Zusammenfassung Analysis III

Maßtheorie

Problem (Schwaches Maßproblem)**.** Gesucht: Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [\mathbb{R}, \infty]$ mit folgenden Eigenschaften:

- Normierung: $\mu([0,1]^n) = 1$
- Endliche Additivität: Sind $A, B \subset \mathbb{R}^n$ disjunkt, so gilt $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$
- Bewegungsinvarianz: Für eine euklidische Bewegung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt $\mu(f(A)) = \mu(A)$.

Satz (Hausdorff)**.** Das schwache Maßproblem ist für $n \geq 3$ nicht lösbar.

Satz (Banach)**.** Das schwache Maßproblem ist für $n = 1, 2$ lösbar, aber nicht eindeutig lösbar.

Problem (Starkes Maßproblem)**.** Gesucht ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ wie im schwachen Maßproblem, die anstelle der endlichen Additivität die Eigenschaft der σ-Additivität besitzt:

- Für eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ist
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$$

Satz. Das starke Maßproblem besitzt keine Lösung.

Notation. Sei im Folgenden Ω eine Menge.

Definition. Eine Teilmenge $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt **Ring**, wenn für $A, B \in \mathfrak{R}$ gilt:

- $\emptyset \in \mathfrak{R}$
- Abgeschlossenheit unter Differenzbildung: $A \setminus B \in \mathfrak{R}$
- Abgeschlossenheit unter endlichen Vereinigungen: $A \cup B \in \mathfrak{R}$

Definition. Eine Teilmenge $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt **Algebra**, wenn für $A, B \in \mathfrak{A}$ gilt:

- $\emptyset \in \mathfrak{A}$
- Abgeschlossenheit unter Komplementbildung: $A^c = \Omega \setminus A \in \mathfrak{A}$
- Abgeschlossenheit unter endlichen Vereinigungen: $A \cup B \in \mathfrak{A}$

Definition. Eine Algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega))$ heißt **σ-Algebra**, wenn $\mathfrak{A}$ unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen ist, d. h. für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{A}$ gilt
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}$$

Bemerkung.
- Jede Algebra ist auch ein Ring.
- Ein Ring $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist auch unter endlichen Schnitten abgeschlossen, da $A \cap B = A \setminus (B \setminus A) \in \mathfrak{R}$
- Ein Ring $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist genau dann eine Algebra, wenn $\Omega \in \mathfrak{R}$
- Eine σ-Algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist auch unter abzählbaren Schnitten abgeschlossen: Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathfrak{A}$, dann gilt
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n)^c\right)^c \in \mathfrak{A}$$

Notation. Sei im Folgenden $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein Ring.

Satz. Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Ringen / Algebren / σ-Algebren über Ω. Dann ist auch $\cap_{i\in I} A_i$ ein Ring / eine Algebra / eine σ-Algebra über Ω.

Definition. Sei $E \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Setze
$$\mathcal{R}(E) := \{\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega) \mid E \subset \mathfrak{R}, \mathfrak{R} \text{ Ring}\} \text{ und}$$
$$\mathcal{A}(E) := \{\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega) \mid E \subset \mathfrak{A}, \mathfrak{A}\ \sigma\text{-Algebra}\}.$$
Dann heißen
$$\mathfrak{R}(E) := \bigcap_{\mathfrak{R}\in\mathcal{R}(E)} \mathfrak{R}, \qquad \mathfrak{A}(E) := \bigcap_{\mathfrak{A}\in\mathcal{A}(E)} \mathfrak{A}$$
von E **erzeugter Ring** bzw. von E **erzeugte σ-Algebra**.

Definition. Ist $(\Omega, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, dann heißt $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\Omega, \mathcal{O}) := \mathfrak{A}(\mathcal{O})$ **Borelsche σ-Algebra** von $(\Omega, \mathcal{O})$.

Bemerkung. Die Borelsche σ-Algebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ wird auch erzeugt von $\{I \subset \mathbb{R} \mid I \text{ Intervall }\}$. Dabei spielt es keine Rolle, ob man nur geschlossene, nur offene, beliebig halboffene Intervalle oder gar nur Intervalle mit Endpunkten in $\mathbb{Q}$ zulässt.

Definition. Eine Funktion $\mu : \mathfrak{R} \to [0, \infty]$ heißt **Inhalt** auf $\mathfrak{R}$, falls

- $\mu(\emptyset) = 0$ und
- $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$ für disjunkte $A, B \in \mathfrak{R}$.

Definition. Ein Inhalt $\mu : \mathfrak{R} \to [0, \infty]$ heißt **Prämaß** auf $\mathfrak{R}$, wenn μ σ-additiv ist, d. h. wenn für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Elemente von $\mathfrak{R}$ mit $\sqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{R}$ gilt:
$$\mu\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$$

Definition. Ein **Maß** ist ein Prämaß auf einer σ-Algebra.

Satz. Für einen Inhalt μ auf $\mathfrak{R}$ gilt für alle $A, B \in \mathfrak{R}$:

- $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$
- Monotonie: $A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$
- Aus $A \subset B$ und $\mu(B) < \infty$ folgt $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$
- Subadditivität: Für $A_1, ..., A_n \in \mathfrak{R}$ ist $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$
- Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge disjunkter Elemente aus $\mathfrak{R}$, sodass $\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{R}$, so gilt $\mu(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$.

Definition. Ein Inhalt / Maß auf einem Ring $\mathfrak{R}$ / einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ heißt **endlich**, falls $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in \mathfrak{R}$ bzw. $A \in \mathfrak{A}$.

Satz. Ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ ist σ-subadditiv, d. h. für alle Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{A}$ gilt
$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

Definition. Sei $A \subset \Omega$. Dann heißt die Abbildung
$$1_A : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in A \\ 0, & \text{falls } \omega \notin A \end{cases}$$
Indikatorfunktion oder **charakteristische Funktion** von A.

Definition. Wir sagen eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert** gegen $A \subset \Omega$, notiert $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, wenn $(1_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen 1_A konvergiert.

Definition. Für eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{P}(\Omega)$ heißen
$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ liegt in undendlich vielen } A_n\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n$$
$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ liegt in allen bis auf endlich vielen } A_n\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_n$$
Limes Superior bzw. **Limes Inferior** der Folge A_n.

Satz. Es gilt $\lim_{n\to\infty} A_n = A \iff \liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = A$.

Definition. Eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{P}(\Omega)$ heißt

- **monoton wachsend**, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A_n \subset A_{n+1}$,
- **monoton fallend**, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A_n \supset A_{n+1}$.

Satz. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{P}(\Omega)$.

- Ist (A_n) monoton wachsend, so gilt $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
- Ist (A_n) monoton fallend, so gilt $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Satz. Sei μ ein Inhalt auf $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Wir betrachten folgende Aussagen:

(i) μ ist ein Prämaß auf $\mathfrak{R}$.

(ii) Stetigkeit von unten: Für jede monoton wachsende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{R}$ mit $A := \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathfrak{R}$ gilt $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

(iii) Stetigkeit von oben: Für jede monoton fallende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{R}$ mit $\mu(A_0) < \infty$ und $A := \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathfrak{R}$ gilt $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

(iv) Für jede monoton fallende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{R}$ mit $\mu(A_0) < \infty$ und $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \emptyset$ gilt $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

Dann gilt $(i) \iff (ii) \implies (iii) \iff (iv)$.
Falls μ endlich, gilt auch $(iii) \implies (ii)$.

Satz. Sei μ ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Dann gilt:

- Für eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{A}$ gilt $\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty}(\mu(A_n))$.
- Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathfrak{A}$, sodass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $\mu\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n\right) < \infty$, dann gilt $\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n)$.
- Sei μ endlich und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathfrak{A}$, dann gilt
$$\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right).$$
- Sei μ endlich und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen A konvergente Folge in $\mathfrak{A}$, dann gilt $A \in \mathfrak{A}$ und $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Definition. Ein Inhalt auf einem Ring $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt **σ-endlich**, wenn gilt: Es gibt eine Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{R}$, sodass

- $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ und
- $\mu(S_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Definition. Eine Funktion $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ wird **numerische Funktion** genannt.

Definition. Eine numerische Funktion $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt **äußeres Maß** auf Ω, wenn gilt:

- $\mu^*(\emptyset) = 0$
- Monotonie: $A \subset B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
- σ-Subadditivität: Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen von Ω, dann gilt $\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n)$

Bemerkung. Wegen $\mu^*(\emptyset) = 0$ und der Monotonie nimmt ein äußeres Maß nur Werte in $[0,\infty]$ an.

Definition. Eine Teilmenge $A \subset \Omega$ heißt **μ^*-messbar**, falls für alle $Q \subset \Omega$ gilt
$$\mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A).$$

Satz (Carathéodory)**.** Sei $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\infty]$ ein äußeres Maß, dann gilt

- Die Menge $\mathfrak{A}^* := \{A \subset \Omega \mid A \text{ ist } \mu^*\text{-messbar }\}$ ist eine σ-Algebra.
- $\mu^*|_{\mathfrak{A}^*}$ ist ein Maß auf $\mathfrak{A}^*$.

Satz (**Fortsetzungssatz**)**.** Sei μ ein Prämaß auf einem Ring $\mathfrak{R}$, dann gibt es ein Maß $\tilde{\mu}$ auf der von $\mathfrak{R}$ erzeugten σ-Algebra $\mathfrak{A}(\mathfrak{R})$ mit $\tilde{\mu}|_{\mathfrak{R}} = \mu$. Falls μ σ-endlich, so ist $\tilde{\mu}$ eindeutig bestimmt.

Bemerkung. Im Beweis wird ein äußeres Maß auf Ω wie folgt definiert:
$$\mu^*(Q) := \inf\left\{\sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_n) \,\middle|\, (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{U}(Q)\right\},$$
wobei $\inf\emptyset := \infty$ und
$$\mathfrak{U}(Q) := \left\{(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, Q \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \text{ und } A_n \text{ Folge in } \mathfrak{R}\right\}.$$
Das Prämaß μ^* eingeschränkt auf $\mathfrak{A}^* \supset \mathfrak{A}(\mathfrak{R})$ ist ein Maß.

Das Lebesgue-Borel-Maß

Notation. Für zwei Elemente $a = (a_1, ..., a_n)$ und $b = (b_1, ..., b_n)$ schreibe

- $a \lhd b$, falls $a_j < b_j$ für alle $j = 1, ..., n$.
- $a \unlhd b$, falls $a_j \leq b_j$ für alle $j = 1, ..., n$.

Definition. Für $a, b \in \mathbb{R}^n$ heißen
$$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \lhd x \lhd b\}$$
$$\mu(]a, b[) := \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$$
Elementarquader und **Elementarinhalt**. Sei im Folgenden $\mathcal{E}$ die Menge aller Elementarquader.

Satz. Für alle $A \in \mathfrak{R}(\mathcal{E})$ gibt es paarweise disjunkte Elementarquader $Q_1, ..., Q_p \in \mathcal{E}$ sodass $A = \bigsqcup_{i=1}^{p} Q_i$.

Definition. Für $A \in \mathfrak{R}(\mathcal{E})$ setze $\mu(A) := \sum_{i=1}^{p} \mu(Q_i)$, wenn $A = \bigsqcup_{i=1}^{p} Q_i$ für paarweise disjunkte $Q_1, ..., Q_p$.

Satz. μ definiert ein Prämaß auf $\mathfrak{R}(\mathcal{E})$, genannt das **Lebesgue-Borel-Prämaß** auf $\mathbb{R}^n$.

Definition. Die eindeutige (da μ σ-endlich) Fortsetzung $\tilde{\mu}$ von μ auf $\mathfrak{A}(\mathcal{E}) = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ wird **Lebesgue-Borel-Maß** genannt.

Bemerkung. Das Lebesgue-Borel-Maß ist das einzige Maß auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$, welches jedem Elementarquader seinen Elementarinhalt zuordnet.

Definition. Sei μ ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Eine Menge $N \subset \Omega$ heißt **Nullmenge**, wenn es eine Menge $A \in \mathfrak{A}$ gibt mit $N \subset A$ und $\mu(A) = 0$. Die Menge aller Nullmengen wird mit $\mathfrak{N}_\mu$ bezeichnet.

Definition. Sei μ ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$. Setze
$$\tilde{\mathfrak{A}}_\mu := \{A \cup N \mid A \in \mathfrak{A}, N \in \mathfrak{N}_\mu\}.$$
Dann gilt:

- $\tilde{\mathfrak{A}}_\mu = \mathfrak{A}(\mathfrak{N}_\mu \cup \mathfrak{A})$, ist also eine σ-Algebra.
- Die Funktion $\mu : \tilde{\mathfrak{A}}_\mu \to [0,\infty]$ definiert durch $\tilde{\mu}(\tilde{A}) := \mu(A)$, wenn $\tilde{\mathfrak{A}}_\mu \ni A \cup N$ mit $A \in \mathfrak{A}$ und $N \in \mathfrak{N}$, ist ein Maß.

Definition (Fortsetzung auf Nullmengen)**.** Sei μ das Lebesgue-Borel-Maß auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$. Dann heißt die von $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ und den entsprechenden Nullmengen erzeugte σ-Algebra $\tilde{\mathfrak{A}}_\mu$ **Lebesguesche σ-Algebra**, notiert $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$, und das fortgesesetzte Maß **Lebesgue-Maß**.

Definition. Sei Ω eine Menge und $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra auf Ω, sowie ggf. μ ein Maß auf $\mathfrak{A}$. Dann heißt

- das Tupel $(\Omega, \mathfrak{A})$ **messbarer Raum**,
- das Tripel $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ **Maßraum**.

Definition. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ zwei messbare Räume. Eine Abbildung $f : \Omega \to \Omega'$ heißt **messbar** oder genauer $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$-messbar, wenn für alle $A' \in \Omega'$ gilt $f^{-1}(A') \in \Omega$ oder, kürzer, $f^{-1}(\mathfrak{A}') \subset \mathfrak{A}$.