Matheschülerzirkel
Universität Augsburg
Schuljahr 2013/2013
Klasse 7./8. – Gruppe 3

Zirkelzettel vom 7. und 21. Februar 2014

Erinnerung: Die Menge der natürlichen Zahlen ist $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.

Aufgabe 1. *Geometrische Reihe*

Zeige: Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}$.

Aufgabe 2. *Gauss-Formel*

Zeige: Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Aufgabe 3. *Induktionsungleichung*

Zeige, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$ gilt: $n! \geq 2^n \geq n^2$

Aufgabe 4. *Pyramidalzahlen*

Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$

Aufgabe 5. *Fibonacci-Zahlen*

Die Fibonacci-Zahlen sind definiert durch

$$F_1 := 1, \quad F_2 := 1, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Zeige durch Induktion, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$F_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}, \quad \text{wobei } a := \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \; b := \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Aufgabe 6. *Pascals Dreieck*

In Pascals Dreieck ist jede Zahl die Summe der Zahlen darüber:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Die Summe der Zahlen in der n-ten Zeile ist 2^{n-1}.

Aufgabe 7. *Tetrominos auf dem Schachfeld*

Ein Tetromino ist ein Stein, der zwei Schachbrettfelder breit und zwei Schachbrettfelder hoch ist und genau drei Schachbrettfelder überdeckt, also gewissermaßen ein (2×2)-Quadrat, aus dem eine Ecke entfernt wurde. Zeige per Induktion, dass es für alle $n \in \mathbb{N}$ möglich ist, ein quadratisches Brett, das 2^n Felder breit und hoch ist, und aus dem eine Ecke entfernt wurde, mit Tetrominos zu belegen.

Aufgabe 8. *Fehlerhafte Induktion*

Wir behaupten, dass in einer Herde Pferde alle Tiere die gleiche Farbe haben. Unser „Beweis“ für diese kühne Behauptung ist folgender:

Wir führen Induktion über die Anzahl der Pferde in einer Herde durch.

Induktionsanfang ($n = 1$): Klar: In einer Herde, die aus nur einem Pferd besteht, haben alle Tiere die gleiche Farbe.

Induktionsschritt: Angenommen, wir haben eine Herde mit $n + 1$ Pferden. Wir greifen uns aus dieser Herde wahllos ein Tier P_0 heraus. Die verbleibenden Tiere bilden eine Herde bestehend aus n Pferden. Nach Induktionsannahme haben sie alle die gleiche Farbe. Nun führen wir das Pferd P_0 wieder mit dem Rest der Herde zusammen und greifen uns ein anderes Pferd P_1 mit $P_0 \neq P_1$ heraus. Die verbleibenden Tiere bilden eine Herde mit n Pferden, haben also wieder alle die gleiche Farbe. Damit wissen wir: Das Pferd P_1 hat die gleiche Farbe wie alle anderen Tiere außer P_2 und P_2 hat die gleiche Farbe wir alle anderen Tiere außer P_1. Somit hat auch P_1 die gleiche Farbe wie P_2 und somit hat die gesamte Herde die gleiche Farbe.

Frage: Wo liegt der Fehler?

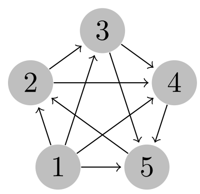
Aufgabe 9. *Turnier*

In einem Fechtturnier mit 2^n Teilnehmern kämpft jeder Fechter genau einmal gegen jeden anderen. Kein Kampf endet unentschieden. Eine Reporterin möchte nacheinander Einzelinterviews mit $n + 1$ Fechtern führen. Diese sollen so ausgewählt werden, dass jeder interviewte Fechter gegen alle Fechter, die vor ihm interviewt wurden, gesiegt hat.

Zeige zunächst, dass die Reporterin für $n = 1$ und $n = 2$ eine entsprechende Auswahl von Fechtern für die Interviews treffen kann. Zeige dann durch Induktion, dass dies auch für beliebige natürliche Zahlen n möglich ist.

Aufgabe 10. *Gesättigte gerichtete Graphen*

Auf der rechten Seiten siehst du einen gesättigten gerichteten Graphen mit 5 Knoten (graue Kreise). Die Pfeile zwischen den Knoten werden auch *Kanten* genannt. Wir sagen, dass wir einen Knoten B von einem anderen Knoten A direkt erreichen können, wenn eine Kanten von A nach B verläuft (also die Pfeilspitze zu B zeigt). Ein Knoten B kann von einem anderen Knoten A in zwei Schritten erreicht werden, wenn es einen Knoten C gibt, sodass C von A direkt erreichbar ist und B von C direkt erreichbar ist.



Im Beispiel ist der Knoten 3 vom Knoten 1 in zwei Schritten erreichbar, aber andersrum der Knoten 1 nicht vom Knoten 3 in zwei Schritten erreichbar. Außerdem ist der Knoten 2 von jedem anderen Knoten in höchstens zwei Schritten erreichbar.

Zeige, dass es in jedem gesättigten gerichteten Graphen mit n Knoten einen Knoten gibt, der von jedem anderen Knoten in höchstens zwei Schritten erreicht werden kann.