# Zusammenfassung Stochastik I

## Der abstrakte Maßbegriff

**Definition.** Eine **Ereignisalgebra** oder **Boolesche Algebra** ist eine Menge $\mathfrak{A}$ mit zweistelligen Verknüpfungen $\wedge$ („und“) und $\vee$ („oder“), einer einstelligen Verknüpfung $\bar{\cdot}$ (Komplement) und ausgezeichneten Elementen $U \in \mathfrak{A}$ (unmögliches Ereignis) und $S \in \mathfrak{A}$ (sicheres Ereignis), sodass für $A, B, C \in \mathfrak{A}$ gilt:

| | |
|---|---|
| i. $A \wedge A = A$ | vii. $A \vee A = A$ |
| ii. $A \wedge B = B \wedge A$ | viii. $A \vee S = S$ |
| iii. $A \wedge S = A$ | ix. $A \vee U = A$ |
| iv. $A \wedge U = U$ | x. $A \vee \overline{A} = S$ |
| v. $A \wedge \overline{A} = U$ | xi. $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$ |
| vi. $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$ | xii. $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ |

**Definition.** Sei $\mathfrak{A}$ eine Boolesche Algebra. Dann definiert

$$A \leq B :\iff A \wedge B = B$$

eine Partialordnung auf $\mathfrak{A}$, gesprochen $A$ impliziert $B$.

**Definition.** Eine **Algebra** (auch Mengenalgebra) $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist ein System von Teilmengen einer Menge $\Omega$ mit $\emptyset \in \mathfrak{A}$, das unter folgenden Operationen stabil ist:

- Vereinigung: $A, B \in \mathfrak{A} \implies A \cup B \in \mathfrak{A}$
- Durchschnitt: $A, B \in \mathfrak{A} \implies A \cap B \in \mathfrak{A}$
- Komplementbildung: $A \in \mathfrak{A} \implies A^c \coloneqq \Omega \backslash A \in \mathfrak{A}$

**Satz** (Isomorphiesatz von Stone)**.** Zu jeder Booleschen Algebra $\mathfrak{A}$ gibt es eine Menge $\Omega$ derart, dass $\mathfrak{A}$ isomorph zu einer Mengenalgebra $\mathfrak{A}$ in $\mathcal{P}(\Omega)$ ist.

**Definition.** Eine **$\sigma$-Algebra** ist eine Algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, die nicht nur unter endlichen, sondern sogar unter abzählbaren Vereinigungen stabil ist, d. h.

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathfrak{A} \implies \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}.$$

*Bemerkung.* Es gilt damit:

- $\Omega = \emptyset^c \in \mathfrak{A}$
- Abgeschlossenheit unter abzählbaren Schnitten:

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathfrak{A} \implies \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \left( \bigcup_{n=0}^{\infty} (A_n)^c \right)^c \in \mathfrak{A}.$$

**Definition.** Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einer $\sigma$-Algebra $\mathfrak{A}$. Dann sind der Limes Superior und Limes Inferior der Folge $A_n$ wie folgt definiert:

$$\limsup_{n \to \infty} A_n \coloneqq \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$$

$$\liminf_{n \to \infty} A_n \coloneqq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$$

*Bemerkung.* In einer $\sigma$-Algebra, in der die Mengen mögliche Ereignisse beschreiben, ist der Limes Superior das Ereignis, das eintritt, wenn unendlich viele Ereignisse der Folge $A_n$ eintreten. Der Limes Infinum tritt genau dann ein, wenn alle bis auf endlich viele Ereignisse der Folge $A_n$ eintreten.

**Definition.** Ein **Ring** $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist ein System von Teilmengen einer Menge $\Omega$ mit $\emptyset \in \mathfrak{A}$, das unter folgenden Operation stabil ist:

- Vereinigung: $A, B \in \mathfrak{A} \implies A \cup B \in \mathfrak{A}$
- Differenz: $A, B \in \mathfrak{A} \implies B \backslash A = B \cap A^c \in \mathfrak{A}$

Ein Ring, der nicht nur unter endlicher, sondern sogar unter abzählbarer Vereinigung stabil ist, heißt **$\sigma$-Ring**.

*Bemerkung.* $\mathfrak{A}$ ($\sigma$-) Algebra $\iff$ $\mathfrak{A}$ ($\sigma$-) Ring und $\Omega \in \mathfrak{A}$.

**Satz.** Sei $(\mathfrak{A}_i)_{(i \in I)}$ eine Familie von ($\sigma$-) Ringen / ($\sigma$-) Algebren über einer Menge $\Omega$. Dann ist auch $\cup_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ ein ($\sigma$-) Ring / eine ($\sigma$-) Algebra über $\Omega$.

**Satz.** Sei $A_1, A_2, ...$ eine Zerlegung von $\Omega$ und $B \in \mathfrak{A}$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B \mid A_n) \mathbb{P}(A_n) \quad \text{(Formel der totalen Wkt.)}$$

$$\mathbb{P}(A_n \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_n) \cdot \mathbb{P}(A_n)}{\mathbb{P}(B)} \quad \text{(Formel von Bayes)}$$

**Definition.** Zwei Ereignisse $A, B \in \mathfrak{A}$ heißen (stochastisch) ($\mathbb{P}$-)unabhängig, falls

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

**Satz.** $A, B$ unabhängig $\iff \mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$.

**Definition.** Eine Familie $A_i)_{i \in I} \subset \mathfrak{A}$ ($I$ endlich, abzählbar oder überabzählbar) heißt **vollständig unabhängig**, falls

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_m}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \mathbb{P}(A_{i_2}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_n})$$

für beliebige $i_1, ..., i_n \in I, 2 \leq n < \infty$ und **paarweise unabh.**, falls

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(A_j) \text{ für } i, j \in I, i \neq j.$$

**Achtung.** Aus paarweiser Unabhängigkeit folgt nicht vollständige Unabhängigkeit (Gegenbeispiel: Bernsteins Tetraeder).

**Definition.** Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \subset \mathfrak{A}$ zwei Ereignissysteme. Dann sind $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ unabhängig, falls $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2)$ für alle $A_1 \in \mathfrak{A}_1, A_2 \in \mathfrak{A}_2$.

**Satz.** Seien $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ zwei unabhängige Ereignisalgebren. Dann sind die $\sigma$-Algebren $\tilde{\mathfrak{A}_1} = \sigma(\mathfrak{A}_1)$ und $\tilde{\mathfrak{A}_2} = \sigma(\mathfrak{A}_2)$ unabhängig.

**Satz** (von Lusin)**.** $f : ([a, b], \mathfrak{L}([a, b])) \to (\mathbb{R}^1, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^1))$ ist Borel-messbar $\iff \forall \epsilon > 0 : \exists K\epsilon \subset [a, b]$ abgeschlossen mit $\lambda_1(\mathbb{R}^1 \setminus K_\epsilon)$ und $f|_{K_\epsilon}$ stetig.

**Satz.** Folgerung: Es sind messbar

- monotone Funktionen
- Funktionen mit endlicher Variation
- Càdlàg-Funktionen, das sind Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{\epsilon \downarrow 0} f(x + \epsilon) = f(x)$ für alle $x \in [a, b[$.

**Definition.** Eine $\mathfrak{A}$-messbare numerische Funktion $X$ über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ heißt **Zufallsgrüße** oder **Zufallsvariable**.

**Definition.** Die durch die ZG $X$ auf $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^1))$ induzierte Bildmaß $P_X$

$$P_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\})$$

heißt **Verteilung** der ZG $X$.

$$F_X(x) = P_X(]-\infty, x]) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\})$$

heißt die **Verteilungsfunktion** der ZG $X$.

**Satz.** $F$ sei eine VF auf $\mathbb{R}^1$. Dann existiert ein Wahrscheinlichkeits-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}$ und eine ZG $X$ derart, dass

$$F_X(x) = F(x) \text{ für } x \in \mathbb{R}^1$$

**Notation.** Sei $X$ eine Zufallsgröße und $B \in \mathfrak{L}(\overline{\mathbb{R}}^1)$. Dann schreibe

$$\{X \in B\} = X^{-1}(B).$$

**Definition.** Eine endliche Familie von Zufallsgrößen $X_1, ..., X_n$ heißt **stochastisch unabhängig**, falls

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \in B_i\}) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{X_i \in B_i\}) \text{ für alle } B_i \in \mathcal{L}(\overline{R}^1), i = 1, ..., n.$$

**Satz.** Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige Zufallsgrößen über $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ von $g_1, ..., g_n$ Borel-messbare Funktionen von $\mathbb{R}^1$ nach $\mathbb{R}^1$. Dann sind auch die Zufallsgrößen $Y_i \coloneqq g_i \circ X_i$ unabhängig über $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$.

**Satz.** Sei $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq ...$ eine isotone Folge elementarer Funktionen über $(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt für jede elementare Funktion $f$ mit $f \leq \sup_{n \in N} f_n$ die Ungleichung $\int_\Omega f \, d\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_\Omega f_n \, d\mu$.

**Satz.** Seien $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ isotone Folgen elementarer Funktionen mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n$. Dann ist $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_\Omega f_n \, d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_\Omega g_n \, d\mu$.