor}(H_{p-1}(B; \mathbb{Z}), H_q(F; \mathbb{Z})).$$

Man sieht durch Unterscheidung der Fälle  $p = 0$ ,  $p = 1$  und  $p > 1$  sowie  $q = 0$  und  $q > 0$ , dass  $E_{p,q}^2 \in \mathcal{C}$  für  $(p, q) \neq (0, 0)$ . Als Subquotient von  $E_{p,q}^2$  liegt nun auch  $E_{p,q}^\infty$  in  $\mathcal{C}$  für  $(p, q) \neq (0, 0)$ . Dies zeigt die Behauptung nach der Bemerkung am Anfang des Beweises.

*Fall 2:  $F$  und  $X$  sind  $\mathcal{C}$ -azyklisch:* Wir zeigen nun durch Induktion über  $k$ , dass  $H_p(B) \in \mathcal{C}$  für  $0 < p < k$ . Gelte dies für  $k \geq 1$ . Wir wollen zeigen, dass dann auch  $H_k(B)$  in  $\mathcal{C}$  liegt. Für alle  $r \geq 2$  gibt es eine kurze exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \ker(d_{k,0}^r) & \rightarrow & E_{k,0}^r & \xrightarrow{d_{k,0}^r} & \text{im}(d_{k,0}^r) \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & & & \downarrow \subseteq \\ & & E_{k,0}^{r+1} & & & & E_{k-r,r-1}^r \end{array}$$

Man sieht unter Verwendung der Induktionsannahme und der universellen Koeffizientenformel wie in Fall 1, dass  $E_{k-r,r-1}^2$  und somit auch  $E_{k-r,r-1}^r$  in  $\mathcal{C}$  liegen. Damit gilt auch  $\text{im}(d_{k,0}^r) \in \mathcal{C}$ . Aus der ersten Eigenschaft von Serre-Klassen folgt  $E_{k,0}^r \in \mathcal{C} \iff E_{k,0}^{r+1} \in \mathcal{C}$  für alle  $r \geq 1$ . Da aber  $E_{k,0}^{k+1} \cong E_{k,0}^\infty \in \mathcal{C}$ , gilt  $E_{k,0}^r \in \mathcal{C}$  für alle  $r \geq 2$ . Insbesondere  $H_k(B; \mathbb{Z}) \cong H_k(B; H_0(F; \mathbb{Z})) \cong E_{k,0}^2 \in \mathcal{C}$ .

*Fall 3:  $B$  und  $X$  sind  $\mathcal{C}$ -azyklisch:* Analog zum vorherigen Fall zeigt man induktiv, dass  $H_q(F) \in \mathcal{C}$  für  $0 < q < k$ . Dazu verwendet man die kurze exakte Sequenz  $0 \rightarrow \text{im}(d_{r,k-r+1}^r) \rightarrow E_{0,k}^r \rightarrow E_{0,k}^{r+1} \rightarrow 0$ .  $\square$

Damit eine Version der Hurewicz-Theorems modulo einer Serre-Klasse  $\mathcal{C}$  existiert, müssen wir außerdem voraussetzen, dass die Aussage des Theorems im Spezialfall der Eilenberg-MacLane-Räume bereits erfüllt ist:

**Axiom 35.** Es sei  $\mathcal{C}$  eine Serre-Klasse.

(III) Es sei  $G \in \mathcal{C}$ . Dann ist  $K(G, n)$   $\mathcal{C}$ -azyklisch für alle  $n \geq 1$ .

**Lemma 36.**  $\mathcal{T}_P$ ,  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{FG}$  erfüllen Axiom (III).

*Beweis.* Es sei  $\mathcal{C} \in \{\mathcal{T}_P \mid P \subseteq \mathbb{P}\} \cup \{\mathcal{FG}\}$ ,  $G \in \mathcal{C}$  und  $n \geq 1$ . Es ist zu zeigen, dass  $K(G, n)$  für alle  $n \geq 1$   $\mathcal{C}$ -azyklisch ist. Wir führen dazu Induktion nach  $n$  durch. Sei zunächst  $n = 1$ .

- Falls  $G = \mathbb{Z}$ , so ist  $\mathcal{C} = \mathcal{FG}$  und  $K(\mathbb{Z}, n)$  ist  $\mathcal{FG}$ -azyklisch, denn der Kreis  $S^1$  ist ein  $K(\mathbb{Z}, 1)$  und  $H_*(S^1; \mathbb{Z}) \in \mathcal{FG}$ .
- Falls  $G = \mathbb{Z}_m$ , so kann man einen  $K(\mathbb{Z}_m, 1)$  als unendlich-dimensionalen Linsenraum  $L_m$  konstruieren.<sup>1</sup> Dieser besitzt Homologiegruppen  $\tilde{H}_i(L_m) \cong \mathbb{Z}_m$  für  $i > 0$  ungerade und  $\tilde{H}_i(L_m) \cong 0$  sonst (vgl. [Hat02, Bsp 2.43]). Wenn  $m = p^k$  für eine Primzahl  $p \in P$  und  $k \geq 1$ , so ist damit  $K(\mathbb{Z}_m, 1) \in \mathcal{T}_P$ -azyklisch und auch  $\mathcal{FG}$ -azyklisch.
- Falls  $G = G_1 \oplus G_2$ , dann ist  $K(G_1, 1) \times K(G_2, 1)$  ein  $K(G, 1)$ . Wenn  $K(G_1, 1)$  und  $K(G_2, 1)$   $\mathcal{C}$ -azyklisch sind, so folgt aus dem letzten Lemma, angewendet auf die Produktfaserung  $K(G_1, 1) \rightarrow K(G_1, 1) \times K(G_2, 1) \rightarrow K(G_2, 1)$ , dass auch  $K(G, 1)$   $\mathcal{C}$ -azyklisch ist.

<sup>1</sup> Sei dazu  $S^\infty \subset \mathbb{C}^\infty$  die unendlich-dimensionale Sphäre. Es wirke  $\mathbb{Z}_m$  auf jedem Faktor  $\mathbb{C}$  von  $\mathbb{C}^\infty$  durch Rotation  $(k, x) \mapsto x \cdot e^{2\pi i k/m}$ . Dies induziert eine eigentlich diskontinuierliche Gruppenwirkung  $\mathbb{Z}_m \rightarrow \text{Aut}(S^\infty)$ . Dann ist  $L_m := S^\infty / \mathbb{Z}_m$  ein  $K(\mathbb{Z}_m, 1)$ : Die Überlagerung  $S^\infty \rightarrow S^\infty / \mathbb{Z}_m$  hat Decktransformationsgruppe  $\mathbb{Z}_m$  und ist universell, da  $S^\infty$  zusammenziehbar ist (vgl. [Hat02, Bspe 1B.3, 1B.4]). Somit ist  $\pi_1(L_m) \cong \mathbb{Z}_m$ . Für die höheren Homotopiegruppen gilt  $\pi_n(L_m) \cong \pi_n(S^\infty) = 0$ .



Die Aussage gilt für  $n = 1$ , da man jede endlich erzeugte abelsche Gruppe als direkte Summe von endlich vielen Summanden der Form  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Z}_m$  (wobei  $m$  eine Primzahlpotenz ist) schreiben kann.

Für den Induktionsschritt verwenden wir die Pfadfaserung  $K(G, n) \rightarrow P \rightarrow K(G, n+1)$ . Es gilt  $\tilde{H}_k(P) = 0 \in \mathcal{C}$  und  $\tilde{H}_k(K(G, n)) \in \mathcal{C}$  für  $k \geq 0$  nach Induktionshypothese, also  $\tilde{H}_*(K(G, n+1)) \in \mathcal{C}$  nach dem vorhergehenden Lemma.  $\square$

## 7 Das Modulo- $\mathcal{C}$ -Hurewicz-Theorem

In diesem Abschnitt sei  $\mathcal{C}$  eine Serre-Klasse, die Axiom (III) erfüllt.

Für den Beweis des nächsten Lemmas benötigen wir einen weiteren Begriff.

**Definition 37.** Ein *Postnikov-Turm* eines wegzusammenhängenden Raumes  $X$  ist ein kommutatives Diagramm wie rechts, für das gilt:

- $\pi_i(X \rightarrow X_n)$  ist ein Isomorphismus für  $i \leq n$  und
- $\pi_i(X_n) = 0$  für  $i > n$ .

$$\begin{array}{c} X \\ \swarrow \quad \searrow \downarrow \\ \dots \rightarrow X_3 \rightarrow X_2 \rightarrow X_1 \end{array}$$

Einen Postnikov-Turm zu  $X$  kann man folgendermaßen konstruieren: Setze  $X_n := \tau_{\leq n} X$  für alle  $n \geq 1$ . Dabei wird  $\tau_{\leq n} X$  wie im letzten Abschnitt beschrieben aus  $X$  durch Ankleben von Zellen der Dimension  $\geq n+2$  konstruiert, sodass die Homotopiegruppen in Grad  $> n$  verschwinden. Die Abbildung  $i : X \rightarrow X_n$  ist die Inklusion. Diese lässt sich nun fortsetzen zu einer Abbildung  $f : X_{n+1} \rightarrow X_n$ : Sei dazu induktiv eine Fortsetzung  $f^k : \text{sk}_k X_{n+1} \cup X \rightarrow X_n$ ,  $k \geq n+1$  von  $i$  gegeben. Dann lässt sich die Abbildung auch auf  $(k+1)$ -Zellen  $e_\alpha^{k+1}$  ausdehnen, denn  $f^k|_{\partial e_\alpha^{k+1}}$  ist nullhomotop, da  $\pi_k(X_n) = 0$  für  $k > n$ .

*Bemerkung.* Es sei ein Postnikov-Turm  $\dots \rightarrow X_{i+1} \rightarrow X_i \rightarrow \dots \rightarrow X_2 \rightarrow X_1$  gegeben. Dann kann man durch wiederholtes Anwenden der in Lemma 14 beschriebenen Konstruktion einen neuen Postnikov-Turm  $\dots \rightarrow X'_2 \rightarrow X'_1$  und Homotopieäquivalenzen  $X_i \simeq X'_i$  konstruieren, sodass die Abbildungen  $X'_{i+1} \rightarrow X'_i$  Faserungen sind. Man sieht anhand der langen exakten Sequenz von Homotopiegruppen, dass die Faser von  $X'_{i+1} \rightarrow X'_i$  ein  $K(\pi_{i+1}(X), i+1)$  ist.

Man kann daher einen Postnikov-Turm als eine Art Zerlegung eines topologischen Raumes in Eilenberg-MacLane-Räume betrachten. Dadurch wird es möglich, induktiv über den Raum  $X$  zu argumentieren oder seine Homologie zu bestimmen, wenn man Kenntnis über die Bestandteile  $K(\pi(n), n)$  besitzt. Das wird im Beweis des nächsten Lemmas deutlich.

**Lemma 38.** Es sei  $X$  einfach zusammenhängend mit  $\pi_i(X, x_0) \in \mathcal{C}$  für alle  $i \geq 0$ . Dann ist  $X$   $\mathcal{C}$ -azyklisch, d. h. es gilt  $\tilde{H}_i(X) \in \mathcal{C}$  für  $i \geq 0$ .

*Beweis.* Es sei  $\dots \rightarrow X_{i+1} \rightarrow X_i \rightarrow \dots \rightarrow X_1$  ein Postnikov-Turm von  $X$ , dessen Abbildungen  $X_{i+1} \rightarrow X_i$  Faserungen sind. Wir zeigen, dass  $H_i(X_k; \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}$  für alle  $i, k > 0$ . Die Aussage stimmt für  $k = 1$ , da alle Homotopiegruppen und nach dem Satz von Hurewicz auch alle Homologiegruppen von  $X_1$  null sind. Gelte die Aussage nun für  $k \geq 1$ . Wir verwenden die Faserung  $K(\pi_{k+1}(X), k+1) \rightarrow X_{k+1} \rightarrow X_k$ . Nach Voraussetzung ist die Faser  $\mathcal{C}$ -azyklisch. Gleiches gilt für den Basisraum  $X_k$  nach Induktionsvoraussetzung, und somit auch für  $X_{k+1}$  nach Lemma 34.

Die Abbildung  $\pi_i(X \rightarrow X_k)$  ist ein Isomorphismus für  $i \leq k$  und ein Epimorphismus für  $i = k+1$ . Somit ist  $H_i(X \rightarrow X_k)$  ein Isomorphismus für  $i \leq k$  und ein Epimorphismus für  $i = k+1$  ist. Dies folgt aus einer relativen Version des gewöhnlichen Hurewicz-Theorems (siehe [Hat02, Thm 4.32]) durch Betrachtung des Abbildungszylinders wie im Beweis von Korollar 43.

Somit gilt  $H_k(X; \mathbb{Z}) \cong H_k(X_k; \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}$ .  $\square$

**Satz 39** (Modulo- $\mathcal{C}$ -Hurewicz-Theorem, [Hat04, Thm 1.8]). Es sei  $(X, x_0)$  ein einfach zusammenhängender topologischer Raum. Angenommen,  $\pi_i(X, x_0) \in \mathcal{C}$  für  $0 < i < n$ . Dann ist  $h_i : \pi_i(X, x_0) \rightarrow H_i(X; \mathbb{Z})$  ein Isomorphismus modulo  $\mathcal{C}$  für  $i \leq n$ . Insbesondere gilt  $H_i(X; \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}$  für  $0 < i < n$ .

Mit  $\mathcal{C} := \{0\}$  ist die Aussage des Satzes gerade die des gewöhnlichen Hurewicz-Theorems.

*Beweis.* Es sei wieder  $\dots \rightarrow X_{i+1} \rightarrow X_i \rightarrow \dots \rightarrow X_1$  ein Postnikov-Turm von  $X$ , dessen Abbildungen  $X_{i+1} \rightarrow X_i$  Faserungen sind. Aufgrund der Natürlichkeit des Hurewicz-Homomorphismus kommutiert folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X) & \xrightarrow{\cong} & \pi_n(X_n) \\ \downarrow h_n & & \downarrow h_n \\ H_n(X) & \xrightarrow{\cong} & H_n(X_n) \end{array}$$

Im Beweis des letzten Lemmas wurde gezeigt, dass der untere Morphismus ein Isomorphismus ist. Es genügt daher zu zeigen, dass  $h_n : \pi_n(X_n) \rightarrow H_n(X_n; \mathbb{Z})$  ein Isomorphismus modulo  $\mathcal{C}$  ist. Wir betrachten die Serre-Spektralsequenz zur Faserung  $F_n \rightarrow X_n \rightarrow X_{n-1}$ , wobei  $F_n$  ein  $K(\pi_n(X), n)$  ist. Es gilt

$$E_{p,q}^2 \cong H_p(X_{n-1}; \underbrace{H_q(K(\pi_n(X), n); \mathbb{Z})}_{=0 \text{ für } 0 < q < n, \text{ da } \pi_q(K(\pi_n(X), n))=0 \text{ für } 0 < q < n}),$$

d. h. es verschwinden also alle Einträge zwischen der 0-ten und der  $n$ -ten Zeile. Wir betrachten die exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} H_{n+1}(X_{n-1}) & & H_n(F_n) & & 0 & & 0 \\ \downarrow \text{"} & & \downarrow \text{"} & & \searrow & & \swarrow \\ E_{n+1,0}^2 & & E_{0,n}^2 & & & & E_{0,n}^\infty \\ \downarrow \text{"} & & \downarrow \text{"} & & \nearrow & & \searrow \\ E_{n+1,0}^n & \xrightarrow{d_{n+1,0}^n} & E_{0,n}^n & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & H_n(X_n) & \longrightarrow & E_{n,0}^\infty \longrightarrow 0 \end{array}$$

welche sich aus zwei kurzen Sequenzen zusammensetzt:

- Die linke Sequenz ist exakt, da  $E_{0,n}^\infty \cong E_{0,n}^{n+1} \cong \ker(d_{0,n}^n) / \text{im}(d_{n+1,0}^n) = E_{0,n}^n / \text{im}(d_{n+1,0}^n)$ .
- Die rechte Sequenz ist exakt, da  $E_{0,n}^\infty = F^0 H_n(X_n)$  und  $E_{n,0}^\infty = F^n H_n(X_n) / F^{n-1} H_n(X_n)$  für eine Filtrierung  $0 = F^{-1} H_n(X_n) \subseteq F^0 H_n(X_n) \subseteq \dots \subseteq F^n H_n(X_n) = H_n(X_n)$ . Da  $F^p H_n(X_n) / F^{p-1} H_n(X_n) = E_{p,n-p}^\infty = 0$  für  $p = 1, \dots, n-1$ , gilt  $F^0 H_n(X_n) = \dots = F^{n-1} H_n(X_n)$ .

Aus Lemma 38 folgt, dass  $E_{n+1,0}^n, E_{n,0}^\infty \in \mathcal{C}$ . Somit ist der mittlere Morphismus  $H_n(F_n) \rightarrow H_n(X_n)$  ein Isomorphismus modulo  $\mathcal{C}$ . Dieser Morphismus ist aber gerade der von der Inklusion  $F_n \hookrightarrow X_n$  induzierte Morphismus in Homologie.<sup>2</sup>

Wir betrachten nun das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(F_n) & \xrightarrow{\cong} & \pi_n(X_n) \\ \cong \downarrow h_n & & \downarrow h_n \\ H_n(F_n) & \longrightarrow & H_n(X_n) \end{array}$$

Dabei sind die vertikalen Morphismen die Hurewicz-Homomorphismen und die horizontalen Morphismen werden durch die Inklusion induziert. Der linke Hurewicz-Homomorphismus ist nach dem Hurewicz-Theorem ein Isomorphismus, da  $F_n$   $(n-1)$ -zusammenhängend ist. Der obere Morphismus ist ein Isomorphismus, wie man anhand der langen exakten Sequenz der Faserung  $F_n \rightarrow X_n \rightarrow X_{n-1}$  sehen kann. Der untere Morphismus ist ein Isomorphismus modulo  $\mathcal{C}$ , wie wir gerade eben gesehen haben. Somit ist auch der rechte Morphismus im Diagramm ein Isomorphismus modulo  $\mathcal{C}$ .  $\square$

<sup>2</sup> Dies sieht man durch nähere Betrachtung des Beweises über die Existenz der Serre-Spektralsequenz zu einer Faserung  $F \rightarrow X \rightarrow B$  in [Hat04]: Durch CW-Approximation kann man davon ausgehen, dass  $B$  ein CW-Komplex ist. Die Filtrierung von  $H_n(X)$  wird dort definiert durch  $F^p H_n(X) \cong \text{im}(H_n(p^{-1}(B^p) \hookrightarrow X)) \subseteq H_n(X)$ , wobei  $B^p$  das  $p$ -Skelett von  $B$  bezeichnet. Die Abbildung  $H_n(F) \cong H_0(B; H_n(F)) \cong E_{0,n}^2 \rightarrow E_{0,n}^\infty \cong F^0 H_n(X)$  wird durch die Inklusion von  $F \approx p^{-1}(B^0)$  in  $X$  induziert.

Durch Induktion kann man zeigen:

**Korollar 40.** Es sei  $(X, x_0)$  ein einfach zusammenhängender topologischer Raum. Dann gilt für alle  $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ :

$$\forall 0 \leq n < N : \pi_n(X, x_0) \in \mathcal{C} \iff \forall 1 \leq n < N : H_n(X; \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}. \quad \square$$

Aus dem Korollar folgt, dass die Homotopiegruppen der Sphären alle endlich erzeugt sind, da die Homologiegruppen der Sphären endlich erzeugt sind.

Der relative Hurewicz-Homomorphismus  $h_n : \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow H_n(X, A)$  ist definiert durch  $h_n([f]) := H_n(f)(\alpha)$  für eine stetige Abbildung  $f : (D^n, \partial D^n, *) \rightarrow (X, A, x_0)$ , wobei  $\alpha \in H_n(D^n, \partial D^n) \cong \mathbb{Z}$  ein fest gewählter Erzeuger ist.

**Satz 41** (Relatives Modulo- $\mathcal{C}$ -Hurewicz-Theorem). Es sei  $(X, A)$  ein 1-zusammenhängendes Raumpaar, wobei  $A$  nichtleer und einfach zusammenhängend ist. Angenommen,  $\pi_i(X, A) \in \mathcal{C}$  für  $0 < i < n$ . Dann ist  $h_i : \pi_i(X, A) \rightarrow H_i(X, A; \mathbb{Z})$  ein Isomorphismus modulo  $\mathcal{C}$  für  $i \leq n$ . Insbesondere gilt  $H_i(X, A; \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}$  für  $0 < i < n$ .

Zum Beweis der Aussage führen wir den relativen Fall auf den absoluten Fall wie im Beweis von [Hat02, Thm 4.32] zurück.

*Beweis.* Durch CW-Approximation erhält man ein CW-Paar  $(X', A')$  und eine Abbildung  $f : (X', A') \rightarrow (X, A)$ , welche Isomorphismen in relativen und absoluten Homotopiegruppen induziert (vgl. [Hat02, Bsp 4.14]). Insbesondere ist auch  $A'$  einfach zusammenhängend. Da  $(X', A')$  ein gutes Raumpaar ist, induziert  $p : (X', A') \rightarrow (X'/A', *)$  Isomorphismen in allen positiven Homologiegruppen. In Homotopie ist  $p_* : \pi_i(X', A') \rightarrow \pi_i(X'/A')$  für  $i \leq n$  ein Isomorphismus (siehe [Hat02, Prop 4.28]). Somit ist  $X'/A'$   $(n-1)$ -zusammenhängend. Somit gilt  $\pi_i(X'/A') \in \mathcal{C}$  für  $0 \leq i \leq n-1$ . Betrachte nun

$$\begin{array}{ccccc} \pi_i(X'/A') & \xleftarrow[p_*]{\cong} & \pi_i(X', A') & \xrightarrow[f_*]{\cong} & \pi_i(X, A) \\ \downarrow h_i & & \downarrow h_i & & \downarrow h_i \\ H_i(X'/A') & \xleftarrow[p_*]{\cong} & H_i(X', A') & \xrightarrow[f_*]{\cong} & H_i(X, A) \end{array}$$

Aufgrund der absoluten Version des Theorems (Satz 39) ist also der linke Pfeil im folgenden Diagramm ein Isomorphismus modulo  $\mathcal{C}$  für  $i \leq n$ . Gleiches gilt somit für den rechten Pfeil.  $\square$

Wir erhalten auch eine relative Version von Korollar 40:

**Korollar 42.** Es sei  $(X, A)$  ein 1-zusammenhängendes Raumpaar, wobei  $A$  nichtleer und einfach zusammenhängend ist. Dann gilt für alle  $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ :

$$\forall 0 \leq n < N : \pi_n(X, A, x_0) \in \mathcal{C} \iff \forall 1 \leq n < N : H_n(X, A; \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}. \quad \square$$

**Korollar 43.** Es sei  $f : A \rightarrow B$  stetig,  $A$  und  $B$  nichtleer und einfach zusammenhängend. Dann sind äquivalent:

- (a)  $f_* : \pi_i(A) \rightarrow \pi_i(B)$  ist ein Isomorphismus modulo  $\mathcal{C}$  für  $1 \leq i < n$  und ein Epimorphismus modulo  $\mathcal{C}$  für  $i = n$ .
- (b)  $f_* : H_i(A) \rightarrow H_i(B)$  ein Isomorphismus modulo  $\mathcal{C}$  für  $1 \leq i < n$  und ein Epimorphismus modulo  $\mathcal{C}$  für  $i = n$ .

*Beweis.* Betrachte den Abbildungszyylinder  $M_f$  von  $f$ . Die Abbildung  $f$  entspricht der Inklusion  $A \hookrightarrow M_f$  von  $A$  als Deckel des Abbildungszyinders, wenn man  $X$  als Deformationsretrakt von  $M_f$  auffasst. Es gilt nun

$$(a) \stackrel{\text{l.e.S.}}{\iff} \pi_i(M_f, A) \in \mathcal{C} \text{ für } 0 \leq i \leq n \stackrel{\text{Kor 42}}{\iff} H_i(M_f, A) \in \mathcal{C} \text{ für } 1 \leq i \leq n \stackrel{\text{l.e.S.}}{\iff} (b). \quad \square$$

*Bemerkung.* Man kann in diesem Abschnitt die Voraussetzung, dass  $X$  einfach zusammenhängend ist, ersetzen durch die Forderung, dass  $X$  wegzusammenhängend und abelsch ist, d. h. die Wirkung der Fundamentalgruppe  $\pi_1(X)$  auf den höheren Homotopiegruppen  $\pi_n(X)$  trivial ist.

## 8 Rationale Kohomologie von Räumen vom Typ $K(\mathbb{Z}, n)$

Wir wollen zeigen, dass die Homotopiegruppen von gewissen Räumen  $X$  alle endlich sind. Nach Korollar 40 können wir dazu zeigen, dass die Homologiegruppen in positiven Graden endlich sind. Angenommen, wir wissen bereits, dass die Homologiegruppen von  $X$  endlich erzeugt sind. Dann ist  $H_i(X; \mathbb{Z})$  genau dann endlich, wenn  $H_i(X; \mathbb{Z})$  eine Torsionsgruppe ist, also wenn  $H_i(X; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} = 0$ . Allgemeiner ist die  $i$ -te Bettizahl  $b_i := \dim_{\mathbb{Q}}(H_i(X; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q})$  die Dimension des freien Anteils von  $H_i(X; \mathbb{Z})$ . Da  $\mathbb{Q}$  flach ist, gilt  $H_i(X; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} \cong H_i(X; \mathbb{Q})$ . Außerdem gilt  $H_i(X; \mathbb{Q}) \cong \text{Hom}(H_i(X; \mathbb{Q}), \mathbb{Q}) \cong H^i(X; \mathbb{Q})$ , wenn die Homologiegruppen von  $X$  endlich erzeugt sind. Das ist der Grund, warum wir uns für Homologie- und Kohomologiegruppen mit Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$  interessieren. Der Vorteil gegenüber Homologie- und Kohomologiegruppen mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}$  besteht darin, dass diese Gruppen leichter zu bestimmen sind. Konkret haben wir für  $X = K(\mathbb{Z}, n)$ :

**Satz 44** ([Hat04, Lem 1.20]). Für  $n \geq 1$  gilt

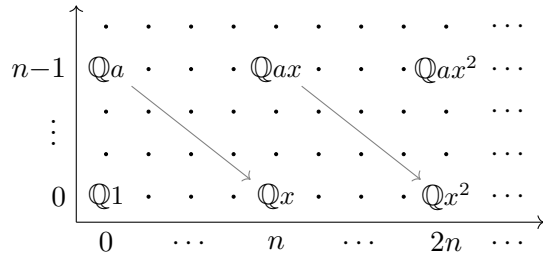
$$H^*(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q}[x] & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \Lambda_{\mathbb{Q}}[x] & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

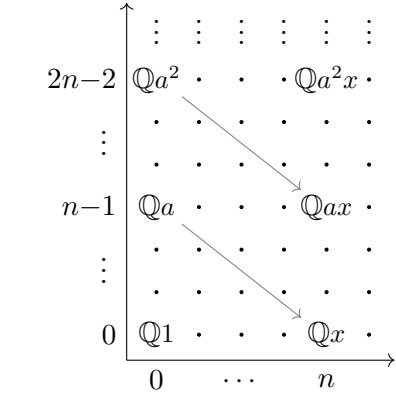
als graduierte Ringe mit Erzeuger  $x \in H^n(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q})$ . Dabei bezeichnet  $\Lambda_{\mathbb{Q}}[x]$  die äußere Algebra mit Erzeuger  $x$ .

*Beweis.* Durch Induktion über  $n$ . Der Satz gilt für  $n = 1$ , denn der Kreis  $S^1$  ist ein  $K(\mathbb{Z}, 1)$  und es gilt bekanntermaßen  $H^*(S^1; R) \cong \Lambda_R[x]$  für  $R = \mathbb{Z}$  und somit auch für  $R = \mathbb{Q}$ . Im Induktionsschritt nutzen wir die Pfadfaserung  $F := K(\mathbb{Z}, n-1) \rightarrow P \rightarrow B := K(\mathbb{Z}, n)$ . Da  $K(\mathbb{Z}, n)$  für  $n \geq 2$  einfach zusammenhängend ist, gibt es eine zugehörige Serre-Spektralsequenz mit  $E_2^{p,q} \cong H^p(B; H^q(F))$  für  $p, q \geq 0$ .

*Falls  $n$  gerade:* Dann sieht die Spektralsequenz auf der Seite  $E_r$ ,  $r \leq n$  aus wie rechts skizziert (dabei stehen die Gitterpunkte für die Nullgruppe). Das sieht man folgendermaßen: Zunächst ist  $E_2^{p,q} = 0$  und somit  $E_r^{p,q} = 0$  außer für  $q \in \{0, n-1\}$ , denn nach Induktionsvoraussetzung gilt  $H^*(F; \mathbb{Q}) \cong \Lambda_{\mathbb{Q}}[x]$ . Es folgt, dass nur auf der  $n$ -ten Seite  $E_n$  nicht verschwindende Differentiale existieren können und  $E_2 \cong E_n$  und  $E_{n+1} \cong E_{\infty}$  gilt. Außerdem ist  $E_n^{0,0} \cong E_2^{0,0} \cong \mathbb{Q}$  und  $E_n^{0,n-1} \cong E_2^{0,n-1} \cong \mathbb{Q}$ , da  $B$  zusammenhängend ist. Die Spektralsequenz konvergiert gegen  $H^*(P; \mathbb{Q})$ . Da  $P$  zusammenziehbar ist, gilt  $H^0(P; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$  und  $H^n(P; \mathbb{Q}) = 0$  für  $n > 0$ . Folglich ist  $E_{n+1}^{p,q} \cong E_{\infty}^{p,q} = 0$  außer für  $p = q = 0$ . Das eingezeichnete Differential  $d_n^{0,n-1} : E_n^{0,n-1} \rightarrow E_{n+1}^{n,0}$  ist injektiv, denn  $\ker(d_n^{0,n-1}) \cong E_{n+1}^{0,n-1} = 0$ . Dieses Differential ist auch surjektiv, denn  $\text{coker}(d_n^{0,n-1}) \cong E_{n+1}^{n,0} \cong E_{\infty}^{n,0} = 0$ , also ein Isomorphismus. Somit gilt  $H^n(B; \mathbb{Q}) \cong E_2^{n,0} \cong E_n^{n,0} \cong E_n^{0,n-1} \cong \mathbb{Q}$ . Damit ist  $E_2^{n,n-1} \cong H^n(B; H^{n-1}(F; \mathbb{Q})) \cong H^n(B; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ . Induktiv sieht man nun, dass die Abbildungen  $d_n^{kn,n-1}$  Isomorphismen sind und dass  $H^{kn}(B; \mathbb{Q}) \cong E_2^{kn,0} \cong E_2^{kn,n-1} \cong \mathbb{Q}$  für alle  $k \geq 0$ . Damit haben wir gezeigt, dass die graduierte, additive Struktur von  $H^*(B; \mathbb{Q})$  wie behauptet ist.

Es sei nun  $a \in E_n^{0,n-1} \cong H^0(B; H^{n-1}(F; \mathbb{Q}))$  ungleich null und  $x := d_n^{0,n-1}(a) \in E_{n+1}^{n,0} \cong H^n(B; H^0(F; \mathbb{Q})) \cong H^n(B; \mathbb{Q})$ . Dann gilt auch  $x \neq 0$  und  $ax := m_n(a, x) \neq 0$ , da wegen (ii) und (iii) aus Satz 24 das Produkt  $m_n$  gerade dem kanonischen Produkt  $H^n(B; H^0(F; \mathbb{Q})) \times H^0(B; H^{n-1}(F; \mathbb{Q})) \rightarrow H^n(B; H^{n-1}(F; \mathbb{Q}))$  entspricht. Es gilt  $0 \neq d_n^{n,n-1}(ax) = d_n^{0,n-1}(a)x - ad_n^{n,0}(x) = xx$ . Da das Produkt  $xx \in E_{n+1}^{2n,0}$  gerade dem Cup-Produkt  $x \cup x \in H^{2n}(B; \mathbb{Q})$  entspricht, ist  $x \cup x \neq 0$ , also ein Erzeuger von  $H^{2n}(B; \mathbb{Q})$  als  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum. Induktiv ist nun  $0 \neq d_n^{kn,n-1}(ax^k) = x^{k+1} \in E_{n+1}^{kn+1,0}$  da ja  $0 \neq ax^k$ . Somit ist für alle  $k$  das  $k$ -fache Cup-Produkt  $x^k \in H^{kn}(B; \mathbb{Q})$  ein Erzeuger.





$x := d_n^{0,n-1}a$ . Dann ist auch  $a^2 \neq 0 \in E_n^{0,2n-2}$  und  $d_n^{0,2n-2}(a^2) = d_n^{0,n-1}(a)a + d_n^{0,n-1}(a)a = xa + ax = (-1)^{0 \cdot n + (n-1) \cdot 0}ax + ax = 2ax \neq 0$ . Also ist  $d_n^{0,2n-2}$  ein Isomorphismus. Analog sieht man, dass  $d_n^{0,k(n-1)}$  für alle  $k \geq 1$  ein Isomorphismus ist. Es bleibt zu zeigen, dass  $H^{kn}(B; \mathbb{Q}) = 0$  für  $k > 1$ . Das einzige potentiell nichttriviale Differential, das bei  $E_r^{2n,0}$  ankommt, ist  $d_n^{n,n-1}$ . Dieses ist aber null, da  $\ker(d_n^{n,n-1}) \supseteq \text{im}(d_n^{0,2n-2}) = E_n^{n,n-1}$ . Also  $H^{2n}(B; \mathbb{Q}) \cong E_2^{2n,0} \cong E_\infty^{2n,0} = 0$  und  $E_2^{2n,k} = 0$  für alle  $k \geq 0$ . Für  $k > 2$  sieht man durch Induktion, dass alle Differentiale von und nach  $E_r^{kn,0}$  verschwinden (da die Start- bzw. Zielgruppe des Differentials null ist) und daher  $H^{kn}(B; \mathbb{Q}) \cong E_2^{kn,0} \cong E_\infty^{kn,0} = 0$ .  $\square$

*Falls  $n$  ungerade:* Dann ist  $E_r^{p,q} = 0$  für alle  $q$ , die kein Vielfaches von  $n-1$  sind. Somit verschwinden alle Differentiale auf  $E_r$  für  $r < n$  und  $E_2 \cong E_n$ . Für  $0 < m < n$  verschwinden alle Differentiale von und nach  $E_r^{m,0}$  und daher ist  $H^m(B; \mathbb{Q}) \cong E_2^{m,0} \cong E_\infty^{m,0} = 0$  und folglich  $E_2^{m,k} = 0$  für alle  $k \geq 0$ . Selbiges gilt folglich auch für  $n < m < 2n$  und allgemeiner für solche  $m$ , die kein Vielfaches von  $n$  sind. Analog wie im vorherigen Fall sieht man, dass das eingezeichnete Differential  $d_n^{0,n-1}$  ein Isomorphismus ist. Somit ist  $H^n(B; \mathbb{Q}) \cong H^n(B; H^0(F; \mathbb{Q})) \cong \mathbb{Q}$  und  $E_2^{n,k(n-1)} \cong \mathbb{Q}$  für alle  $k \geq 0$ . Sei  $a \in H^0(B; H^{n-1}(F; \mathbb{Q}))$  ungleich null und  $d_n^{0,2n-2}(a^2) = d_n^{0,n-1}(a)a + d_n^{0,n-1}(a)a = xa + ax = (-1)^{0 \cdot n + (n-1) \cdot 0}ax + ax = 2ax \neq 0$ . Also ist  $d_n^{0,2n-2}$  ein Isomorphismus. Analog sieht man, dass  $d_n^{0,k(n-1)}$  für alle  $k \geq 1$  ein Isomorphismus ist. Es bleibt zu zeigen, dass  $H^{kn}(B; \mathbb{Q}) = 0$  für  $k > 1$ . Das einzige potentiell nichttriviale Differential, das bei  $E_r^{2n,0}$  ankommt, ist  $d_n^{n,n-1}$ . Dieses ist aber null, da  $\ker(d_n^{n,n-1}) \supseteq \text{im}(d_n^{0,2n-2}) = E_n^{n,n-1}$ . Also  $H^{2n}(B; \mathbb{Q}) \cong E_2^{2n,0} \cong E_\infty^{2n,0} = 0$  und  $E_2^{2n,k} = 0$  für alle  $k \geq 0$ . Für  $k > 2$  sieht man durch Induktion, dass alle Differentiale von und nach  $E_r^{kn,0}$  verschwinden (da die Start- bzw. Zielgruppe des Differentials null ist) und daher  $H^{kn}(B; \mathbb{Q}) \cong E_2^{kn,0} \cong E_\infty^{kn,0} = 0$ .  $\square$

## 9 Homologie der Stiefel-Mannigfaltigkeit $V_{m+1,2}$

Die Stiefel-Mannigfaltigkeit  $V_{m+1,2}$  besteht aus allen orthonormalen 2-Tupeln  $(u, v)$  im  $\mathbb{R}^{m+1}$  mit dem euklidischen Skalarprodukt. Die Dimension dieser Mannigfaltigkeit ist  $m + (m-1) = 2m-1$ . Man kann einen Punkt  $(u, v)$  auf dieser Mannigfaltigkeit auch als Einheitstangentenvektor an die Sphäre  $S^m$  (mit der kanonischen Metrik) am Punkt  $u \in S^m$  ansehen, wenn man sich den Startpunkt von  $v$  an den Punkt  $u$  verschoben vorstellt. Die Abbildung  $p : V_{m+1,2} \rightarrow S^m$ ,  $(u, v) \mapsto u$  ist eine Faserung. Die Menge aller Einheitstangentenvektoren in einem Punkt  $u$  ist homöomorph zur  $S^{m-1}$ . Die Faser ist daher eine  $S^{m-1}$ .

Wir wollen nun die Homologie von  $V_{m+1,2}$  berechnen. Dazu konstruieren wir eine CW-Struktur auf  $V_{m+1,2}$ . Wir fassen nun  $V_{m+1,2}$  als Mannigfaltigkeit  $UTS^m$  der Einheitstangentenvektoren an  $S^m = \{v \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \|v\| = 1\}$  auf. Wir notieren  $UT_p S^m := \{v \in T_p S^m \mid \|v\| = 1\}$  für  $p \in S^m$ . Es seien  $p_N, p_S \in S^m$  der Nord- bzw. Südpol von  $S^m$ ,  $u_S \in UT_{p_S} S^m$  und  $u_N \in UT_{p_N} S^m$ .

Wir verwenden vier Zellen,

- eine 0-Zelle  $e^0$  für  $u_S$ ,
- eine  $(m-1)$ -Zelle  $e^{m-1}$  für  $UT_{p_S} S^m$ , die Einheitstangentenvektoren am Punkt  $p_S$ ,
- eine  $m$ -Zelle  $e^m$  für alle Einheitstangentenvektoren auf  $S^m \setminus \{p_S\}$ , die man durch Paralleltransport von  $u_N$  entlang von Meridianen erhält und
- eine  $(2m-1)$ -Zelle  $e^{2m-1}$  für alle restlichen Einheitstangentenvektoren.

Wir fassen das  $(m-1)$ -Skelett  $(V_{m+1,2})^{m-1} \approx S^{m-1}$  als Raum der Einheitstangentenvektoren an  $p_S$  auf.

Den Rand  $\partial D^m$  identifizieren wir mit dem Raum  $UT_{p_N} S^m$  der Einheitstangentenvektoren an  $p_N$ . Die Anklebeabbildung  $\varphi^m : \partial D^m \rightarrow (V_{m+1,2})^{m-1}$  von  $e^m$  schickt dann einen Vektor  $v \in UT_{p_N} S^m$  auf  $P_{\gamma_v(0), \gamma_v(\pi)} u_N$ , dem entlang dem Meridian  $\gamma_v : [0, \pi] \rightarrow S^m$  mit  $\dot{\gamma}_v(0) = v$  parallel verschobenen Vektor  $u_N$ .

Wir konstruieren nun die Anklebeabbildung  $\varphi^{2m-1} : \partial D^{2m-1} \rightarrow (V_{m+1,2})^{2m-2}$ . Dazu identifizieren wir  $D^{2m-1} \approx D^{m-1} \times D^m$ . Dann ist  $\partial D^{2m-1} \approx (\partial D^{m-1} \times D^m) \cup (D^{m-1} \times \partial D^m)$ . Wir bilden  $(u, v) \in \partial D^{m-1} \times D^m$  auf  $\Phi^m(v)$  ab, wobei  $\Phi^m : D^m \rightarrow (V_{m+1,2})^m$  die charakteristische Abbildung von  $e^m$  ist. Sei nun  $(u, v) \in D^{m-1} \times \partial D^m$ . Wir wählen einen

festen Homöomorphismus  $\rho : D^{m-1}/\partial D^{m-1} \rightarrow UT_{p_N} S^m$  mit  $\rho([\partial D^{m-1}]) = u_N$ . Außerdem identifizieren wir  $\partial D^m$  mit  $UT_{p_N} S^m$ . Wir setzen  $\varphi^{2m-1}(u, v) := P_{\gamma_v(0), \gamma_v(\pi)} \rho(u) \in T_{p_S} S^m \approx (V_{m+1,2})^{m-1}$ , die Parallelverschiebung von  $\rho(u)$  entlang dem Meridian  $\gamma_v$  mit  $\dot{\gamma}_v(0) = v \in UT_{p_N} S^m$ .

Um die Homologie von  $V_{m+1,2}$  zu bestimmen, müssen wir den Abbildungsgrad von  $\varphi^m : \partial D^m \rightarrow (V_{m+1,2})^{m-1} \approx S^{m-1}$  ausrechnen. Dieser Abbildungsgrad ist (bis auf evtl. ein Vorzeichen) gleich dem Grad der Abbildung

$$g : UT_{p_N} \rightarrow UT_{p_N}, \quad v \mapsto P_{\gamma_{u_N}(0), \gamma_{u_N}(\pi)}^{-1} \circ P_{\gamma_v(0), \gamma_v(\pi)} u_N,$$

welche  $v$  abbildet auf den Vektor, den man erhält, wenn man  $u_N$  entlang des  $v$ -Meridians an den Südpol verschiebt und dann entlang des  $u_N$ -Meridians wieder zurück an den Nordpol verschiebt. Einfache geometrische Überlegungen zeigen, dass diese Abbildung gegeben ist durch  $g(v) = r_{u_N} \circ r_v u_N$ , wobei  $r_w : UT_{p_N} S^m \rightarrow UT_{p_N} S^m$  die Spiegelung an der zu  $w \in UT_{p_N} S^m$  senkrechten Hyperebene ist. Sei  $W \subset UT_{p_N} S^m$  die Menge aller auf  $u_N$  senkrechten Einheitstangentialvektoren. Die Abbildung  $g$  ist auf den beiden Komponenten von  $UT_{p_N} S^m \setminus W$  ein Homöomorphismus auf  $UT_{p_N} S^m \setminus \{-u_N\}$ . Diese beiden Homöomorphismen gehen durch Komposition mit der Antipodenabbildung  $(-\text{id})$  auf  $UT_{p_N} S^m \approx S^{m-1}$  auseinander hervor. Die Antipodenabbildung auf  $S^m$  besitzt den Abbildungsgrad  $(-1)^m$ . Dies impliziert

$$\pm \deg(g) = \deg \text{id} + \deg(-\text{id}) = 1 + (-1)^m = \begin{cases} 0 & \text{falls } m \text{ ungerade,} \\ 2 & \text{falls } m \text{ gerade.} \end{cases}$$

Für  $m \geq 2$  folgt aus zellulärer Homologie

$$H_i(V_{m+1,2}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } i = 0, 2m-1, \\ \mathbb{Z} & \text{für } i = m, m-1 \text{ falls } m \text{ ungerade,} \\ \mathbb{Z}_2 & \text{für } i = m-1 \text{ falls } m \text{ gerade,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir halten außerdem fest, dass für  $m \geq 3$  die Abbildung  $q : V_{m+1,2} \rightarrow V_{m+1,2}/(V_{m+1,2})^{2m-2} \approx S^{2m-1}$ , welche das  $(2m-2)$ -Skelett auf einen Punkt zusammenzieht, einen Isomorphismus auf  $H_{2m-1}(-)$  induziert. Dies folgt aus dem Fünferlemma.

## 10 Beweis des Satzes von Serre

Der folgende Beweis orientiert sich an Theorem 10.10 und Übungsaufgabe 165 von [DK01].

*Beweis von Satz 5.* Ist  $n$  ungerade, so ist die Abbildung  $i : S^n \rightarrow \tau_{\leq n} S^n = K(\mathbb{Z}, n)$  nach Satz 44 eine Homologieäquivalenz modulo  $\mathcal{F}$ . Aus Korollar 43 folgt, dass  $i$  auch auf allen Homotopiegruppen Isomorphismen modulo  $\mathcal{F}$  induziert. Somit sind alle Homotopiegruppen von  $S^n$  im Grad  $> n$  endlich.

Es sei nun  $n$  gerade. Die oben beschriebene Abbildung  $q : V_{n+1,2} \rightarrow S^{2n-1}$  induziert Isomorphismen in Homologie modulo  $\mathcal{F}$ . Somit induziert  $q$  auch Isomorphismen auf den Homotopiegruppen. Aus der langen exakten Homotopiesequenz

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & \pi_{i+1}(S^n) & \rightarrow & \underbrace{\pi_i(S^{n-1})}_{\substack{\text{endlich für} \\ i \neq n-1}} & \rightarrow & \underbrace{\pi_i(V_{n+1,2})}_{\substack{\cong \pi_i(S^{2n-1}) \text{ mod } \mathcal{F}, \\ \text{endlich für } i \neq 2n-1}} & \rightarrow & \pi_i(S^n) & \rightarrow & \pi_{i-1}(S^{n-1}) & \rightarrow & \dots \end{array}$$

zur Faserung  $S^{n-1} \rightarrow V_{n+1,2} \xrightarrow{p} S^n$  folgt nun, dass  $\pi_i(S^n)$  endlich ist für  $i \notin \{n, 2n-1\}$  und dass  $\pi_{2n-1}(S^n) \cong \pi_{2n-1}(V_{n+1,2}) \cong \mathbb{Z}$  modulo  $\mathcal{F}$ .  $\square$

## 11 Die erste Homotopiegruppe von $S^n$ mit $p$ -Torsion

Es sei  $G$  eine abelsche Gruppe,  $p \in \mathbb{N}$  eine Primzahl. Die  $p$ -primäre Torsionskomponente (oder  $p$ -Torsionsuntergruppe) von  $G$  ist die Menge aller  $g \in G$ , deren Ordnung eine  $p$ -Potenz ist. Wir wollen nun die erste Homologiegruppe der Sphäre  $S^n$  bestimmen, die eine nichttriviale  $p$ -Torsionsuntergruppe besitzt. Wie beim Beweis des Endlichkeitssatzes von Serre werden wir dazu zunächst die Homologiegruppen von  $K(\mathbb{Z}, n)$ 's untersuchen. Dazu ist es ähnlich wie in Abschnitt 8 hilfreich, Homologie mit speziellen Koeffizienten zu verwenden, um bestimmte Torsionsgruppen auszublenden.

Sei dazu  $\mathbb{Z}_{(p)}$  die Lokalisierung von  $\mathbb{Z}$  nach dem Primideal  $(p)$  oder äquivalent der Unterring von  $\mathbb{Q}$  bestehend aus den Brüchen, deren Nenner nicht durch  $p$  teilbar ist. Wir können die  $p$ -Torsionsgruppe einer endlich erzeugten abelschen Gruppe  $G$  an  $G \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$  ablesen, denn es gilt:

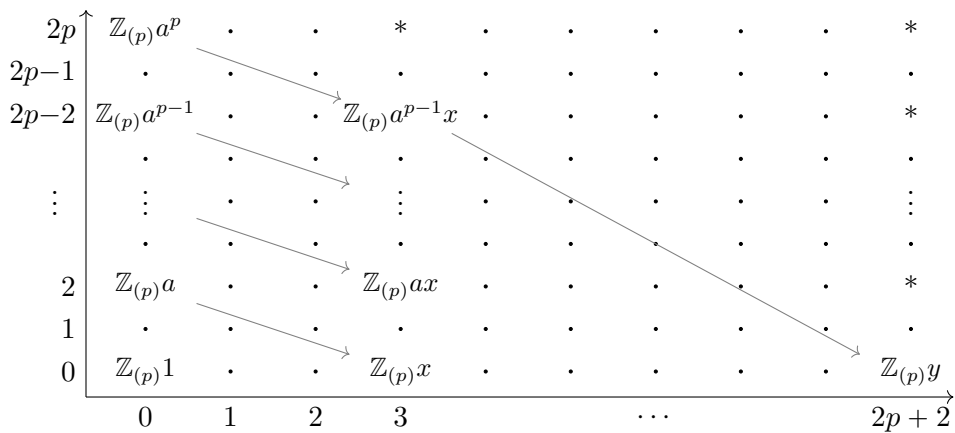
- $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \cong \mathbb{Z}_{(p)}$ ,
- $\mathbb{Z}_{p^n} \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \cong \mathbb{Z}_{p^n}$  und
- $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_{(p)} = 0$ , falls  $m$  nicht durch  $p$  teilbar ist.

Es sei  $X$  nun ein topologischer Raum. Da  $\mathbb{Z}_{(p)}$  torsionsfrei ist, gilt  $H_i(X; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \cong H_i(X; \mathbb{Z}_{(p)})$  nach dem universellen Koeffiziententheorem. Falls die Kohomologiegruppen von  $X$  endlich erzeugt sind, so gilt  $H^i(X; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \cong H^i(X; \mathbb{Z}_{(p)})$  nach [Spa94, Thm 5.5.10]. Wir können somit die  $p$ -Torsion in (ganzzahliger) Homologie und Kohomologie bestimmen, indem wir die Homologie- und Kohomologiegruppen mit Koeffizienten mit  $\mathbb{Z}_{(p)}$  berechnen.

**Lemma 45** ([Hat04, Lem 1.29]). Es sei  $n \geq 3$  und  $p$  prim. Dann ist die  $p$ -Torsionsuntergruppe von  $H^i(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z})$  null für  $i < n + 2p - 1$  und isomorph zu  $\mathbb{Z}_p$  für  $i = n + 2p - 1$ .

*Beweis.* Durch Induktion über  $n$ . Wir verwenden wieder die Pfadfaserung  $K(\mathbb{Z}, n - 1) \rightarrow P \rightarrow K(\mathbb{Z}, n)$  und die dazugehörige Serre-Spektralsequenz, diesmal mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}_{(p)}$ .

Falls  $n = 3$ : Wir können die Faser, einen  $K(\mathbb{Z}, 2)$ -Raum, als unendlich-dimensionalen komplexen projektiven Raum  $\mathbb{C}P^\infty$  realisieren.<sup>3</sup> Dieser besitzt eine CW-Struktur bestehend aus je einer Zelle in geraden Dimensionen und keiner Zelle in ungeraden Dimensionen (siehe [Hat02, Bsp 0.6]). Daher ist  $H^{2k}(\mathbb{C}P^\infty) \cong \mathbb{Z}$  und  $H^{2k+1}(\mathbb{C}P^\infty) = 0$ . Genauer gilt  $H^*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[a]$  mit Erzeuger  $a \in H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})$  (siehe [Hat02, Thm 3.12]).



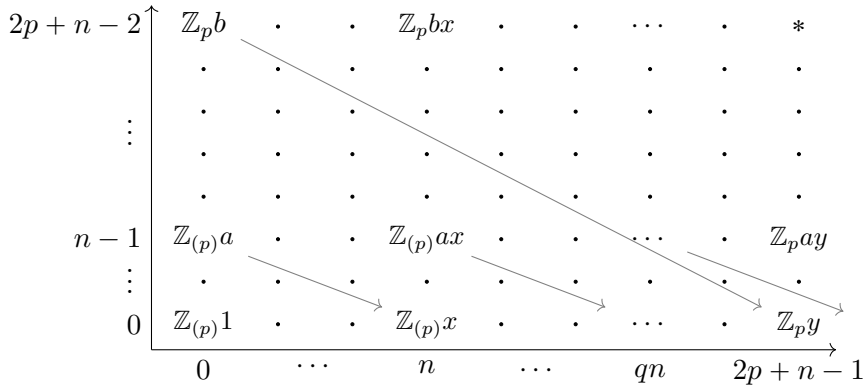
Die 0-Spalte der  $E_2$ -Seite ist daher wie abgebildet. Die nächsten beiden Spalten verschwinden, da  $H^1(K(\mathbb{Z}, 3)) = H^2(K(\mathbb{Z}, 3)) = 0$ . Für die 3-Spalte gilt  $E_2^{3, 2k} \cong \mathbb{Z}_{(p)}$  erzeugt von  $a^k x$ , wobei  $x$  ein Erzeuger von  $E_2^{3, 0} \cong H^3(K(\mathbb{Z}, 3); \mathbb{Z}_{(p)}) \cong \mathbb{Z}_{(p)}$  ist. Der Einträge an Position  $(0, 2)$  und  $(3, 0)$  überleben bis auf die  $E_3$ -Seite, müssen aber auf der  $E_4$ -Seite verschwinden. Daher ist

<sup>3</sup> Sei  $S^\infty \subset \mathbb{C}^\infty$  die unendlich-dimensionale Sphäre mit der Äquivalenzrelation  $a \sim b : \iff \exists \lambda \in S^1 \subset \mathbb{C} : a = \lambda \cdot b$ . Setze  $\mathbb{C}P^\infty := S^\infty / \sim$ . Anhand der langen exakten Sequenz zur Faserung  $S^1 \rightarrow S^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$  erkennt man, dass  $\mathbb{C}P^\infty$  ein  $K(\mathbb{Z}, 2)$  ist (beachte, dass  $S^\infty$  zusammenziehbar ist).

$d_3^{0,2} : E_3^{0,2} \rightarrow E_3^{3,0}$  ein Isomorphismus. Wir können ohne Einschränkung davon ausgehen, dass  $d_3(a) = x$ . Aus der Cup-Produkt-Struktur der Spektralsequenz folgt nun  $d_3^{0,2k}(a^k) = ka^{k-1}x$ . Somit ist  $d_3^{0,2k}$  ein Isomorphismus für  $k < p$ . Für  $k = p$  ist  $d_3^{0,2p}$  immer noch injektiv, besitzt aber einen nichttrivialen Kokern  $\mathbb{Z}_{(p)}/p\mathbb{Z}_{(p)} \cong \mathbb{Z}_p$ . Die Spalten mit Dimension  $m = 4, \dots, 2p+1$  verschwinden, denn alle Differentiale mit Ziel  $E_r^{m,0}$  sind null. Damit muss bereits  $E_2^{m,0}$  und somit die ganze  $m$ -te Spalte verschwinden. Folglich ist  $E_{2p-1}^{3,2p-2} \cong E_4^{3,2p-2} \cong \mathbb{Z}_p$  und  $E_{2p-1}^{2p+2,0} \cong E_2^{2p+2,0}$ . Das Differential  $d_{2p-1}^{3,2p-2}$  ist ein Isomorphismus zwischen diesen beiden Einträgen, da sonst mindestens ein Eintrag die die Spektralsequenz überleben würde. Somit ist

$$\begin{aligned} H^{2p+2}(K(\mathbb{Z}, 3)) \otimes \mathbb{Z}_{(p)} &\cong H^{2p+2}(K(\mathbb{Z}, 3); \mathbb{Z}_{(p)}) \cong H^{2p+2}(K(\mathbb{Z}, 3); H^0(K(\mathbb{Z}, 2); \mathbb{Z}_{(p)})) \\ &\cong E_2^{2p+2,0} \cong E_{2p-1}^{2p+2,0} \cong \mathbb{Z}_p. \end{aligned}$$

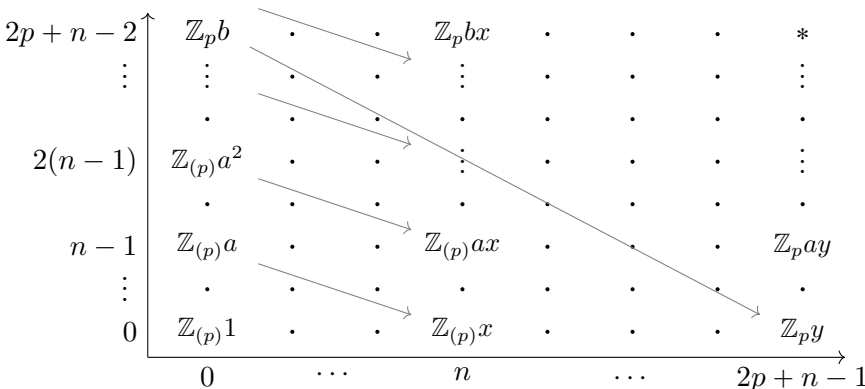
Falls  $n > 3$ ,  $n$  gerade:



Aus der Induktionsannahme sowie Satz 44 folgt, dass die 0-te Spalte wie abgebildet ist. Das Muster in der 0-ten und der  $(n-1)$ -ten Zeile begründet sich wie im Beweis von Satz 44. Insbesondere ist der Kohomologiering  $H^{<2p+n-1}(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}_{(p)}) := \bigoplus_{i=0}^{2p+n-2} H^i(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}_{(p)})$  von  $K(\mathbb{Z}, n)$  im Grad kleiner  $2p+n-2$  isomorph zu  $(\mathbb{Z}_{(p)}[x])/(a^l)$  mit Generator  $x \in H^n(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}_{(p)})$  und  $l := \lceil \frac{2p+n-1}{n} \rceil$  ist. Dies werden wir im nächsten Fall benötigen. Wir behaupten, dass  $E_{2p+n-1}^{0,2p+n-2} \cong E_2^{0,2p+n-2} \cong \mathbb{Z}_p$ . Dies folgt daraus, dass das Ziel der Differentiale  $E_r^{0,2p+n-2}$  für  $r < 2p+n-1$  die Nullgruppe ist, mit einer Ausnahme: Für  $n = 2p$  könnte  $d_n^{0,2p+n-2} : E_n^{0,2p+n-2} \rightarrow E_n^{n,n-1}$  nichttrivial sein. Das ist aber nicht der Fall, denn  $\text{im}(d_n^{0,2p+n-2}) \subseteq \ker(d_n^{n,n-1}) = 0$ . Man sieht außerdem leicht, dass  $E_{2p+n-1}^{2p+n-1,0} \cong E_2^{2p+n-1,0}$ . Das Differential  $d_{2p+n-1}^{0,2p+n-2}$  ist ein Isomorphismus, da sonst  $E_\infty^{0,2p+n-2}$  oder  $E_\infty^{2p+n-1,0}$  nicht null wäre. Somit gilt

$$\begin{aligned} H^{2p+n-1}(K(\mathbb{Z}, n)) \otimes \mathbb{Z}_{(p)} &\cong H^{2p+n-1}(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}_{(p)}) \cong H^{2p+n-1}(K(\mathbb{Z}, n); H^0(K(\mathbb{Z}, n-1); \mathbb{Z}_{(p)})) \\ &\cong E_2^{2p+n-1,0} \cong E_{2p+n-1}^{2p+n-1,0} \cong E_{2p+n-1}^{0,2p+n-2} \cong E_2^{0,2p+n-2} \cong \mathbb{Z}_p. \end{aligned}$$

Falls  $n > 3$ ,  $n$  ungerade:



In diesem Fall argumentieren wir ähnlich wie im Fall  $n = 3$ . Wir haben eben im geraden



Fall gezeigt, dass die erste Spalte wie abgebildet ist. Wie im Fall  $n = 3$  sieht man, dass  $H^n(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}_{(p)}) \cong E_2^{n,0} \cong \mathbb{Z}_{(p)}$ . Die Morphismen  $d_n^{0,k(n-1)} : E_n^{0,k(n-1)} \rightarrow E_n^{n,(k-1)(n-1)}$  sind Isomorphismen, falls erstens  $k(n-1) < 2p+n-2$  und zweitens  $k < p$  gilt. Die zweite Bedingung folgt dabei aus der ersten, denn dann ist

$$k < \frac{2p}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} < \frac{2p}{4} + 1 \leq p.$$

Wir sehen somit, dass auf der  $E_{n+1}$ -Seite alle Einträge in der 0-ten Spalte unterhalb der  $(2p+n-2)$ -ten Zeile und alle Einträge in der  $n$ -ten Spalte unterhalb der  $(2p-1)$ -ten Zeile verschwinden. Die Spalten mit Dimension  $m = n+1, \dots, 2p+n-2$  verschwinden bereits auf der  $E_2$ -Seite, da es kein nichttriviales Differential gibt, welches ihren Eintrag in der 0-ten Zeile trifft. Folglich ist  $E_{2p+n-1}^{0,2p+n-1} \cong E_2^{0,2p+n-1}$  und das eingezeichnete Differential  $d_{2p+n-1}^{0,2p+n-1} : E_{2p+n-1}^{0,2p+n-1} \rightarrow E_{2p+n-1}^{2p+n-1,0}$  ein Isomorphismus. Somit ist

$$\begin{aligned} H^{2p+n-1}(K(\mathbb{Z}, n)) \otimes \mathbb{Z}_{(p)} &\cong H^{2p+n-1}(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}_{(p)}) \cong H^{2p+n-1}(K(\mathbb{Z}, n); H^0(K(\mathbb{Z}, n-1); \mathbb{Z}_{(p)})) \\ &\cong E_2^{2p+n-1,0} \cong E_{2p+n-1}^{2p+n-1,0} \cong \mathbb{Z}_p. \end{aligned} \quad \square$$

Mit dem universellen Koeffiziententheorem folgt:

**Korollar 46.** Es sei  $n \geq 3$  und  $p$  prim. Dann ist die  $p$ -Torsionsuntergruppe von  $H_i(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z})$  null für  $i < n+2p-2$  und isomorph zu  $\mathbb{Z}_p$  für  $i = n+2p-2$ .  $\square$

**Satz 47.** Sei  $n \geq 3$  und  $p$  eine Primzahl. Dann ist die  $p$ -Torsionskomponente von  $\pi_i(S^n)$  null falls  $i < n+2p-3$  und isomorph zu  $\mathbb{Z}_p$ , falls  $i = n+2p-3$ .

*Beweis.* Wir nehmen zunächst an, dass  $p \neq 2$ . Es bezeichne  $\mathcal{T}_p := \mathcal{T}_{\mathbb{P} \setminus \{p\}}$  die Serre-Klasse der endlichen abelschen Gruppen, deren Ordnung nicht durch  $p$  teilbar ist.

Es sei  $n$  ungerade. Wir betrachten den Abbildungszylinder  $M_i$  der Abbildung  $i : S^n \rightarrow \tau_{\leq n} S^n = K(\mathbb{Z}, n)$ . Die lange exakte Homologiesequenz des Paares  $(M_i, S^n)$  und Lemma 46 induzieren, dass

$$H_i(M_i, S^n) \cong \begin{cases} 0 & \text{für } i < n+2p-2, \\ \mathbb{Z}_p & \text{für } i = n+2p-2 \end{cases} \pmod{\mathcal{T}_p}.$$

Mit Satz 41 folgt

$$\pi_i(M_i, S^n) \cong \begin{cases} 0 & \text{für } i < n+2p-2, \\ \mathbb{Z}_p & \text{für } i = n+2p-2 \end{cases} \pmod{\mathcal{T}_p}.$$

Dies zeigt die Aussage für ungerade  $n$  aufgrund der langen exakten Homotopiesequenz

$$\dots \rightarrow \pi_{i+1}(M_i, S^n) \rightarrow \pi_i(S^n) \rightarrow \underbrace{\pi_i(M_i)}_{\cong \pi_j(K(\mathbb{Z}, n))} \rightarrow \pi_i(M_i, S^n) \rightarrow \pi_{i-1}(S^n) \rightarrow \dots$$

von  $(M_i, S^n)$ .

Es sei nun  $n$  gerade. Wir betrachten wieder die Faserung  $S^{n-1} \rightarrow V_{n+1,2} \rightarrow S^n$ . Die Abbildung  $q : V_{n+1,2} \rightarrow S^{2n-1}$  induziert Isomorphismen in Homologie modulo  $\mathcal{T}_p$  und somit auch in Homotopie modulo  $\mathcal{T}_p$ . Aus der langen exakten Homotopiesequenz

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \pi_{i+1}(S^n) \rightarrow \underbrace{\pi_i(S^{n-1})}_{\substack{p\text{-torsionsfrei} \\ \text{für } i < n+2p-4, \\ \text{endlich für } i \neq n-1}} \rightarrow \underbrace{\pi_i(V_{n+1,2})}_{\substack{\cong \pi_i(S^{2n-1}) \text{ mod } \mathcal{T}_p, \\ p\text{-torsionsfrei} \\ \text{für } i < 2n+2p-4, \\ \text{endlich für } i \neq 2n-1}} \rightarrow \pi_i(S^n) \rightarrow \pi_{i-1}(S^{n-1}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

folgt, dass  $\pi_i(S^n)$  für  $i < n+2p-3$  keine  $p$ -Torsion besitzt. Aus dieser Sequenz folgt außerdem, dass die  $p$ -Torsionsuntergruppe von  $\pi_i(S^n)$  für  $i = n+2p-3$  isomorph ist zu  $\mathbb{Z}_p$ , sofern  $n+2p-3 \neq 2n-1$  gilt.<sup>4</sup>

<sup>4</sup> Im Fall  $i = n+2p-3 = 2n-1$  könnte nämlich die exakte Sequenz  $\pi_i(V_{n+1,2}) \rightarrow \pi_i(S^n) \rightarrow \pi_{i-1}(S^{n-1})$  isomorph zu  $\mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_p$  sein, die  $p$ -Torsionskomponente von  $\pi_i(S^n)$  könnte also auch null sein.

Für  $i = n + 2p - 3 = 2n - 1$  (und allgemeiner  $i = n + 2p - 3 < 2n$ ) geben wir daher ein alternatives Argument an: Es sei  $M_i$  der Abbildungszylinder von  $i : S^n \rightarrow \tau_{\leq n} S^n = K(\mathbb{Z}, n)$ . Die lange exakte Homologiesequenz des Paares  $(M_i, S^n)$  impliziert, dass  $H_j(M_i, S^n) \cong H_j(K(\mathbb{Z}, n))$  für  $j \neq n$  und dass  $H_n(M_i, S^n) = 0$ . Insbesondere gilt  $H_j(M_i, S^n) \in \mathcal{T}_p$  für  $j \leq i$  und die  $p$ -Torsion von  $H_{i+1}(M_i, S^n) \cong H_{i+1}(K(\mathbb{Z}, n)) \bmod \mathcal{T}_p$  ist isomorph zu  $\mathbb{Z}_p$  nach Korollar 46 und Lemma 44. Somit gilt  $\pi_j(M_i, S^n) \in \mathcal{T}_p$  für  $j \leq i$  und die  $p$ -Torsion von  $\pi_{i+1}(M_i, S^n)$  ist ebenfalls isomorph zu  $\mathbb{Z}_p$ . Die Aussage folgt nun mit der langen exakten Homotopiesequenz von  $(M_i, S^n)$ .

Dieses Argument liefert außerdem die Behauptung für  $p = 2$  und  $n \geq 3$  beliebig.  $\square$

*Bemerkung.* Für  $n = 2$  stimmt die Aussage des Satzes nicht, denn es gilt  $\pi_i(S^2) \cong \pi_i(S^3)$  für  $i \geq 3$  (induziert durch die Hopffaserung) und  $\pi_i(S^3)$  besitzt für  $i < 3 + 2p - 2$  keine  $p$ -Torsion und die  $p$ -Torsion von  $\pi_{3+2p-2}(S^n)$  ist  $\mathbb{Z}_p$ .

## Literatur

- [DK01] James F. Davis und Paul Kirk. *Lecture Notes in Algebraic Topology*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2001.
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [Hat04] Allen Hatcher. “Spectral Sequences in Algebraic Topology”. 2004. URL: <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/SSAT/SSATpage.html>.
- [McC01] John McCleary. *A User’s Guide to Spectral Sequences*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2001.
- [Ser51] Jean-Pierre Serre. “Homologie singulière des espaces fibrés”. In: *Annals of Mathematics*. Second Series 54.3 (1951), S. 425–505.
- [Ser53] Jean-Pierre Serre. “Groupes d’homotopie et classes de groupes abéliens”. In: *Annals of Mathematics*. Second Series 58.2 (1953), S. 258–294.
- [Spa94] Edwin H. Spanier. *Algebraic Topology*. Springer, 1994.
- [Stacks] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. <http://stacks.math.columbia.edu>. 2015.
- [Tod63] Hirosi Toda. *Composition methods in homotopy groups of spheres*. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 1963.

$\pi_{n+k}(S^n)$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$	$n=11$	$\pi_k^s$
$k=0$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\mathbb{Z}$
$k=1$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\mathbb{Z}_2$
$k=2$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\mathbb{Z}_2$
$k=3$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3$
$k=4$	0	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	0
$k=5$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	0
$k=6$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3^2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\mathbb{Z}_2$
$k=7$	0	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_{16} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$	$\dots$	$\dots$	$\mathbb{Z}_{16} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$
$k=8$	0	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\dots$	$\mathbb{Z}_2^2$
$k=9$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\mathbb{Z}_2^5$	$\mathbb{Z}_2^4$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^3$

Tabelle 1: Die ersten Homotopiegruppen der Sphären. Der stabile Bereich besteht aus allen Gruppen oberhalb der Treppenlinie. Unendliche Gruppen sind grau hinterlegt. Quelle: [Tod63]