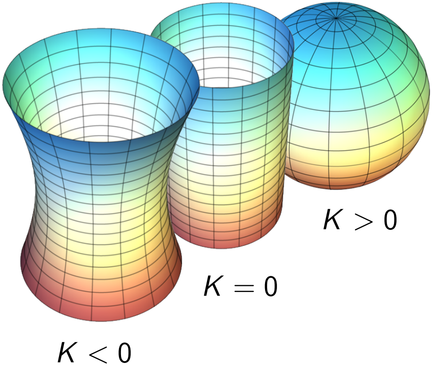
Alexandrov-Krümmung, Hadamard-Räume und der Satz von Cartan-Hadamard

Tim Baumann

Seminar Metrische Geometrie

27. Mai 2014

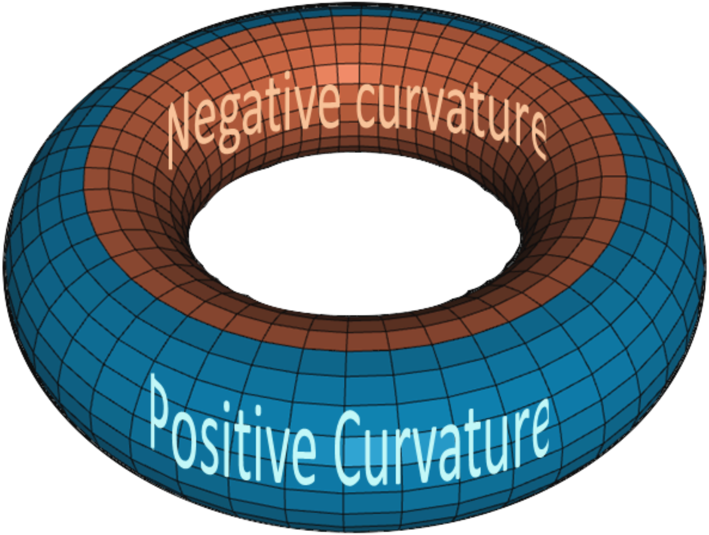
Krümmung in der Differentialgeometrie

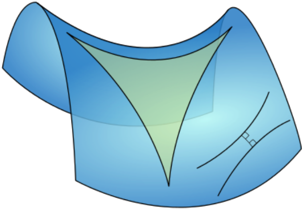


Für die Gaußkrümmung K im Punkt u gilt $K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \det(W_u)$, wobei κ_1 und κ_2 die Hauptkrümmungen und

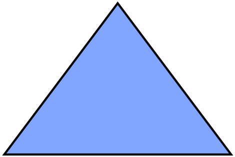
$$W_u := D_u\nu \circ (D_uX)^{-}1 : T_uX \to T_uX$$

die Weingartenabbildung in u bezeichnet.

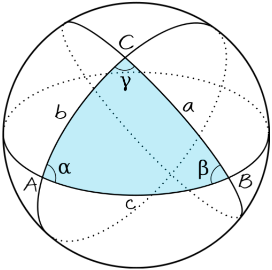

Negative curvature
Positive Curvature



$K < 0$



$K = 0$



$K > 0$

Proposition (BBI, 9.1.17)

Sei (X, d) ein Längenraum, $U \subseteq X$ ein CAT(0)-Gebiet. Dann gilt:

1. Seien σ_{ab} und σ_{bc} zwei kürzeste Wege in U, die in b enden bzw. starten. Falls $\measuredangle abc = \pi$, dann ist auch $\sigma_{ab} * \sigma_{bc}$ ein kürzester Weg.
2. Jede Geodäte in U ist ein kürzester Weg.

Definition

Sei (X, d) ein Längenraum. Eine Geodäte $\gamma : [a, b] \to X$ heißt linear parametrisiert, wenn für alle $a \leq s < t \leq b$ gilt:

$$\frac{L(\gamma|_{[s,t]})}{\gamma} = \frac{t-s}{b-a}$$

Lemma (BBI, 9.2.3)

Sei (X, d) ein Längenraum, $U \subseteq X$ ein CAT(0)-Gebiet und $\alpha, \beta : I \to U$ zwei durch dasselbe Intervall I und linear parametrisierte Geodäten in U. Dann ist die Distanzfunktion

$$\delta : I \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad t \mapsto d(\alpha(t), \beta(t))$$

konvex.

Korollar (Eindeutigkeit)

Sei oben $I = [t_1, t_2]$ und $\alpha(t_1) = \beta(t_1)$, $\alpha(t_2) = \beta(t_2)$. Dann gilt $\alpha \equiv \beta$ auf ganz I.

Definition

Sei (X, d) ein Längenraum. Eine Geodäte $\gamma : [a, b] \to X$ heißt linear parametrisiert, wenn für alle $a \leq s < t \leq b$ gilt:

$$\frac{L(\gamma|_{[s,t]})}{\gamma} = \frac{t - s}{b - a}$$

Lemma (BBI, 9.2.3)

Sei (X, d) ein Längenraum, $U \subseteq X$ ein CAT(0)-Gebiet und $\alpha, \beta : I \to U$ zwei durch dasselbe Intervall I und linear parametrisierte Geodäten in U. Dann ist die Distanzfunktion

$$\delta : I \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad t \mapsto d(\alpha(t), \beta(t))$$

konvex.

Korollar (Eindeutigkeit)

Sei oben $I = [t_1, t_2]$ und $\alpha(t_1) = \beta(t_1)$, $\alpha(t_2) = \beta(t_2)$. Dann gilt $\alpha \equiv \beta$ auf ganz I.

Definition

Sei (X, d) ein Längenraum. Eine Geodäte $\gamma : [a, b] \to X$ heißt linear parametrisiert, wenn für alle $a \leq s < t \leq b$ gilt:

$$\frac{L(\gamma|_{[s,t]})}{\gamma} = \frac{t - s}{b - a}$$

Lemma (BBI, 9.2.3)

Sei (X, d) ein Längenraum, $U \subseteq X$ ein CAT(0)-Gebiet und $\alpha, \beta : I \to U$ zwei durch dasselbe Intervall I und linear parametrisierte Geodäten in U. Dann ist die Distanzfunktion

$$\delta : I \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad t \mapsto d(\alpha(t), \beta(t))$$

konvex.

Korollar (Eindeutigkeit)

Sei oben $I = [t_1, t_2]$ und $\alpha(t_1) = \beta(t_1)$, $\alpha(t_2) = \beta(t_2)$. Dann gilt $\alpha \equiv \beta$ auf ganz I.

Definition

Sei X ein topologischer Raum, $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to X$ stetige Wege mit $p = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $q = \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Eine Homotopie der Wege γ_1 und γ_2 relativ der Endpunkte ist eine stetige Abbildung

$$H : [0,1] \times [0,1] \to X$$

mit

- $H(-,0) = \gamma_1$,
- $H(-,1) = \gamma_2$,
- $H(0,t) = p$ für alle $t \in [0,1]$,
- $H(1,t) = q$ für alle $t \in [0,1]$.

Definition

Ein topologischer Raum X heißt einfach zusammenhängend, falls

- er wegzusammenhängend ist und
- jeder geschlossene Weg $\gamma : [0,1] \to X$ (d. h. $\gamma(0) = \gamma(1)$) homotop relativ der Endpunkte zum konstanten Weg $t \mapsto \gamma(0)$ ist.

Definition

Sei X ein topologischer Raum, $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to X$ stetige Wege mit $p = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $q = \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Eine Homotopie der Wege γ_1 und γ_2 relativ der Endpunkte ist eine stetige Abbildung

$$H : [0,1] \times [0,1] \to X$$

mit

- $H(-,0) = \gamma_1$,
- $H(-,1) = \gamma_2$,
- $H(0,t) = p$ für alle $t \in [0,1]$,
- $H(1,t) = q$ für alle $t \in [0,1]$.

Definition

Ein topologischer Raum X heißt einfach zusammenhängend, falls

- er wegzusammenhängend ist und
- jeder geschlossene Weg $\gamma : [0,1] \to X$ (d. h. $\gamma(0) = \gamma(1)$) homotop relativ der Endpunkte zum konstanten Weg $t \mapsto \gamma(0)$ ist.

Definition

Ein vollständiger, einfach zusammenhängender Längenraum mit Alexandrov-Krümmung ≤ 0 heißt Hadamard-Raum.

Satz (Cartan-Hadamard)

1. Für alle Paare p, q von Punkte in einem Hadamard-Raum gibt es genau eine verbindende Geodäte σ_{pq}.
2. All diese Geodäten sind kürzeste Wege.

Lemma (Konvergenz von linear param. Geodäten)

Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum und $(\gamma_n : [0,1] \to X)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bestehend linear parametrisierten Geodäten bzgl. der Maximumsmetrik

$$d(\alpha, \beta) := \max_{t\in[0,1]} d(\alpha(t), \beta(t)).$$

Dann ist die Grenzfunktion

$$\gamma : [0,1] \to X, \quad t \mapsto \lim_{n\to\infty} \gamma_n(t)$$

eine linear parametrisierte Geodäte.

Lemma (BH, II.4.3)

Sei (X, d) ein vollständiger CAT(0)-Raum und $c : [0, 1] \to X$ eine Geodäte von $x := c(0)$ nach $y := c(1)$. Sei $\epsilon > 0$ so klein, dass $\overline{B_{2\epsilon}(c(t))}$ für alle $t \in [0, 1]$ eine CAT(0)-Umgebung ist. Dann gilt:

1. Seien $\alpha, \beta : [0, 1] \to X$ linear parametrisierte Geodäten mit
$$d(\alpha(t), c(t)) < \epsilon \quad \text{und} \quad d(\beta(t), c(t)) < \epsilon \quad \forall t \in [0, 1].$$
Dann ist die Abstandsfunktion $\delta(t) := d(\alpha(t), \beta(t))$ konvex.
2. Für alle $\overline{x} \in B_\epsilon(x)$ und $\overline{y} \in B_\epsilon(y)$ gibt es genau eine Geodäte $\overline{c} : [0, 1] \to X$ von $\overline{x}$ nach $\overline{y}$, sodass
$$t \mapsto d(c(t), \overline{c}(t))$$
konvex ist.
3. Außerdem gilt: $L(\overline{c}) \leq d(x, \overline{x}) + L(c) + d(\overline{y}, y)$

Bemerkung

Solch ein $\epsilon > 0$ existiert aufgrund der Kompaktheit von $c([0, 1])$.

Lemma (BH, II.4.3)

Sei (X, d) ein vollständiger CAT(0)-Raum und $c : [0,1] \to X$ eine Geodäte von $x := c(0)$ nach $y := c(1)$. Sei $\epsilon > 0$ so klein, dass $\overline{B_{2\epsilon}(c(t))}$ für alle $t \in [0,1]$ eine CAT(0)-Umgebung ist. Dann gilt:

1. Seien $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ linear parametrisierte Geodäten mit
$$d(\alpha(t), c(t)) < \epsilon \quad \text{und} \quad d(\beta(t), c(t)) < \epsilon \quad \forall t \in [0,1].$$
Dann ist die Abstandsfunktion $\delta(t) := d(\alpha(t), \beta(t))$ konvex.
2. Für alle $\overline{x} \in B_\epsilon(x)$ und $\overline{y} \in B_\epsilon(y)$ gibt es genau eine Geodäte $\overline{c} : [0,1] \to X$ von $\overline{x}$ nach $\overline{y}$, sodass
$$t \mapsto d(c(t), \overline{c}(t))$$
konvex ist.
3. Außerdem gilt: $L(\overline{c}) \leq d(x, \overline{x}) + L(c) + d(\overline{y}, y)$

Bemerkung

Solch ein $\epsilon > 0$ existiert aufgrund der Kompaktheit von $c([0,1])$.

Lemma (BH, II.4.3)

Sei (X, d) ein vollständiger CAT(0)-Raum und $c : [0,1] \to X$ eine Geodäte von $x := c(0)$ nach $y := c(1)$. Sei $\epsilon > 0$ so klein, dass $\overline{B_{2\epsilon}(c(t))}$ für alle $t \in [0,1]$ eine CAT(0)-Umgebung ist. Dann gilt:

1. Seien $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ linear parametrisierte Geodäten mit
$$d(\alpha(t), c(t)) < \epsilon \quad \text{und} \quad d(\beta(t), c(t)) < \epsilon \quad \forall t \in [0,1].$$
Dann ist die Abstandsfunktion $\delta(t) := d(\alpha(t), \beta(t))$ konvex.
2. Für alle $\overline{x} \in B_\epsilon(x)$ und $\overline{y} \in B_\epsilon(y)$ gibt es genau eine Geodäte $\overline{c} : [0,1] \to X$ von $\overline{x}$ nach $\overline{y}$, sodass
$$t \mapsto d(c(t), \overline{c}(t))$$
konvex ist.
3. Außerdem gilt: $L(\overline{c}) \leq d(x, \overline{x}) + L(c) + d(\overline{y}, y)$

Bemerkung

Solch ein $\epsilon > 0$ existiert aufgrund der Kompaktheit von $c([0,1])$.

Lemma (BH, II.4.3)

Sei (X, d) ein vollständiger CAT(0)-Raum und $c : [0,1] \to X$ eine Geodäte von $x := c(0)$ nach $y := c(1)$. Sei $\epsilon > 0$ so klein, dass $\overline{B_{2\epsilon}(c(t))}$ für alle $t \in [0,1]$ eine CAT(0)-Umgebung ist. Dann gilt:

1. Seien $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ linear parametrisierte Geodäten mit
$$d(\alpha(t), c(t)) < \epsilon \quad \text{und} \quad d(\beta(t), c(t)) < \epsilon \quad \forall t \in [0,1].$$
Dann ist die Abstandsfunktion $\delta(t) := d(\alpha(t), \beta(t))$ konvex.
2. Für alle $\overline{x} \in B_\epsilon(x)$ und $\overline{y} \in B_\epsilon(y)$ gibt es genau eine Geodäte $\overline{c} : [0,1] \to X$ von $\overline{x}$ nach $\overline{y}$, sodass
$$t \mapsto d(c(t), \overline{c}(t))$$
konvex ist.
3. Außerdem gilt: $L(\overline{c}) \leq d(x, \overline{x}) + L(c) + d(\overline{y}, y)$

Bemerkung

Solch ein $\epsilon > 0$ existiert aufgrund der Kompaktheit von $c([0,1])$.

Definition

Sei X ein metrischer Raum und $p \in X$. Dann wird

$$\tilde{X}_p := \{\text{Geodäten } \gamma : [0,1] \to X \text{ mit } \gamma(0) = p \\ \text{und } \gamma \text{ linear parametrisiert}\}$$

Raum der Geodäten mit Startpunkt p genannt. Mit der Metrik

$$d(\alpha, \beta) := \max_{t \in [0,1]} |\alpha(t) - \beta(t)|$$

wird $(\tilde{X}_p, d)$ zu einem metrischen Raum.
Der Punkt $\tilde{p} \in \tilde{X}_p$ sei die konstante Geodäte $t \mapsto p$.

Definition

Die Exponentialabbildung ist die Abbildung

$$\exp_p : \tilde{X}_p \to X, \quad \gamma \mapsto \gamma(1),$$

welche jede Geodäte auf ihren Endpunkt abbildet.

Definition

Sei X ein metrischer Raum und $p \in X$. Dann wird

$$\tilde{X}_p := \{\text{Geodäten } \gamma : [0,1] \to X \text{ mit } \gamma(0) = p \\ \text{und } \gamma \text{ linear parametrisiert}\}$$

Raum der Geodäten mit Startpunkt p genannt. Mit der Metrik

$$d(\alpha, \beta) := \max_{t \in [0,1]} |\alpha(t) - \beta(t)|$$

wird $(\tilde{X}_p, d)$ zu einem metrischen Raum.
Der Punkt $\tilde{p} \in \tilde{X}_p$ sei die konstante Geodäte $t \mapsto p$.

Definition

Die Exponentialabbildung ist die Abbildung

$$\exp_p : \tilde{X}_p \to X, \quad \gamma \mapsto \gamma(1),$$

welche jede Geodäte auf ihren Endpunkt abbildet.

Lemma (BH, II.4.6)

Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum und $p \in X$. Dann ist auch $\tilde{X}_p$ vollständig.

Lemma (BH, II.4.5)

Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum und $p \in X$. Dann gilt:

1. $\tilde{X}_p$ ist zusammenziehbar.
2. $\exp_p : \tilde{X}_p \to X$ ist eine lokale Isometrie, d. h. für alle $\tilde{x} \in \tilde{X}_p$ existiert ein $r > 0$, sodass $\exp_p(B_r(\tilde{x})) \subseteq B_r(\exp_p(\tilde{x}))$ und
$$\exp_p|_{B_r(\tilde{x})} : B_r(\tilde{x}) \to B_r(\exp_p(\tilde{x}))$$
eine Isometrie ist.

Korollar

$\tilde{X}_p$ ist einfach zusammenhängend.

Lemma (BH, II.4.6)

Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum und $p \in X$. Dann ist auch $\tilde{X}_p$ vollständig.

Lemma (BH, II.4.5)

Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum und $p \in X$. Dann gilt:

1. $\tilde{X}_p$ ist zusammenziehbar.
2. $\exp_p : \tilde{X}_p \to X$ ist eine lokale Isometrie, d. h. für alle $\tilde{x} \in \tilde{X}_p$ existiert ein $r > 0$, sodass $\exp_p(B_r(\tilde{x})) \subseteq B_r(\exp_p(\tilde{x}))$ und
$$\exp_p|_{B_r(\tilde{x})} : B_r(\tilde{x}) \to B_r(\exp_p(\tilde{x}))$$
eine Isometrie ist.

Korollar

$\tilde{X}_p$ ist einfach zusammenhängend.

Lemma (BH, II.4.6)

Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum und $p \in X$. Dann ist auch $\tilde{X}_p$ vollständig.

Lemma (BH, II.4.5)

Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum und $p \in X$. Dann gilt:

1. $\tilde{X}_p$ ist zusammenziehbar.
2. $\exp_p : \tilde{X}_p \to X$ ist eine lokale Isometrie, d. h. für alle $\tilde{x} \in \tilde{X}_p$ existiert ein $r > 0$, sodass $\exp_p(B_r(\tilde{x})) \subseteq B_r(\exp_p(\tilde{x}))$ und
$$\exp_p|_{B_r(\tilde{x})} : B_r(\tilde{x}) \to B_r(\exp_p(\tilde{x}))$$
eine Isometrie ist.

Korollar

$\tilde{X}_p$ ist einfach zusammenhängend.

Für $K \in \mathbb{R}$ ist der Modellraum M_K^2 definiert durch

$$M_K^2 := \begin{cases} (S^2, \frac{1}{\sqrt{K}} d_{S_2}) & \text{für } K > 0, \\ (\mathbb{E}^2, d_{\mathbb{E}^2}) & \text{für } K = 0, \\ (\mathbb{H}^2, \frac{1}{\sqrt{-K}} d_{\mathbb{H}^2}) & \text{für } K < 0, \end{cases}$$

wobei $\mathbb{E}^2 = \mathbb{R}^2$ den gewöhnlichen euklidischen Raum und $\mathbb{H}^2$ den zweidimensionalen hyperbolischen Raum mit konstanter Krümmung -1 bezeichnet.
Dabei sind d_{S^2} und $d_{\mathbb{H}^2}$ die induzierten intrinsichen Normen.
Im Fall $K \neq 0$ bezeichnet $\frac{1}{\sqrt{|K|}} d$ die skalierte Metrik

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{|K|}} d(x, y).$$

Sei $K \in \mathbb{R}$ und (X, d) ein Längenraum.

Definition

Ein Dreieck Δabc in X besteht aus drei Eckpunkten $a, b, c \in X$ und verbindenden kürzesten Wegen $\sigma_{ab}, \sigma_{bc}, \sigma_{ac} : [0, 1] \to X$.

Sei $K \in \mathbb{R}$ und (X, d) ein Längenraum.

Definition

Ein Dreieck Δabc in X besteht aus drei Eckpunkten $a, b, c \in X$ und verbindenden kürzesten Wegen $\sigma_{ab}, \sigma_{bc}, \sigma_{ac} : [0,1] \to X$.

Definition

Ein Vergleichsdreieck $\Delta\overline{abc}$ von Δabc in M_K^2 besteht aus drei Punkten $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in M_K^2$ und verbindenden kürzesten Wegen $\sigma_{\overline{ab}}, \sigma_{\overline{bc}}, \sigma_{\overline{ca}} : [0,1] \to M_K^2$, sodass gilt:

$$d_{M_K^2}(\overline{a}, \overline{b}) = d(a, b), \quad d_{M_K^2}(\overline{b}, \overline{c}) = d(b, c), \quad d_{M_K^2}(\overline{c}, \overline{a}) = d(c, a)$$

Sei $K \in \mathbb{R}$ und (X, d) ein Längenraum.

Definition

Ein Dreieck Δabc in X besteht aus drei Eckpunkten $a, b, c \in X$ und verbindenden kürzesten Wegen $\sigma_{ab}, \sigma_{bc}, \sigma_{ac} : [0, 1] \to X$.

Definition

Ein Vergleichsdreieck $\Delta\overline{abc}$ von Δabc in M_K^2 besteht aus drei Punkten $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in M_K^2$ und verbindenden kürzesten Wegen $\sigma_{\overline{ab}}, \sigma_{\overline{bc}}, \sigma_{\overline{ca}} : [0, 1] \to M_K^2$, sodass gilt:

$$d_{M_K^2}(\overline{a}, \overline{b}) = d(a, b), \quad d_{M_K^2}(\overline{b}, \overline{c}) = d(b, c), \quad d_{M_K^2}(\overline{c}, \overline{a}) = d(c, a)$$

Definition

Ein Vergleichspunkt von $d \in \mathrm{Bild}(\sigma_{ac})$ in einem Vergleichsdreieck $\Delta\overline{abc}$ ist ein Punkt $\overline{d} \in \mathrm{Bild}(\sigma_{\overline{ac}})$ mit $d(a, d) = d_{M_K^2}(\overline{a}, \overline{d})$.

Sei $K \in \mathbb{R}$ und (X, d) ein Längenraum.

Definition

Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt CAT(K)-Gebiet, falls gilt:

- Für alle $x, y \in U$ gibt es eine Geodäte $\sigma_{xy} : [0, 1] \to U$ der Länge $d(x, y)$.
- Alle Dreiecke Δabc mit Eckpunkten und Seiten in U erfüllen die CAT(K)-Vergleichseigenschaft:
  Für alle $d \in \mathrm{Bild}(\sigma_{ac})$ mit Vergleichspunkt $\overline{d}$ in $\Delta\overline{abc}$ gilt
  $$d(b, d) \leq d_{M_K^2}(\overline{b}, \overline{d}).$$
  und analog für $d' \in \sigma_{ab}$, $d'' \in \sigma_{bc}$.

Sei $K \in \mathbb{R}$ und (X, d) ein Längenraum.

Definition

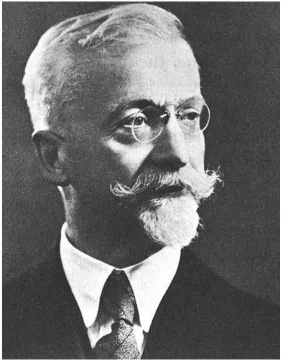
Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt CAT(K)-Gebiet, falls gilt:

- Für alle $x, y \in U$ gibt es eine Geodäte $\sigma_{xy} : [0, 1] \to U$ der Länge $d(x, y)$.
- Alle Dreiecke Δabc mit Eckpunkten und Seiten in U erfüllen die CAT(K)-Vergleichseigenschaft:
  Für alle $d \in \mathrm{Bild}(\sigma_{ac})$ mit Vergleichspunkt $\overline{d}$ in $\Delta\overline{abc}$ gilt
  $$d(b, d) \leq d_{M_K^2}(\overline{b}, \overline{d}).$$
  und analog für $d' \in \sigma_{ab}$, $d'' \in \sigma_{bc}$.

Definition

Der Längenraum X heißt CAT(K)-Raum, falls X eine Überdeckung mit offenen CAT(K)-Gebieten besitzt.
Man sagt auch, der Raum habe Alexandrov-Krümmung $\leq K$.

Warum der Name CAT(K)?



Élie Cartan
(1869-1951)

Alexander D. Alexandrov
(1912-1999)

Victor A. Toponogov
(1930-2004)

Bemerkung (BBI, Exercise 4.1.11)

Es reicht aus, in der Definition die Ungleichung

$$d(b,d) \leq d_{M_\kappa^2}(\overline{b},\overline{d})$$

nur für Mittelpunkte d der Seite σ_{ac}, also $d \in \mathrm{Bild}(\sigma_{ac})$ mit $d(a,d) = d(d,c) = \frac{1}{2}d(a,c)$, zu fordern.

Bemerkung (BBI, Exercise 4.1.11)

Es reicht aus, in der Definition die Ungleichung

$$d(b,d) \leq d_{M_K^2}(\overline{b},\overline{d})$$

nur für Mittelpunkte d der Seite σ_{ac}, also $d \in \mathrm{Bild}(\sigma_{ac})$ mit $d(a,d) = d(d,c) = \frac{1}{2}d(a,c)$, zu fordern.

Beispiele

- $\mathbb{R}^n$ ist ein CAT(0)-Raum.

Bemerkung (BBI, Exercise 4.1.11)

Es reicht aus, in der Definition die Ungleichung

$$d(b,d) \leq d_{M_K^2}(\overline{b},\overline{d})$$

nur für Mittelpunkte d der Seite σ_{ac}, also $d \in \mathrm{Bild}(\sigma_{ac})$ mit $d(a,d) = d(d,c) = \frac{1}{2}d(a,c)$, zu fordern.

Beispiele

- $\mathbb{R}^n$ ist ein CAT(0)-Raum.
- $\mathbb{R}^2 \setminus B_1(0)$ ist ein CAT(0)-Raum.

Bemerkung (BBI, Exercise 4.1.11)

Es reicht aus, in der Definition die Ungleichung

$$d(b,d) \leq d_{M_K^2}(\overline{b},\overline{d})$$

nur für Mittelpunkte d der Seite σ_{ac}, also $d \in \mathrm{Bild}(\sigma_{ac})$ mit $d(a,d) = d(d,c) = \frac{1}{2}d(a,c)$, zu fordern.

Beispiele

- $\mathbb{R}^n$ ist ein CAT(0)-Raum.
- $\mathbb{R}^2 \setminus B_1(0)$ ist ein CAT(0)-Raum.
- Klebe drei Kopien des Strahls $[0,\infty)$ am Punkt 0 zusammen. Dieser Raum hat nichtpositive Krümmung.

Bemerkung (BBI, Exercise 4.1.11)

Es reicht aus, in der Definition die Ungleichung

$$d(b,d) \le d_{M^2_K}(\overline{b},\overline{d})$$

nur für Mittelpunkte d der Seite σ_{ac}, also $d \in \mathrm{Bild}(\sigma_{ac})$ mit $d(a,d) = d(d,c) = \frac{1}{2}d(a,c)$, zu fordern.

Beispiele

- $\mathbb{R}^n$ ist ein CAT(0)-Raum.
- $\mathbb{R}^2 \setminus B_1(0)$ ist ein CAT(0)-Raum.
- Klebe drei Kopien des Strahls $[0,\infty)$ am Punkt 0 zusammen. Dieser Raum hat nichtpositive Krümmung.

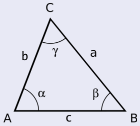
Satz (Ballmann, 3.7)

Sei X eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist die Alexandrov-Krümmung von X höchstens K genau dann, wenn die Schnittkrümmung von X nach oben durch K beschränkt ist.

Satz (Kosinussatz)

In jedem wie rechts beschrifteten Dreieck gilt

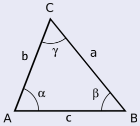
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$



Satz (Kosinussatz)

In jedem wie rechts beschrifteten Dreieck gilt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$



Definition

Für drei Punkte x, y, z aus einem metrischen Raum (X, d) heißt

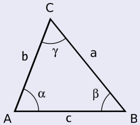
$$\tilde{\measuredangle} xyz := \arccos \frac{d(y,x)^2 + d(y,z)^2 - d(x,z)^2}{2 \cdot d(y,x) \cdot d(y,z)}$$

Vergleichswinkel.

Satz (Kosinussatz)

In jedem wie rechts beschrifteten Dreieck gilt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$



Definition

Für drei Punkte x, y, z aus einem metrischen Raum (X, d) heißt

$$\tilde{\measuredangle}xyz := \arccos\frac{d(y,x)^2 + d(y,z)^2 - d(x,z)^2}{2\cdot d(y,x)\cdot d(y,z)}$$

Vergleichswinkel.

Definition

Sei (X, d) ein Längenraum, $p \in X$ und $\alpha, \beta : [0, \epsilon) \to X$ zwei Geodäten mit $\alpha(0) = \beta(0) = p$. Falls der Limes existiert, so heißt

$$\measuredangle(\alpha, \beta) = \lim_{s,t\to 0}\tilde{\measuredangle}(\alpha(s), p, \beta(t))$$

Winkel zwischen α und β.

Sei (X, d) ein Längenraum, $U \subseteq X$ ein CAT(0)-Gebiet.

Proposition (BBI, 4.3.5)

Seien $\alpha, \beta : [0, \epsilon] \to U$ kürzeste Wege mit $\alpha(0) = \beta(0) = p$.
Dann ist die Abbildung

$$\Theta : [0, \epsilon] \times [0, \epsilon] \to [0, \pi], \quad (s, t) \mapsto \widetilde{\measuredangle}(\alpha(s), p, \beta(t))$$

monoton steigend in beiden Argumenten.

Sei (X, d) ein Längenraum, $U \subseteq X$ ein CAT(0)-Gebiet.

Proposition (BBI, 4.3.5)

Seien $\alpha, \beta : [0, \epsilon] \to U$ kürzeste Wege mit $\alpha(0) = \beta(0) = p$. Dann ist die Abbildung

$$\Theta : [0, \epsilon] \times [0, \epsilon] \to [0, \pi] , \quad (s, t) \mapsto \widetilde{\measuredangle}(\alpha(s), p, \beta(t))$$

monoton steigend in beiden Argumenten.

Korollar (BBI, 4.3.2)

Sei Δabc ein Dreieck in U. Dann sind die Winkel

$$\alpha := \measuredangle(\sigma_{ab}, \sigma_{ac}), \quad \beta := \measuredangle(\sigma_{ba}, \sigma_{bc}), \quad \gamma := \measuredangle(\sigma_{ca}, \sigma_{cb}),$$

wohldefiniert und es gilt $\alpha + \beta + \gamma \leq \pi$.

Sei (X, d) ein Längenraum, $U \subseteq X$ ein CAT(0)-Gebiet.

Proposition (BBI, 4.3.5)

Seien $\alpha, \beta : [0, \epsilon] \to U$ kürzeste Wege mit $\alpha(0) = \beta(0) = p$. Dann ist die Abbildung

$$\Theta : [0, \epsilon] \times [0, \epsilon] \to [0, \pi] , \quad (s, t) \mapsto \tilde{\measuredangle}(\alpha(s), p, \beta(t))$$

monoton steigend in beiden Argumenten.

Korollar (BBI, 4.3.2)

Sei Δabc ein Dreieck in U. Dann sind die Winkel

$$\alpha := \measuredangle(\sigma_{ab}, \sigma_{ac}), \quad \beta := \measuredangle(\sigma_{ba}, \sigma_{bc}), \quad \gamma := \measuredangle(\sigma_{ca}, \sigma_{cb}),$$

wohldefiniert und es gilt $\alpha + \beta + \gamma \leq \pi$.

Bemerkung

Die Behauptung des Korollars ist äquivalent zur CAT(0)-Vergleichseigenschaft, kann also auch als zur Definition von CAT(0)-Gebieten verwendet werden.

Proposition (BBI, 9.1.17)

Sei (X, d) ein Längenraum, $U = B_r(x_0) \subseteq X$ ein CAT(0)-Gebiet. Dann gilt:

1. Für alle $a, b \in U$ gibt es einen eindeutigen kürzesten Weg, der a und b verbindet, und dieser ist in U enthalten.
2. Seien σ_{ab} und σ_{bc} zwei kürzeste Wege in U, die in b enden bzw. starten. Falls $\measuredangle abc = \pi$, dann ist auch $\sigma_{ab} * \sigma_{bc}$ ein kürzester Weg.
3. Jede Geodäte in U ist ein kürzester Weg.

Lemma (BBI, 9.2.3)

Sei (X, d) ein Längenraum, $U \subseteq X$ ein CAT(0)-Gebiet und $\alpha, \beta : I \to U$ zwei durch dasselbe Intervall I parametrisierte und mit jeweils konstanter Geschwindigkeit durchlaufene Geodäten in U. Dann ist die Distanzfunktion

$$\delta : I \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad t \mapsto d(\alpha(t), \beta(t))$$

konvex.

Lemma (Alexandrov's Lemma)

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{E}^2$, sodass a und c auf verschiedenen Halbebenen bezüglich der Verbindungsstrecke $[bd]$ liegen. Seien $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} \in \mathbb{E}^2$ mit $d(a, b) = d(\tilde{a}, \tilde{b}), \quad d(b, c) = d(\tilde{b}, \tilde{c}), \quad d(a, d) + d(d, c) = d(\tilde{a}, \tilde{c})$. Sei $\tilde{d} \in [\tilde{a}, \tilde{c}]$ mit $d(\tilde{a}, \tilde{d}) = d(a, d)$. Dann gilt:

- $\measuredangle adb + \measuredangle bdc < \pi$ genau dann, wenn $d(\tilde{b}, \tilde{d}) < d(d, b)$. Dann gilt auch $\measuredangle \tilde{b}\tilde{a}\tilde{d} < \measuredangle bad$ und $\measuredangle \tilde{b}\tilde{c}\tilde{d} < \measuredangle bcd$.

Lemma (Alexandrov's Lemma)

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{E}^2$, sodass a und c auf verschiedenen Halbebenen bezüglich der Verbindungsstrecke $[bd]$ liegen. Seien $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} \in \mathbb{E}^2$ mit

$$d(a,b) = d(\tilde{a},\tilde{b}), \quad d(b,c) = d(\tilde{b},\tilde{c}), \quad d(a,d)+d(d,c) = d(\tilde{a},\tilde{c}).$$

Sei $\tilde{d} \in [\tilde{a},\tilde{c}]$ mit $d(\tilde{a},\tilde{d}) = d(a,d)$. Dann gilt:

- $\measuredangle adb + \measuredangle bdc < \pi$ genau dann, wenn $d(\tilde{b},\tilde{d}) < d(d,b)$. Dann gilt auch $\measuredangle \tilde{b}\tilde{a}\tilde{d} < \measuredangle bad$ und $\measuredangle \tilde{b}\tilde{c}\tilde{d} < \measuredangle bcd$.
- $\measuredangle adb + \measuredangle bdc > \pi$ genau dann, wenn $d(\tilde{b},\tilde{d}) > d(d,b)$. Dann gilt auch $\measuredangle \tilde{b}\tilde{a}\tilde{d} > \measuredangle bad$ und $\measuredangle \tilde{b}\tilde{c}\tilde{d} > \measuredangle bcd$.

Lemma (Alexandrov's Lemma)

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{E}^2$, sodass a und c auf verschiedenen Halbebenen bezüglich der Verbindungsstrecke $[bd]$ liegen. Seien $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} \in \mathbb{E}^2$ mit

$$d(a, b) = d(\tilde{a}, \tilde{b}), \quad d(b, c) = d(\tilde{b}, \tilde{c}), \quad d(a, d) + d(d, c) = d(\tilde{a}, \tilde{c}).$$

Sei $\tilde{d} \in [\tilde{a}, \tilde{c}]$ mit $d(\tilde{a}, \tilde{d}) = d(a, d)$. Dann gilt:

- $\measuredangle adb + \measuredangle bdc < \pi$ genau dann, wenn $d(\tilde{b}, \tilde{d}) < d(d, b)$. Dann gilt auch $\measuredangle \tilde{b}\tilde{a}\tilde{d} < \measuredangle bad$ und $\measuredangle \tilde{b}\tilde{c}\tilde{d} < \measuredangle bcd$.
- $\measuredangle adb + \measuredangle bdc > \pi$ genau dann, wenn $d(\tilde{b}, \tilde{d}) > d(d, b)$. Dann gilt auch $\measuredangle \tilde{b}\tilde{a}\tilde{d} > \measuredangle bad$ und $\measuredangle \tilde{b}\tilde{c}\tilde{d} > \measuredangle bcd$.

Lemma

Sei (X, d) ein Längenraum, Δabc ein Dreieck in X und $d \in \mathrm{Bild}(\sigma_{ac})$. Wenn die Teildreiecke Δabd und Δcbd die CAT(0)-Vergleichseigenschaft erfüllen, dann auch Δabc.

Definition

Sei X ein topologischer Raum, $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to X$ stetige Kurven mit $p = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $q = \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Eine Homotopie der Wege γ_1 und γ_2 relativ der Endpunkte ist eine stetige Abbildung

$$H : [0,1] \times [0,1] \to X$$

mit

- $H(-,0) = \gamma_1$,
- $H(-,1) = \gamma_2$,
- $H(0,t) = p$ für alle $t \in [0,1]$,
- $H(1,t) = q$ für alle $t \in [0,1]$.

Definition

Sei X ein topologischer Raum, $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to X$ stetige Kurven mit $p = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $q = \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Eine Homotopie der Wege γ_1 und γ_2 relativ der Endpunkte ist eine stetige Abbildung

$$H : [0,1] \times [0,1] \to X$$

mit

- $H(-,0) = \gamma_1$,
- $H(-,1) = \gamma_2$,
- $H(0,t) = p$ für alle $t \in [0,1]$,
- $H(1,t) = q$ für alle $t \in [0,1]$.

Definition

Ein topologischer Raum X heißt einfach zusammenhängend, falls

- er wegzusammenhängend ist und
- jeder geschlossene Weg $\gamma : [0,1] \to X$ (d. h. $\gamma(0) = \gamma(1) =: p$) homotop relativ der Endpunkte zum konstanten Weg $t \mapsto p$ ist.

Definition

Seien X, Y topologische Räume und $p : X \to Y$ stetig. Eine Teilmenge $U \subset Y$ wird von p gleichmäßig überlagert, falls es einen diskreten topologischen Raum D und einen Homöomorphismus $\phi : p^{-1}(U) \to U \times D$ gibt, sodass kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(U) \arrow[rr, "\phi", "\approx"'] \arrow[dr, "p"'] & & U \times D \arrow[dl, "\pi"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

Die Abbildung p ist eine Überlagerung, falls jeder Punkt in y eine gleichmäßig überlagerte Umgebung besitzt.

Beispiel

Jeder Homöomorphismus ist auch eine Überlagerung.

Definition

Seien X, Y topologische Räume und $p : X \to Y$ stetig. Eine Teilmenge $U \subset Y$ wird von p gleichmäßig überlagert, falls es einen diskreten topologischen Raum D und einen Homöomorphismus $\phi : p^{-1}(U) \to U \times D$ gibt, sodass kommutiert:

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\phi", "\approx"'] \arrow[dr, "p"'] & & U \times D \arrow[dl, "\pi"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Die Abbildung p ist eine Überlagerung, falls jeder Punkt in y eine gleichmäßig überlagerte Umgebung besitzt.

Beispiel

Jeder Homöomorphismus ist auch eine Überlagerung.

Überlagerungsabbildungen $p : \tilde{X} \to X$ besitzen folgende wichtige Hochhebungseigenschaften:

Lemma (Hochheben von Wegen)

Sei $\gamma : [0,1] \to X$ ein stetiger Weg und $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x}_0) = \gamma(0)$. Dann gibt es genau einen Weg $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \tilde{X}$ mit

$$\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0 \quad \text{und} \quad p \circ \tilde{\gamma} = \gamma.$$

Lemma (Hochheben von Weghomotopien)

Seien $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to X$ zwei stetige Wege mit $x_0 := \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ zusammen mit einer Homotopie $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ zwischen γ_1 und γ_2 relativ der Endpunkte. Sei $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$ und $\tilde{\gamma_1}, \tilde{\gamma_2} : [0,1] \to \tilde{X}$ die Hochhebungen von γ_1 bzw. γ_2 wie in obigem Lemma. Dann gibt es genau eine Homotopie

$$\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to \tilde{X}$$

von $\tilde{\gamma_1}$ und $\tilde{\gamma_2}$ relativ der Endpunkte.

Überlagerungsabbildungen $p : \tilde{X} \to X$ besitzen folgende wichtige Hochhebungseigenschaften:

Lemma (Hochheben von Wegen)

Sei $\gamma : [0,1] \to X$ ein stetiger Weg und $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x}_0) = \gamma(0)$. Dann gibt es genau einen Weg $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \tilde{X}$ mit

$$\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0 \quad \text{und} \quad p \circ \tilde{\gamma} = \gamma.$$

Lemma (Hochheben von Weghomotopien)

Seien $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to X$ zwei stetige Wege mit $x_0 := \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ zusammen mit einer Homotopie $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ zwischen γ_1 und γ_2 relativ der Endpunkte. Sei $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$ und $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2 : [0,1] \to \tilde{X}$ die Hochhebungen von γ_1 bzw. γ_2 wie in obigem Lemma. Dann gibt es genau eine Homotopie

$$\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to \tilde{X}$$

von $\tilde{\gamma}_1$ und $\tilde{\gamma}_2$ relativ der Endpunkte.

Lemma (BH, I.3.28.)

Sei X ein wegzusammenhängender metrischer Raum, $\tilde{X}$ ein vollständiger metrischer Raum und $p : \tilde{X} \to X$ ein lokaler Homöomorphismus. Angenommen,

- $L(\tilde{\alpha}) \leq L(p \circ \tilde{\alpha})$ für alle Wege $\alpha : [0,1] \to \tilde{X}$
- für alle $x \in X$ gibt es ein $r > 0$, sodass jedes $y \in B_r(x)$ mit x durch eine eindeutige linear parametrisierte Geodäte $\gamma_y : [0,1] \to B_r(x)$ verbunden ist und γ_y stetig von y abhängt.

Dann ist p eine Überlagerung.

Folgerung

Sei X ein Hadamard-Raum (vollständig, einfach zshgd, CAT(0)) und $p \in X$. Dann ist $\exp_p : \tilde{X}_p \to X$ eine Überlagerung.

Definition

Ein vollständiger, einfach zusammenhängender Längenraum mit Alexandrov-Krümmung ≤ 0 heißt Hadamard-Raum.

Lemma

Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerungsabbildung, $\tilde{X} \neq \emptyset$, X einfach zusammenhängend und $\tilde{X}$ wegzusammenhängend. Dann ist p ein Homöomorphismus.

Folgerung

$exp_p : \tilde{X}_p \to X$ ist ein Homöomorphismus, wenn X ein Hadamard-Raum ist.

Satz (Cartan-Hadamard)

1. Für alle Paare p, q von Punkte in einem Hadamard-Raum gibt es genau eine verbindende Geodäte σ_{pq}.
2. All diese Geodäten sind kürzeste Wege.

Definition

Ein vollständiger, einfach zusammenhängender Längenraum mit Alexandrov-Krümmung ≤ 0 heißt Hadamard-Raum.

Lemma

Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerungsabbildung, $\tilde{X} \neq \emptyset$, X einfach zusammenhängend und $\tilde{X}$ wegzusammenhängend. Dann ist p ein Homöomorphismus.

Folgerung

$exp_p : \tilde{X}_p \to X$ ist ein Homöomorphismus, wenn X ein Hadamard-Raum ist.

Satz (Cartan-Hadamard)

1. Für alle Paare p, q von Punkte in einem Hadamard-Raum gibt es genau eine verbindende Geodäte σ_{pq}.
2. All diese Geodäten sind kürzeste Wege.

Satz

Sei X ein Hadamard-Raum. Dann gilt für alle $x, y, z \in X$ mit verbindenden Kürzesten $\sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}$: Die Winkelsumme des Dreiecks $\Delta(x, y, z)$ ist $\leq \pi$.

Bemerkung

Dies ist äquivalent dazu, dass das Dreieck die Vergleichseigenschaft erfüllt. Somit sind in Hadamard-Räumen Dreiecke beliebiger Größe „dünn“.

Beweis

„Alexandrovs Flickwerk“