

# Zusammenfassung Funktionalanalysis

**Notation.** Sei im Folgenden  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ .

**Definition.** Ein **Prä-Hilbertraum** ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit einem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Definition.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Eine **Fréchet-Metrik** ist eine Funktion  $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , sodass für  $x, y \in V$  gilt:

- $\rho(x) = \rho(-x)$
- $\rho(x) = 0 \iff x = 0$
- $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

**Definition.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $A_1, A_2 \subset X$ , so ist

$$\text{dist}(A_1, A_2) := \inf\{d(x, y) \mid x \in A_1, y \in A_2\}$$

der **Abstand** zwischen  $A_1$  und  $A_2$ .

**Definition.** Ein **topologischer Raum** ist ein paar  $(X, \tau)$ , wobei  $X$  eine Menge und  $\tau \subset \mathcal{P}(X)$  ein System von offenen Mengen, sodass gilt:

- $\emptyset \in \tau$
- $\tilde{\tau} \subset \tau \implies \bigcup_{U \in \tilde{\tau}} U \in \tau$
- $U_1, U_2 \in \tau \implies U_1 \cap U_2 \in \tau$

**Definition.** Ein topologischer Raum  $(X, \tau)$  heißt **Hausdorff-Raum**, wenn folgendes Trennungssaxiom erfüllt ist:

$$\forall x_1, x_2 \in X : \exists U_1, U_2 \in \tau : x_1 \in U_1 \wedge x_2 \in U_2 \wedge U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

**Definition.** Sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum. Eine Menge  $A \subset X$  heißt abgeschlossen, falls  $X \setminus A \in \tau$ , also das Komplement offen ist.

**Definition.** Sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum und  $A \subset X$ . Dann heißen

$$A^\circ := \{x \in X \mid \exists U \in \tau \text{ mit } x \in U \text{ und } U \subset A\}$$
$$\overline{A} := \{x \in X \mid \forall U \in \tau \text{ mit } x \in U \text{ gilt } U \cap A \neq \emptyset\}$$

**Abschluss** bzw. **Inneres** von  $A$ .

**Definition.** Ist  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum und  $A \subset X$ , dann ist auch  $(A, \tau_A)$  ein topologischer Raum mit der *Relativtopologie*  $\tau_A := \{U \cap A \mid U \in \tau\}$ .

**Definition.** Sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum. Eine Teilmenge  $A \subset X$  heißt **dicht** in  $X$ , falls  $\overline{A} = X$ .

**Definition.** Ein topologischer Raum  $(X, \tau)$  heißt separabel, falls  $X$  eine abzählbare dichte Teilmenge enthält. Eine Teilmenge  $A \subset X$  heißt separabel, falls  $(A, \tau_A)$  separabel ist.

**Definition.** Seien  $\tau_1, \tau_2$  zwei Topologien auf einer Menge  $X$ . Dann heißt  $\tau_2$  **stärker** (oder feiner) als  $\tau_1$  bzw.  $\tau_1$  **schwächer** (oder gröber) als  $\tau_2$ , falls  $\tau_1 \subset \tau_2$ .

**Definition.** Seien  $d_1$  und  $d_2$  Metriken auf einer Menge  $X$  und  $\tau_1$  und  $\tau_2$  die induzierten Topologien. Dann heißt  $d_1$  stärker als  $d_2$ , falls  $\tau_1$  stärker ist als  $\tau_2$ .

**Satz.** Sind  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$  zwei Normen auf dem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $X$ . Dann gilt:

- $\|\cdot\|_2$  ist stärker als  $\|\cdot\|_1 \iff \exists C > 0 : \forall x \in X : \|x\|_1 \leq C\|x\|_2$
- $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$  sind äquivalent  $\iff \exists c, C > 0 : \forall x \in X : c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$

**Definition.** Die **p-Norm** auf dem  $\mathbb{K}^n$  ist definiert als

$$\|x\|_p := \left( \sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ für } 1 \leq p < \infty$$
$$\|x\|_\infty := \|x\|_{max} := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

*Bemerkung.* Alle  $p$ -Normen sind zueinander äquivalent.

**Definition.** Seien  $S \subset X$  eine Menge,  $(X, \tau_X)$  und  $(Y, \tau_Y)$  Hausdorff-Räume sowie  $x_0 \in S$ . Eine Funktion  $f : S \rightarrow Y$  heißt **stetig** in  $x_0$ , falls gilt:

$$\forall V \in \tau_Y : f(x_0) \in V \implies \exists U \in \tau_X \text{ mit } x_0 \in U \wedge f(U \cap S) \subset V$$

Ist  $X = S$ , so heißt  $f : X \rightarrow Y$  stetige Abbildung, falls  $f$  stetig in allen Punkten  $x_0 \in X$  ist, d. h.  $V \in \tau_Y \implies f^{-1}(V) \in \tau_X$ .

*Bemerkung.* In metrischen Räumen ist diese Definition äquivalent zur üblichen Folgendefinition.

**Definition.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Eine Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  heißt **Cauchy-Folge**, falls  $d(x_k, x_l) \xrightarrow{k, l \rightarrow \infty} 0$ . Ein Punkt  $x \in X$  heißt **Häufungspunkt** der Folge, falls es eine Teilfolge  $(x_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$  gibt mit  $x_{k_i} - x \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$ .

**Definition.** Ein metrischer Raum  $(X, d)$  heißt **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge in  $X$  einen Häufungspunkt besitzt.

**Definition.** Ein normierter  $\mathbb{K}$ -Vektorraum heißt **Banachraum**, falls er vollständig bzgl. der induzierten Metrik ist.

**Definition.** Ein Banachraum heißt **Banach-Algebra**, falls er eine Algebra ist mit  $\|x \cdot y\|_X \leq \|x\|_X \cdot \|y\|_X$ .

**Definition.** Ein **Hilbertraum** ist ein Prähilbertraum, der vollständig bzgl. der vom Skalarprodukt induzierten Norm ist.

*Bemerkung.* Ein normierter Raum ist genau dann ein Prähilbertraum, falls die Parallelogrammidentität

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

gilt. Folglich ist ein Banachraum genau dann ein Hilbertraum, falls die Parallelogrammidentität gilt.

**Definition.** Sei  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall i \in \mathbb{N} : x_i \in \mathbb{K}\}$  die Menge aller Folgen in  $\mathbb{K}$ . Mit der Fréchet-Metrik

$$\rho(x) := \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{|x_i|}{1 + |x_i|} < 1$$

wird der **Folgenraum**  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  zu einem Banachraum.

**Satz.** Sind  $(x^k) = (x_i^k)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  und  $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ , so gilt

$$\rho(x^k - x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \iff \forall i \in \mathbb{N} : x_i^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_i.$$

**Definition.** Die Norm

$$\|x\|_{\ell^p} := \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \in [0, \infty], \text{ für } 1 \leq p < \infty$$
$$\|x\|_{\ell^\infty} := \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| \in [0, \infty]$$

heißt  **$\ell^p$ -Norm** auf dem Raum  $\ell^p(\mathbb{K}) := \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \|x\|_{\ell^p} < \infty\}$ .

**Satz.** Der Raum  $\ell^p(\mathbb{K})$  ist vollständig, also ein Banachraum.

*Bemerkung.* Im Fall  $p = 2$  wird  $\ell^2(\mathbb{K})$  ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt  $\langle x, y \rangle_{\ell^2} := \sum_{i=0}^{\infty} x_i \overline{y_i}$ .

**Definition** (Vervollständigung). Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Betrachte die Menge  $X^{\mathbb{N}}$  aller Folgen in  $X$  und definiere

$$\tilde{X} := \{x \in X^{\mathbb{N}} \mid x \text{ ist Cauchy-Folge in } X\} / \sim$$

mit der Äquivalenzrelation

$$x \sim y \text{ in } \tilde{X} \iff d(x_j, y_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0.$$

Diese Menge wird mit der Metrik

$$\tilde{d}(x, y) := \lim_{i \rightarrow \infty} d(x_i, y_i)$$

zu einem vollständigen metrischen Raum. Die injektive Abbildung  $J : X \rightarrow \tilde{X}$ , welche  $x \in X$  auf die konstante Folge  $(x)_{i \in \mathbb{N}}$ , ist isometrisch, d. h. sie erhält. Wir können also  $X$  als einen dichten Unterraum von  $\tilde{X}$  auffassen. Man nennt  $\tilde{X}$  **Vervollständigung** von  $X$ .

**Definition (Raum der beschränkten Funktionen).** Sei  $S$  eine Menge und  $Y$  ein Banachraum über  $\mathbb{K}$  mit Norm  $y \mapsto |y|$ . Dann ist  $B(S; Y) := \{f : S \rightarrow Y \mid f(S) \text{ ist eine beschränkte Teilmenge von } Y\}$  die Menge der beschränkten Funktionen von  $B$  nach  $Y$ . Diese Menge ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und wird mit der Supremumsnorm  $\|f\|_{B(S)} := \sup_{x \in S} |f(x)|$  zu einem Banachraum.

**Satz.** Ist  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum und  $Y \subset X$  abgeschlossen, so ist auch  $(Y, d)$  ein vollständiger metrischer Raum.

**Definition (Raum stetiger Funktionen auf einem Kompaktum).** Sei  $S \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt und abgeschlossen (d. h. kompakt) und  $Y$  ein Banachraum über  $\mathbb{K}$  mit Norm  $y \mapsto |y|$ , so ist

$$\mathcal{C}^0(S; Y) := \mathcal{C}(S; Y) := \{f : S \rightarrow Y \mid f \text{ ist stetig}\}$$

die Menge der stetigen Funktionen von  $S$  nach  $Y$ . Sie ist ein abgeschlossener Unterraum von  $B(S; Y)$  mit der Norm  $\|\cdot\|_{\mathcal{C}(S; Y)} = \|\cdot\|_{B(S; Y)}$ , also ein Banachraum.

*Bemerkung.* Für  $Y = \mathbb{K}$  ist  $\mathcal{C}^0(S; \mathbb{K}) = \mathcal{C}(S)$  eine kommutative Banach-Algebra mit dem Produkt  $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ .

**Definition.** Eine Teilmenge  $A \subset X$  heißt **präkompakt**, falls es für jedes  $\epsilon > 0$  eine Überdeckung von  $A$  mit endlich vielen  $\epsilon$ -Kugeln  $A \subset B_\epsilon(x_1) \cup \dots \cup B_\epsilon(x_{n_\epsilon})$  mit  $x_1, x_{n_\epsilon} \in X$  gibt.

**Definition.** Eine Teilmenge  $A \subset X$  eines metrischen Raumes  $(X, d)$  heißt **kompakt**, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- $A$  ist **überdeckungskompakt**: Für jede Überdeckung  $A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$  mit  $A_i \subseteq X$ , gibt es eine endl. Teilmenge  $J \subset I$  mit  $A \subset \bigcup_{i \in J} A_i$ .
- $A$  ist **folgenkompakt**: Jede Folge in  $A$  besitzt eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in  $A$ .
- $(A, d|_A)$  ist vollständig und  $A$  ist **präkompakt**.

**Satz.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann gilt:

- $A$  präkompakt  $\implies A$  beschränkt,
- $A$  kompakt  $\implies A$  abgeschlossen und präkompakt,
- Falls  $X$  vollständig, dann  $A$  präkompakt  $\iff \bar{A}$  kompakt.

**Satz.** Sei  $A \subset \mathbb{K}^n$ . Dann gilt:

- $A$  präkompakt  $\iff A$  beschränkt,
- $A$  kompakt  $\iff A$  abgeschlossen und beschränkt (Heine-Borel).

**Satz.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $A \subset X$  kompakt. Dann gibt es zu  $x \in X$  ein  $a \in A$  mit  $d(x, a) = \text{dist}(x, A)$ .

**Definition.** Sei  $S \subset \mathbb{R}^n$  und  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge kompakter Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ . Dann heißt  $(K_n)$  eine **Ausschöpfung** von  $S$ , falls

- $S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ ,
- $\emptyset \neq K_i \subset K_{i+1} \subset S$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  und
- für alle  $x \in S$  gibt es ein  $\delta > 0$  und  $i \in \mathbb{N}$ , sodass  $B_\delta(x) \subset K_i$ .

*Bemerkung.* Zu  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  existiert eine Ausschöpfung.

**Definition (Raum stetiger Funktionen auf Menge mit Ausschöpfung).** Es sei  $S \subset \mathbb{R}^n$  so, dass eine Ausschöpfung  $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$  von  $S$  existiert und  $Y$  ein Banachraum. Dann bildet die Menge aller stetigen Funktionen

$$C^0(S; Y) := \{f : S \rightarrow Y \mid f \text{ ist stetig auf } S\}$$

einen  $K$ -Vektorraum und wird mit der Fréchet-Norm

$$\varrho(f) := \sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-i} \frac{\|f\|_{C^0(K_i)}}{1 + \|f\|_{C^0(K_i)}}$$

zu einem vollständigen metrischen Raum.

*Bemerkung.* • Die von dieser Metrik erzeugte Topologie ist unabhängig von der Wahl der Ausschöpfung.

- Ist  $S \subset \mathbb{R}^n$  kompakt, so stimmt die Topologie mit der von  $\|\cdot\|_{B(s)}$  überein.

**Definition.** Sei  $S \subset \mathbb{R}^n$  und  $Y$  ein Banachraum. Für  $f : S \rightarrow Y$  heißt

$$\text{supp } f := \{x \in S \mid f(x) \neq 0\}$$

**Träger** (engl. support) von  $f$ .

**Definition.** Sei  $S \subset \mathbb{R}^n$  und  $Y$  ein Banachraum. Dann ist

$$C_0^0(S; Y) := \{f \in C^0(S; Y) \mid \text{supp } f \text{ ist kompakt in } S\}$$

die Menge der stetigen Fktn. mit kompaktem Träger von  $S$  nach  $Y$ .

**Definition (Raum differenzierbarer Funktionen).** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt und  $m \in \mathbb{N}$ . Dann ist die Menge der differenzierbaren Funktionen von  $\Omega$  nach  $Y$

$$C^m(\bar{\Omega}, Y) := \{f : \Omega \rightarrow Y \mid f \text{ ist } m\text{-mal stetig differenzierbar in } \Omega \text{ und für } k \leq m \text{ und } s_1, \dots, s_k \in \{1, \dots, n\} \text{ ist } \partial_{s_1} \dots \partial_{s_k} f \text{ auf } \bar{\Omega} \text{ stetig fortsetzbar}\}$$

ein Vektorraum und mit folgender Norm ein Banachraum:

$$\|f\|_{C^m(\bar{\Omega})} = \sum_{|s| \leq m} \|\partial^s f\|_{C^0(\bar{\Omega})}$$

*Bemerkung.* In obiger Norm wird die Summe über alle  $k$ -fache partielle Ableitungen mit  $k \leq m$  gebildet.

**Satz.** Sei  $X$  ein normierter Raum und  $Y \subset X$  ein abgeschlossener echter Teilraum. Für  $0 < \Theta < 1$  (falls  $X$  Hilbertraum, geht auch  $\Theta = 1$ ) gibt es ein  $x_\Theta \in X$  mit

$$\|x_\Theta\| = 1 \quad \text{und} \quad \Theta \leq \text{dist}(x_\Theta, Y) \leq 1.$$

**Satz.** Für jeden normierten Raum  $X$  gilt:

$$\overline{B_1(0)} \text{ kompakt} \iff \dim(X) < \infty.$$

**Definition.** Sei  $S \subset \mathbb{R}^n$  kompakt,  $Y$  ein Banachraum und  $A \subset C^0(S, Y)$ . Dann heißt  $A$  **gleichgradig stetig**, falls

$$\sup_{f \in A} |f(x) - f(y)| \xrightarrow{|x-y| \rightarrow 0} 0.$$

**Definition (Arzelà-Ascoli).** Sei  $S \subset \mathbb{R}^n$  kompakt,  $Y$  ein endlichdimensionaler Banachraum und  $A \subset C^0(S, Y)$ . Dann gilt

$$A \text{ präkompakt} \iff A \text{ ist beschränkt und gleichgradig stetig.}$$

**Satz (Fundamentallemma der Variationsrechnung).** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und  $Y$  ein Banachraum. Für  $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, Y)$  sind dann äquivalent:

- Für alle  $\xi \in C_0^\infty$  gilt  $\int_\Omega (\xi \cdot g) \, dx = 0$ .
- Für alle beschränkten  $E \in \mathfrak{B}(\Omega)$  mit  $\bar{E} \subset \Omega$  gilt  $\int_E g \, dx = 0$ .
- Es gilt  $g \stackrel{\text{f.ü.}}{=} 0$  in  $\Omega$ .

**Satz.** Sei  $T : X \rightarrow Y$  eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen  $X$  und  $Y$ . Dann sind äquivalent:

- $T$  ist stetig.
- $T$  ist stetig in 0.
- $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| < \infty$ .
- $\exists C > 0 : \forall x \in X : \|Tx\| \leq C \cdot \|x\|$ .

**Definition.** Seien  $X, Y$  Vektorräume mit einer Topologie. Dann ist

$$\mathcal{L}(X, Y) = \{T : X \rightarrow Y \mid T \text{ ist linear und stetig}\}$$

die Menge aller **linearen Operatoren** zwischen  $X$  und  $Y$ . Falls die Stetigkeit nicht nur topologisch, sondern bezüglich einer Norm gilt, so redet man von **beschränkten Operatoren**.

**Satz.** Seien  $X \neq \{0\}, Y \neq \{0\}$  Banachräume und  $T, S \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Dann gilt: Falls  $T$  invertierbar ist und  $\|S - T\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$ , dann ist auch  $S$  invertierbar.

*Bemerkung.* Die Menge aller invertierbaren Operatoren in  $\mathcal{L}(X, Y)$  ist somit eine offene Teilmenge.

**Definition.** Seien  $X$  und  $Y$  Banachräume über  $\mathbb{K}$ . Eine lineare Abbildung  $T : X \rightarrow Y$  heißt **kompakter (linearer) Operator**, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- $\overline{T(B_1(0))}$  ist kompakt.
- $T(B_1(0))$  ist präkompakt.
- Für alle beschränkten  $M \subset X$  ist  $T(M) \subset Y$  präkompakt.
- Für jede beschränkte Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X$  besitzt  $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine in  $Y$  konvergente Teilfolge.

**Definition.** Sei  $X$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$ . Dann ist  $X' := \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$  der **Dualraum** von  $X$ . Elemente von  $X'$  werden **lineare Funktionale** genannt.

**Satz (Rieszscher Darstellungssatz).** Ist  $X$  ein Hilbertraum, so ist

$$J : X \rightarrow X', \quad x \mapsto y \mapsto (y, x)_X$$

ein isometrischer konjugiert linearer Isomorphismus.

**Satz (Lax-Milgram).** Sei  $X$  ein Hilbertraum über  $\mathbb{K}$  und  $a : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$  sesquilinear. Es gebe Konstanten  $c_0$  und  $C_0$  mit  $0 < c_0 \leq C_0 < \infty$ , sodass für alle  $x, y \in X$  gilt:

- $|a(x, y)| \leq C_0 \cdot \|x\| \cdot \|y\|$  (Stetigkeit)
- $\text{Re } a(x, x) \geq c_0 \cdot \|x\|^2$  (Koerzivität)

Dann existiert genau eine Abbildung  $A : X \rightarrow X$  mit

$$a(y, x) = (y, Ax) \text{ für alle } x, y \in X.$$

Außerdem gilt:  $A \in \mathcal{L}(X)$  ist ein invertierbarer Operator mit

$$\|A\| \leq C_0 \quad \text{und} \quad \|A^{-1}\| \leq \frac{1}{c_0}.$$

**Satz.** (Hahn-Banach) Sei  $X$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum,  $Y \subset X$  ein Unterraum,  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  linear und  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$  linear, sodass  $f(x) \leq p(x)$  für alle  $x \in Y$ . Dann existiert eine lineare Abbildung  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f = F|_Y$  und  $F \leq p$ .

**Satz.** Sei  $(X, \|\cdot\|_X)$  ein normierter  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  ein Unterraum. Dann gibt es zu  $y \in Y'$  ein  $x' \in X'$  mit  $x'|_Y = y'$  und  $\|x'\|_{X'} = \|y'\|_{Y'}$ .

**Satz.** Sei  $Y$  abgeschlossener Unterraum des normierten Raumes  $X$  und  $x_0 \in X \setminus Y$ . Dann gibt es ein  $x' \in X'$  mit  $x'|_Y = 0$ ,  $\|x'\|_{X'} = 1$ ,  $\langle x', x_0 \rangle = \text{dist}(x_0, Y)$ .

*Bemerkung.* Dann gibt es auch ein  $x' \in X'$  mit  $x'|_Y = 0$ ,

$$\|x'\|_{X'} = (\text{dist}(x_0, Y))^{-1} \quad \text{und} \quad \langle x', x_0 \rangle = 1.$$

**Satz.** Seien  $X$  normierter Raum und  $x_0 \in X$ . Dann gilt

- Ist  $x_0 \neq 0$ , so gibt es  $x'_0 \in X'$  mit  $\|x'_0\|_{X'} = 1$  und  $\langle x'_0, x_0 \rangle_{X' \times X} = \|x_0\|_X$ .

- Ist  $\langle x', x_0 \rangle_{X' \times X} = 0$  für alle  $x' \in X'$ , so ist  $x_0 = 0$ .
- Durch  $Tx' = \langle x', x_0 \rangle_{X' \times X}$  für  $x' \in X'$  ist ein  $T \in \mathcal{L}(X', \mathbb{K}) = X''$ , dem Bidualraum, definiert mit  $\|T\| = \|x_0\|_X$ .

**Satz** (Baire'scher Kategoriensatz). Es sei  $X \neq \emptyset$  ein vollständiger metrischer Raum und  $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$  mit abgeschlossenen Mengen  $A_k \subset X$ . Dann gibt es ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  mit  $\text{int}(A_{k_0}) \neq \emptyset$ .

**Satz.** Jede Basis eines unendlichdimensionalen Banachraumes ist überabzählbar.

**Satz** (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit). Es sei  $X$  ein nichtleerer vollständiger metrischer Raum und  $Y$  ein normierter Raum. Gegeben sei eine Menge von Funktionen  $F \subset C^0(X, Y)$  mit  $\forall x \in X : \sup_{f \in F} \|f(x)\|_Y < \infty$ . Dann gibt es ein  $x_0 \in X$  und ein  $\epsilon > 0$ , sodass  $\sup_{B_\epsilon(x_0)} \sup_{f \in F} \|f(x)\|_Y < \infty$ .

**Satz** (Banach-Steinhaus). Es sei  $X$  ein Banachraum und  $Y$  ein normierter Raum,  $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(X, Y)$  mit  $\forall x \in X : \sup_{T \in \mathcal{T}} \|Tx\|_Y < \infty$ .

Dann ist  $\mathcal{T}$  eine beschränkte Menge in  $\mathcal{L}(X, Y)$ , d. h.  $\sup_{T \in \mathcal{T}} \|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} < \infty$ .

**Definition.** Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume, so heißt eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  **offen**, falls für alle offenen  $U \subseteq X$  das Bild  $f(U) \subseteq Y$  offen ist.

*Bemerkung.* Ist  $f$  bijektiv, so ist  $f$  genau dann offen, wenn  $f^{-1}$  stetig ist. Sind  $X, Y$  normierte Räume und ist  $T : X \rightarrow Y$  linear, so gilt:  $T$  ist offen  $\iff \exists \delta > 0 : B_\delta(0) \subset T(B_1(0))$ .

**Satz** (von der offenen Abbildung). Seien  $X, Y$  Banachräume und  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Dann ist  $T$  genau dann surjektiv, wenn  $T$  offen ist.

**Satz** (von der inversen Abbildung). Seien  $X, Y$  Banachräume und  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  bijektiv, so ist  $T^{-1}$  stetig, also  $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ .

**Satz** (vom abgeschlossenen Graphen). Seien  $X, Y$  Banachräume und  $T : X \rightarrow Y$  linear. Dann ist  $\text{Graph}(T) = \{(x, Tx) \mid x \in X\}$  genau dann abgeschlossen, wenn  $T$  stetig ist. Dabei ist  $\text{Graph}(T) \subset X \times Y$  mit der **Graphennorm**  $\|(x, y)\|_{X \times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$ .