Zusammenfassung Geometrie

Geometrie von Kurven

Notation. Sei im Folgenden I ein Intervall, d. h. eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Definition. Eine Abbildung $c : I \to \mathbb{R}^n$ heißt **reguläre Kurve**, wenn c beliebig oft differenzierbar ist und $c'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ gilt. Der affine Unterraum $\tau_{c,t} := c(t) + \mathbb{R}(c'(t))$ heißt **Tangente** an c im Punkt $c(t)$ bzw. Tangente an c zum Zeitpunkt t.

Definition. Die **Bogenlänge** (BL) einer regulären Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ist

$$L(c) := \int_a^b \|c'(t)\| \,\mathrm{d}t.$$

Satz. Die Bogenlänge ist invariant unter Umparametrisierung, d. h. sei $c : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve und $\phi : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ ein Diffeomorphismus, dann gilt $L(c) = L(c \circ \phi)$.

Definition. Eine reguläre Kurve $c : I \to \mathbb{R}^n$ heißt **nach Bogenlänge parametrisiert**, wenn $\|c'(t)\| = 1$ für alle $t \in I$.

Satz. Jede reguläre Kurve $c : I \to \mathbb{R}$ lässt sich nach BL parametrisieren, d. h. es existiert ein Intervall J und ein Diffeomorphismus $\phi : J \to I$, welcher sogar orientierungserhaltend ist, sodass $\tilde{c} := c \circ \phi$ nach BL parametrisiert ist.

Definition. Zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ heißen gleichgerichtet, falls $a = \lambda b$ für ein $\lambda \geq 0$.

Satz. Sei $v : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig, dann gilt

$$\|\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t\| \leq \int_a^b \|v(t)\|\,\mathrm{d}t,$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, falls alle $v(t)$ gleichgerichtet sind.

Satz. Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve und $x := c(a), y := c(b)$. Dann gilt $L(c) \geq d(x, y)$. Wenn $L(c) = d(x, y)$, dann gibt es einen Diffeomorphismus $\phi : [a, b] \to [0, 1]$, sodass

$$c = c_{xy} \circ \phi,$$

wobei $c_{xy} : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto x + t(y - x)$.

Definition. Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Kurve und $a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b$ eine Zerteilung von $[a, b]$. Dann ist die Länge des **Polygonzugs** durch die Punkte $c(t_i)$ gegeben durch

$$\hat{L}_c(t_0, ..., t_k) = \sum_{j=1}^{k} \|c(t_j) - c(t_{j-1})\|.$$

Definition. Eine stetige Kurve c heißt **rektifizierbar** von Länge $\hat{L}_c$, wenn gilt: Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass für alle Unterteilungen $a = t_0 < t1 < ... < t_k = b$ der Feinheit mindestens δ gilt:

$$\|\hat{L}_c - \hat{L}_c(t_0, t_1, ..., t_k)\| < \epsilon.$$

Definition. Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ regulär und nach BL parametrisiert. Dann heißt der Vektor $c''(t)$ **Krümmungsvektor** von c in $t \in I$ und die Abbildung $\kappa : I \to \mathbb{R}$, $\quad t \mapsto \|c''(t)\|$ heißt **Krümmung** der nach BL parametrisierten Kurve.

Definition. Eine Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2$ wird **ebene Kurve** genannt.

Definition. Sei c eine reguläre, nach BL parametrisierte, ebene Kurve. Dann heißt

$$n = n_c : I \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto J \cdot c'(t) \text{ mit } J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

das **Normalenfeld** von c.

Bemerkung. Für alle $t \in I$ bildet $(c'(t), n_c(t))$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$. Es gilt außerdem $c''(t) \perp c'(t)$, also $c''(t) = \kappa(t) \cdot n_c(t)$, d. h. die Krümmung ist im $\mathbb{R}^2$ vorzeichenbehaftet.

Satz (**Frenet-Gleichungen** ebener Kurven)**.** Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ regulär, nach BL parametrisiert und $v = c'$, dann gilt

$$c'' = \kappa \cdot n \quad \text{ und } \quad n' = -\kappa \cdot v.$$

Beispiel. Die nach BL parametrisierte gegen den UZS durchlaufene Kreislinie mit Mittelpunkt $m \in \mathbb{R}^2$ und Radius $r > 0$

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto m + r \begin{pmatrix} \cos(t/r) \\ \sin(t/r) \end{pmatrix}$$

hat konstante Krümmung $\kappa(t) = \frac{1}{r}$.

Satz. Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ glatte, nach BL parametrisiert mit konstanter Krümmung $\kappa(t) = R \neq 0$. Dann ist c Teil eines Kreisbogens mit Radius $\frac{1}{|R|}$.

Definition. Für $c : I \to \mathbb{R}^2$ regulär, nicht notwendigerweiße nach BL parametrisiert, ist die Krümmung zur Zeit t definiert als

$$\frac{\det(c'(t), c''(t))}{\|c'(t)\|^3}$$

Bemerkung. Obige Definition ist invariant unter orientierungserhaltenden Umparametrisierungen, und stimmt für nach BL parametrisierte Kurven mit der vorhergehenden Definition überein.

Satz (Hauptsatz der lokalen ebenen Kurventheorie)**.** Sei $\kappa : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $t_0 \in I$ und $x_0, v_0 \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v_0\| = 1$. Dann gibt es ganu eine nach BL parametrisierte zweimal stetig differenzierbare Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2$ mit Krümmung κ, $c(t_0) = x_0$ und $c'(t_0) = v(t_0) = v_0$.

Definition. Eine reguläre Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt **geschlossen**, falls $c(a) = c(b)$ und $c'(a) = c'(b)$. Eine reguläre geschlossene Kurve c heißt **einfach geschlossen**, wenn $c|_{[a,b[}$ injektiv ist.

Definition. Für eine geschlossene reguläre ebene Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ heißt die Zahl

$$\overline{\kappa}(c) := \int_a^b \kappa(t)\|c'(t)\|\,\mathrm{d}t$$

Totalkrümmung von c.

Bemerkung. Ist c nach BL parametrisiert, so ist $\overline{\kappa}(c) = \int_a^b \kappa(t)\,\mathrm{d}t$.

Satz. Die Totalkrümmung ist invariant unter orientierungserhaltenden Umparametrisierungen, d. h. ist $c : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre Kurve und $\phi : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ eine Diffeomorphismus mit $\phi' > 0$, dann gilt $\overline{\kappa}(c) = \overline{\kappa}(c \circ \phi)$.

Satz (**Polarwinkelfunktion**)**.** Sei $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{smallmatrix}\right) : [a, b] \to S^1$ stetig (glatt) und $\omega_a \in \mathbb{R}$, sodass $\gamma(a) = e^{i\omega_a}$. Dann gibt es eine eindeutige stetige (glatte) Abbildung $\omega : [a, b] \to \mathbb{R}$, genannt Polarwinkelfunktion von γ mit $\omega(a) = \omega_a$ und $\gamma(t) = e^{i\omega(t)} = \begin{pmatrix} \cos(\omega(t)) \\ \sin(\omega(t)) \end{pmatrix}$ für alle $t \in [a, b]$.

Satz. Seien ω und $\tilde{\omega}$ zwei stetige Polarwinkelfunktionen zu einer stetigen Abbildung $\gamma : [a, b] \to S^1$. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$, sodass $\omega(t) - \tilde{\omega}(t) = 2\pi k$ für alle $t \in [a, b]$.

Satz. Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine ebene reguläre geschlossene Kurve, dann heißt die ganze Zahl

$$U_c := \frac{1}{2\pi}\overline{\kappa}(c) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \kappa(t)\|c'(t)\|\,\mathrm{d}t$$

Tangentendrehzahl oder **Umlaufzahl** von c.

Satz (Umlaufsatz von Hopf)**.** Die Tangentendrehzahl einer einfach geschlossenen regulären Kurve ist ± 1.

Satz. Für die Absolutkrümmung einer einfach geschlossenen regulären Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ gilt $\kappa_{\text{abs}} \geq 2\pi$, wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn κ_c das Vorzeichen nicht wechselt.

Satz (Whitney-Graustein)**.** Für zwei glatte reguläre geschlossene ebene Kurven $c, d : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ sind folgende Aussagen äquivalent:
(i) c ist zu d regulär homotop (ii) $U_c = U_d$

Definition. Eine glatte reguläre Kurve $c : I \to \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ heißt **Frenet-Kurve**, wenn für alle $t \in I$ die Ableitungen $c'(t), c''(t), ..., c^{(n-1)}(t)$ linear unabhängig sind.

Definition. Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine Frenet-Kurve und $t \in I$. Wende das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren auf $\{c'(t), c''(t), ..., c^{(n-1)}(t)\}$ an und ergänze das resultierende Orthonormalsystem $(b_1(t), ..., b_{n-1}(t))$ mit einem passenden Vektor $b_n(t)$ zu einer Orthonormalbasis, die positiv orientiert ist. Die so definierten Funktionen $b_1, ..., b_n : I \to \mathbb{R}^n$ sind stetig und werden zusammen das **Frenet-n-Bein** von c genannt.

Definition. Sei $(b_1, ..., b_n)$ das Frenet-n-Bein einer Frenet-Kurve c. Dann gilt:

$$A := (\langle b_j', b_k\rangle)_{jk} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & & & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\kappa_{n-2} & 0 & \kappa_{n-1} \\ 0 & & & -\kappa_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Die Funktion $\kappa_j : I \to \mathbb{R}, t \mapsto \langle b_j'(t), b_{j+1}(t)\rangle, j = 1, ..., n-1$ heißt $j-te$ **Frenet-Krümmung** von c.

Satz (Hauptsatz der lokalen Raumkurventheorie)**.** Seien $\kappa_1, ..., \kappa_{n-1} : I \to \mathbb{R}$ glatte Funktionen mit $\kappa_1, ..., \kappa_{n-2} > 0$ und $t_0 \in I$ und $\{v_1, ..., v_n\}$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis, sowie $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es genau eine nach BL parametrisierte Frenet-Kurve $c : I \to \mathbb{R}^n$, sodass gilt

- $c(t_0) = x_0$,
- das Frenet-n-Bein von c in t_0 ist $\{v_1, ..., v_n\}$ und
- die j-te Frenet-Krümmung von c ist κ_j.

Definition (Frenet-Kurven im $\mathbb{R}^3$)**.** Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach BL parametrisierte Frenet-Kurve und $t \in I$. Dann heißt

- $b_1(t) = v(t) = c'(t)$ der **Tangentenvektor** an c in t,
- $b_2(t) = \frac{c''(t)}{\|c''(t)\|}$ **Normalenvektor** an c in t,
- $\mathrm{span}(b_1(t), b_2(t))$ **Schmiegebene** an c in t,
- $b_3(t) = b_1(t) \times b_2(t)$ **Binormalenvektor** an c in t,
- $\tau_c(t) = \tau(t) := \kappa_2(t) = \langle b_2'(t), b_3(t)\rangle$ **Torsion** o. **Windung** von c.

Bemerkung. Die Frenet-Gleichungen für nach BL parametrisierte Frenet-Kurven im $\mathbb{R}^3$ lauten

$$b_1' = \kappa_2 b_2, \quad b_2' = -\kappa_c b_1 + \tau_c b_3, \quad b_3' = -\tau_c b_2$$

Bemerkung. Für eine nicht nach BL parametrisierte Frenet-Kurve $c : I \to \mathbb{R}^3$ gilt für Krümmung und Torsion

$$\kappa_c := \frac{\|c' \times c''\|}{\|c'\|^3} \quad \text{und} \quad \tau_c := \frac{\det(c', c'', c''')}{\|c' \times c''\|^2}.$$

Definition. Für eine glatte geschlossene reguläre Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ist die **Totalkrümmung** definiert durch

$$\overline{\kappa}(c) := \int_a^b \kappa_c(t) \cdot \|c'(t)\| \,\mathrm{d}t.$$

Hierbei ist die Krümmung einer regulären Raumkurve $c : I \to \mathbb{R}^n$ wie folgt definiert: Sei $\phi : I \to J$ orientierungserhaltend (d. h. $\phi' > 0$) und so gewählt, dass $\tilde{c} := c \circ \phi^{-1} : J \to \mathbb{R}^n$ nach BL parametrisiert ist, dann definieren wir $\kappa_c(t) := \kappa_{\tilde{c}}(\phi(t))$.

Satz (Fenchel)**.** Für eine geschlossene reguläre glatte (oder $\mathcal{C}^2$) Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ gilt

$$\overline{\kappa}(c) \geq 2\pi.$$

Gleichheit tritt genau dann ein, wenn c eine einfach geschlossene konvexe reguläre glatte (oder $\mathcal{C}^2$) Kurve ist, die in einer affinen Ebene des $\mathbb{R}^3$ liegt.

Satz. Sei $v : [0, b] \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine stetige rektifizierbare Kurve der Länge $L < 2\pi$ mit $c(0) = c(b)$, so liegt das Bild von v ganz in einer offenen Hemisphäre.

Lokale Flächentheorie

Notation. Sei im Folgenden $m \in \mathbb{N}$ und $U \subset \mathbb{R}^m$ offen.

Definition. Sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung und $v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Dann heißt

$$\partial_v f(u) := \lim_{h \to 0} \frac{f(u + hv) - f(u)}{h}$$

Richtungsableitung von f im Punkt u (falls der Limes existiert). Für $v = e_j$ heißt

$$\partial_j f(u) := \partial_{e_j} f(u)$$

partielle Ableitung nach der j-ten Variable. Falls die partielle Ableitung für alle $u \in U$ existiert, erhalten wir eine Funktion $\partial_j : U \to \mathbb{R}^n, u \mapsto \partial_j f(u)$. Definiere

$$\partial_{j_1, j_2, ..., j_k} f := \partial_{j_1}(\partial_{j_2}(...(\partial_{j_k} f))).$$

Definition. Eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^n$ heißt $\mathcal{C}^k$-Abbildung, wenn alle k-ten partiellen Ableitungen von f existieren und stetig sind. Wenn $f \in \mathcal{C}^k$ für beliebiges $k \in \mathbb{N}$, so heißt f **glatt**.

Satz (Schwarz)**.** Ist f eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung, so kommt es bei allen l-ten partiellen Ableitungen mit $l \leq k$ nicht auf die Reihenfolge der partiellen Ableitungen an.

Definition. Eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^n$ heißt in $u \in U$ **total differenzierbar**, wenn gilt: Es gibt eine lineare Abbildung $D_u f = \partial f_u : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, genannt das **totale Differential** von f in u, sodass für genügend kleine $h \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$f(u + h) = f(u) + \partial f_u(h) + o(h)$$

für eine in einer Umgebung von 0 definierten Funktion $o : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{\|h\|} = 0$.

Definition. Für eine total differenzierbare Funktion f heißt die Matrix $J_u f = (D_u f(e_1), ..., D_u f(e_n))$ **Jacobi-Matrix** von f in u.

Bemerkung. Es gelten folgende Implikationen:
 f ist stetig partiell differenzierbar
$\Longrightarrow$ f ist total differenzierbar ($\Longrightarrow$ f ist stetig)
$\Longrightarrow$ f ist partiell differenzierbar

Definition. Eine total differenzierbare Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^n$ heißt regulär oder Immersion, wenn für alle $u \in U$ gilt: $\mathrm{Rang}(J_u f) = m$, d. h. alle partiellen Ableitungen sind in jedem Punkt linear unabhängig und $J_u f$ ist injektiv. Insbesondere muss $m \leq n$ gelten.

Definition. Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine (glatte) Immersion. Dann heißt das Bild $f(U)$ **immergierte Fläche**, immersierte Fläche oder parametrisiertes Flächenstück. Sei $\tilde{U}$ offen in $\mathbb{R}^n$ und $\phi : \tilde{U} \to U$ ein Diffeomorphismus, dann heißt $\tilde{X} := X \circ \phi : \tilde{U} \to \mathbb{R}^n$ **Umparametrisierung** von X.

Notation. Sei im folgenden $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion.

Definition. Für $u \in U$ heißt der Untervektorraum

$$T_u X := \mathrm{span}(\partial_1 X(u), ..., \partial_m X(u)) = \mathrm{Bild}(D_u X) \subset \mathbb{R}^n$$

Tangentialraum von X in u und sein orthogonales Komplement $N_u X := (T_u X)^\perp \subset \mathbb{R}^n$ **Normalraum** an X in u.

Bemerkung. Für $u \in U$ definiert

$$\langle v, w\rangle_u := \langle D_u X(v), D_u X(w)\rangle_{\mathrm{eukl}}$$

ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^m$. Die Positiv-Definitheit folgt dabei aus der Injektivität von D_u.

Bemerkung. Bezeichne mit $\mathrm{SymBil}(\mathbb{R}^m)$ die Menge der symmetrischen Bilinearformen auf $\mathbb{R}^m$.

Definition. Die **erste Fundamentalform** (FF) einer Immersion X ist die Abbildung

$$\mathrm{I} : U \to \mathrm{SymBil}(\mathbb{R}^m), \quad u \mapsto \mathrm{I}_u := \langle \cdot, \cdot \rangle_u.$$

Äquivalent dazu wird auch die Abbildung

$$g : U \to \mathbb{R}^{m \times m}, \quad u \mapsto g_u := (J_u X)^T (J_u X)$$

manchmal als erste Fundamentalform bezeichnet.

Definition. Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Kurve. Wir nennen c eine **Kurve auf X**, wenn es eine glatte Kurve $\alpha : [a, b] \to U$ gibt, sodass $c = X \circ \alpha$

Bemerkung. Im obigen Fall gilt

$$L(c) := \int_a^b \|c'(t)\| \,\mathrm{d}t = \int_a^b \|D_{\alpha(t)} X(\alpha'(t))\| \,\mathrm{d}t.$$

Bemerkung. Seien $c_1 = X \circ \alpha_1$ und $c_2 = X \circ \alpha_2$ zwei reguläre Kurven auf X, die sich in einem Punkt schneiden, d. h. $\alpha_1(t_1) = \alpha_2(t_2) =: u$. Dann ist der Schnittwinkel $\measuredangle(c_1'(t), c_2'(t))$ von c_1 und c_2 in $X(u)$ gegeben durch:

$$\cos(\measuredangle(c_1'(t), c_2'(t))) = \frac{\langle c_1'(t_1), c_2'(t_2)\rangle}{\|c_1'(t_1)\| \cdot \|c_2'(t_2)\|} = \frac{I_u(\alpha_1'(t_1), \alpha_2'(t_2))}{\sqrt{I_u(\alpha_1'(t_1), \alpha_1'(t_1)) \cdot I_u(\alpha_2'(t_2), \alpha_2'(t_2))}}$$

Definition. Sei $C \subset U$ eine kompakte messbare Teilmenge, dann heißt

$$A(X(C)) := \int_C \sqrt{\det(g_u)} \,\mathrm{d}u$$

der Flächeninhalt von $X(C)$.

Satz (Transformation der ersten FF)**.** Sei $\tilde{X} = X \circ \phi$ eine Umparametrisierung von X mit einem Diffeo $\phi : \tilde{U} \to U$, dann gilt für $\tilde{g}_{\tilde{u}} = (J_{\tilde{u}} \tilde{X})^T (J_{\tilde{u}} \tilde{X})$:

$$\tilde{g}_{\tilde{u}} = (J_{\tilde{u}}(\phi))^T \cdot g_{\phi(\tilde{u})} \cdot J_{\tilde{u}}(\phi).$$

Beispiel (Drehfläche)**.** Sei $c : I \to \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}, t \mapsto (r(t), z(t))$ eine reguläre glatte Kurve. Dann heißt

$$X : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad (t, s) \mapsto (r(t)\cos(s), r(t)\sin(s), z(t))$$

Drehfläche mit Profilkurve c. Es gilt:

$$g_{(t,s)} = \begin{pmatrix} \|c'(t)\|^2 & 0 \\ 0 & r(t)^2 \end{pmatrix}$$

Beispiel (Kugelfläche)**.** Die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$ ist

$$X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (s, t) \mapsto (-\sin(t)cos(t), \cos^2(t), \sin(t)).$$

Definition. Zwei Immersionen $X : U \to \mathbb{R}^n$ und $\tilde{X} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^k$ heißen **lokal isometrisch**, wenn es eine Umparametrisierung $\phi : U \to \tilde{U}$ gibt, sodass die ersten Fundamentalformen von X und $\tilde{X} \circ \phi$ übereinstimmen. Ist eine Immersion X isometrisch zu einer Immersion, deren Bild eine offene Teilmenge einer affinen Ebene ist, so heißt X **abwickelbar**.

Definition. Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion mit $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen. Dann heißt X **Hyperfläche** im $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung. Es gilt in diesem Fall offenbar $\dim T_u = n - 1$ und $\dim N_u = 1$ für $u \in U$ und für einen Vektor $\nu_u \in N_u X \setminus \{0\}$ gilt $N_u X = \mathbb{R} \cdot \nu_u$.

Definition. $v_u := \sum_{j=1}^{n} \det(\partial_1 X(u), ..., \partial_{n-1} X(u), e_j) e_j$

Bemerkung. Es gilt:

- $v_u \in N_u X \setminus \{0\}$
- $\det(\partial_1 X(u), ..., \partial_{n-1} X(u), v_u) > 0$

Bemerkung. Für $n = 3$ und $m = 2$ gilt $v_u = \partial_1 X(u) \times \partial_2 X(u)$.

Definition. Für eine Hyperfläche $X : U \to \mathbb{R}^n$ heißt

$$\nu : U \to S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}, \quad u \mapsto \nu_u := \tfrac{v_u}{\|v_u\|}$$

Gaußabbildung.

Satz. Die Gaußabbildung einer Hyperfläche ist invariant unter orientierungserhaltenden Umparametrisierungen, d. h. ist $\phi : \tilde{U} \to U$ ein Diffeo mit $\det(J_{\tilde{u}}\phi) > 0$ für alle $\tilde{u} \in \tilde{U}$, dann ist $\tilde{\nu} = \nu \circ \phi$.

Notation. $\mathrm{Bil}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) := \{B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \mid B \text{ bilinear }\}$

Definition. Die **vektorwertige zweite Fundamentalform** ist die Abbildung einer Immersion X ist die Abbildung

$$\mathrm{I\!I} : U \to \mathrm{Bil}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n), \quad u \mapsto \mathrm{I\!I}(u) = \mathrm{I\!I}_u, \text{ mit}$$
$$\mathrm{I\!I}_u : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad (v, w) \mapsto \mathrm{I\!I}_u(v, w) := (\partial_v \partial_w X(u))^{N_u},$$

wobei $(\cdot)^{N_u}$ die orthogonale Projektion auf den Normalenraum bezeichnet.

Bemerkung. Nach dem Satz von Armandus Schwarz ist $\mathrm{I\!I}_u$ eine symmetrische Bilinearform.

Bemerkung. Für eine Hyperfläche $X : U \to \mathbb{R}^n$, ($U \Subset \mathbb{R}^{n-1}$) gilt

$$\mathrm{I\!I}_u(v, w) = h_u(v, w)\nu_u \quad \text{mit} \quad h_u(v, w) = \langle \mathrm{I\!I}_u(v, w), \nu_u \rangle.$$

Definition. Die Abbildung

$$h : U \to \mathrm{SymBil}(\mathbb{R}^{n-1}), u \mapsto h_u = h(u)$$

mit $h_u(v, w) = \langle \mathrm{I\!I}_u(v, w), \nu_u \rangle = \langle \partial_v \partial_w X(u), \nu_u \rangle$ heißt **zweite Fundamentalform** der Hyperfläche X.

Bemerkung. Man kann die zweite FF auch als matrixwertige Abbildung

$$h : U \to \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}, \quad u \mapsto (h_{jk}(u)) = \langle \partial_j \partial_k X(u), \nu_u \rangle$$

aufassen.

Satz. Für die Gaußabbildung ν einer Hyperfläche $X : U \to \mathbb{R}^n$ gilt für alle $j, k \in \{1, ..., m\}$

$$\langle \partial_j \nu, \partial_k X \rangle = -h_{jk} \quad \text{und} \quad \langle \partial_j \nu, \nu \rangle = 0.$$

Definition. Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche und $u \in U$, dann heißt die lineare Abbildung

$$W_u := -D_u \nu \circ (D_u X)^{-1} : T_u X \to T_u X$$

Weingartenabbildung von X im Punkt u.

Bemerkung. Es gilt $W_u(\partial_j X(u)) = -\partial_j \nu(u)$.

Satz.
- W_u ist selbstadjungiert bzgl. der Einschränkung $\langle \cdot, \cdot \rangle_{T_u}$.
- $h_{jk}(u) = \langle W_u(\partial_j X(u)), \partial_k X(u) \rangle$
- Die Weingartenabbildung ist invariant unter orientierungserhaltenden Umparametrisierungen, d. h. ist $\phi : \tilde{U} \to U$ ein Diffeo mit $\det(J\phi) > 0$, dann gilt für $\tilde{X} := X \circ \phi$ und alle $\tilde{u} \in \tilde{U}$: $W_{\phi(\tilde{u})} = \tilde{W}_{\tilde{u}}$.

Satz. Sei $g_u = (g_{jk}(u))$ die Matrix der ersten und $h_u = (h_{jk}(u))$ die Matrix der zweiten FF einer Hyperfläche X, dann gilt für die Matrix $w_u = (w_{jk}(u))$ von W_u bzgl. der Basis $\{\partial_1 X(u), ..., \partial_{n-1} X(u)\}$ von $T_u X$:

$$w_u = g_u^{-1} \cdot h_u$$

Bemerkung. Die Weingartenabbildung ist als selbstadjungierter Endomorphismus reell diagonalisierbar (Spektralsatz).

Definition. Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche.

- Die Eigenwerte $\kappa_1(u), ..., \kappa_{n-1}(u)$ mit Vielfachheiten von W_u heißen **Hauptkrümmungen** von X in u und die dazugehörigen Eigenvektoren **Hauptkrümmungsrichtungen** von X in u.
- Die **mittlere Krümmung** von X ist definiert als
$$H : U \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto \tfrac{1}{n-1} \operatorname{spur}(W_u) = \tfrac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \kappa_j(u).$$
- Die **Gauß-(Kronecker-)Krümmung** von X ist die Abbildung
$$K : U \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto \det(W_u) = \frac{\det(h_u)}{\det g_u} = \prod_{j=1}^{n-1} \kappa_j(u).$$

Satz. Die Hauptkrümmungen, die mittlere Krümmung und die Gauß-Kronecker-Krümmung sind invariant unter orientierungserhaltenden Umparametrisiserungen.

Satz. Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche und $u_0 \in U$ ein Punkt. Dann gibt es eine offene Umgebung $U_0 \Subset U$ von u_0 und eine Umparametrisierung $\phi : U_0 \to \tilde{U}$, sodass für $\tilde{X} := X \circ \phi^{-1}$ gilt:

Es gibt eine glatte (bzw. $\mathcal{C}^2$) Funktion $f : \tilde{U} \to \mathbb{R}$ mit $D_{\phi(u_0)} f = 0$, sodass $\tilde{X} = \mathrm{Graph}(f)$, d. h. es gilt für alle $\tilde{u} \in \tilde{U}$:

$$\tilde{X}(\tilde{u}) = (\tilde{u}, f(\tilde{u})).$$

Notation. $\nabla f = (\partial_1 f, ..., \partial_k f)$ heißt **Gradient** von $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$.

Satz. Sei $U \Subset \mathbb{R}^{n-1}$ und $f : U \to \mathbb{R}$ glatt. Dann ist die zweite FF der Graphen-Hyperfläche $X : U \to \mathbb{R}^n, u \mapsto (u, f(n))$

$$h_{jk}(u) = \frac{\partial_{jk} f(u)}{\sqrt{1 + |\nabla f(u)|^2}}.$$

Satz. Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche, $u_0 \in U$, sowie $E_{u_0} := X(u_0) + T_{u_0} X$ die affine Tangentialebene an X in u_0. Dann gilt:

- Ist $K(u_0) > 0$, so liegt für eine kleine offene Umgebung $U_0 \subset U$ von u_0 das Bild $X(U_0)$ ganz auf einer Seite von E_{u_0}.
- Ist $K(u_0) < 0$, so trifft für jede Umgebung $U_0 \subset U$ von u_0 das Bild $X(U_0)$ beide Seiten von E_{u_0}.

Definition. Sei $u_0 \in U, v \in T_{u_0} X, P_v := X(u_0) + \mathrm{span}(v, \nu(u_0))$. Sei $U_0 \subset U$ eine offene Umgebung von u_0, dann heißt

$$P_v \cap X(U_0)$$

Normalenschnitt in u_0 in Richtung v.

Satz. Wenn U_0 hinreichend klein, dann ist $P_v \cap X(U_0)$ Bild einer regulären glatten Kurve.

Definition. Wenn $\|v\| = 1$, dann heißt

$$\kappa_v(u) := \langle W_u v, v \rangle$$

Normalkrümmungen von X in u in Richtung v.

Bemerkung. Sei $\|v\| = 1$. Sei $c : I \to P_v \tilde{=} \mathbb{R}^2$ nach BL parametrisiert, sodass $\mathrm{Bild}(c) = P_v \cap X(U_0)$, und $c(0) = X(u_0)$ und $c'(0) = v$. Dann: $\kappa_v(u) = \kappa_c(0)$

Satz. Die Hauptkrümmungen $\kappa_1(u_0), ..., \kappa_2(u_0)$ sind die Extrema der Abbildung

$$T_{u_0} X \supset S^1 \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \kappa_v(u_0) = \langle W_{u_0} v, v \rangle.$$

Die Levi-Civita-Ableitung

Definition. Ein **Vektorfeld** (VF) auf einer offenen Menge $U \Subset \mathbb{R}^m$ ist eine Abbildung $v : U \to \mathbb{R}^m$.

Notation. $\chi(U) = \{v : U \to \mathbb{R}^n \mid v \text{ glatt}\}$

Definition. Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine immergierte Fläche, $U \Subset \mathbb{R}^m$. Ein **tangentiales Vektorfeld** längs X ist eine glatte Abbildung $V : U \to \mathbb{R}^n$ mit $V(u) \in T_u X \, \forall u \in U$.

Definition. Mit typtheoretischer Syntax ist ein tangentiales Vektorfeld längs X eine glatte Abbildung $V : \prod_{u:U} T_u X$.

Notation. $\chi(TX) = \{V : U \to \mathbb{R}^n \mid V \text{ ist tang. VF längs } X\}$

Bemerkung. Folgende Abbildung ist eine Bijektion:

$$H : \chi(U) \to \chi(TU), \quad v \mapsto v^\wedge := \partial_v X, \text{ wobei}$$
$$\partial_v X : \prod_{u:U} T_u X, \quad u \mapsto \partial_{v(u)} X(u)$$

Notation. Für ein glattes Vektorfeld $Y : U \to \mathbb{R}^n$ bezeichnet Y^T das tangentiale Vektorfeld längs X definiert durch

$$Y^T : \prod_{u:U} T_u X, \quad u \mapsto (Y(u))^{T_u X}.$$

Definition. Die Abbildung

$$\nabla : \chi(U) \times \chi(TX) \to \chi(TX)$$
$$(w, V) \mapsto \nabla_w V := (\partial_w X)^T$$

heißt **Levi-Civita-Ableitung** von V in Richtung w.

Achtung. Gradient $\neq$ Levi-Civita-Ableitung!

Satz (Eigenschaften der Levi-Civita-Ableitung)**.** Sei $f : U \to \mathbb{R}$ glatt, $w_1, w_2, w \in \chi(U)$, $V, V_1, V_2 \in \chi(TX)$. Dann gilt:

- $\nabla_{f(w_1)+w_2} V = f \circ \nabla_{w_1} V + \nabla_{w_2} V$
- $\nabla_w (V_1 + V_2) = \nabla_w V_1 + \nabla_w V_2$
- $\nabla_w (f \cdot V) = f(\nabla_w V) + \partial_w f \cdot V$
- $\partial_w \langle V_w, V_2 \rangle = \langle \nabla_w V_1, V_2 \rangle + \langle V_1, \nabla_w V_2 \rangle$ (Metrizität)

Notation. Sei $j \in \{1, ..., m\}$, dann betrachten wir die konstante Abbildung $e_j : U \to \mathbb{R}^n, u \mapsto e_j$. Wir setzen $\nabla_j V := \nabla_{e_j} V$.

Definition. Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion, so können wir für $j, k \in \{1, ..., m\}$ schreiben:

$$\nabla_j (\partial_k X) = \sum_{l=1}^m \Gamma_{jk}^l \partial_l (X).$$

Dabei heißen die Funktionen $\Gamma_{jk}^l : U \to \mathbb{R}$ **Christoffel-Symbole**.

Notation. $\Gamma_{jkl} := \sum_{r=1}^m g_{rl} \Gamma_{jk}^r : U \to \mathbb{R}$

Satz. $\Gamma_{jkl} = \sum_{r=1}^m \Gamma_{jk}^r \langle \partial_r X, \partial_l X \rangle = \langle \nabla_j (\partial_k X), \partial_l X \rangle = \langle \partial_j (\partial_k X), \partial_l X \rangle$

Satz. Es gilt $\Gamma_{jk}^l = \Gamma_{kj}^l$ und $\Gamma_{jkl} = \frac{1}{2}(\partial_j \cdot g_{kl} + \partial_k \cdot g_{jl} + \partial_l \cdot g_{jk})$.

Bemerkung. Schreiben wir $v = \sum_{k=1}^m v^k e_k$ für $v \in \chi(U)$, dann ist

$$\nabla_j V = \sum_{l=1}^m \left(\partial_j v^l + \sum_{k=1}^m \Gamma_{jk}^l v^k \right) \partial_l X.$$

Definition (Levi-Civita-Ableitung für Vektorfelder auf U)**.** Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine immergierte Fläche, so heißt

$$\nabla : \chi(U) \times \chi(U) \to \chi(U)$$
$$(w, v) \mapsto \nabla_w v = H^{-1}(\nabla_w \underbrace{H(v)}^{= v^\wedge})$$

Levi-Civita-Ableitung von v in Richtung w.

Bemerkung. Schreiben wir $v = \sum v^k \partial_k X$ für $V \in \chi(TX)$, dann ist

$$\nabla_j v = \sum_{l=1}^m \left(\partial_j v^l + \sum_{k=1}^m \Gamma_{jk}^l v^k \right) e_l = \partial_j v + \Gamma_j v \text{ mit}$$
$$\Gamma_j : U \to \mathbb{R}^{m \times m}, \ u \mapsto (\Gamma_{jk}^l(u))_{lk}.$$

Satz. Seien $v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in \chi(U), f : U \to \mathbb{R}$ glatt. Dann:

- $\nabla_{f \cdot w_1 + w_2} v = f \cdot \nabla_{w_1} v + \nabla_{w_2} v$
- $\nabla_w (v_1 + v_2) = \nabla_w v_1 + \nabla_w v_2$
- $\nabla_w (f \cdot v) = f(\nabla_w v) + (\nabla_w f) \cdot v$
- $\partial_w \mathrm{I}(v_1, v_2) = \mathrm{I}(\nabla_w v_1, v_2) + \mathrm{I}(v_1, \nabla_w v_2)$ (verträglich mit 1. FF)

Definition. Sei $\alpha : [a, b] \to U$ eine glatte, reguläre Kurve, $c := X \circ \alpha$. Eine glatte Abbildung $V : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ mit $V(t) \in T_{\alpha(t)} X \forall t \in [a, b]$ **tangentiales Vektorfeld** längs c.

Definition. Typtheoretisch ist ein tangentiales VF längs c eine glatte Abbildung $V : \prod_{t:[a,b]} T_{\alpha(t)} X$.

Bemerkung. Eine glatte Abbildung $v : U \to \mathbb{R}^m$ bestimmt eindeutig ein tang. VF vermöge

$$V(t) := v^\wedge(t) = \partial_{v(t)} X(\alpha(t)) = J_{\alpha(t)} X \cdot v(t).$$

Schreiben wir $v = \sum v^j e_j$ und $\alpha = \sum \alpha^j e_j$, so gilt für $V = v^\wedge$:

$$V' = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V = \sum_{j=1}^m (v^j)' (\partial_j X \circ \alpha) + \sum_{j,k=1}^m v^j (\alpha^k)' (\partial_k \partial_j X \circ \alpha).$$

Definition. Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion und $c = X \circ \alpha$ eine reguläre glatte Kurve auf X. Sei V ein tang. VF längs c, dann heißt

$$\tfrac{\nabla V}{\mathrm{d}t} := (V')^T$$

die **Levi-Civita-Ableitung** von V längs c. Das tang. VF V heißt **(Levi-Civita-)parallel**, wenn gilt

$$\tfrac{\nabla V}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Bemerkung. Für α, v, V aus der letzten Bemerkung folgt

$$\frac{\nabla V}{\mathrm{d}t} = \sum_{l=1}^m \left((v^l)' + \sum_{j,k=1}^m v^j (\alpha^k)' (\Gamma_{jk}^l \circ \alpha) \right) (\partial_l X \circ \alpha).$$

Notation. $\hat{\Gamma}_\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^{m \times m}, \ (\hat{\Gamma}_\alpha(t))_{jl} = \sum_{k=1}^m \Gamma_{jk}^l(\alpha(t))((\alpha^k)'(t))$

Definition. Wir fassen eine glatte Abbildung $v : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ als VF längs $\alpha : [a, b] \to U$ auf. Dann nennen wir

$$\frac{\nabla v}{\mathrm{d}t} := \sum_{l=1}^m \left((v^l)' + \sum_{j,k=1}^m v^j (\alpha^k)' (\Gamma_{jk}^l \circ \alpha) \right) e_l = v' + \hat{\Gamma}_\alpha v$$

Levi-Cevita-Ableitung von v längs α.

Satz. Es gilt dann $\frac{\nabla (v^\wedge)}{\mathrm{d}t} = (\frac{\nabla v}{\mathrm{d}t})^\wedge$. Ein VF $V = v^\wedge$ ist also genau dann parallel, wenn $v' + \hat{\Gamma}_\alpha v = 0$ bzw.

$$(v^l)' + \sum_{j,k=1}^m v^j (\alpha^k)' (\Gamma_{jk}^l \circ \alpha) = 0 \quad \text{für alle } l = 1, ..., m.$$

Bemerkung. Es handelt sich bei $v' + \hat{\Gamma}_\alpha v = 0$ um ein System linearer Differentialgleichungen (mit nicht konstanten stetigen Koeffizienten). Damit existiert bei gegebenem Anfangswert $v(a)$ eine auf ganz $[a, b]$ definierte eindeutige Lösung der Differentialgleichung.

Definition. Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion und $c = X \circ \alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine reguläre glatte Kurve auf X. Für $t \in [a, b]$ heißt die Abbildung

$$P_t^c : T_{\alpha(a)} X \to T_{\alpha(t)} X, \quad x \mapsto V_x(t)$$

wobei $V_x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ das parallele tangentiale VF längs c mit Anfangsbedingung $V_x(a) = x \in T_{\alpha(a)} X$ ist, **Parallelverschiebung** längs c von $c(a)$ nach $c(t)$.

Satz. Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion und $c = X \circ \alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre glatte Kurve auf X. Für alle $t \in [a, b]$ ist die Abbildung $P_t^c : T_{\alpha(a)} X \to T_{\alpha(t)} X$ eine lineare Isometrie, d. h. P_t^c ist linear und es gilt $\langle x, y \rangle = \langle P_t^c x, P_t^c y \rangle$ für alle $x, y \in T_{\alpha(a)} X$.

Geodäten

Definition. Eine reguläre glatte Kurve $c = X \circ \alpha$ auf X heißt **Geodäte** auf X, wenn gilt

$$(c'')^T = \tfrac{\nabla c'}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \tfrac{\nabla \alpha'}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Satz. Eine Geodäte ist immer proportional zur BL parametrisiert, d. h. $\|c'\|$ ist konstant.

Bemerkung. Sei $c = X \circ \alpha$ mit $\alpha = \sum \alpha^j e_j$ mit glatten Abb. α^j. Dann gilt

$$\frac{\nabla c'}{\mathrm{d}t} = \sum_{l=1}^m \left((a^l)'' + \sum_{j,k=1}^m (a^j)' (\alpha^k)' (\Gamma_{jk}^l \circ \alpha) \right) (\partial_l X \circ \alpha).$$

Somit ist c genau dann eine Geodäte, wenn gilt

$$(a^l)'' + \sum_{j,k=1}^m (a^j)' (\alpha^k)' (\Gamma_{jk}^l \circ \alpha) \quad \text{für alle } l = 1, ..., m$$

oder $\alpha'' + \Gamma_\alpha(\alpha', \alpha') = 0$ (i. F. **Geodätengleichung**), wobei

$$\Gamma_\alpha : [a, b] \to \mathrm{Bil}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m), \ t \mapsto \Gamma_{\alpha(t)} \text{ mit}$$
$$\Gamma_{\alpha(t)}(v, w) = \sum_{j,k,l=1}^m v^j w^k \Gamma_{jk}^l(\alpha(t)) e_l.$$

Bemerkung. Es handelt sich hierbei um ein System nichtlinearer gew. DG zweiter Ordnung, welches nach dem Satz von Picard-Lindelöf bei gegebenen Anfangswerten immer eine eindeutige lokale Lösung besitzt. Es folgt:

Satz (Lokale Existenz von Geodäten)**.** Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion, sei $u \in U$ und $w \in \mathbb{R}^m$. Dann gibt es eine offene Umgebung $U_w \Subset \mathbb{R}^m$ von w und eine $\epsilon > 0$, sodass gilt: Für jedes $v \in U_w$ gibt es eine eindeutige Lösung $\alpha_v :]-\epsilon, \epsilon[\to U$ der Geodätengleichung mit $\alpha_v(0) = u$ und $\alpha_v'(0) = v$.
Anders ausgedrückt: Zu jedem $u \in U$ und zu jedem $W \in T_uX$ gibt es eine offene Umgebung $U_W \Subset T_uX$ von W sowie ein $\epsilon > 0$, sodass es für jedes $V \in U_W$ eine eindeutige Geodäte $c_v :]-\epsilon, \epsilon[\to \mathbb{R}^n$ auf X gibt mit $c_v(0) = X(u)$ und $c_v'(0) = V$.

Satz (Spray-Eigenschaft)**.** Sei $\alpha_v :]-\epsilon, \epsilon[\to U$ die eindeutige Lsg. der Geodätengleichung mit $\alpha_v(0) = u$ und $\alpha_v'(0) = v$ und $r > 0$. Dann ist die eindeutige Lösung der Geodätengleichung α_{rv} mit $\alpha_{rv}(0) = rv$ und $\alpha_{rv}'(0) = rv$ auf dem Intervall $]-\frac{\epsilon}{r}, \frac{\epsilon}{r}[$ definiert und es gilt

$$\alpha_{rv}(t) = \alpha_v(rt), \quad \text{für alle } t \in]-\tfrac{\epsilon}{r}, \tfrac{\epsilon}{r}[.$$

Satz. Sei $u \in U$. Dann gibt es ein $\epsilon_u > 0$, sodass für alle $v \in \overline{B_u^{\epsilon_u}}$ gilt: Die Geodätengleichung besitzt eine auf $[-1, 1]$ definierte Lösung α_v mit $\alpha_v(0) = u$ und $\alpha_v'(0) = v$.

Definition. Sei $u \in U$, dann heißt die Abbildung

$$\mathrm{Exp}_u : B_u^{\epsilon_u} \to U, \quad v \mapsto \alpha_v(1)$$

(geodätische) Exponentialabbildung von X in u.

Definition. Sei $u \in U$, dann gibt es ein $0 < \epsilon \leq \epsilon_u$, sodass $\mathrm{Exp}_u | B_u^\epsilon$ ein Diffeo auf sein Bild ist.

Definition. Sei $\alpha : [a, b] \to U$ eine glatte Kurve, sodass $X \circ \alpha$ nach BL parametrisiert ist. Eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung

$$]-\epsilon, \epsilon[\times [a, b] \to U, \quad (s, t) \mapsto \alpha_s(t)$$

mit $\alpha_0 = \alpha$ heißt eine **Variation** von α. Ist nun $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion, so erhalten wir auch eine Variation der Kurve $c := X \circ \alpha$ auf X durch andere Kurven, nämlich $c_s := X \circ \alpha_s$ auf X.

Notation. $\delta := \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0}$.

Satz (Variationsformel der Länge)**.** Unter obigen Annahmen gilt

$$\delta L(c_s) = \langle c'(b), \delta c_s(b)\rangle - \langle c'(a), \delta c_s(a)\rangle - \int_a^b \langle \mathrm{d}(c''(t))^T, \delta c_s(t)\rangle.$$

Satz (Gaußlemma)**.** Die Parametrisierung $\widetilde{X} := X \circ \mathrm{Exp}_u : B_u^\epsilon \to \mathbb{R}^n$ durch Exponentialkoordinaten ist eine radiale Isometrie: Seien $v \in B_u^{\epsilon_u} \setminus \{0\}$ und $w \in \mathbb{R}^m$ und zerlegen wir w in $w = w_\parallel + w_\perp$ mit $w_\parallel \in \mathbb{R}v$ und $\langle w_\perp, v\rangle = 0$, dann gilt

$$\|D_v\widetilde{X}(w_\parallel) = \|w_\parallel\|$$
$$D_v\widetilde{X}(w) \perp D_v\widetilde{X}(v), \quad \text{wenn } w \perp v \text{ und somit}$$
$$\|D_v\widetilde{X}(w)\|^2 = \|w_\parallel\|^2 + \|D_v\widetilde{X}(w_\perp)\|^2.$$

Satz. Sei $\gamma : [a, b] \to B_u^\epsilon$ reguläre glatte Kurve mit $\gamma(a) = 0, \gamma(b) = v$. Dann gilt: $L(X \circ \mathrm{Exp}_u \circ \gamma \geq \|v\|)$ mit $L(X \circ \mathrm{Exp}_u \circ \gamma) = \|v\| \iff \gamma(t) = \rho(t)v$ mit $\rho : [a, b] \to [0, 1]$ streng monoton wachsend.

Satz. Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine Fläche, $u_0 \in U$, $\epsilon > 0$, sodass $\mathrm{Exp}_{u_0}^\epsilon \to U$ Diffeomorphismus. Sei $u \in \mathrm{Exp}_{u_0}(B_{u_0}^\epsilon)$. Dann gibt es (bis auf Umparametrisierung) genau eine bzgl. der Länge

$$L_{\mathrm{I}}(\alpha) := \int_a^b \mathrm{I}_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))\,\mathrm{d}t$$

kürzeste reguläre glatte Kurve $\alpha : [a, b] \to U$ mit $\alpha(a) = u_0$ und $\alpha(b) = u$ nämlich $\alpha : [0, 1] \to U, t \mapsto \mathrm{Exp}_{u_0}(t \cdot \mathrm{Exp}_{u_0}^{-1}(u))$.

Definition. Sei $X : U \to \mathbb{R}^n$ eine Fläche, dann heißt

$$[\cdot, \cdot] : \chi(U) \times \chi(U) \to \chi(U)$$
$$(v, w) \mapsto [v, w] = \partial_v w - \partial_w v$$

Lie-Klammer der Vektorfelder v und w.

Satz. $\forall v, w \in \chi(U) : [v, w] = \nabla_v w - \nabla_w v$.

Definition.

$$R : \chi(U) \times \chi(U) \times \chi(U) \to \chi(U)$$
$$(v, w, z) \mapsto R(v, w)z \text{ mit}$$
$$R(v, w)z = \nabla_v(\nabla_w z) - \nabla_w(\nabla_v z) - \nabla_{[v,w]}z$$

heißt **Krümmungstensor**.

Bemerkung.

$$\nabla_j = \partial_j + \Gamma_j, \text{ wobei } \Gamma_j : U \to \mathbb{R}^{m\times m}$$

$$\nabla_j(\nabla_k z) = \partial_j\partial_k z + (\partial_j\Gamma_k)z) + \Gamma_k(\partial_j z) + \Gamma_j(\partial_k z) + \Gamma_j\Gamma_k z.$$

$$R_{jk} := R(e_j, e_k)z = \nabla_j(\nabla_k z) - \nabla_k(\nabla_j z) - \nabla_{[e_j,e_k]}z = \partial_j\partial_k z + (\partial_j\Gamma_k)z + \Gamma_k(\partial_j z) + \Gamma_j(\partial_k z) + \Gamma_j\Gamma_k z - (\partial_k\partial_j z + (\partial_k\Gamma_j)z + \Gamma_j(\partial_k z)) + \Gamma_k(\partial_j z) + \Gamma_k\Gamma_j z = \Gamma$$

$$R_{jk} = (\Gamma_j \cdot \Gamma_k - \Gamma_k \cdot \Gamma_j) + (\partial_j\Gamma_k - \partial_k\Gamma_j)$$

$v = \sum v^j e_j, w = w^k e_k, v^j, w^k : U \to \mathbb{R}$ glatt

$$\begin{aligned}
R(v, w)z &= \nabla_v\nabla_w z - \nabla_w\nabla_v z - \nabla_{[v,w]}z = \\
&= \sum v^k\nabla_k(\sum w^j\nabla_j z) - \sum w^k\nabla_k(\sum v^j\nabla_j z) - \sum(v^j\partial_j w^k - w^j\partial_j v \\
&= \sum v^k\nabla_k(w^j\nabla_j z) - \sum w^k\nabla_k(v^j\nabla_j z) - \sum(v^j\partial_j w^k - w^j\partial_j v^k)\nabla_k \\
&= \sum_{j,k=1}^m v^k w^j\nabla_k\nabla_j z - \sum_{k,j=1} m w^j v^k\nabla_j\nabla_k z \\
&= \sum_{k,j=1}^m v^k w^j(\nabla_k\nabla_j z - \nabla_j\nabla_k z) \\
&= \sum_{k,j=1}^m v^k w^j(R_{kj}z)
\end{aligned}$$

Setze $z = \sum z^l e_l, z^l : U \to \mathbb{R}$ glatt. Dann also $R_{ij}(e_k) = \sum R_{ijk}^l e_l$.

$$\begin{aligned}
R(v, w)z &= \sum_{i,j=1}^m v^i w^j R_{ij}z \\
&= \sum_{i,j=1}^m v^i w^j R_{ij}(\sum_{k=1}^m z^k e_k) \\
&= \sum_{k,i,j}^m v^i w^j z^k R_{ij}(e_k) \\
&= \sum_{i,j,k,l}^m v^i w^j z^k R_{ijk}^l e_l
\end{aligned}$$

Satz. Die Abbildung

$$\mathrm{I}_{R_{ij}} : \chi(U) \times \chi(U) \to \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})(v, w) \quad \mapsto \quad \underbrace{\mathrm{I}(R_{ij}, v, w)}_{u \mapsto \mathrm{I}_u((R_{ij}v)(u), w(u))}$$

ist eine antisymmetrische Bilinearform.

Notation. $R_{ijkl} := \mathrm{I}_u(R_{ij}(u)e_k, e_l)$

Satz (Gaußgleichung)**.**

$$R_{ijkl}(u) = \langle \mathrm{II}_{jk}(u)\mathrm{II}_{kl}(u)\rangle - \langle \mathrm{II}_{ik}(u), \mathrm{II}_{jl}(u)\rangle,$$

wobei $\mathrm{II}_{jk}(u) = (\partial_j\partial_k X(u))^{N_u}$

Bemerkung. Spezialfall: X Hyperfläche, dann

$$\mathrm{II}_{jk} = h_{jk}\nu,$$

Da $\langle \nu, \nu\rangle = 1$, folgt

$$R_{ijkl} = h_{jk}h_{ie} - h_{ik}h_{jl}.$$

Satz (Theorema egregium (Gauß))**.** Sei $X : U \to \mathbb{R}^3$ eine Hyperfläche, dann gilt:

$$K(u) = \frac{\det(h(u))}{\det(g(u))} = \frac{R_{1221}(u)}{\det(g(u))}$$

Letzter Ausdruck ist nur abhängig von der 1. FF und ihren Ableitungen.