Zusammenfassung Geometrie

Notation. Sei im Folgenden I ein Intervall, d. h. eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Definition. Eine Abbildung $c : I \to \mathbb{R}^n$ heißt **regulär Kurve**, wenn c beliebig oft differenzierbar ist und $c'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ gilt. Der affine Unterraum $\tau_{c,t} := c(t) + \mathbb{R}(c'(t))$ heißt **Tangente** an c im Punkt $c(t)$ bzw. Tangente an c zum Zeitpunkt t.

Definition. Die **Bogenlänge** (BL) einer regulären Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ist

$$L(c) := \int_a^b \|c'(t)\| \,\mathrm{d}t.$$

Satz. Die Bogenlänge ist invariant unter Umparametrisierung, d. h. sei $c : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve und $\phi : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ ein Diffeomorphismus, dann gilt $L(c) = L(c \circ \phi)$.

Definition. Eine reguläre Kurve $c : I \to \mathbb{R}^n$ heißt **nach Bogenlänge parametrisiert**, wenn $\|c'(t)\| = 1$ für alle $t \in I$.

Satz. Jede reguläre Kurve $c : I \to \mathbb{R}$ lässt sich nach BL parametrisieren, d. h. es existiert ein Intervall J und ein Diffeomorphismus $\phi : J \to I$, welcher sogar orientierungserhaltend ist, sodass $\tilde{c} := c \circ \phi$ nach BL parametrisiert ist.

Definition. Zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ heißen gleichgerichtet, falls $a = \lambda b$ für ein $\lambda \geq 0$.

Satz. Sei $v : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig, dann gilt

$$\| \int_a^b v(t) \,\mathrm{d}t \| \leq \int_a^b \|v(t)\| \,\mathrm{d}t,$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, falls alle $v(t)$ gleichgerichtet sind.

Satz. Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve und $x := c(a), y := c(b)$. Dann gilt $L(c) \geq d(x, y)$. Wenn $L(c) = d(x, y)$, dann gibt es einen Diffeomorphismus $\phi : [a, b] \to [0, 1]$, sodass

$$c = c_{xy} \circ \phi,$$

wobei $c_{xy} : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto x + t(y - x)$.

Definition. Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Kurve und $a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b$ eine Zerteilung von $[a, b]$. Dann ist die Länge des **Polygonzugs** durch die Punkte $c(t_i)$ gegeben durch

$$\hat{L}_c(t_0, ..., t_k) = \sum_{j=1}^{k} \|c(t_j) - c(t_{j-1})\|.$$

Definition. Eine stetige Kurve c heißt **rektifizierbar** von Länge $\hat{L}_c$, wenn gilt: Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass für alle Unterteilungen $a = t_0 < t1 < ... < t_k = b$ der Feinheit mindestens δ gilt:

$$\|\hat{L}_c - \hat{L}_c(t_0, t_1, ..., t_k)\| < \epsilon.$$

Definition. Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ regulär und nach BL parametrisiert. Dann heißt der Vektor $c''(t)$ **Krümmungsvektor** von c in $t \in I$ und die Abbildung $\kappa : I \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \|c''(t)\|$ heißt **Krümmung** der nach BL parametrisierten Kurve.

Definition. Eine Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2$ wird **ebene Kurve** genannt.

Definition. Sei c eine reguläre, nach BL parametrisierte, ebene Kurve. Dann heißt

$$n = n_c : I \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto J \cdot c'(t) \text{ mit } J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

das **Normalenfeld** von c.

Bemerkung. Für alle $t \in I$ bildet $(c'(t), n_c(t))$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$. Es gilt außerdem $c''(t) \perp c'(t)$, also $c''(t) = \kappa(t) \cdot n_c(t)$, d. h. die Krümmung ist im $\mathbb{R}^2$ vorzeichenbehaftet.

Satz (**Frenet-Gleichungen** ebener Kurven)**.** Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ regulär, nach BL parametrisiert und $v = c'$, dann gilt

$$c'' = \kappa \cdot n \quad \text{ und } \quad n' = -\kappa \cdot v.$$

Beispiel. Die nach BL parametriesierte gegen den UZS durchlaufene Kreislinie mit Mittelpunkt $m \in \mathbb{R}^2$ und Radius $r > 0$

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto m + r \begin{pmatrix} \cos(t/r) \\ \sin(t/r) \end{pmatrix}$$

hat konstante Krümmung $\kappa(t) = \frac{1}{r}$.

Satz. Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ glatte, nach BL parametrisiert mit konstanter Krümmung $\kappa(t) = R \neq 0$. Dann ist c Teil eines Kreisbogens mit Radius $\frac{1}{|R|}$.

Definition. Für $c : I \to \mathbb{R}^2$ regulär, nicht notwendigerweiße nach BL parametrisiert, ist die Krümmung zur Zeit t definiert als

$$\frac{\det(c'(t), c''(t))}{\|c'(t)\|^3}$$

Bemerkung. Obige Definition ist invariant unter orientierungserhaltenden Umparametrisierungen, und stimmt für nach BL parametrisierte Kurven mit der vorhergehenden Definition überein.

Satz (Hauptsatz der lokalen ebenen Kurventheorie)**.** Sei $\kappa : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $t_0 \in I$ und $x_0, v_0 \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v_0\| = 1$. Dann gibt es ganu eine nach BL parametrisierte zweimal stetig differenzierbare Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2$ mit Krümmung κ, $c(t_0) = x_0$ und $c'(t_0) = v(t_0) = v_0$.

Definition. Eine reguläre Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt **geschlossen**, wenn gilt

- $c(a) = c(b)$ und
- $c'(a) = c'(b)$.

Eine reguläre geschlossene Kurve c heißt **einfach geschlossen**, wenn $c|_{[a,b[}$ injektiv ist.

Definition. Für eine geschlossene reguläre ebene Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ heißt die Zahl

$$\overline{\kappa}(c) := \int_a^b \kappa(t) \|c'(t)\| \,\mathrm{d}t$$

Totalkrümmung von c.

Bemerkung. Ist c nach BL parametrisiert, so ist $\overline{\kappa}(c) = \displaystyle\int_a^b \kappa(t) \,\mathrm{d}t$.

Satz. Die Totalkrümmung ist invariant unter orientierungserhaltenden Umparametrisierungen, d. h. ist $c : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre Kurve und $\phi : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ eine Diffeomorphismus mit $\phi' > 0$, dann gilt $\overline{\kappa}(c) = \overline{\kappa}(c \circ \phi)$.