Zusammenfassung Stochastik I

Der abstrakte Maßbegriff

Definition. Eine **Ereignisalgebra** oder **Boolesche Algebra** ist eine Menge $\mathfrak{A}$ mit zweistelligen Verknüpfungen $\wedge$ („und") und $\vee$ („oder"), einer einstelligen Verknüpfung $\overline{\cdot}$ (Komplement) und ausgezeichneten Elementen $U \in \mathfrak{A}$ (unmögliches Ereignis) und $S \in \mathfrak{A}$ (sicheres Ereignis), sodass für $A, B, C \in \mathfrak{A}$ gilt:

i. $A \wedge A = A$	vii. $A \vee A = A$
ii. $A \wedge B = B \wedge A$	viii. $A \vee S = S$
iii. $A \wedge S = A$	ix. $A \vee U = A$
iv. $A \wedge U = U$	x. $A \vee \overline{A} = S$
v. $A \wedge \overline{A} = U$	xi. $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$
vi. $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$	xii. $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

Definition. Sei $\mathfrak{A}$ eine Boolesche Algebra. Dann definiert

$$A \leq B :\iff A \wedge B = B$$

eine Partialordnung auf $\mathfrak{A}$, gesprochen A impliziert B.

Definition. Eine **Algebra** (auch Mengenalgebra) $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist ein System von Teilmengen einer Menge Ω mit $\emptyset \in \mathfrak{A}$, das unter folgenden Operationen stabil ist:

- Vereinigung: $A, B \in \mathfrak{A} \implies A \cup B \in \mathfrak{A}$
- Durchschnitt: $A, B \in \mathfrak{A} \implies A \cap B \in \mathfrak{A}$
- Komplementbildung: $A \in \mathfrak{A} \implies A^c := \Omega \backslash A \in \mathfrak{A}$

Satz (Isomorphiesatz von Stone)**.** Zu jeder Booleschen Algebra $\mathfrak{A}$ gibt es eine Menge Ω derart, dass $\mathfrak{A}$ isomorph zu einer Mengenalgebra $\mathfrak{A}$ in $\mathcal{P}(\Omega)$ ist.

Definition. Eine **σ-Algebra** ist eine Algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, die nicht nur unter endlichen, sondern sogar unter abzählbaren Vereinigungen stabil ist, d. h.

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathfrak{A} \implies \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}.$$

Bemerkung. Es gilt damit:

- $\Omega = \emptyset^c \in \mathfrak{A}$
- Abgeschlossenheit unter abzählbaren Schnitten:

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathfrak{A} \implies \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (A_n)^c \right)^c \in \mathfrak{A}.$$

Definition. Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$. Dann sind der Limes Superior und Limes Inferior der Folge A_n wie folgt definiert:

$$\limsup_{n \to \infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$$
$$\liminf_{n \to \infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$$

Bemerkung. In einer σ-Algebra, in der die Mengen mögliche Ereignisse beschreiben, ist der Limes Superior das Ereignis, das eintritt, wenn unendlich viele Ereignisse der Folge A_n eintreten. Der Limes Infinum tritt genau dann ein, wenn alle bis auf endlich viele Ereignisse der Folge A_n eintreten.

Definition. Ein **Ring** $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist ein System von Teilmengen einer Menge Ω mit $\emptyset \in \mathfrak{A}$, das unter folgenden Operation stabil ist:

- Vereinigung: $A, B \in \mathfrak{A} \implies A \cup B \in \mathfrak{A}$
- Differenz: $A, B \in \mathfrak{A} \implies B \backslash A = B \cap A^c \in \mathfrak{A}$

Ein Ring, der nicht nur unter endlicher, sondern sogar unter abzählbarer Vereinigung stabil ist, heißt **σ-Ring**.

Bemerkung. $\mathfrak{A}$ (σ-) Algebra $\iff$ $\mathfrak{A}$ (σ-) Ring und $\Omega \in \mathfrak{A}$.

Satz. Sei $(\mathfrak{A}_i)_{(i \in I)}$ eine Familie von (σ-) Ringen / (σ-) Algebren über einer Menge Ω. Dann ist auch $\cup_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ ein (σ-) Ring / eine (σ-) Algebra über Ω.

Satz. Sei $A_1, A_2, ...$ eine Zerlegung von Ω und $B \in \mathfrak{A}$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B \,|\, A_n) \mathbb{P}(A_n) \quad \text{(Formel der totalen Wkt.)}$$
$$\mathbb{P}(A_n \,|\, B) = \frac{\mathbb{P}(B \,|\, A_n) \cdot \mathbb{P}(A_n)}{\mathbb{P}(B)} \quad \text{(Formel von Bayes)}$$

Definition. Zwei Ereignisse $A, B \in \mathfrak{A}$ heißen (stochastisch) ($\mathbb{P}$-)unabhängig, falls

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Satz. A, B unabhängig $\iff$ $\mathbb{P}(B \,|\, A) = \mathbb{P}(B)$.

Definition. Eine Familie $A_i)_{i \in I} \subset \mathfrak{A}$ (I endlich, abzählbar oder überabzählbar) heißt **vollständig unabhhängig**, falls

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_m}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \mathbb{P}(A_{i_2}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_n})$$

für beliebige $i_1, ..., i_n \in I, 2 \leq n < \infty$ und **paarweise unabh.**, falls

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(A_j) \text{ für } i, j \in I, i \neq j.$$

Achtung. Aus paarweiser Unabhängigkeit folgt nicht vollständige Unabhängigkeit (Gegenbeispiel: Bernsteins Tetraeder).

Definition. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \subset \mathfrak{A}$ zwei Ereignissysteme. Dann sind $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ unabhängig, falls $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2)$ für alle $A_1 \in \mathfrak{A}_1, A_2 \in \mathfrak{A}_2$.

Satz. Seien $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ zwei unabhängige Ereignisalgebren. Dann sind die σ-Algebren $\tilde{\mathfrak{A}}_1 = \sigma(\mathfrak{A}_1)$ und $\tilde{\mathfrak{A}}_2 = \sigma(\mathfrak{A}_2)$ unabhängig.

Satz (von Lusin)**.** $f : ([a, b], \mathfrak{L}([a, b])) \to (\mathbb{R}^1, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^1))$ ist Borel-messbar $\iff$ $\forall \epsilon > 0 : \exists K\epsilon \subset [a, b]$ abgeschlossen mit $\lambda_1(\mathbb{R}^1 \setminus K_\epsilon)$ und $f|_{K_\epsilon}$ stetig.

Satz. Folgerung: Es sind messbar

- monotone Funktionen
- Funktionen mit endlicher Variation
- Càdlàg-Funktionen, das sind Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{\epsilon \downarrow 0} f(x + \epsilon) = f(x)$ für alle $x \in [a, b[$.

Lemma (Borel-Cantelli)**.** Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Ereignissen über $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Dann gilt für $A = \limsup_{n \to \infty}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \implies \mathbb{P}(A) = 0.$$

Falls die Ereignisse $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unabhängig sind, so gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty \implies \mathbb{P}(A) = 1.$$

Definition. Sei $(\mathfrak{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge von σ-Algebren über Ω. Dann ist

$$\mathcal{T}_\infty = \cap_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}_n \quad \text{mit} \quad \mathcal{T}_n := \sigma\left(\cup_{k=n}^{\infty} \mathfrak{A}_k\right)$$

die **terminale σ-Algebra** von $(\mathfrak{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Satz (Null-Eins-Gesetz von Kolmogorow)**.** Sei $(\mathfrak{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen Unter-σ-Algebren in einem W-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Dann gilt $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ für alle Ereignisse $A \in \mathcal{T}_\infty$ der terminalen σ-Algebra.

Definition. Eine $\mathfrak{A}$-messbare numerische Funktion X über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ heißt **Zufallsgrüße** oder **Zufallsvariable**.

Definition. Die durch die ZG X auf $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^1))$ induzierte Bildmaß P_X

$$P_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in B\})$$

heißt **Verteilung** der ZG X.

$$F_X(x) = P_X(]-\infty, x]) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq x\})$$

heißt die **Verteilungsfunktion** der ZG X.

Satz. F sei eine VF auf $\mathbb{R}^1$. Dann existiert ein Wahrscheinlichkeits-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}$ und eine ZG X derart, dass

$$F_X(x) = F(x) \text{ für } x \in \mathbb{R}^1$$

Notation. Sei X eine Zufallsgröße und $B \in \mathfrak{L}(\overline{\mathbb{R}}^1)$. Dann schreibe

$$\{X \in B\} = X^{-1}(B).$$

Definition. Eine endliche Familie von Zufallsgrößen $X_1, ..., X_n$ heißt **stochastisch unabhängig**, falls

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \in B_i\}) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{X_i \in B_i\}) \text{ für alle } B_i \in \mathcal{L}(\overline{R}^1), i = 1, ..., n.$$

Satz. Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige Zufallsgrößen über $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ von $g_1, ..., g_n$ Borel-messbare Funktionen von $\mathbb{R}^1$ nach $\mathbb{R}^1$. Dann sind auch die Zufallsgrößen $Y_i := g_i \circ X_i$ unabhängig über $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$.

Satz. Sei $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq ...$ eine isotone Folge elementarer Funktionen über $(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt für jede elementare Funktion f mit $f \leq \sup_{n \in N} f_n$ die Ungleichung $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu$.

Satz. Seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ isotone Folgen elementarer Funktionen mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n$. Dann ist $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega g_n \,\mathrm{d}\mu$.

Satz. Sei $f : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \to (\overline{R}^1, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^1))$ sein $\mathfrak{A}$-messbar, numerisch. Dann sind äquivalent:

- f ist μ-integrierbar
- f^+ und f^- sind μ-integrierbar mit $\int_\Omega f^\pm \,\mathrm{d}\mu < \infty$
- $\int_\Omega |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty$
- $\int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu < \infty$ für eine $\mathfrak{A}$-messbare, numerische Funktion mit $|f| \leq g$

Satz. Seien $f, g : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \to (\mathbb{R}^1, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^1))$ μ-integrierbar. Dann sind $f \pm g$, $f \vee g$, $f \wedge g$ und $\alpha \cdot f$ für $\alpha \in \mathbb{R}^1$ μ-integrierbar und es gilt

$$\int_\Omega \alpha \cdot f + \beta \cdot g \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu + \beta \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu, \qquad \left| \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \int_\Omega |f| \,\mathrm{d}\mu,$$

$$f \leq g \implies \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu$$

Definition. Mit $L^p(\mu) = L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ bezeichnen wir den normierten Vektorraum der aus den Funktionen $f : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \to (\mathbb{R}^1, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^1))$ mit $\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu < \infty$ für $1 \leq p \leq \infty$ besteht. Die Norm in diesem Raum wird durch

$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{1/p}$$

definiert. Es kann gezeigt werden, dass die Normeigenschaften erfüllt sind.

Bemerkung. Der $L^p(\mu)$ ist ein vollständiger normierter Raum, d. h. jede Cauchy-Folge bzgl. der Norm $\|\cdot\|_p$ ist auch konvergent. Im Spezialfall $p = 2$ heißt $L^p(\mu)$ Hilbertraum der quadratisch integrierbaren Funktionen mit Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_\Omega f \cdot g \,\mathrm{d}\mu$. Es gilt in diesem Fall außerdem die Cauchy-Schwarz-Bunjakowski-Ungleichung:

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$$

Höldersche Ungleichung:

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

wobei $p, q \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Satz. Sei $f_n : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \to (\mathbb{R}^1, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^1))$ $\mathfrak{A}$-messbar und $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq ....$ Dann gilt

$$\int_\Omega \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \,\mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu$$

Satz (von Beppo Levi)**.** Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge monotoner nichtnegativer, $\mathfrak{A}$-messbarer, numerischer Funktionen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$. Dann gilt:

$$\int_\Omega \sum_{n=1}^\infty f_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu$$

Satz. f sei $\mathfrak{A}$-messbar, nichtnegativ und μ-integrierbar. Dann ist

$$\nu(A) := \int_A f \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \cdot \chi_A \,\mathrm{d}\mu$$

ein endliches Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$.

Satz (Lemma von Fatou)**.** Sei $f_n : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \to (\mathbb{R}^1, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^1))$ eine Folge $\mathfrak{A}$-messbarer, nichtnegativer Funktionen. Dann gilt:

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu$$