Zusammenfassung Funktionalanalysis

Notation. Sei im Folgenden $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definition. Ein **Prä-Hilbertraum** ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definition. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine **Fréchet-Metrik** ist eine Funktion $\rho : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass für $x, y \in V$ gilt:

- $\rho(x) = \rho(-x)$
- $\rho(x) = 0 \iff x = 0$
- $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A_1, A_2 \subset X$. Dann heißt

$$\operatorname{dist}(A_1, A_2) := \inf\{d(x, y) \mid x \in A_1, y \in A_2\}$$

Abstand zwischen A_1 und A_2.

Definition. Ein **topologischer Raum** ist ein paar (X, τ), wobei X eine Menge und $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ ein System von offenen Mengen, sodass gilt:

- $\emptyset \in \tau$
- $\tilde{\tau} \subset \tau \implies \bigcup_{U \in \tilde{\tau}} U \in \tau$
- $U_1, U_2 \in \tau \implies U_1 \cap U_2 \in \tau$

Definition. Ein topologischer Raum (X, τ) heißt **Haussdorff-Raum**, wenn das Trennungsaxiom

$$\forall x_1, x_2 \in X : \exists U_1, U_2 \in \tau : x_1 \in U_1 \wedge x_2 \in U_2 \wedge U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

erfüllt ist.

Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Eine Menge $A \subset X$ heißt abgeschlossen, falls $X \setminus A \in \tau$, also das Komplement offen ist.

Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $A \subset X$. Dann heißen

$$A^\circ := \{x \in X \mid \exists U \in \tau \text{ mit } x \in U \text{ und } U \subset A\}$$
$$\overline{A} := \{x \in X \mid \forall U \in \tau \text{ mit } x \in U \text{ gilt } U \cap A \neq \emptyset\}$$

Abschluss bzw. **Inneres** von A.

Definition. Ist (X, τ) ein topologischer Raum und $A \subset X$, dann ist auch (A, τ_A) ein topologischer Raum mit der *Relativtopologie* $\tau_A := \{U \cap A \mid U \in \tau\}$.

Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt dicht in X, falls $\overline{A} = X$.

Definition. Ein topologischer Raum (X, τ) heißt separabel, falls X eine abzählbare dichte Teilmenge enthält. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt separabel, falls (A, τ_A) separabel ist.

Definition. Seien τ_1, τ_2 zwei Topologien auf einer Menge X. Dann heißt τ_2 **stärker** (oder feiner) als τ_1 bzw. τ_1 **schwächer** (oder gröber) als τ_2, falls $\tau_1 \subset \tau_2$.

Definition. Seien d_1 und d_2 Metriken auf einer Menge X und τ_1 und τ_2 die induzierten Topologien. Dann heißt d_1 stärker als d_2, falls τ_1 stärker ist als τ_2.

Satz. Sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum X. Dann gilt:

- $\|\cdot\|_2$ ist stärker als $\|\cdot\|_1 \iff \exists C > 0 : \forall x \in X : \|x\|_1 \leq C\|x\|_2$
- $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ sind äquivalent $\iff \exists c, C > 0 : \forall x \in X : c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$

Definition. Die **p-Norm** auf dem $\mathbb{K}^n$ ist definiert als

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{für } 1 \leq p < \infty$$
$$\|x\|_\infty := \|x\|_max := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Alle p-Normen sind zueinander äquivalent.

Definition. Seien $S \subset X$ eine Menge, (X, τ_X) und (Y, τ_Y) Hausdorff-Räume sowie $x_0 \in S$. Eine Funktion $f : S \to Y$ heißt **stetig** in x_0, falls gilt:

$$\forall V \in \tau_Y : f(x_0) \in V \implies \exists U \in \tau_X \text{ mit } x_0 \in U \wedge f(U \cap S) \subset V$$

Ist $X = S$, so heißt $f : X \to Y$ stetige Abbildung, falls f stetig in allen Punkten $x_0 \in X$ ist, d. h. $V \in \tau_Y \implies f^{-1}(V) \in \tau_X$.

Bemerkung. In metrischen Räumen ist diese Definition äquivalent zur üblichen Folgendefinition.

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ heißt **Cauchy-Folge**, falls $d(x_k, x_l) \xrightarrow{k,l \to \infty} 0$. Ein Punkt $x \in X$ heißt **Häufungspunkt** der Folge, falls es eine Teilfolge $(x_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ gibt mit $x_{k_i} - x \xrightarrow{i \to \infty} 0$

Definition. Ein metrischer Raum (X, d) heißt **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge in X einen Häufungspunkt besitzt.

Definition. Ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum heißt **Banachraum**, falls er vollständig bzgl. der induzierten Metrik ist. Ein Banachraum heißt **Banach-Algebra**, falls er eine Algebra ist mit $\|x \cdot y\|_X \leq \|x\|_x \cdot \|y\|_X$.

Definition. Ein **Hilbertraum** ist ein **Prähilbertraum**, der vollständig bzgl. der vom Skalarprodukt induzierten Norm ist.