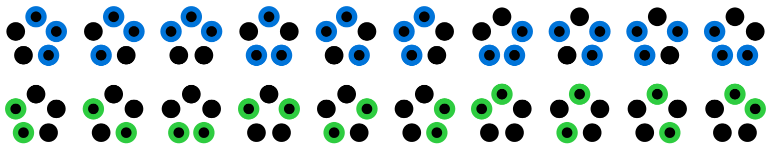
Matheschülerzirkel
Universität Augsburg
Klasse 8/9

Zirkelzettel vom 20. Januar 2017

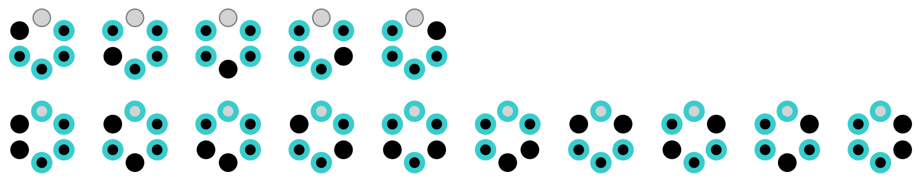
Aufgabe 1. *Symmetrie der Binomialkoeffizienten*

Es gilt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Kannst du dies anhand des folgenden Diagramms beweisen?



Aufgabe 2. *Eine Rekursionsformel mit Addition*

Für $n \geq 1$ und $k \geq 1$ gilt $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. Kannst du dies anhand des folgenden Diagramms (das den Fall $n = 6$ und $k = 4$ zeigt) beweisen?

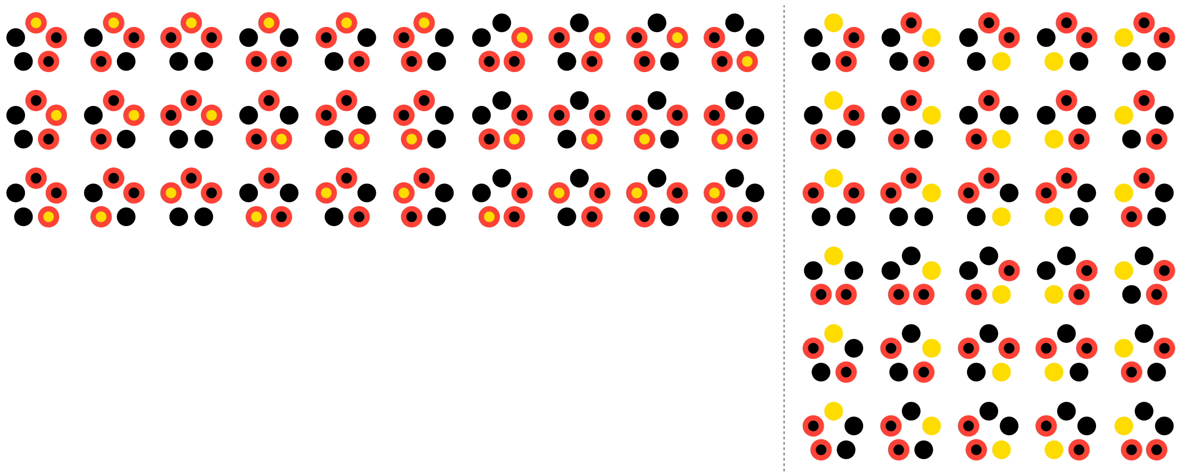


Aufgabe 3. *Das Pascalsche Dreieck*

TODO

Aufgabe 4. *Eine Rekursionsformel mit Multiplikation*

Für $n \geq 1$ und $k \geq 1$ gilt $k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$. Das folgende Diagram soll dies im Fall $n = 5$ und $k = 3$ zeigen: $3 \cdot \binom{5}{3} = 5 \cdot \binom{4}{2}$. Kannst du den Beweis erklären?

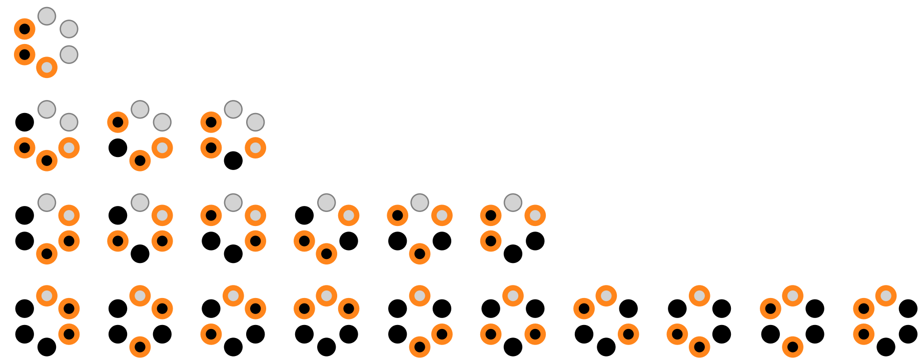


Aufgabe 5. *Summe verschobener Binomialkoeffizienten*

Für alle $n \geq 0$ und $m \geq 0$ gilt die Gleichung

$$\binom{n+m+1}{n+1} = \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \ldots + \binom{n+m}{n-1} + \binom{n+m}{n}.$$

Erkläre diese Gleichung mit der Skizze, die den Fall $n = 2$ und $m = 3$ zeigt!



Aufgabe 6. *Vandermondesche Identität*

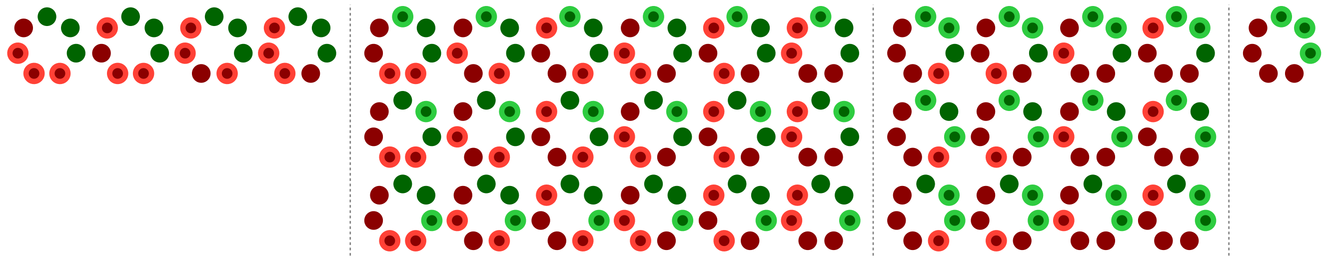
Die *Vandermondesche Identität* besagt, dass für alle m, n und k gilt:

$$\binom{m+n}{k} = \binom{m}{0} \cdot \binom{n}{k} + \binom{m}{1} \cdot \binom{n}{k-1} + \ldots + \binom{m}{k-1} \cdot \binom{n}{1} + \binom{m}{k} \cdot \binom{n}{0}$$

Für $m = 4$, $n = 3$ und $k = 2$ gilt also

$$\binom{4+3}{2} = \binom{4}{0} \cdot \binom{3}{2} + \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} + \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{1}.$$

Warum gilt diese Gleichung? Das kannst du anhand der Abbildung für den Fall $m = 3$, $n = 4$, $k = 3$ nachvollziehen:

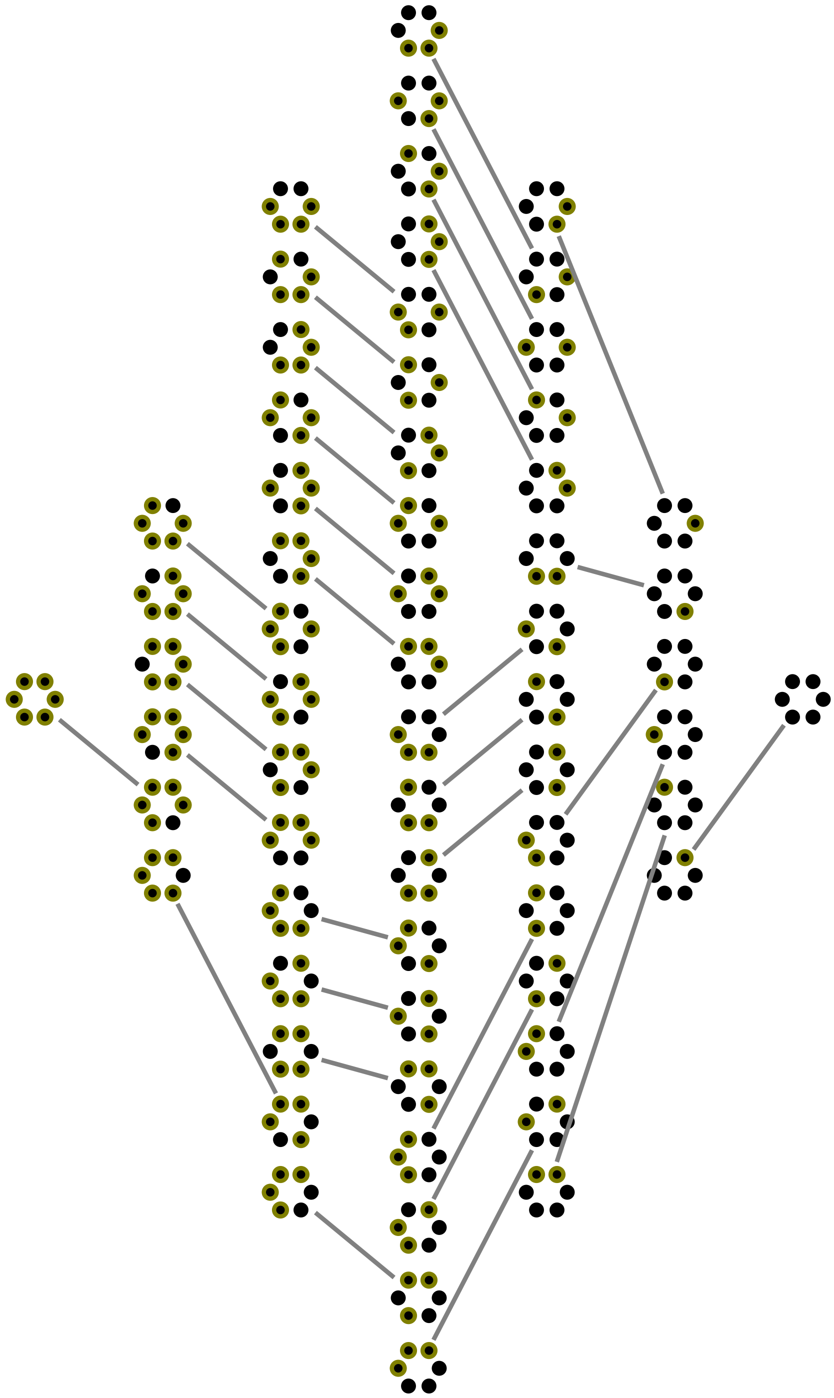


Aufgabe 7. *Alternierende Summe von Binomialkoeffizienten*

Für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots \pm \binom{n}{n-1} \mp \binom{n}{n} = 0$$

Dabei addiert man alle Zahlen $\binom{n}{k}$ mit k gerade und subtrahiert von dieser Summe alle Zahlen $\binom{n}{k}$ mit k ungerade. Erkläre folgenden Beweis ohne Worte für diese Gleichung!



Tipp: Wie viele Fünfer-Cliquen sind in jeder Zeile? Wann sind zwei Cliquen verbunden? Es kann hilfreich sein, die fünf Kreise jeder Clique durchzunummerieren von eins bis fünf, angefangen beim obersten Kreis.

Aufgabe 8. *Wege im Gitter*

TODO