

Zusammenfassung Stochastik I

Der abstrakte Maßbegriff

Definition. Eine **Ereignisalgebra** oder **Boolesche Algebra** ist eine Menge \mathfrak{A} mit zweistelligen Verknüpfungen \wedge („und“) und \vee („oder“), einer einstelligen Verknüpfung $\bar{\cdot}$ (Komplement) und ausgezeichneten Elementen $U \in \mathfrak{A}$ (unmögliches Ereignis) und $S \in \mathfrak{A}$ (sicheres Ereignis), sodass für $A, B, C \in \mathfrak{A}$ gilt:

- | | |
|---|---|
| i. $A \wedge A = A$ | vii. $A \vee A = A$ |
| ii. $A \wedge B = B \wedge A$ | viii. $A \vee S = S$ |
| iii. $A \wedge S = A$ | ix. $A \vee U = A$ |
| iv. $A \wedge U = U$ | x. $A \vee \bar{A} = S$ |
| v. $A \wedge \bar{A} = U$ | xi. $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$ |
| vi. $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$ | xii. $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ |

Definition. Sei \mathfrak{A} eine Boolesche Algebra. Dann definiert

$$A \leq B: \iff A \wedge B = A$$

eine Partialordnung auf \mathfrak{A} , gesprochen A impliziert B .

Definition. Eine **Algebra** (auch Mengenalgebra) $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist ein System von Teilmengen einer Menge Ω mit $\emptyset \in \mathfrak{A}$, das unter folgenden Operationen stabil ist:

- Vereinigung: $A, B \in \mathfrak{A} \implies A \cup B \in \mathfrak{A}$
- Durchschnitt: $A, B \in \mathfrak{A} \implies A \cap B \in \mathfrak{A}$
- Komplementbildung: $A \in \mathfrak{A} \implies A^c := \Omega \setminus A \in \mathfrak{A}$

Satz (Isomorphiesatz von Stone). Zu jeder Booleschen Algebra \mathfrak{A} gibt es eine Menge Ω derart, dass \mathfrak{A} isomorph zu einer Mengenalgebra \mathfrak{A} in $\mathcal{P}(\Omega)$ ist.

Definition. Eine **σ -Algebra** ist eine Algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, die nicht nur unter endlichen, sondern sogar unter abzählbaren Vereinigungen stabil ist, d. h.

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathfrak{A} \implies \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}.$$

Bemerkung. Es gilt damit:

- $\Omega = \emptyset^c \in \mathfrak{A}$
- Abgeschlossenheit unter abzählbaren Schnitten:

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathfrak{A} \implies \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (A_n)^c \right)^c \in \mathfrak{A}.$$

Definition. Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einer σ -Algebra \mathfrak{A} . Dann sind der Limes Superior und Limes Inferior der Folge A_n wie folgt definiert:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \in \mathfrak{A}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m \in \mathfrak{A}$$

Bemerkung. In einer σ -Algebra, in der die Mengen mögliche Ereignisse beschreiben, ist der Limes Superior das Ereignis, das eintritt, wenn unendlich viele Ereignisse der Folge A_n eintreten. Der Limes Inferior tritt genau dann ein, wenn alle bis auf endlich viele Ereignisse der Folge A_n eintreten.

Definition. Ein **Ring** $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist ein System von Teilmengen einer Menge Ω mit $\emptyset \in \mathfrak{A}$, das unter folgenden Operationen stabil ist:

- Vereinigung: $A, B \in \mathfrak{A} \implies A \cup B \in \mathfrak{A}$
- Differenz: $A, B \in \mathfrak{A} \implies B \setminus A = B \cap A^c \in \mathfrak{A}$

Ein Ring, der nicht nur unter endlicher, sondern sogar unter abzählbarer Vereinigung stabil ist, heißt **σ -Ring**.

Bemerkung. \mathfrak{A} (σ -) Algebra $\iff \mathfrak{A}$ (σ -) Ring und $\Omega \in \mathfrak{A}$.

Satz. Sei $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ eine Familie von (σ -) Ringen / (σ -) Algebren über einer Menge Ω . Dann ist auch $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ ein (σ -) Ring / eine (σ -) Algebra über Ω .

Satz. Sei A_1, A_2, \dots eine Zerlegung von Ω und $B \in \mathfrak{A}$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B | A_n) \mathbb{P}(A_n) \quad (\text{Formel der totalen Wkt.})$$

$$\mathbb{P}(A_n | B) = \frac{\mathbb{P}(B | A_n) \cdot \mathbb{P}(A_n)}{\mathbb{P}(B)} \quad (\text{Formel von Bayes})$$

Definition. Zwei Ereignisse $A, B \in \mathfrak{A}$ heißen (stochastisch) (\mathbb{P} -)unabhängig, falls

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Satz. A, B unabhängig $\iff \mathbb{P}(B | A) = \mathbb{P}(B)$.

Definition. Eine Familie $A_i)_{i \in I} \subset \mathfrak{A}$ (I endlich, abzählbar oder überabzählbar) heißt **vollständig unabhängig**, falls

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \mathbb{P}(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(A_{i_m})$$

für beliebige $i_1, \dots, i_n \in I, 2 \leq n < \infty$ und **paarweise unabh.**, falls

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(A_j) \text{ für } i, j \in I, i \neq j.$$

Achtung. Aus paarweiser Unabhängigkeit folgt nicht vollständige Unabhängigkeit (Gegenbeispiel: Bernsteins Tetraeder).

Definition. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \subset \mathfrak{A}$ zwei Ereignissysteme. Dann sind \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{A}_2 unabhängig, falls $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2)$ für alle $A_1 \in \mathfrak{A}_1, A_2 \in \mathfrak{A}_2$.

Satz. Seien $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ zwei unabhängige Ereignisalgebren. Dann sind die σ -Algebren $\mathfrak{A}_1 = \sigma(\mathfrak{A}_1)$ und $\mathfrak{A}_2 = \sigma(\mathfrak{A}_2)$ unabhängig.

Satz (von Lusin). $f : ([a, b], \mathfrak{L}([a, b])) \rightarrow (\mathbb{R}^1, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^1))$ ist Borel-messbar $\iff \forall \epsilon > 0 : \exists K \in \mathbb{C} \subset [a, b]$ abgeschlossen mit $\lambda_1(\mathbb{R}^1 \setminus K_\epsilon)$ und $f|_{K_\epsilon}$ stetig.

Satz. Folgerung: Es sind messbar

- monotone Funktionen
- Funktionen mit endlicher Variation
- Cädlä-Funktionen, das sind Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\lim_{\epsilon \downarrow 0} f(x + \epsilon) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$.

Definition. Eine \mathfrak{A} -messbare numerische Funktion X über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ heißt **Zufallsgröße** oder **Zufallsvariable**.

Definition. Die durch die ZG X auf $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{L}(\mathbb{R}^1))$ induzierte Bildmaß P_X

$$P_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\})$$

heißt **Verteilung** der ZG X .

$$F_X(x) = P_X([-\infty, x]) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\})$$

heißt die **Verteilungsfunktion** der ZG X .

Satz. F sei eine VF auf \mathbb{R}^1 . Dann existiert ein Wahrscheinlichkeits-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ und eine ZG X derart, dass

$$F_X(x) = F(x) \text{ für } x \in \mathbb{R}^1$$

Notation. Sei X eine Zufallsgröße und $B \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^1)$. Dann schreibe $\{X \in B\} = X^{-1}(B)$.

Definition. Eine endliche Familie von Zufallsgrößen X_1, \dots, X_n heißt **stochastisch unabhängig**, falls

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \in B_i\}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\{X_i \in B_i\}) \text{ für alle } B_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^1), i = 1, \dots, n.$$

Satz. Seien X_1, \dots, X_n unabhängige Zufallsgrößen über $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ von g_1, \dots, g_n Borel-messbare Funktionen von \mathbb{R}^1 nach \mathbb{R}^1 . Dann sind auch die Zufallsgrößen $Y_i := g_i \circ X_i$ unabhängig über $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$.

Satz. Sei $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ eine isotone Folge elementarer Funktionen über (Ω, \mathfrak{A}) . Dann gilt für jede elementare Funktion f mit $f \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ die Ungleichung $\int f d\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n d\mu$.

Satz. Seien $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ isotone Folgen elementarer Funktionen mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n$. Dann ist $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int g_n d\mu$.