

# Zusammenfassung Analysis III

## Maßtheorie

**Problem** (Schwachtes Maßproblem). Gesucht: Abbildung  $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [\mathbb{R}, \infty]$  mit folgenden Eigenschaften:

- Normierung:  $\mu([0, 1]^n) = 1$
- Endliche Additivität: Sind  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  disjunkt, so gilt  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ .
- Bewegungsinvarianz: Für eine euklidische Bewegung  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $A \subset \mathbb{R}^n$  gilt  $\mu(f(A)) = \mu(A)$ .

**Satz** (Hausdorff). Das schwache Maßproblem ist für  $n \geq 3$  nicht lösbar.

**Satz** (Banach). Das schwache Maßproblem ist für  $n = 1, 2$  lösbar, aber nicht eindeutig lösbar.

**Problem** (Starkes Maßproblem). Gesucht ist eine Abbildung  $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$  wie im schwachen Maßproblem, die anstelle der endlichen Additivität die Eigenschaft der  $\sigma$ -Additivität besitzt:

- Für eine Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  paarweise disjunkter Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  ist

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$$

**Satz.** Das starke Maßproblem besitzt keine Lösung.

**Notation.** Sei im Folgenden  $\Omega$  eine Menge.

**Definition.** Eine Teilmenge  $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  heißt **Ring**, wenn für  $A, B \in \mathfrak{R}$  gilt:

- $\emptyset \in \mathfrak{R}$
- Abgeschlossenheit unter Differenzbildung:  $A \setminus B \in \mathfrak{R}$
- Abgeschlossenheit unter endlichen Vereinigungen:  $A \cup B \in \mathfrak{R}$

**Definition.** Eine Teilmenge  $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  heißt **Algebra**, wenn für  $A, B \in \mathfrak{A}$  gilt:

- $\emptyset \in \mathfrak{A}$
- Abgeschlossenheit unter Komplementbildung:  $A^c = \Omega \setminus A \in \mathfrak{A}$
- Abgeschlossenheit unter endlichen Vereinigungen:  $A \cup B \in \mathfrak{A}$

**Definition.** Eine Algebra  $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  heißt  **$\sigma$ -Algebra**, wenn  $\mathfrak{A}$  unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen ist, d. h. für jede Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathfrak{A}$  gilt

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}$$

**Bemerkung.** • Jede Algebra ist auch ein Ring.

- Ein Ring  $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  ist auch unter endlichen Schnitten abgeschlossen, da  $A \cap B = A \setminus (B \setminus A) \in \mathfrak{R}$
- Ein Ring  $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  ist genau dann eine Algebra, wenn  $\Omega \in \mathfrak{R}$

- Eine  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  ist auch unter abzählbaren Schnitten abgeschlossen: Sei  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathfrak{A}$ , dann gilt

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n)^c \right)^c \in \mathfrak{A}$$

**Notation.** Sei im Folgenden  $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  ein Ring.

**Satz.** Sei  $(A_i)_{i \in I}$  eine Familie von Ringen / Algebren /  $\sigma$ -Algebren über  $\Omega$ . Dann ist auch  $\bigcap_{i \in I} A_i$  ein Ring / eine Algebra / eine  $\sigma$ -Algebra über  $\Omega$ .

**Definition.** Sei  $E \subset \mathcal{P}(\Omega)$ . Setze

$$\mathcal{R}(E) := \{\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega) \mid E \subset \mathfrak{R}, \mathfrak{R} \text{ Ring}\} \text{ und}$$

$$\mathcal{A}(E) := \{\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega) \mid E \subset \mathfrak{A}, \mathfrak{A} \text{ } \sigma\text{-Algebra}\}.$$

Dann heißen

$$\mathfrak{R}(E) := \bigcap_{\mathfrak{R} \in \mathcal{R}(E)} \mathfrak{R}, \quad \mathfrak{A}(E) := \bigcap_{\mathfrak{A} \in \mathcal{A}(E)} \mathfrak{A}$$

von  $E$  **erzeugter Ring** bzw. von  $E$  **erzeugte  $\sigma$ -Algebra**.

**Definition.** Ist  $(\Omega, \mathcal{O})$  ein topologischer Raum, dann heißt  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\Omega, \mathcal{O}) := \mathfrak{A}(\mathcal{O})$  **Borelsche  $\sigma$ -Algebra** von  $(\Omega, \mathcal{O})$ .

**Bemerkung.** Die Borelsche  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  wird auch erzeugt von  $\{I \subset \mathbb{R} \mid I \text{ Intervall}\}$ . Dabei spielt es keine Rolle, ob man nur geschlossene, nur offene, nur nach einer Seite halboffene Intervalle oder gar nur Intervalle obiger Art mit Endpunkten in  $\mathbb{Q}$  zulässt.

**Definition.** Eine Funktion  $\mu : \mathfrak{R} \rightarrow [0, \infty]$  heißt **Inhalt** auf  $\mathfrak{R}$ , falls

- $\mu(\emptyset) = 0$  und
- $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$  für disjunkte  $A, B \in \mathfrak{R}$ .

**Definition.** Ein Inhalt  $\mu : \mathfrak{R} \rightarrow [0, \infty]$  heißt **Prämaß** auf  $\mathfrak{R}$ , wenn  $\mu$   $\sigma$ -additiv ist, d. h. wenn für jede Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  paarweise disjunkter Elemente von  $\mathfrak{R}$  mit  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{R}$  gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$$

**Definition.** Ein **Maß** ist ein Prämaß auf einer  $\sigma$ -Algebra.

**Satz.** Für einen Inhalt  $\mu$  auf  $\mathfrak{R}$  gilt für alle  $A, B \in \mathfrak{R}$ :

- $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$
- Monotonie:  $A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$
- Aus  $A \subset B$  und  $\mu(B) < \infty$  folgt  $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$
- Subadditivität: Für  $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{R}$  ist  $\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$
- Ist  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge disjunkter Elemente aus  $\mathfrak{R}$ , sodass

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{R}, \text{ so gilt } \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

**Definition.** Ein Inhalt / Maß auf einem Ring  $\mathfrak{R}$  / einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{A}$  heißt **endlich**, falls  $\mu(A) < \infty$  für alle  $A \in \mathfrak{R}$  bzw.  $A \in \mathfrak{A}$ .

**Satz.** Ein Maß auf einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{A}$  ist  $\sigma$ -subadditiv, d. h. für alle Folgen  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathfrak{A}$  gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

**Definition.** Sei  $A \subset \Omega$ . Dann heißt die Abbildung

$$\chi_A = \text{ind} 1_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in A \\ 0, & \text{falls } \omega \notin A \end{cases}$$

**Indikatorfunktion** oder **charakteristische Funktion** von  $A$ .

**Definition.** Wir sagen eine Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **konvergiert** gegen  $A \subset \Omega$ , notiert  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ , wenn  $(1_{A_n})_{n \in \mathbb{N}}$  punktweise gegen  $1_A$  konvergiert.

**Definition.** Für eine Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{P}(\Omega)$  heißen

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n &:= \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ liegt in unendlich vielen } A_n\} \\ &= \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n &:= \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ liegt in allen bis auf endlich vielen } A_n\} \\ &= \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \end{aligned}$$

**Limes Superior** bzw. **Limes Inferior** der Folge  $A_n$ .

**Satz.** Es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A \iff \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ .

**Definition.** Eine Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{P}(\Omega)$  heißt

- **monoton wachsend**, wenn für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $A_n \subset A_{n+1}$ ,
- **monoton fallend**, wenn für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $A_n \supset A_{n+1}$ .

**Satz.** Sei  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathcal{P}(\Omega)$ .

- Ist  $(A_n)$  monoton wachsend, so gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ .
- Ist  $(A_n)$  monoton fallend, so gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ .

**Satz.** Sei  $\mu$  ein Inhalt auf  $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ . Wir betrachten folgende Aussagen:

- $\mu$  ist ein Prämaß auf  $\mathfrak{R}$ .
- Stetigkeit von unten: Für jede monoton wachsende Folge

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } \mathfrak{R} \text{ mit } A := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathfrak{R} \text{ gilt}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A).$$

(iii) Stetigkeit von oben: Für jede monoton fallende Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$

in  $\mathfrak{R}$  mit  $\mu(A_0) < \infty$  und  $A := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathfrak{R}$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A).$$

(iv) Für jede monoton fallende Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathfrak{R}$  mit  $\mu(A_0) < \infty$

und  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \emptyset$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$ .

Dann gilt  $(i) \iff (ii) \implies (iii) \iff (iv)$ .

Falls  $\mu$  endlich, gilt auch  $(iii) \implies (ii)$ .

**Satz.** Sei  $\mu$  ein Maß auf einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ . Dann gilt:

- Für eine Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathfrak{A}$  gilt  $\mu\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n\right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$ .

- Sei  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathfrak{A}$ , sodass es ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt mit

$$\mu\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n\right) < \infty, \text{ dann gilt } \mu\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

- Sei  $\mu$  endlich und  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathfrak{A}$ , dann gilt

$$\mu\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n\right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \leq \mu\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right).$$

- Sei  $\mu$  endlich und  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine gegen  $A$  konvergente Folge in  $\mathfrak{A}$ , dann gilt  $A \in \mathfrak{A}$  und  $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$ .

**Definition.** Ein Inhalt auf einem Ring  $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  heißt  **$\sigma$ -endlich**, wenn gilt: Es gibt eine Folge  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathfrak{R}$ , sodass

- $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$  und

- $\mu(S_n) < \infty$  für alle  $n \in \mathbb{N}$

**Definition.** Eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  wird **numerische Funktion** genannt.

**Definition.** Eine numerische Funktion  $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  heißt **äußeres Maß** auf  $\Omega$ , wenn gilt:

- $\mu^*(\emptyset) = 0$
- Monotonie:  $A \subset B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
- $\sigma$ -Subadditivität: Ist  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Teilmengen von  $\Omega$ ,

$$\text{dann gilt } \mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

*Bemerkung.* Wegen  $\mu^*(\emptyset) = 0$  und der Monotonie nimmt ein äußeres Maß nur Werte in  $[0, \infty]$  an.

**Definition.** Eine Teilmenge  $A \subset \Omega$  heißt  **$\mu^*$ -messbar**, falls für alle  $Q \subset \Omega$  gilt

$$\mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A).$$

**Satz** (Carathéodory). Sei  $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$  ein äußeres Maß, dann gilt

- Die Menge  $\mathfrak{A}^* := \{A \subset \Omega \mid A \text{ ist } \mu^*\text{-messbar}\}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra.
- $\mu^*|_{\mathfrak{A}^*}$  ist ein Maß auf  $\mathfrak{A}^*$ .

**Satz (Fortsetzungssatz).** Sei  $\mu$  ein Prämaß auf einem Ring  $\mathfrak{R}$ , dann gibt es ein Maß  $\tilde{\mu}$  auf der von  $\mathfrak{R}$  erzeugten  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{A}(\mathfrak{R})$  mit  $\tilde{\mu}|_{\mathfrak{R}} = \mu$ . Falls  $\mu$   $\sigma$ -endlich, so ist  $\tilde{\mu}$  eindeutig bestimmt.

*Bemerkung.* Im Beweis wird ein äußeres Maß auf  $\Omega$  wie folgt definiert:

$$\mu^*(Q) := \inf \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_n) \mid (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{A}(Q) \right\},$$

wobei  $\inf \emptyset := \infty$  und

$$\mathfrak{A}(Q) := \left\{ (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid Q \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \text{ und } A_n \text{ Folge in } \mathfrak{R} \right\}.$$

Das Prämaß  $\mu^*$  eingeschränkt auf  $\mathfrak{A}^* \supset \mathfrak{A}(\mathfrak{R})$  ist ein Maß.

## Das Lebesgue-Borel-Maß

**Notation.** Für zwei Elemente  $a = (a_1, \dots, a_n)$  und  $b = (b_1, \dots, b_n)$  schreibe

- $a \triangleleft b$ , falls  $a_j < b_j$  für alle  $j = 1, \dots, n$ .
- $a \trianglelefteq b$ , falls  $a_j \leq b_j$  für alle  $j = 1, \dots, n$ .

**Definition.** Für  $a, b \in \mathbb{R}^n$  heißen

$$]a, b[ := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \triangleleft x \triangleleft b\}, \quad \mu([a, b]) := \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$$

**Elementarquader** und **Elementarinhalt**. Sei im Folgenden  $\mathcal{E}$  die Menge aller Elementarquader.

**Satz.** Für alle  $A \in \mathfrak{R}(\mathcal{E})$  gibt es paarweise disjunkte Elementarquader  $Q_1, \dots, Q_p \in \mathcal{E}$  sodass  $A = \sqcup_{i=1}^p Q_i$ .

**Definition.** Für  $A \in \mathfrak{R}(\mathcal{E})$  setze  $\mu(A) := \sum_{i=1}^p \mu(Q_i)$ , wenn  $A = \sqcup_{i=1}^p Q_i$  für paarweise disjunkte  $Q_1, \dots, Q_p$ .

**Satz.**  $\mu$  definiert ein Prämaß auf  $\mathfrak{R}(\mathcal{E})$ , genannt das **Lebesgue-Borel-Prämaß** auf  $\mathbb{R}^n$ .

**Definition.** Die eindeutige (da  $\mu$   $\sigma$ -endlich) Fortsetzung  $\tilde{\mu}$  von  $\mu$  auf  $\mathfrak{A}(\mathcal{E}) = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$  wird **Lebesgue-Borel-Maß** genannt.

*Bemerkung.* Das Lebesgue-Borel-Maß ist das einzige Maß auf  $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ , welches jedem Elementarquader seinen Elementarinhalt zuordnet.

**Definition.** Sei  $\mu$  ein Maß auf einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ . Eine Menge  $N \subset \Omega$  heißt **Nullmenge**, wenn es eine Menge  $A \in \mathfrak{A}$  gibt mit  $N \subset A$  und  $\mu(A) = 0$ . Die Menge aller Nullmengen wird mit  $\mathfrak{N}_\mu$  bezeichnet.

**Definition** (Fortsetzung auf Nullmengen). Sei  $\mu$  das Lebesgue-Borel-Maß auf  $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ . Dann heißt die von  $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$  und den entsprechenden Nullmengen erzeugte  $\sigma$ -Algebra  $\tilde{\mathfrak{A}}_\mu$  **Lebesguesche  $\sigma$ -Algebra**, notiert  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ , und das fortgesetzte Maß **Lebesgue-Maß**.

**Definition.** Sei  $\Omega$  eine Menge und  $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega$ , sowie ggf.  $\mu$  ein Maß auf  $\mathfrak{A}$ . Dann heißt

- das Tupel  $(\Omega, \mathfrak{A})$  **messbarer Raum**,
- das Tripel  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  **Maßraum**.

**Definition.** Seien  $(\Omega, \mathfrak{A})$  und  $(\Omega', \mathfrak{A}')$  zwei messbare Räume. Eine Abbildung  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$  heißt **messbar** oder genauer  $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$ -messbar, wenn für alle  $A' \in \mathfrak{A}'$  gilt  $f^{-1}(A') \in \mathfrak{A}$  oder, kürzer,  $f^{-1}(\mathfrak{A}') \subset \mathfrak{A}$ .

*Bemerkung.* Die messbaren Räume bilden eine Kategorie mit messbaren Abbildungen als Morphismen, d. h. die Identitätsabbildung von einem messbaren Raum zu sich selbst ist messbar und die Verkettung zweier messbarer Abbildungen ist messbar.

**Satz.** • Seien  $(\Omega, \mathfrak{A})$  ein messbarer Raum,  $\Omega'$  eine Menge und  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$  eine Abbildung. Dann ist  $\mathfrak{A}' := \{A' \subset \Omega' \mid f^{-1}(A') \in \mathfrak{A}\}$  die größte  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega'$ , sodass  $f$  messbar ist.

- Ist  $\Omega$  eine Menge und  $(\Omega', \mathfrak{A}')$  ein messbarer Raum sowie  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$  eine Abbildung. Dann ist  $f^{-1}(\mathfrak{A}')$  eine  $\sigma$ -Algebra.
- Seien  $I$  eine Indexmenge,  $\Omega$  eine Menge,  $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i), i \in I$  messbare Räume und  $f_i : \Omega \rightarrow \Omega_i$  Abbildungen, dann ist

$$\mathfrak{A} := \mathfrak{A} \left( \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathfrak{A}_i) \right)$$

die kleinste  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega$ , sodass alle Abbildungen  $f_i, i \in I$ , messbar sind. Diese  $\sigma$ -Algebra wird die von der Familie  $\{f_i \mid i \in I\}$  **erzeugte  $\sigma$ -Algebra** genannt.

**Satz.** Sei  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$  eine Abbildung und  $\mathcal{E}' \subset \mathcal{P}(\Omega')$ , dann gilt

$$\mathfrak{A}(f^{-1}(\mathcal{E}')) = f^{-1}(\mathfrak{A}(\mathcal{E}'))$$

**Satz.** Sei  $(\Omega, \mathfrak{A})$  ein messbarer Raum und  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$  eine Abbildung, sowie  $\mathcal{E}' \subset \mathcal{P}(\Omega')$ . Dann gilt:

$$f \text{ ist } (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}(\mathcal{E}'))\text{-messbar} \iff f^{-1}(\mathcal{E}') \subset \mathfrak{A}$$

**Satz.** Seien  $(\Omega, \mathcal{O})$  und  $(\Omega', \mathcal{O}')$  zwei topologische Räume und  $\mathfrak{A} := \mathfrak{A}(\mathcal{O})$  bzw.  $\mathfrak{A}' := \mathfrak{A}(\mathcal{O}')$  die dazugehörigen Borelschen  $\sigma$ -Algebren. Dann ist jede stetige Abbildung  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$   $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$ -messbar.

**Satz** (Projektionssatz). Seien  $I$  eine Indexmenge,  $(\Omega_0, \mathfrak{A}_0)$  sowie  $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i), i \in I$  messbare Räume und  $\Omega$  eine Menge. Seien  $g_i : \Omega \rightarrow \Omega_i, i \in I$  und  $f : \Omega_0 \rightarrow \Omega$  Abbildungen. Wir setzen

$$\mathfrak{A} := \mathfrak{A} \left( \bigcup_{i \in I} g_i^{-1}(\mathfrak{A}_i) \right). \text{ Dann sind folgende Aussagen äquivalent:}$$

- $f$  ist  $(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A})$ -messbar.
- Für alle  $i \in I$  sind die Abbildungen  $g_i \circ f$   $(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_i)$ -messbar.

**Satz.** Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $(\Omega', \mathfrak{A}')$  ein messbarer Raum und  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$  eine messbare Abbildung, dann ist

$$\mu' = f_*(\mu) = \mu \circ f^{-1} : \mathfrak{A}' \rightarrow [0, \infty], \quad A' \mapsto \mu(f^{-1}(A'))$$

ein Maß auf  $\mathfrak{A}'$ , genannt das **Bildmaß** von  $f$ .

**Definition.** Die  $\sigma$ -Algebra der Borelmengen auf  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  ist

$$\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \{A, A \cup \{+\infty\}, A \cup \{-\infty\}, A \cup \{\pm\infty\} \mid A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\}.$$

**Satz.**  $\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \mathfrak{A}(\{[a, \infty] \mid a \in \mathbb{R}\})$

**Notation.** Seien  $f, g : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  zwei numerische Funktionen. Setze

$$\{f \leq g\} := \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \leq g(\omega)\} \subset \Omega$$

und definiere analog  $\{f < g\}, \{f \geq g\}, \{f > g\}, \{f = g\}, \{f \neq g\}$ .

**Satz.** Für eine numerische Funktion  $f : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B})$  sind äquivalent:

- $f$  ist messbar
- für alle  $a \in \mathbb{R}$  gilt  $\{f \geq a\} = f^{-1}([a, \infty]) \in \mathfrak{A}$
- für alle  $a \in \mathbb{R}$  gilt  $\{f > a\} = f^{-1}([a, \infty]) \in \mathfrak{A}$
- für alle  $a \in \mathbb{R}$  gilt  $\{f \leq a\} = f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathfrak{A}$
- für alle  $a \in \mathbb{R}$  gilt  $\{f < a\} = f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathfrak{A}$

**Satz.** Für zwei numerische Funktionen  $f, g : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B})$  gilt:

- $\{f < g\} \in \mathfrak{A}$       •  $\{f > g\} \in \mathfrak{A}$       •  $\{f = g\} \in \mathfrak{A}$
- $\{f \leq g\} \in \mathfrak{A}$       •  $\{f \geq g\} \in \mathfrak{A}$       •  $\{f \neq g\} \in \mathfrak{A}$

**Satz.** Seien  $f, g : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B})$  messbare numerische Funktionen und  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Dann auch messbar ( $\dagger$ : falls  $0 \notin \text{Bild}(f)$ ):

$$\bullet \lambda \cdot f \quad \bullet f + \mu \cdot g \quad \bullet f \cdot g \quad \bullet \frac{1}{f} (\dagger) \quad \bullet \frac{g}{f} (\dagger)$$

**Satz.** Seien  $f_n : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}), n \in \mathbb{N}$  messbare numerische Funktionen, dann auch messbar:

$$\bullet \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \quad \bullet \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n \quad \bullet \liminf_{n \in \mathbb{N}} f_n \quad \bullet \limsup_{n \in \mathbb{N}} f_n$$

Dabei werden Infimum, Supremum, usw. punktweise gebildet.

**Satz.** Seien  $f_1, \dots, f_n : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B})$  messbare numerische Funktionen, dann auch messbar:

$$\bullet \max(f_1, \dots, f_n) \quad \bullet \min(f_1, \dots, f_n)$$

**Definition.** Für  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  heißen die Funktionen

- $|f| := \max(f, -f) : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  **Betrag** von  $f$
- $f^+ := \max(f, 0) : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  **Positivteil** von  $f$
- $f^- := -\min(f, 0) : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  **Negativteil** von  $f$

*Bemerkung.*  $f = f^+ - f^-$

**Satz.** Falls  $f : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B})$  messbar, dann auch  $|f|, f^+$  und  $f^-$ .

## Das Lebesguesche Integral

**Definition.** Eine Funktion  $f : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$  heißt **einfache Funktion** oder **Elementarfunktion** auf  $(\Omega, \mathfrak{A})$ , wenn gilt:

- $f$  ist messbar
  - $f(\Omega) \subset [0, \infty[$
  - $f(\Omega)$  ist endlich
- Die Menge aller einfachen Funktionen auf  $(\Omega, \mathfrak{A})$  ist  $\mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ .

**Definition.** Sei  $f \in \mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$  und  $\Omega = \sqcup_{j=1}^k A_j$  eine disjunkte Vereinigung von Mengen mit  $A_j \in \mathfrak{A}$  für alle  $j = 1, \dots, k$ , sodass  $f(A_j) = \{y_j\}$ , dann heißt die Darstellung

$$f = \sum_{j=1}^k y_j \cdot \text{ind} 1_{A_j}$$

**kanonische Darstellung** von  $f$ .

*Bemerkung.* Die kanonische Darstellung ist nicht eindeutig.

**Satz.** Seien  $f, g \in \mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$  und  $a \geq 0$ . Dann auch in  $\mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ :

$$\bullet f + g \quad \bullet f \cdot g \quad \bullet \max(f, g) \quad \bullet \min(f, g) \quad \bullet a \cdot f$$

**Definition.** Sei  $f \in \mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$  und  $f = \sum_{j=1}^k y_j \mathbb{1}_{A_j}$  eine kanonische Darstellung von  $f$ . Sei ferner  $\mu$  ein Maß auf  $\mathfrak{A}$ . Dann heißt die Größe

$$\int_{\Omega} f \, d\mu := \sum_{j=1}^k y_j \mu(A_j)$$

das Lebesgue-Integral von  $f$  auf  $\Omega$  bzgl. des Maßes  $\mu$ .

*Bemerkung.* Obige Größe ist wohldefiniert, d. h. unabhängig von der kanonischen Darstellung.

**Satz.** Seien  $f, g \in \mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ ,  $\mu$  ein Maß auf  $\mathfrak{A}$  und  $\alpha \geq 0$ , dann gilt

- $\int_{\Omega} (\alpha f) \, d\mu = \alpha \int_{\Omega} f \, d\mu$
- Additivität:  $\int_{\Omega} (f + g) \, d\mu = \int_{\Omega} f \, d\mu + \int_{\Omega} g \, d\mu$
- Monotonie: Falls  $g \leq f$ , dann  $\int_{\Omega} g \, d\mu \leq \int_{\Omega} f \, d\mu$

**Satz.** Angenommen, die Funktionen  $f_n \in \mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A}, \mu), n \in \mathbb{N}$  bilden eine monoton wachsende Funktionenfolge und für  $g \in \mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$  gilt  $g \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ , dann gilt  $\int_{\Omega} g \, d\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n \, d\mu$ .

**Korollar.** Seien  $f_n, g_n \in \mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A}), n \in \mathbb{N}$  und die Funktionenfolgen  $f_n$  und  $g_n$  monoton wachsend mit  $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n$ . Dann gilt

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n \, d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} g_n \, d\mu.$$

**Definition.** Sei  $\overline{E}(\Omega, \mathfrak{A})$  die Menge aller Funktionen  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , die Grenzfunktionen (ptw. Konvergenz) monoton wachsender Funktionenfolgen in  $\mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$  sind.

**Definition.** Für eine Funktion  $f \in \overline{E}(\Omega, \mathfrak{A})$  (d. h. es existiert eine Folge  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$  mit  $f = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n$ ) und ein Maß  $\mu$  auf  $\mathfrak{A}$  heißt

$$\int_{\Omega} f \, d\mu := \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} g_n \, d\mu$$

**Lebesgue-Integral** von  $f$  über  $\Omega$  bzgl.  $\mu$ .

**Satz.**  $\overline{E}(\Omega, \mathfrak{A}) = \{f : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}) \mid f \text{ messbar und } f \geq 0\}$

**Satz.** Die Eigenschaften des Integrals für einfache Funktionen (Linearität, Monotonie) übertragen sich auf das allgemeine Lebesgue-Integral.

**Satz** (Satz von der monotonen Konvergenz). Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton wachsende Folge von Funktionen in  $\overline{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ , dann gilt für  $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \in \overline{E}(\Omega, \mathfrak{A})$  und jedes Maß  $\mu$  auf  $\mathfrak{A}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f \, d\mu_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f_n \, d\mu = \int_{\Omega} f \, d\mu$$

*Bemerkung.* Die Aussage ist für monoton fallende Funktionen i. A. falsch.

**Definition.** Eine messbare Funktion  $f : (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$  heißt **integrierbar** oder genauer  $\mu$ -integrierbar (im Sinne von Lebesgue), wenn gilt:

$$\int_{\Omega} f^+ \, d\mu < \infty \quad \text{und} \quad \int_{\Omega} f^- \, d\mu < \infty.$$

In diesem Fall definieren wir das **Lebesgue-Integral** von  $f$  als

$$\int_{\Omega} f \, d\mu := \int_{\Omega} f^+ \, d\mu - \int_{\Omega} f^- \, d\mu.$$

**Notation.**  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu) = \mathcal{L}^1(\mu)$  bezeichnet die Menge der  $\mu$ -integrierbaren Funktionen auf  $\Omega$ .

**Satz.** Für eine messbare Funktion  $f : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$  sind äquivalent:

- $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ .
- $|f| \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ .
- $f^+, f^- \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ .
- $\exists g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  mit  $|f| \leq g$ .
- Es gibt nicht negative  $u, v \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  mit  $f = u - v$ .

Im letzten Fall gilt  $\int_{\Omega} f \, d\mu = \int_{\Omega} u \, d\mu - \int_{\Omega} v \, d\mu$ .

**Satz.** •  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ist ein  $\mathbb{R}$ -VR und die Abbildung

$$\int : \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_{\Omega} f \, d\mu \text{ ist linear.}$$

- $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \implies \max(f, g), \min(f, g) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$
- Monotonie:  $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu), f \leq g \implies \int_{\Omega} f \, d\mu \leq \int_{\Omega} g \, d\mu$ .

- Dreiecksungleichung:  $\left| \int_{\Omega} f \, d\mu \right| \leq \int_{\Omega} |f| \, d\mu$  für alle  $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$

**Definition.** Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum,  $A \in \mathfrak{A}$  und  $f \in \overline{E}(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  oder  $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ . Dann ist das  **$\mu$ -Integral von  $f$  über  $A$**

$$\int_A f \, d\mu = \int_{\Omega} (\mathbb{1}_A \cdot f) \, d\mu.$$

**Definition.** Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum. Eine Menge  $N \subset \Omega$  heißt  **$(\mu)$ -Nullmenge**, wenn es ein  $A \in \mathfrak{A}$  mit  $\mu(A) = 0$  und  $N \subset A$ .

**Definition.** Ein Maßraum  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  heißt **vollständig**, wenn jede Nullmenge  $N \subset \Omega$  in  $\mathfrak{A}$  liegt.

**Definition.** Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum. Setze

$$\tilde{\mathfrak{N}}_{\mu} := \{N \subset \Omega \mid N \text{ ist } \mu\text{-Nullmenge}\},$$

$$\tilde{\mathfrak{A}}_{\mu} := \{A \cup N \mid A \in \mathfrak{A}, N \in \tilde{\mathfrak{N}}_{\mu}\}.$$

Dann ist  $\tilde{\mathfrak{A}}_{\mu}$  eine  $\sigma$ -Algebra und mit  $\tilde{\mu}(A \cup N) := \mu(A)$  ist  $(\Omega, \tilde{\mathfrak{A}}_{\mu}, \tilde{\mu})$  ein Maßraum, genannt **Vervollständigung** von  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ .

**Definition.** Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $E(\omega)$  eine Aussage für alle  $\omega \in \Omega$ . Man sagt,  $E$  ist  **$(\mu)$ -fast-überall wahr**, wenn  $\{\omega \in \Omega \mid \neg E(\omega)\}$  eine Nullmenge ist.

Zwei Funktionen  $f, g : \Omega \rightarrow X$  heißen  **$(\mu)$ -fast-überall gleich**,

notiert  $f \stackrel{\text{f.ü.}}{=} g$ , wenn  $\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \neq g(\omega)\}$  eine Nullmenge ist. Eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  heißt  **$(\mu)$ -fast-überall endlich**, wenn  $\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) = \infty\}$  eine Nullmenge ist.