Isomorphismen von Lie-Algebren

Seien $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ reelle Lie-Algebren. Ein Lie-Algebra-Isomorphismus zwischen $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ ist eine Vektorraum-Isomorphismus (d.h. eine bijektive lineare Abbildung) $\phi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ mit $\phi([a,b]) = [\phi(a), \phi(b)]$ für alle $a, b \in \mathfrak{g}$. Wenn $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ isomorph sind, so gilt

1. Die Dimensionen stimmen überein: $\dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{h})$

2. Die Dimensionen der Zentren stimmen überein: $\dim_{\mathbb{R}}(Z(\mathfrak{g})) = \dim_{\mathbb{R}}(Z(\mathfrak{h}))$. Dabei ist $Z(\mathfrak{g}) := \{a \in \mathfrak{g} \,|\, \forall b \in \mathfrak{g}: [a,b] = 0\}$ das sogenannte Zentrum von $\mathfrak{g}$.

3. Falls $\mathfrak{g}$ eine Unteralgebra der Dimension r besitzt (d.h. einen Unterraum $\mathfrak{p} < \mathfrak{g}$ mit $[a,b] \in \mathfrak{p}$ für alle $a, b \in \mathfrak{p}$), so auch $\mathfrak{h}$ und andersrum.

Falls eine dieser Bedingungen nicht erfüllt ist, so sind $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ also nicht isomorph.

Die Dimension des Zentrums von $\mathfrak{g}$ lässt sich wie folgt berechnen:

Wähle eine Basis $e_1, ..., e_n$ von $\mathfrak{g}$. Berechne die Strukturkonstanten a_{ij}^k. Sei

$$A_i := \begin{pmatrix} a_{i1}^1 & a_{i2}^1 & \cdots & a_{in}^1 \\ a_{i1}^2 & a_{i2}^2 & \cdots & a_{in}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}^n & a_{i2}^n & \cdots & a_{in}^n \end{pmatrix}.$$

Sei $A \in \mathbb{R}^{(n \cdot n) \times n}$ die Matrix, die durch Untereinanderschreiben von $A_1, ..., A_n$ entsteht. Dann gilt

$$\begin{aligned} Z(\mathfrak{g}) &= \{a \in \mathfrak{g} \,|\, \forall b \in \mathfrak{g}: [a,b] = 0\} \\ &= \{a \in \mathfrak{g} \,|\, [a, e_1] = 0, ..., [a, e_n] = 0\} \\ &= \left\{ \sum \lambda_i e_i \,\middle|\, v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \ker(A_i) \cap .... \cap \ker(A_n) \right\} \\ &= \left\{ \sum \lambda_i e_i \,\middle|\, v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \ker(A) \right\}. \end{aligned}$$

Also $\dim_{\mathbb{R}}(Z(\mathfrak{g})) = \dim_{\mathbb{R}}(\ker(A)) = n - \mathrm{rk}(A)$.