Zusammenfassung Analysis III

Maßtheorie

Problem (Schwaches Maßproblem)**.** Gesucht: Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [\mathbb{R}, \infty]$ mit folgenden Eigenschaften:

- Normierung: $\mu([0,1]^n) = 1$
- Endliche Additivität: Sind $A, B \subset \mathbb{R}^n$ disjunkt, so gilt $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
- Bewegungsinvarianz: Für eine euklidische Bewegung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt $\mu(f(A)) = \mu(A)$.

Satz (Hausdorff)**.** Das schwache Maßproblem ist für $n \geq 3$ nicht lösbar.

Satz (Banach)**.** Das schwache Maßproblem ist für $n = 1, 2$ lösbar, aber nicht eindeutig lösbar.

Problem (Starkes Maßproblem)**.** Gesucht ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ wie im schwachen Maßproblem, die anstelle der endlichen Additivität die Eigenschaft der σ-Additivität besitzt:

- Für eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ist
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$$

Satz. Das starke Maßproblem besitzt keine Lösung.

Notation. Sei im Folgenden Ω eine Menge.

Definition. Eine Teilmenge $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt **Ring**, wenn für $A, B \in \mathfrak{R}$ gilt:

- $\emptyset \in \mathfrak{R}$
- Abgeschlossenheit unter Differenzbildung: $A \setminus B \in \mathfrak{R}$
- Abgeschlossenheit unter endlichen Vereinigungen: $A \cup B \in \mathfrak{R}$

Definition. Eine Teilmenge $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt **Algebra**, wenn für $A, B \in \mathfrak{A}$ gilt:

- $\emptyset \in \mathfrak{A}$
- Abgeschlossenheit unter Komplementbildung: $A^c = \Omega \setminus A \in \mathfrak{A}$
- Abgeschlossenheit unter endlichen Vereinigungen: $A \cup B \in \mathfrak{A}$

Definition. Eine Algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega))$ heißt **σ-Algebra**, wenn $\mathfrak{A}$ unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen ist, d. h. für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{A}$ gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}$.

Bemerkung.
- Jede Algebra ist auch ein Ring.
- Ein Ring $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist auch unter endlichen Schnitten abgeschlossen, da $A \cap B = A \setminus (B \setminus A) \in \mathfrak{R}$
- Ein Ring $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist genau dann eine Algebra, wenn $\Omega \in \mathfrak{R}$
- Eine σ-Algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist auch unter abzählbaren Schnitten abgeschlossen: Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathfrak{A}$, dann gilt
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n)^c\right)^c \in \mathfrak{A}$$

Notation. Sei im Folgenden $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein Ring.

Satz. Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Ringen / Algebren / σ-Algebren über Ω. Dann ist auch $\cap_{i\in I} A_i$ ein Ring / eine Algebra / eine σ-Algebra über Ω.

Definition. Sei $E \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Setze
$$\mathcal{R}(E) := \{\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega) \,|\, E \subset \mathfrak{R}, \mathfrak{R} \text{ Ring}\} \text{ und}$$
$$\mathcal{A}(E) := \{\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega) \,|\, E \subset \mathfrak{A}, \mathfrak{A}\ \sigma\text{-Algebra}\}.$$
Dann heißen $\quad \mathfrak{R}(E) := \bigcap_{\mathfrak{R}\in\mathcal{R}(E)} \mathfrak{R}, \quad \mathfrak{A}(E) := \bigcap_{\mathfrak{A}\in\mathcal{A}(E)} \mathfrak{A}$
von E **erzeugter Ring** bzw. von E **erzeugte σ-Algebra**.

Definition. Ist $(\Omega, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, dann heißt $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\Omega, \mathcal{O}) := \mathfrak{A}(\mathcal{O})$ **Borelsche σ-Algebra** von $(\Omega, \mathcal{O})$.

Bemerkung. Die Borelsche σ-Algebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ wird auch erzeugt von $\{I \subset \mathbb{R} \,|\, I \text{ Intervall }\}$. Dabei spielt es keine Rolle, ob man nur geschlossene, nur offene, nur nach einer Seite halboffene Intervalle oder gar nur Intervalle obiger Art mit Endpunkten in $\mathbb{Q}$ zulässt.

Definition. Eine Funktion $\mu : \mathfrak{R} \to [0, \infty]$ heißt **Inhalt** auf $\mathfrak{R}$, falls

- $\mu(\emptyset) = 0$ und
- $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$ für disjunkte $A, B \in \mathfrak{R}$.

Definition. Ein Inhalt $\mu : \mathfrak{R} \to [0, \infty]$ heißt **Prämaß** auf $\mathfrak{R}$, wenn μ σ-additiv ist, d. h. wenn für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Elemente von $\mathfrak{R}$ mit $\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{R}$ gilt:
$$\mu\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$$

Definition. Ein **Maß** ist ein Prämaß auf einer σ-Algebra.

Satz. Für einen Inhalt μ auf $\mathfrak{R}$ gilt für alle $A, B \in \mathfrak{R}$:

- $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$
- Monotonie: $A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$
- Aus $A \subset B$ und $\mu(B) < \infty$ folgt $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$
- Subadditivität: Für $A_1, ..., A_n \in \mathfrak{R}$ ist $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$
- Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge disjunkter Elemente aus $\mathfrak{R}$, sodass $\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{R}$, so gilt $\mu(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$.

Definition. Ein Inhalt / Maß auf einem Ring $\mathfrak{R}$ / einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ heißt **endlich**, falls $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in \mathfrak{R}$ bzw. $A \in \mathfrak{A}$.

Satz. Ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ ist σ-subadditiv, d. h. für alle Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{A}$ gilt
$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

Definition. Sei $A \subset \Omega$. Dann heißt die Abbildung
$$\chi_A = \mathbb{1}_A : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in A \\ 0, & \text{falls } \omega \notin A \end{cases}$$
Indikatorfunktion oder **charakteristische Funktion** von A.

Definition. Wir sagen eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert** gegen $A \subset \Omega$, notiert $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, wenn $(\mathbb{1}_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen $\mathbb{1}_A$ konvergiert.

Definition. Für eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{P}(\Omega)$ heißen
$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \text{ liegt in unendlich vielen } A_n\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n$$
$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \text{ liegt in allen bis auf endlich vielen } A_n\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_n$$
Limes Superior bzw. **Limes Inferior** der Folge A_n.

Satz. Es gilt $\lim_{n\to\infty} A_n = A \iff \liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = A$.

Definition. Eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{P}(\Omega)$ heißt

- **monoton wachsend**, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A_n \subset A_{n+1}$,
- **monoton fallend**, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A_n \supset A_{n+1}$.

Satz. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{P}(\Omega)$.

- Ist (A_n) monoton wachsend, so gilt $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
- Ist (A_n) monoton fallend, so gilt $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Satz. Sei μ ein Inhalt auf $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Wir betrachten die Aussagen:

(i) μ ist ein Prämaß auf $\mathfrak{R}$.
(ii) Stetigkeit von unten: Für jede monoton wachsende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{R}$ mit $A := \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathfrak{R}$ gilt $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.
(iii) Stetigkeit von oben: Für jede monoton fallende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{R}$ mit $\mu(A_0) < \infty$ und $A := \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathfrak{R}$ gilt $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.
(iv) Für jede monoton fallende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{R}$ mit $\mu(A_0) < \infty$ und $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \emptyset$ gilt $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

Dann gilt (i) $\iff$ (ii) $\implies$ (iii) $\iff$ (iv).
Falls μ endlich ist, so gilt auch (iii) $\implies$ (ii).

Satz. Sei μ ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Dann gilt:

- Für eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{A}$ gilt $\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty}(\mu(A_n))$.
- Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathfrak{A}$, sodass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $\mu\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n\right) < \infty$, dann gilt $\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n)$.
- Sei μ endlich und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathfrak{A}$, dann gilt
$$\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right).$$
- Sei μ endlich und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen A konvergente Folge in $\mathfrak{A}$, dann gilt $A \in \mathfrak{A}$ und $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Definition. Ein Inhalt auf einem Ring $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt **σ-endlich**, wenn gilt: Es gibt eine Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{R}$, sodass

- $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ und
- $\mu(S_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definition. Eine Funktion $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ wird **numerische Funktion** genannt.

Definition. Eine numerische Funktion $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt **äußeres Maß** auf Ω, wenn gilt:

- $\mu^*(\emptyset) = 0$
- Monotonie: $A \subset B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
- σ-Subadditivität: Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen von Ω, dann gilt $\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n)$

Bemerkung. Wegen $\mu^*(\emptyset) = 0$ und der Monotonie nimmt ein äußeres Maß nur Werte in $[0, \infty]$ an.

Definition. Eine Teilmenge $A \subset \Omega$ heißt **μ^*-messbar**, falls für alle $Q \subset \Omega$ gilt
$$\mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A).$$

Satz (Carathéodory)**.** Sei $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß, dann gilt

- Die Menge $\mathfrak{A}^* := \{A \subset \Omega \mid A \text{ ist } \mu^*\text{-messbar }\}$ ist eine σ-Algebra.
- $\mu^*|_{\mathfrak{A}^*}$ ist ein Maß auf $\mathfrak{A}^*$.

Satz (**Fortsetzungssatz**)**.** Sei μ ein Prämaß auf einem Ring $\mathfrak{R}$, dann gibt es ein Maß $\tilde{\mu}$ auf der von $\mathfrak{R}$ erzeugten σ-Algebra $\mathfrak{A}(\mathfrak{R})$ mit $\tilde{\mu}|_{\mathfrak{R}} = \mu$. Falls μ σ-endlich, so ist $\tilde{\mu}$ eindeutig bestimmt.

Bemerkung. Im Beweis wird ein äußeres Maß auf Ω so definiert:
$$\mu^*(Q) := \inf\left\{\sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_n) \,\middle|\, (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{U}(Q)\right\},$$
wobei $\inf \emptyset := \infty$ und
$$\mathfrak{U}(Q) := \left\{(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, Q \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \text{ und } A_n \text{ Folge in } \mathfrak{R}\right\}.$$
Das äußere Maß μ^* eingeschränkt auf $\mathfrak{A}^* \supset \mathfrak{A}(\mathfrak{R})$ ist ein Maß.

Das Lebesgue-Borel-Maß

Notation. Für $a = (a_1, ..., a_n)$ und $b = (b_1, ..., b_n)$ schreibe

- $a \lhd b$, falls $a_j < b_j$ für alle $j = 1, ..., n$.
- $a \unlhd b$, falls $a_j \leq b_j$ für alle $j = 1, ..., n$.

Definition. Für $a, b \in \mathbb{R}^n$ heißen
$$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \lhd x \lhd b\}, \qquad \mu(]a, b[) := \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j)$$
Elementarquader und **Elementarinhalt**. Sei im Folgenden $\mathcal{E}$ die Menge aller Elementarquader.

Satz. Für alle $A \in \mathfrak{R}(\mathcal{E})$ gibt es paarweise disjunkte Elementarquader $Q_1, ..., Q_p \in \mathcal{E}$ sodass $A = \sqcup_{i=1}^{p} Q_i$.

Definition. Für $A \in \mathfrak{R}(\mathcal{E})$ setze $\mu(A) := \sum_{i=1}^{p} \mu(Q_i)$, wenn $A = \sqcup_{i=1}^{p} Q_i$ für paarweise disjunkte $Q_1, ..., Q_p$.

Satz. μ definiert ein Prämaß auf $\mathfrak{R}(\mathcal{E})$, genannt das **Lebesgue-Borel-Prämaß** auf $\mathbb{R}^n$.

Definition. Die eindeutige (da μ σ-endlich) Fortsetzung $\tilde{\mu}$ von μ auf $\mathfrak{A}(\mathcal{E}) = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ wird **Lebesgue-Borel-Maß** genannt.

Bemerkung. Nur das Lebesgue-Borel-Maß ist ein Maß auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$, welches jedem Elementarquader seinen Elementarinhalt zuordnet.

Definition. Sei μ ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Eine Menge $N \subset \Omega$ heißt **Nullmenge**, wenn es eine Menge $A \in \mathfrak{A}$ gibt mit $N \subset A$ und $\mu(A) = 0$. Die Menge aller Nullmengen ist $\mathfrak{N}_\mu \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

Definition (Fortsetzung auf Nullmengen)**.** Sei μ das Lebesgue-Borel-Maß auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$. Dann heißt die von $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ und den entsprechenden Nullmengen erzeugte σ-Algebra $\tilde{\mathfrak{A}}_\mu$ **Lebesguesche σ-Algebra**, notiert $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$, und das fortgesetzte Maß **Lebesgue-Maß**.

Definition. Sei Ω eine Menge und $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra auf Ω, sowie ggf. μ ein Maß auf $\mathfrak{A}$. Dann heißt

- das Tupel $(\Omega, \mathfrak{A})$ **messbarer Raum**,
- das Tripel $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ **Maßraum**.

Definition. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ zwei messbare Räume. Eine Abbildung $f : \Omega \to \Omega'$ heißt **messbar** oder genauer $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$-messbar, wenn für alle $A' \in \Omega'$ gilt $f^{-1}(A') \in \Omega$ oder, kürzer, $f^{-1}(\mathfrak{A}') \subset \mathfrak{A}$.

Bemerkung. Die messbaren Räume bilden eine Kategorie mit messbaren Abbildungen als Morphismen, d. h. die Identitätsabbildung von einem messbaren Raum zu sich selbst ist messbar und die Verkettung zweier messbarer Abbildungen ist messbar.

Satz.
- Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum, Ω' eine Menge und $f : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung. Dann ist $\mathfrak{A}' := \{A' \subset \Omega' \mid f^{-1}(A') \in \mathfrak{A}\}$ die größte σ-Algebra auf Ω', sodass f messbar ist.
- Ist Ω eine Menge und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein messbarer Raum sowie $f : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung. Dann ist $f^{-1}(\mathfrak{A}')$ eine σ-Algebra.
- Seien I eine Indexmenge, Ω eine Menge, $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i), i \in I$ messbare Räume und $f_i : \Omega \to \Omega_i$ Abbildungen, dann ist
$$\mathfrak{A} := \mathfrak{A}\left(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathfrak{A}_i)\right)$$
die kleinste σ-Algebra auf Ω, sodass alle Abbildungen f_i, $i \in I$, messbar sind. Diese σ-Algebra wird die von der Familie $\{f_i \mid i \in I\}$ **erzeugte σ-Algebra** genannt.

Satz. Sei $f : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung und $\mathcal{E}' \subset \mathcal{P}(\Omega')$, dann gilt
$$\mathfrak{A}(f^{-1}(\mathcal{E}')) = f^{-1}(\mathfrak{A}(\mathcal{E}'))$$

Satz. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum und $f : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung, sowie $\mathcal{E}' \subset \mathcal{P}(\Omega')$. Dann gilt:
$$f \text{ ist } (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}(\mathcal{E}'))\text{-messbar} \iff f^{-1}(\mathcal{E}') \subset \mathfrak{A}$$

Satz. Seien $(\Omega, \mathcal{O})$ und $(\Omega', \mathcal{O}')$ zwei topologische Räume und $\mathfrak{A} := \mathfrak{A}(\mathcal{O})$ bzw. $\mathfrak{A}' := \mathfrak{A}(\mathcal{O}')$ die dazugehörigen Borelschen σ-Algebren. Dann ist jede stetige Abbildung $f : \Omega \to \Omega'$ $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$-messbar.

Satz (Projektionssatz)**.** Seien I eine Indexmenge, $(\Omega_0, \mathfrak{A}_0)$ sowie $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i)$, $i \in I$ messbare Räume und Ω eine Menge. Seien $g_i : \Omega \to \Omega_i, i \in I$ und $f : \Omega_0 \to \Omega$ Abbildungen. Wir setzen $\mathfrak{A} := \mathfrak{A}\left(\bigcup_{i\in I} g_i^{-1}(\mathfrak{A}_i)\right)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- f ist $(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A})$-messbar.
- Für alle $i \in I$ sind die Abbildungen $g_i \circ f$ $(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_i)$-messbar.

Satz. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein messbarer Raum und $f : \Omega \to \Omega'$ eine messbare Abbildung, dann ist
$$\mu' = f_*(\mu) = \mu \circ f^{-1} : \mathfrak{A}' \to [0, \infty], \quad A' \mapsto \mu(f^{-1}(A'))$$
ein Maß auf $(\Omega', \mathfrak{A}')$, genannt das **Bildmaß** von f.

Bemerkung. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ und $(\Omega'', \mathfrak{A}'')$ messbare Räume und $f : \Omega' \to \Omega''$, $g : \Omega \to \Omega'$ messbare Abbildungen, dann gilt $(f \circ g)_*\mu = f_*(g_*\mu)$.

Definition. Die σ-Algebra der Borelmengen auf $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ist
$$\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \{A, A \cup \{+\infty\}, A \cup \{-\infty\}, A \cup \{\pm\infty\} \mid A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\}.$$

Satz. $\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \mathfrak{A}(\{[a, \infty] \mid a \in \mathbb{R}\})$

Notation. Seien $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ zwei numerische Funktionen. Setze
$$\{f \leq g\} := \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \leq g(\omega)\} \subset \Omega$$
und definiere analog $\{f < g\}$, $\{f \geq g\}$, $\{f > g\}$, $\{f = g\}$, $\{f \neq g\}$.

Satz. Für eine numerische Fkt. $f : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ sind äquivalent:

- f ist messbar
- für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $\{f \geq a\} = f^{-1}([a, \infty]) \in \mathfrak{A}$
- für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $\{f > a\} = f^{-1}(]a, \infty]) \in \mathfrak{A}$
- für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $\{f \leq a\} = f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathfrak{A}$
- für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $\{f < a\} = f^{-1}([-\infty, a[) \in \mathfrak{A}$

Satz. Für zwei numerische Funktionen $f, g : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ gilt:

- $\{f < g\} \in \mathfrak{A}$
- $\{f > g\} \in \mathfrak{A}$
- $\{f = g\} \in \mathfrak{A}$
- $\{f \leq g\} \in \mathfrak{A}$
- $\{f \geq g\} \in \mathfrak{A}$
- $\{f \neq g\} \in \mathfrak{A}$

Satz. Seien $f, g : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ messbare numerische Funktionen und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann auch messbar (‡: falls $0 \notin \text{Bild}(f)$):

- $\lambda \cdot f$
- $f + \mu \cdot g$
- $f \cdot g$
- $\frac{1}{f}$ (‡)
- $\frac{g}{f}$ (‡)

Satz. Seien $f_n : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}}), n \in \mathbb{N}$ messbare numerische Funktionen, dann auch messbar:

- $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$
- $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$
- $\liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$
- $\limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$

Dabei werden Infimum, Supremum, usw. punktweise gebildet.

Satz. Seien $f_1, ..., f_n : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ messbare numerische Funktionen, dann auch messbar:

- $\max(f_1, ..., f_n)$
- $\min(f_1, ..., f_n)$

Definition. Für $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ heißen die Funktionen

- $|f| := \max(f, -f) : \Omega \to [0, \infty]$ **Betrag** von f
- $f^+ := \max(f, 0) : \Omega \to [0, \infty]$ **Positivteil** von f
- $f^- := -\min(f, 0) : \Omega \to [0, \infty]$ **Negativteil** von f

Bemerkung. $f = f^+ - f^-$ und $|f| = f^+ + f^-$

Satz. Falls $f : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ messbar, dann auch $|f|$, f^+ und f^-.

Das Lebesguesche Integral

Definition. Eine Funktion $f : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ heißt **einfache Funktion** oder **Elementarfunktion** auf $(\Omega, \mathfrak{A})$, wenn gilt:

- f ist messbar
- $f(\Omega) \subset [0, \infty[$
- $f(\Omega)$ ist endlich

Die Menge aller einfachen Funktionen auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ ist $\mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$.

Definition. Sei $f \in \mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und $\Omega = A_1 \sqcup ... \sqcup A_k$ eine disjunkte Vereinigung von Mengen mit $A_j \in \mathfrak{A}$ für alle $j = 1, ..., k$, sodass $f(A_j) = \{y_j\}$, dann heißt die Darstellung

$$f = \sum_{j=1}^{k} y_j \cdot \mathbb{1}_{A_j}$$

kanonische Darstellung von f.

Bemerkung. Die kanonische Darstellung ist nicht eindeutig.

Satz. Seien $f, g \in \mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und $a \geq 0$. Dann auch in $\mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$:

- $f + g$
- $f \cdot g$
- $\max(f, g)$
- $\min(f, g)$
- $a \cdot f$

Definition. Sei $f \in \mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und $f = \sum\limits_{j=1}^{k} y_j \mathbb{1}_{A_j}$ eine kanonische Darstellung von f. Sei ferner μ ein Maß auf $\mathfrak{A}$. Dann heißt die Größe

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{k} y_j \mu(A_j)$$

das Lebesgue-Integral von f auf Ω bzgl. des Maßes μ.

Bemerkung. Obige Größe ist wohldefiniert, d. h. unabhängig von der kanonischen Darstellung.

Satz. Seien $f, g \in \mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$, μ ein Maß auf $\mathfrak{A}$ und $\alpha \geq 0$, dann gilt

- $\int_\Omega (\alpha f) \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$
- Additivität: $\int_\Omega (f + g) \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu$
- Monotonie: Falls $g \leq f$, dann $\int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$

Satz. Angenommen, die Funktionen $f_n \in \mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A}, \mu), n \in \mathbb{N}$ bilden eine monoton wachsende Funktionenfolge und für $g \in \mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ gilt $g \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$, dann gilt $\int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu$.

Korollar. Seien $f_n, g_n \in \mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A}), n \in \mathbb{N}$ und die Funktionenfolgen f_n und g_n monoton wachsend mit $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n$. Dann gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega g_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Definition. Sei $\overline{\mathbb{E}}(\Omega, \mathfrak{A})$ die Menge aller Funktionen $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, die Grenzfunktionen (pktw. Konvergenz) monoton wachsender Funktionenfolgen in $\mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ sind.

Definition. Für eine Funktion $f \in \overline{\mathbb{E}}(\Omega, \mathfrak{A})$ (d. h. es existiert eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $f = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n$) und ein Maß μ auf $\mathfrak{A}$ heißt

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu := \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega g_n \,\mathrm{d}\mu$$

Lebesgue-Integral von f über Ω bzgl. μ.

Satz. $\overline{\mathbb{E}}(\Omega, \mathfrak{A}) = \{f : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}) \mid f \text{ messbar und } f \geq 0\}$

Satz. Die Eigenschaften des Integrals für einfache Funktionen (Linearität, Monotonie) übertragen sich auf das allgemeine Lebesgue-Integral.

Satz (Satz von der monotonen Konvergenz)**.** Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Funktionen in $\overline{\mathbb{E}}(\Omega, \mathfrak{A})$, dann gilt für $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \overline{\mathbb{E}}(\Omega, \mathfrak{A})$ und jedes Maß μ auf $\mathfrak{A}$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$$

Bemerkung. Die Aussage ist für monoton fallende Fktn. i. A. falsch.

Definition. Eine messbare Funktion $f : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ heißt **integrierbar** oder genauer μ-integrierbar (im Sinne von Lebesgue), wenn gilt:

$$\int_\Omega f^+ \,\mathrm{d}\mu < \infty \quad \text{und} \quad \int_\Omega f^- \,\mathrm{d}\mu < \infty.$$

In diesem Fall definieren wir das **Lebesgue-Integral** von f als

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu := \int_\Omega f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega f^- \,\mathrm{d}\mu.$$

Notation. $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu) = \mathcal{L}^1(\mu)$ bezeichnet die Menge der μ-integrierbaren Funktionen auf Ω.

Satz. Für eine messbare Fkt. $f : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ sind äquivalent:

- $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$.
- $|f| \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$.
- $f^+, f^- \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$.
- $\exists g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ mit $|f| \leq g$.
- Es gibt nicht negative $u, v \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ mit $f = u - v$.

Im letzten Fall gilt $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega u \,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega v \,\mathrm{d}\mu$.

Satz.
- $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ist ein $\mathbb{R}$-VR und die Abbildung $\int : \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$ ist linear.
- $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \implies \max(f, g), \min(f, g) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$
- Monotonie: $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu),\ f \leq g \implies \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu$.
- Dreiecksungleichung: $|\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu| \leq \int_\Omega |f| \,\mathrm{d}\mu$ für alle $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$

Definition. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $A \in \mathfrak{A}$ und $f \in \overline{\mathbb{E}}(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ oder $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$. Dann ist das **$\mu$-Integral von f über A**

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega (\mathbb{1}_A \cdot f) \,\mathrm{d}\mu.$$

Definition. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Menge $N \subset \Omega$ heißt **(μ-)Nullmenge**, wenn es ein $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A) = 0$ und $N \subset A$.

Definition. Ein Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ heißt **vollständig**, wenn jede Nullmenge $N \subset \Omega$ in $\mathfrak{A}$ liegt.

Definition. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum. Setze

$$\tilde{\mathfrak{N}}_\mu := \{N \subset \Omega \mid N \text{ ist } \mu\text{-Nullmenge }\},$$
$$\tilde{\mathfrak{A}}_\mu := \{A \cup N \mid A \in \mathfrak{A},\ N \in \tilde{\mathfrak{N}}_\mu\}.$$

Dann ist $\tilde{\mathfrak{A}}_\mu$ eine σ-Algebra und mit $\tilde{\mu}(A \cup N) := \mu(A)$ ist $(\Omega, \tilde{\mathfrak{A}}_\mu, \tilde{\mu})$ ein Maßraum, genannt **Vervollständigung** von $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$.

Definition. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $E(\omega)$ eine Aussage für alle $\omega \in \Omega$. Man sagt, E ist **(μ)-fast-überall wahr**, wenn $\{\omega \in \Omega \mid \neg E(\omega)\}$ eine Nullmenge ist.
Zwei Funktionen $f, g : \Omega \to X$ heißen **(μ-)fast-überall gleich**, notiert $f \overset{\text{f.ü.}}{=} g$, wenn $\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \neq g(\omega)\}$ eine Nullmenge ist.
Eine Funktion $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt **(μ)-fast-überall** endlich, wenn $\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) = \infty\}$ eine Nullmenge ist.

Bemerkung. Das Cantorsche Diskontinuum ist eine Menge $C \subset [0, 1]$, $C \in \mathfrak{B}$, welche die bemerkenswerte Eigenschaft hat, dass sie gleichzeitig überabzählbar ist und Maß 0 besitzt. Da außerdem $\mathfrak{B} \cong \mathbb{R}$ gilt, folgt $\mathcal{P}(C) \cong \mathcal{P}(\mathbb{R}) \ncong \mathbb{R} \cong \mathfrak{B}$. Somit gibt es eine Nullmenge $N \subset C$, die nicht in $\mathfrak{B}$ liegt. Es folgt:

Satz. Der Maßraum $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \mu)$ ist nicht vollständig.

Definition. Sei $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}^n_L, \lambda)$ die Vervollständigung von $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}^n, \mu,$ dann heißt $\mathfrak{B}_L$ die **Lebesguesche σ-Algebra** und λ das **Lebesgue-Maß** auf $\mathbb{R}^n$ (analog: $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}}, \lambda)$).

Satz. Sei $f \in \overline{\mathbb{E}}(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$, dann gilt $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = 0 \iff f \overset{\text{f.ü.}}{=} 0$.

Satz. Seien $f, g : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ messbar mit $f \overset{\text{f.ü.}}{=} g$, dann gilt:

- Wenn $f, g \in \overline{\mathbb{E}}(\Omega, \mathfrak{A})$, dann $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu$.
- Wenn $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$, dann $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ mit $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu$.

Satz. Sei $f : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ eine messbare Fkt. und $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu), g \geq 0$. Wenn $f \overset{\text{f.ü.}}{\leq} g$, dann gilt $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$.

Satz (Lemma von Fatou)**.** Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge mit f_n μ-integrierbar und $f_n \overset{\text{f.ü.}}{\geq} 0$. Dann $\int_\Omega (\liminf_{n\to\infty} f_n) \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f n \,\mathrm{d}\mu$.

Satz. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge messbarer Fkt. $f_n : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ und $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu), g \geq 0$, sodass $\forall n \in \mathbb{N} : |f_n| \overset{\text{f.ü.}}{\leq} g$. Dann:

$$\int_\Omega (\liminf_{n\to\infty}(f_n)) \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty}(\int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu) \leq$$
$$\leq \limsup_{n\to\infty}(\int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu) \leq \int_\Omega (\limsup_{n\to\infty} f_n) \,\mathrm{d}\mu.$$

Satz (von der majorisierten Konvergenz)**.** Sei $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu), g \geq 0$. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge messbarer Fkt. $f_n : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}})$ mit $|f_n| \overset{\text{f.ü.}}{\leq} g$ (Majorisierung). Sei ferner $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ $(\mathfrak{A}, \overline{\mathfrak{B}})$-messbar mit $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{f.ü.}} f$, d. h. $\{\omega \in \Omega \,|\, \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega) \text{ falsch}\}$ ist Nullmenge. Dann ist f integrierbar mit $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu$.

Satz. Sei $f \in \overline{\mathbb{E}}(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ bzw. $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathfrak{A}$, $A_n \cap A_m = \emptyset$ für $n \neq m$, $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Dann:

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu := \int_\Omega f \cdot \mathbb{1}_A \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{A_n} f \,\mathrm{d}\mu \right).$$

Satz. Seien $f, f_j : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}), j \in \mathbb{N}$ messbare Funktionen, $g : (\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ integrierbar, sodass $|\sum_{j=1}^{n} f_j| \overset{\text{f.ü.}}{\leq} g \,\forall n \in \mathbb{N}$ und $f \overset{\text{f.ü.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_j$. Dann sind f, f_j integrierbar mit $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_\Omega f_j \,\mathrm{d}\mu$.

Satz (Ableiten unter Integral)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $f :]a, b[\times \Omega \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ eine Funktion, sodass gilt

- Für alle $t \in]a, b[$ ist die Abbildung $f(t, -) : \Omega \to \mathbb{R}$ μ-integrierbar.
- Für alle $\omega \in \Omega$ ist die Abbildung $f(-, \omega) :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar.
- Es gibt eine Funktion $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ mit $g \geq 0$, sodass für alle $t \in]a, b[$ und fast alle $\omega \in \Omega$ gilt: $|f(-, \omega)'(t)| \leq g(\omega)$.

Dann ist die Funktion $F :]a, b[\to \mathbb{R}, t \mapsto \int_\Omega f_t \,\mathrm{d}\mu$ differenzierbar mit $F'(t) = \int_\Omega h_t \,\mathrm{d}\mu$, wobei $h_t : \Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto f(-, \omega)'(t)$.

Satz. Sei $f \in \overline{\mathbb{E}}(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$. Dann ist die Abbildung

$$f\mu : \mathfrak{A} \to [0, \infty], \quad A \mapsto \int_A f \,\mathrm{d}\mu$$

ein Maß, genannt **Maß mit der Dichte f bzgl. μ** oder **Stieltjes-Maß** zu f.

Zusammenhang mit dem Riemann-Integral

Definition. Eine **Zerlegung** eines Intervalls $[a, b]$ ist eine geordnete endliche Teilmenge $\{a = a_0 < a_1 < ... < a_k = b\} \subset [a, b]$.

Notation. Die Menge aller Zerlegungen von $[a, b]$ ist $\mathcal{Z}([a, b])$.

Definition. Die **Feinheit** einer Zerlegung $\{a_0, ..., a_n\} \in \mathcal{Z}([a, b])$ ist

$$|Z| := \max\{x_j - x_{j-1} \,|\, j \in \{1, ..., n\}\}.$$

Definition. Für eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und eine Zerlegung $Z = \{a_0, ..., a_n\} \in \mathcal{Z}([a, b])$ bezeichnen

$$O(f, Z) := \sum_{j=1}^{n} (\sup\{f(x) \,|\, x \in [x_{j-1}, x_j]\})(x_j - x_{j-1}),$$

$$U(f, Z) := \sum_{j=1}^{n} (\inf\{f(x) \,|\, x \in [x_{j-1}, x_j]\})(x_j - x_{j-1})$$

die **(Darbouxschen) Ober- und Untersummen** von f bzgl. Z.

Notation.
$$O_*(f) := \inf\{O(f, Z) \,|\, Z \in \mathcal{Z}([a, b])\}$$
$$U^*(f) := \sup\{U(f, Z) \,|\, Z \in \mathcal{Z}([a, b])\}$$

Definition. Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **Riemann-integrierbar**, wenn $O_*(f) = U^*(f)$. In diesem Fall heißt

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x := O_*(f) = U^*(f)$$

das **Riemann-Integral** von f.

Notation. Sei $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{Z}([a, b])$ mit $Z_k = \{a_0^k, a_1^k, ..., a_{n_k}^k\}$. Für eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definieren wir $f^k, f_k, f^*, f_* : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch

$$f^k = \sup f([a, a_1^k]) \cdot \mathbb{1}_{[a, a_1^k]} + \sum_{j=2}^{n_k} \sup f([a_{j-1}^k, a_j^k]) \cdot \mathbb{1}_{]a_{j-1}^k, a_j^k]},$$

$$f_k = \inf f([a, a_1^k]) \cdot \mathbb{1}_{[a, a_1^k]} + \sum_{j=2}^{n_k} \inf f([a_{j-1}^k, a_j^k]) \cdot \mathbb{1}_{]a_{j-1}^k, a_j^k]}$$

$$f^*(x) = \liminf_{y\to x} f(y) = \liminf_{\epsilon\downarrow 0} \{f(y) \,|\, y \in [x - \epsilon, x + \epsilon] \cap [a, b]\}$$

$$f^*(x) = \limsup_{y\to x} f(y) = \limsup_{\epsilon\downarrow 0} \{f(y) \,|\, y \in [x - \epsilon, x + \epsilon] \cap [a, b]\}$$

Bemerkung. Es gilt: $f_* \leq f \leq f^*$ und $f_*(x_0) = f(x_0) = f^*(x_0)$ für $x_0 \in [a, b]$ genau dann, wenn f in x_0 stetig ist.

Satz. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{Z}([a, b])$ mit $\lim_{n\to\infty} |Z_k| = 0$. Dann gilt:

- Sei $R = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{n_k} \{a_j^k\}$ die Vereinigung aller Zerlegungen $Z_k, k \in \mathbb{N}$. Für alle $x \in [a, b] \setminus R$ gilt dann $\lim_{k\to\infty} f^k(x) = f^*(x)$ und $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f_*(x)$.
- Die Funktionen f^* und f_* sind Borel-messbar und integrierbar bzgl. des Borel-Maßes μ mit
$$\int_{[a,b]} f^* \,\mathrm{d}\mu = O_*(f) \quad \text{und} \quad \int_{[a,b]} f_* \,\mathrm{d}\mu = O^*(f).$$

Satz. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann sind äquivalent:

- f ist Riemann-integrierbar.
- f ist fast-überall stetig (im Sinne des Lebesgue-Borel-Maßes).

Satz. Ist eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so ist sie auch auf $[a, b]$ Lebesgue-integrierbar bzgl. dem Lebesgue-Maß λ und es gilt

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\lambda.$$

Satz. Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ über jedem kompakten Teilintervall von I Riemann-integrierbar. Dann sind äquivalent:

- $|f|$ ist auf I uneigentlich Riemann-integrierbar.
- f ist auf I Lebesgue-integrierbar.

Falls eine der Bedingungen erfüllt ist, so stimmt das Riemann-Integral von f auf I mit dem Lebesgue-Integral von f auf I überein.

Miscellanea

Satz. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar. Dann ist $F : [a, b] \to \mathbb{R}, t \mapsto \int_{[a,t]} f \,\mathrm{d}\lambda$ stetig.

Satz. Sei $f : [a, b \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar. Wenn $\forall\, t \in [a, b]$ gilt: $\int_{[a,t]} f \,\mathrm{d}\lambda = F(t) = 0$, dann $f \overset{\text{f.ü.}}{=} 0$.

Notation. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, dann setzen wir

$$C(f) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, f \text{ stetig in } x\} \text{ und}$$
$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, f \text{ unstetig in } x\} = \mathbb{R} \setminus C(f).$$

Definition. Sei $A \subset \mathbb{R}$, A heißt

- **G_δ-Menge**, wenn gilt: $A = \cap_{n\in\mathbb{N}} O_n$, $O_n \overset{\circ}{\subset} \mathbb{R} \;\forall\, n \in \mathbb{N}$
- **F_σ-Menge**, wenn gilt: $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, $F_n \overset{\bullet}{\subset} \mathbb{R} \;\forall\, n \in \mathbb{N}$

Bemerkung. A ist G_δ-Menge $\iff$ A^C ist F_σ-Menge.

Satz (Young)**.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Abbildung. Dann ist $C(f)$ eine G_δ-Menge (und somit $D(f)$ eine F_σ-Menge).

Satz. Es gibt keine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(f) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Definition. Ein Maß μ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ heißt **translationsinvariant**, wenn für jedes $v \in \mathbb{R}^d$ gilt $(T_v)_*\mu = \mu$, wobei $T_v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $x \mapsto x + v$ die Translation um den Vektor v bezeichnet.

Notation. Bezeichne mit μ_{LB} das Borel-Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^d$.

Notation. Der Einheitswürfel im $\mathbb{R}^d$ ist $W_1 :=](0, ..., 0), (1, ..., 1)]$.

Satz. Ist μ ein translationsinvariantes Maß auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ mit $\alpha := \mu(W_1) < \infty$, dann gilt $\mu = \alpha \cdot \mu_{LB}$.

Satz. Sei $A \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{d\times d} \,|\, \det A \neq 0\}$, dann gilt

$$A_*\mu_{LB} = \frac{1}{|\det(A)|} \cdot \mu_{LB}.$$

Satz. Das Lebesgue-Borel-Maß μ_{LB} ist invariant unter Transformationen in $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Ferner ist μ_{LB} invariant unter Euklidischen Bewegungen.

Satz (Kurt Hensel)**.** Sei $\Phi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ein Gruppenhomomorphismus, dann gibt es einen Gruppenautomorphismus $\phi : (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, sodass $\Phi = \phi \circ \det$.

Satz. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $h \in \overline{\mathbb{E}}(\Omega, \mathfrak{A})$. Eine messbare Funktion $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann $h\mu$-integrierbar, wenn $(f \cdot h)$ μ-integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}(h\mu) = \int_\Omega f \cdot h \,\mathrm{d}\mu.$$