Zusammenfassung Funktionalanalysis

Notation. Sei im Folgenden $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definition. Ein **Prä-Hilbertraum** ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Definition. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine **Fréchet-Metrik** ist eine Funktion $\rho : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass für $x, y \in V$ gilt:

- $\rho(x) = \rho(-x)$
- $\rho(x) = 0 \iff x = 0$
- $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A_1, A_2 \subset X$. Dann heißt

$$\operatorname{dist}(A_1, A_2) := \inf\{d(x, y) \mid x \in A_1, y \in A_2\}$$

Abstand zwischen A_1 und A_2.

Definition. Ein **topologischer Raum** ist ein paar (X, τ), wobei X eine Menge und $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ ein System von offenen Mengen, sodass gilt:

- $\emptyset \in \tau$
- $\tilde{\tau} \subset \tau \implies \bigcup_{U\in\tilde{\tau}} U \in \tau$
- $U_1, U_2 \in \tau \implies U_1 \cap U_2 \in \tau$

Definition. Ein topologischer Raum (X, τ) heißt **Haussdorff-Raum**, wenn das Trennungsaxiom

$$\forall x_1, x_2 \in X : \exists U_1, U_2 \in \tau : x_1 \in U_1 \wedge x_2 \in U_2 \wedge U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

erfüllt ist.

Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Eine Menge $A \subset X$ heißt abgeschlossen, falls $X \setminus A \in \tau$, also das Komplement offen ist.

Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $A \subset X$. Dann heißen

$$A^\circ := \{x \in X \mid \exists U \in \tau \text{ mit } x \in U \text{ und } U \subset A\}$$
$$\overline{A} := \{x \in X \mid \forall U \in \tau \text{ mit } x \in U \text{ gilt } U \cap A \neq \emptyset\}$$

Abschluss bzw. **Inneres** von A.

Definition. Ist (X, τ) ein topologischer Raum und $A \subset X$, dann ist auch (A, τ_A) ein topologischer Raum mit der *Relativtopologie* $\tau_A := \{U \cap A \mid U \in \tau\}$.

Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt dicht in X, falls $\overline{A} = X$.

Definition. Ein topologischer Raum (X, τ) heißt separabel, falls X eine abzählbare dichte Teilmenge enthält. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt separabel, falls (A, τ_A) separabel ist.

Definition. Seien τ_1, τ_2 zwei Topologien auf einer Menge X. Dann heißt τ_2 **stärker** (oder feiner) als τ_1 bzw. τ_1 **schwächer** (oder gröber) als τ_2, falls $\tau_1 \subset \tau_2$.

Definition. Seien d_1 und d_2 Metriken auf einer Menge X und τ_1 und τ_2 die induzierten Topologien. Dann heißt d_1 stärker als d_2, falls τ_1 stärker ist als τ_2.

Satz. Sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum X. Dann gilt:

- $\|\cdot\|_2$ ist stärker als $\|\cdot\|_1 \iff \exists C > 0 : \forall x \in X : \|x\|_1 \leq C\|x\|_2$
- $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ sind äquivalent $\iff \exists c, C > 0 : \forall x \in X : c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$

Definition. Die **p-Norm** auf dem $\mathbb{K}^n$ ist definiert als

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{für } 1 \leq p < \infty$$
$$\|x\|_\infty := \|x\|_max := \max_{1\leq i\leq n} |x_i|.$$

Bemerkung. Alle p-Normen sind zueinander äquivalent.

Definition. Seien $S \subset X$ eine Menge, (X, τ_X) und (Y, τ_Y) Hausdorff-Räume sowie $x_0 \in S$. Eine Funktion $f : S \to Y$ heißt **stetig** in x_0, falls gilt:

$$\forall V \in \tau_Y : f(x_0) \in V \implies \exists U \in \tau_X \text{ mit } x_0 \in U \wedge f(U \cap S) \subset V$$

Ist $X = S$, so heißt $f : X \to Y$ stetige Abbildung, falls f stetig in allen Punkten $x_0 \in X$ ist, d. h. $V \in \tau_Y \implies f^{-1}(V) \in \tau_X$.

Bemerkung. In metrischen Räumen ist diese Definition äquivalent zur üblichen Folgendefinition.

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ heißt **Cauchy-Folge**, falls $d(x_k, x_l) \xrightarrow{k,l\to\infty} 0$. Ein Punkt $x \in X$ heißt **Häufungspunkt** der Folge, falls es eine Teilfolge $(x_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ gibt mit $x_{k_i} - x \xrightarrow{i\to\infty} 0$.

Definition. Ein metrischer Raum (X, d) heißt **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge in X einen Häufungspunkt besitzt.

Definition. Ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum heißt **Banachraum**, falls er vollständig bzgl. der induzierten Metrik ist. Ein Banachraum heißt **Banach-Algebra**, falls er eine Algebra ist mit $\|x \cdot y\|_X \leq \|x\|_x \cdot \|y\|_X$.

Definition. Ein **Hilbertraum** ist ein **Prähilbertraum**, der vollständig bzgl. der vom Skalarprodukt induzierten Norm ist.

Definition. Sei $\mathbb{K}^\mathbb{N} := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall i \in \mathbb{N} : x_i \in \mathbb{K}\}$ die Menge aller Folgen in $\mathbb{K}$. Mit der Fréchet-Metrik

$$\rho(x) := \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{|x_i|}{1 + |x_i|} < 1$$

wird der **Folgenraum** $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ zu einem Banachraum.

Satz. Sind $(x^k) = (x_i^k)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ und $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$, so gilt

$$\rho(x^k - x) \xrightarrow{k\to\infty} 0 \iff \forall i \in \mathbb{N} : x_i^k \xrightarrow{k\to\infty} x_i.$$

Definition. Die Norm

$$\|x\|_{\ell^p} := \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \in [0, \infty], \text{ für } 1 \leq p < \infty$$
$$\|x\|_{\ell^\infty} := \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| \in [0, \infty]$$

heißt **ℓ^p-Norm** auf dem Raum $\ell^p(\mathbb{K}) := \{x \in \mathbb{K}^\mathbb{N} \mid \|x\|_{\ell^p} < \infty\}$.

Satz. Der Raum $\ell^p(\mathbb{K})$ ist vollständig, also ein Banachraum.

Bemerkung. Im Fall $p = 2$ wird $\ell^2(\mathbb{K})$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $\langle x, y\rangle_{\ell^2} := \sum_{i=0}^{\infty} x_i\overline{y_i}$.

Definition (Vervollständigung)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum. Betrachte die Menge $X^\mathbb{N}$ aller Folgen in X und definiere

$$\tilde{X} := \{x \in X^\mathbb{N} \mid x \text{ ist Cauchy-Folge in } X\}/\sim$$

mit der Äquivalenzrelation

$$x \sim y \text{ in } \tilde{X} \iff d(x_j, y_j) \xrightarrow{j\to\infty} 0.$$

Diese Menge wird mit der Metrik

$$\tilde{d}(x, y) := \lim_{i\to\infty} d(x_i, y_i)$$

zu einem vollständigen metrischen Raum. Die injektive Abbildung $J : X \to \tilde{X}$, welche $x \in X$ auf die konstante Folge $(x)_{i\in\mathbb{N}}$, ist isometrisch, d. h. sie erhält. Wir können also X als einen dichten Unterraum von $\tilde{X}$ auffassen. Man nennt $\tilde{X}$ **Vervollständigung** von X.

Definition (**Raum der beschränkten Funktionen**)**.** Sei S eine Menge und Y ein Banachraum über $\mathbb{K}$ mit Norm $y \mapsto |y|$. Dann ist

$$B(S; Y) := \{f : S \to Y \mid f(S) \text{ ist eine beschränkte Teilmenge von } Y\}$$

die Menge der beschränkten Funktionen von B nach Y. Diese Menge ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und wird mit der Supremumsnorm $\|f\|_{B(S)} := \sup_{x\in S} |f(x)|$ zu einem Banachraum.

Satz. Ist (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $Y \subset X$ abgeschlossen, so ist auch (Y, d) ein vollständiger metrischer Raum.

Definition (**Raum stetiger Funktionen auf einem Kompaktum**)**.** Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen (d. h. kompakt) und Y ein Banachraum über $\mathbb{K}$ mit Norm $y \mapsto |y|$, so ist

$$\mathcal{C}^0(S; Y) := \mathcal{C}(S; Y) := \{f : S \to Y \mid f \text{ ist stetig }\}$$

die Menge der stetigen Funktionen von S nach Y. Sie ist ein abgeschlossener Unterraum von $B(S; Y)$ mit der Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{C}(S;Y)} = \|\cdot\|_{B(S;Y)}$, also ein Banachraum.

Bemerkung. Für $Y = \mathbb{K}$ ist $\mathcal{C}^0(S; \mathbb{K}) = \mathcal{C}(S)$ eine kommutative Banach-Algebra mit dem Produkt $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$.

Definition. Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ und $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge kompakter Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Dann heißt (K_n) eine **Ausschöpfung** von S, falls

- $S = \cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$,

- $\emptyset \neq K_i \subset K_{i+1} \subset S$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und
- für alle $x \in S$ gibt es ein $\delta > 0$ und $i \in \mathbb{N}$, sodass $B_\delta(x) \subset K_i$.

Bemerkung. Zu offenen und abgeschlossenen $S \subset \mathbb{R}^n$ existiert eine Ausschöpfung.

Definition (**Raum stetiger Funktionen auf Menge mit Ausschöpfung**)**.** Es sei $S \subset \mathbb{R}^n$ so, dass eine Ausschöpfung $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von S existiert und Y ein Banachraum. Dann bildet die Menge aller stetigen Funktionen

$$C^0(S;Y) \coloneqq \{f : S \to Y \mid f \text{ ist stetig auf } S\}$$

einen K-Vektorraum und wird mit der Fréchet-Norm

$$\varrho(f) \coloneqq \sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{-i} \frac{\|f\|_{C^0(K_i)}}{1 + \|f\|_{C^0(K_i)}}$$

zu einem vollständigen metrischen Raum.

Bemerkung.
- Die von dieser Metrik erzeugte Topologie ist unabhängig von der Wahl der Ausschöpfung.
- Ist $S \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, so stimmt die Topologie mit der von $\|\cdot\|_{B(s)}$ überein.

Definition. Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ und Y ein Banachraum. Für $f : S \to Y$ heißt

$$\operatorname{supp} f \coloneqq \{x \in S \mid f(x) \neq 0\}$$

Träger (engl. support) von f.

Definition. Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ und Y ein Banachraum. Dann ist

$$\mathcal{C}_0^0(S;Y) \coloneqq \{f \in \mathcal{C}^0(S;Y) \mid \operatorname{supp} f \text{ ist kompakt in } S\}$$

die Menge der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger von S nach Y.

Definition (**Raum differenzierbarer Funktionen**)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $m \in \mathbb{N}$. Dann ist die Menge der differenzierbaren Funktionen von Ω nach Y

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^m(\overline{\Omega}, Y) \coloneqq \{f : \Omega \to Y \mid f &\text{ ist } m\text{-mal stetig differenzierbar in } \Omega \\ &\text{und für } k \leq m \text{ und } s_1, ..., s_k \in \{1, ..., n\} \\ &\text{ist } \partial_{s_1} ... \partial_{s_k} f \text{ auf } \overline{\Omega} \text{ stetig fortsetzbar } \}\end{aligned}$$

ein Vektorraum und mit

$$\|f\|_{\mathcal{C}^m(\overline{\Omega})} = \sum_{|s|\leq m} \|\partial^s\|_{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})}$$

ein Banachraum

Bemerkung. In obiger Norm wird die Summe über alle k-fache partielle Ableitungen mit $k \leq m$ gebildet.