Theoreme für lau!

Tim Baumann

Curry Club Augsburg

16. Mai 2017

System F a.k.a. Girard–Reynolds polymorphic λ-calculus

Ein Typkontext ist eine endliche Menge $\Delta = \{X_1, \ldots, X_n\}$ von Typvariablen. Die Typen sind durch die induktive Definition

$$\tau := X \mid \mathsf{Bool} \mid \tau_1 \to \tau_2 \mid \forall X.\, \tau'$$

gegeben. Die Typen im Typkontext Δ sind die Typen, deren freie Variablen in Δ liegen. Formal:

$$\boxed{\Delta \vdash \tau \text{ type}} \qquad \frac{}{\Delta \vdash \mathsf{Bool} \text{ type}} \qquad \frac{X \in \Delta}{\Delta \vdash X \text{ type}}$$

$$\frac{\Delta \vdash \tau_1 \text{ type} \quad \Delta \vdash \tau_2 \text{ type}}{\Delta \vdash \tau_1 \to \tau_2 \text{ type}} \qquad \frac{\Delta \cup \{X\} \vdash \tau \text{ type}}{\Delta \vdash \forall X.\, \tau \text{ type}}$$

Church-Kodierung in System F

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Product}(A,B) &:= \forall Y.\,(A \to B \to Y) \to Y \\
\mathsf{Sum}(A,B) &:= \forall Y.\,(A \to Y) \to (B \to Y) \to Y \\
\mathsf{Nat} &:= \forall Y.\,Y \to (Y \to Y) \to Y \\
\mathsf{List}(A) &:= \forall Y.\,Y \to (A \to Y \to Y) \to Y
\end{aligned}
$$

Terme in System F

Ein Wertekontext ist eine endliche Menge $\Gamma = \{x_1 : \tau_1, \ldots, x_m : \tau_m\}$, wobei $x_1, \ldots, x_m$ paarweise verschiedene Typvariablen sind und $\tau_1, \ldots, \tau_m$ Typen sind. Er bildet zusammen mit Δ einen Kontext $\Delta; \Gamma$ falls die freien Variablen der Typen $\tau_1, \ldots, \tau_m$ in Δ liegen. Formal:

$$\boxed{(\Delta; \Gamma)\ \mathsf{ctx}} \qquad \frac{}{(\Delta; \bullet)\ \mathsf{ctx}} \qquad \frac{(\Delta; \Gamma)\ \mathsf{ctx} \qquad \Delta \vdash \tau\ \mathsf{type}}{(\Delta; \Gamma \cup \{x : \tau\})\ \mathsf{ctx}}$$

Terme in System F

Die Terme t in System F sind induktiv definiert durch

$$t := \mathrm{true} \mid \mathrm{false} \mid \textbf{if}\ t_1\ \textbf{then}\ t_2\ \textbf{else}\ t_3 \mid \lambda x{:}\tau.\, t \mid t_1\, t_2 \mid \Lambda A.\, t \mid t\, \tau$$

Ein Term t hat Typ τ in einem Kontext $\Delta;\Gamma$ (notiert $\Delta;\Gamma \vdash t : \tau$), falls

$$\boxed{\Delta;\Gamma \vdash t : \tau \textit{ vorausgesetzt } (\Delta;\Gamma)\ \mathrm{ctx}}$$

$$\frac{(x : \tau) \in \Gamma}{\Delta;\Gamma \vdash x : \tau}$$

$$\frac{v \in \{\mathrm{true}, \mathrm{false}\}}{\Delta;\Gamma \vdash v : \mathrm{Bool}} \qquad \frac{\Delta;\Gamma \vdash b : \mathrm{Bool} \quad \Delta;\Gamma \vdash t : \tau \quad \Delta;\Gamma \vdash e : \tau}{\Delta;\Gamma \vdash \textbf{if}\ b\ \textbf{then}\ t\ \textbf{else}\ e : \tau}$$

$$\frac{\Delta;\Gamma \cup \{x : \tau_1\} \vdash t : \tau_2}{\Delta;\Gamma \vdash \lambda x{:}\tau_1.\, t : \tau_1 \to \tau_2} \qquad \frac{\Delta;\Gamma \vdash t_1 : \tau_1 \to \tau_2 \quad \Delta;\Gamma \vdash t_2 : \tau_1}{\Delta;\Gamma \vdash t_1\, t_2 : \tau_2}$$

$$\frac{\Delta \cup \{A\};\Gamma \vdash t : \tau}{\Delta;\Gamma \vdash \Lambda A.\, t : \forall A.\, \tau} \qquad \frac{\Delta;\Gamma \vdash t : \forall A.\, \tau' \quad \Delta \vdash \tau\ \mathrm{type}}{\Delta;\Gamma \vdash t\, \tau : \tau'[\tau/A]}$$

Beispielterme

$$
\begin{aligned}
\mathsf{null} \quad &: \quad \forall A.\ \mathsf{List}(A) \to \mathsf{Bool} \\
\mathsf{null} \quad &:= \quad \Lambda A.\, \lambda xs{:}\, \mathsf{List}(A). \\
&\qquad\quad xs\, \mathsf{Bool}\, \mathsf{true}\, (\lambda a{:}A.\, \lambda b{:}\mathsf{Bool}.\, \mathsf{false})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{pair} \quad &: \quad \forall A.\, \forall B.\, A \to B \to \mathsf{Product}(A, B) \\
\mathsf{pair} \quad &:= \quad \Lambda A.\, \Lambda B.\, \lambda a{:}A.\, \lambda b{:}B. \\
&\qquad\quad \Lambda Y.\, \lambda f{:}A \to B \to Y. \\
&\qquad\qquad f\ a\ b
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{append} \quad &: \quad \forall A.\ \mathsf{List}(A) \to \mathsf{List}(A) \to \mathsf{List}(A) \\
\mathsf{append} \quad &:= \quad \Lambda A.\, \lambda xs{:}\, \mathsf{List}(A).\, \lambda ys{:}\, \mathsf{List}(A). \\
&\qquad\quad \Lambda Y.\, \lambda y{:}Y.\, \lambda f{:}A \to Y \to Y. \\
&\qquad\qquad ys\ Y\ (xs\ Y\ y\ f)\ f
\end{aligned}
$$

Interpretation von Typen

Eine Typumgebung für einen Typkontext Δ ist eine Abbildung

$$\vec{A} : \Delta \to \mathsf{Types}_{\bullet}$$

(wobei $\mathsf{Types}_{\widetilde{\Delta}} := \{\tau \mid \widetilde{\Delta} \vdash \tau\}$)
Jede Typumg. $\vec{A}$ induziert für jeden disjunkten Typkontext Δ' eine Abb.

$$[\![-]\!]_{\vec{A}} : \mathsf{Types}_{\Delta \sqcup \Delta'} \to \mathsf{Types}_{\Delta'}$$

rekursiv definiert durch

$$\begin{array}{rcll} [\![\mathsf{Bool}]\!]_{\vec{A}} & := & \mathsf{Bool} & \\ [\![X]\!]_{\vec{A}} & := & \vec{A}(X) \text{ falls } X \in \Delta & \\ [\![X]\!]_{\vec{A}} & := & X \text{ falls } X \in \Delta' & \\ [\![\tau_1 \to \tau_2]\!]_{\vec{A}} & := & [\![\tau_1]\!]_{\vec{A}} \to [\![\tau_2]\!]_{\vec{A}} & \\ [\![\forall X.\, \tau]\!]_{\vec{A}} & := & \forall X.\, [\![\tau]\!]_{\vec{A}} & (\text{Œ } X \notin \Delta \cup \Delta') \end{array}$$

Interpretation von Termen

Eine Termumgebung $\vec{a}$ für einen Kontext $\Delta;\Gamma$ bzgl. einer Typumgebung $\vec{A}$ für Δ ist eine Familie

$$(\vec{a}(x) : [\![\tau]\!]_{\vec{A}})_{(x:\tau)\in\Gamma}.$$

von Termen. Jede solche Termumgebung induziert für jeden von $\Delta;\Gamma$ disjunkten Kontext $\Delta';\Gamma'$ eine Abbildung

$$[\![-]\!]_{\vec{A},\vec{a}} : \mathsf{Terms}_{\Delta\sqcup\Delta',\Gamma\sqcup\Gamma'} \to \mathsf{Terms}_{\Delta',\Gamma'}$$

rekursiv definiert durch

$$\begin{array}{rcll}
[\![v]\!]_{\vec{A},\vec{a}} & := & v & (v \in \{\mathsf{true}, \mathsf{false}\}) \\
[\![\mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ t\ \mathbf{else}\ e]\!]_{\vec{A},\vec{a}} & := & \mathbf{if}\ [\![b]\!]_{\vec{A},\vec{a}}\ \mathbf{then}\ [\![t]\!]_{\vec{A},\vec{a}} & \mathbf{else}\ [\![e]\!]_{\vec{A},\vec{a}} \\
[\![\lambda x{:}\tau.\, t]\!]_{\vec{A},\vec{a}} & := & \lambda x{:}[\![\tau]\!]_{\vec{A}}.\, [\![t]\!]_{\vec{A},\vec{a}} & (\text{Œ}\ x \notin \Gamma \cup \Gamma') \\
[\![t_1\ t_2]\!]_{\vec{A},\vec{a}} & := & [\![t_1]\!]_{\vec{A},\vec{a}}\, [\![t_2]\!]_{\vec{A},\vec{a}} & \\
[\![\Lambda X.\, t]\!]_{\vec{A},\vec{a}} & := & \Lambda X.\, [\![t]\!]_{\vec{A},\vec{a}} & (\text{Œ}\ X \notin \Delta \cup \Delta') \\
[\![t\ \tau]\!]_{\vec{A},\vec{a}} & := & [\![t]\!]_{\vec{A},\vec{a}}\, [\![\tau]\!]_{\vec{A}} &
\end{array}$$

Relationen zwischen Typen

Eine Relation $\mathcal{A} : A \Leftrightarrow A'$ zwischen zwei Typen $A, A' \in \mathrm{Types}_\bullet$ ist eine Relation zwischen den Termen dieser beiden Typen, für die gilt:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}(t_1[s_1/x_1], t_2[s_2/x_2]) & \Longrightarrow & \mathcal{A}((\lambda x_1 : \tau_1.\, t_1)\, s_1, (\lambda x_2 : \tau_2.\, t_2)\, s_2) \\ \mathcal{A}(t_1[\tau_1/X_1], t_2[\tau_2/X_2]) & \Longrightarrow & \mathcal{A}((\Lambda X_1.\, t_1)\, \tau_1, (\Lambda X_2.\, t_2)\, \tau_2) \end{array}$$

für alle passenden X_i, τ_i, t_i, s_i sodass

$$\bullet \vdash (\lambda x_i : \tau_i.\, t_i)\, s_i : A \quad \text{bzw.} \quad \bullet \vdash (\Lambda X_i.\, t_i)\, \tau_i : A \qquad (i = 1, 2).$$

Eine Relation $\vec{\mathcal{A}} : \vec{A} \Leftrightarrow \vec{A'}$ zwischen Typumgebungen $\vec{A}$ und $\vec{A'}$ für Δ ist eine Familie

$$(\mathcal{A}_X : \vec{A}(X) \Leftrightarrow \vec{A'}(X))_{X \in \Delta}$$

von Relationen zwischen den Typen $\vec{A}(X)$ und $\vec{A'}(X)$

Relationen zwischen Typen

Solch eine Relation $\vec{\mathcal{A}} : \vec{A} \Leftrightarrow \vec{A'}$ induziert für jeden Typ τ im Typkontext Δ eine Relation $[\![\tau]\!]_{\vec{\mathcal{A}}} : [\![\tau]\!]_{\vec{A}} \Leftrightarrow [\![\tau]\!]_{\vec{A'}}$ wie folgt:

$$
\begin{array}{rcl}
[\![\mathsf{Bool}]\!]_{\mathcal{A}} & := & \mathsf{Bool} \\
[\![X]\!]_{\mathcal{A}} & := & \mathcal{A}_X \\
[\![\tau_1 \to \tau_2]\!]_{\mathcal{A}} & := & [\![\tau_1]\!]_{\mathcal{A}} \to [\![\tau_2]\!]_{\mathcal{A}} \\
[\![\forall X.\, \tau]\!]_{\mathcal{A}} & := & \sim \text{ mit } g \sim g' \text{ genau dann wenn} \\
 & & \text{für alle } A, A' \in \mathsf{Types}_\bullet \\
 & & \text{und Relationen } \mathcal{A} : A \Leftrightarrow A' \\
 & & \text{gilt } [\![\tau]\!]_{(\vec{\mathcal{A}} \cup \{X \mapsto \mathcal{A}\})}(g\, A, g'\, A')
\end{array}
$$

mit $(\mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2)(f, f') :\Leftrightarrow$ für alle a, a' mit $\mathcal{R}_1(a, a')$ gilt $\mathcal{R}_2(f\, a, f'\, a')$.

Parametrizität

Seien $\vec{A}$ und $\vec{A'}$ Typumgebungen für Δ, $\vec{\mathcal{A}} : \vec{A} \Leftrightarrow \vec{A'}$ eine Relation. Zwei Termumg. $\vec{a}$ und $\vec{a'}$ für $\Delta; \Gamma$ bzgl. $\vec{A}$ bzw. $\vec{A'}$ sind relatiert bzgl. $\vec{\mathcal{A}}$, falls

$$[\![\tau]\!]_{\vec{\mathcal{A}}}(\vec{a}(x), \vec{a'}(x)) \quad \text{für alle } (x : \tau) \in \Gamma.$$

$$\begin{array}{rll} \Delta; \Gamma \models t : \tau :\Leftrightarrow & \text{für} & \text{alle Typumgebungen } \vec{A}, \vec{A'} \text{ von } \Delta \text{ und} \\ & & \text{alle Relationen } \vec{\mathcal{A}} : \vec{A} \Leftrightarrow \vec{A'} \text{ und} \\ & & \text{alle relatierten Termumg. } \vec{a} \text{ bzgl. } \vec{A} \text{ und } \vec{a'} \text{ bzgl. } \vec{A'} \\ & \text{gilt} & [\![\tau]\!]_{\vec{\mathcal{A}}}([\![t]\!]_{\vec{A},\vec{a}}, [\![t]\!]_{\vec{A'},\vec{a'}}) \end{array}$$

Satz (Parametrizität)

Aus $\Delta; \Gamma \vdash t : \tau$ *folgt* $\Delta; \Gamma \models t : \tau$

Kurz: Interpretationen in relatierten Umgebungen sind relatiert.

TODO:

- Beispiele für freie Theoreme
- Ist ein primitiver Typ (wie Bool) überhaupt nötig?