Zusammenfassung Stochastik I

Der abstrakte Maßbegriff

Definition. Eine **Ereignisalgebra** oder **Boolesche Algebra** ist eine Menge $\mathfrak{A}$ mit zweistelligen Verknüpfungen $\wedge$ („und“) und $\vee$ („oder“), einer einstelligen Verknüpfung $\overline{\cdot}$ (Komplement) und ausgezeichneten Elementen $U \in \mathfrak{A}$ (unmögliches Ereignis) und $S \in \mathfrak{A}$ (sicheres Ereignis), sodass für $A, B, C \in \mathfrak{A}$ gilt:

i.	$A \wedge A = A$	vii.	$A \vee A = A$
ii.	$A \wedge B = B \wedge A$	viii.	$A \vee S = S$
iii.	$A \wedge S = A$	ix.	$A \vee U = A$
iv.	$A \wedge U = U$	x.	$A \vee \overline{A} = S$
v.	$A \wedge \overline{A} = U$	xi.	$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$
vi.	$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$	xii.	$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

Definition. Sei $\mathfrak{A}$ eine Boolesche Algebra. Dann definiert

$$A \leq B :\iff A \wedge B = B$$

eine Partialordnung auf $\mathfrak{A}$, gesprochen A impliziert B.

Definition. Eine **Algebra** (auch Mengenalgebra) $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist ein System von Teilmengen einer Menge Ω mit $\emptyset \in \mathfrak{A}$, das unter folgenden Operationen stabil ist:

- Vereinigung: $A, B \in \mathfrak{A} \implies A \cup B \in \mathfrak{A}$
- Durchschnitt: $A, B \in \mathfrak{A} \implies A \cap B \in \mathfrak{A}$
- Komplementbildung: $A \in \mathfrak{A} \implies A^c := \Omega \backslash A \in \mathfrak{A}$

Satz (Isomorphiesatz von Stone)**.** Zu jeder Booleschen Algebra $\mathfrak{A}$ gibt es eine Menge Ω derart, dass $\mathfrak{A}$ isomorph zu einer Mengenalgebra $\mathfrak{A}$ in $\mathcal{P}(\Omega)$ ist.

Definition. Eine **σ-Algebra** ist eine Algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, die nicht nur unter endlichen, sondern sogar unter abzählbaren Vereinigungen stabil ist, d. h.

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathfrak{A} \implies \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}.$$

Bemerkung. Es gilt damit:

- $\Omega = \emptyset^c \in \mathfrak{A}$
- Abgeschlossenheit unter abzählbaren Schnitten:

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathfrak{A} \implies \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (A_n)^c\right)^c \in \mathfrak{A}.$$

Definition. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$. Dann sind der Limes Superior und Limes Inferior der Folge A_n wie folgt definiert:

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$$
$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$$

Bemerkung. In einer σ-Algebra, in der die Mengen mögliche Ereignisse beschreiben, ist der Limes Superior das Ereignis, das eintritt, wenn unendlich viele Ereignisse der Folge A_n eintreten. Der Limes Infinum tritt genau dann ein, wenn alle bis auf endlich viele Ereignisse der Folge A_n eintreten.

Definition. Ein **Ring** $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist ein System von Teilmengen einer Menge Ω mit $\emptyset \in \mathfrak{A}$, das unter folgenden Operation stabil ist:

- Vereinigung: $A, B \in \mathfrak{A} \implies A \cup B \in \mathfrak{A}$
- Differenz: $A, B \in \mathfrak{A} \implies B \backslash A = B \cap A^c \in \mathfrak{A}$

Ein Ring, der nicht nur unter endlicher, sondern sogar unter abzählbarer Vereinigung stabil ist, heißt **σ-Ring**.

Bemerkung. $\mathfrak{A}$ (σ-) Algebra $\iff$ $\mathfrak{A}$ (σ-) Ring und $\Omega \in \mathfrak{A}$.

Satz. Sei $(\mathfrak{A}_i)_{(i\in I)}$ eine Familie von (σ-) Ringen / (σ-) Algebren über einer Menge Ω. Dann ist auch $\cup_{i\in I}\mathfrak{A}_i$ ein (σ-) Ring / eine (σ-) Algebra über Ω.