Zusammenfassung Stochastik I

Der abstrakte Maßbegriff

Definition. Eine **Ereignisalgebra** oder **Boolesche Algebra** ist eine Menge $\mathfrak{A}$ mit zweistelligen Verknüpfungen $\wedge$ („und“) und $\vee$ („oder“), einer einstelligen Verknüpfung $\overline{\cdot}$ (Komplement) und ausgezeichneten Elementen $U \in \mathfrak{A}$ (unmögliches Ereignis) und $S \in \mathfrak{A}$ (sicheres Ereignis), sodass für $A, B, C \in \mathfrak{A}$ gilt:

i. $A \wedge A = A$
ii. $A \wedge B = B \wedge A$
iii. $A \wedge S = A$
iv. $A \wedge U = U$
v. $A \wedge \overline{A} = U$
vi. $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$
vii. $A \vee A = A$
viii. $A \vee S = S$
ix. $A \vee U = A$
x. $A \vee \overline{A} = S$
xi. $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$
xii. $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

Definition. Eine **Algebra** $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist ein System von Teilmengen einer Menge Ω mit $\emptyset \in \mathfrak{A}$, das unter folgenden Operationen stabil ist:

- Vereinigung: $A, B \in \mathfrak{A} \implies A \cup B \in \mathfrak{A}$
- Durchschnitt: $A, B \in \mathfrak{A} \implies A \cap B \in \mathfrak{A}$
- Komplementbildung: $A \in \mathfrak{A} \implies A^c := \Omega \setminus A \in \mathfrak{A}$

Definition. Eine **σ-Algebra** ist eine Algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, die nicht nur unter endlichen, sondern sogar unter abzählbaren Vereinigungen stabil ist, d. h.

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathfrak{A} \implies \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}.$$

Bemerkung. Es gilt damit:

- $\Omega \in \mathfrak{A}$
- Abgeschlossenheit unter abzählbaren Schnitten:

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathfrak{A} \implies \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (A_n)^c\right)^c \in \mathfrak{A}.$$

Definition. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$. Dann sind der Limes Superior und Limes Inferior der Folge A_n wie folgt definiert:

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$$
$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$$

Bemerkung. In einer σ-Algebra, in der die Mengen mögliche Ereignisse beschreiben, ist der Limes Superior das Ereignis, das eintritt, wenn unendlich viele Ereignisse der Folge A_n eintreten. Der Limes Infinum tritt genau dann ein, wenn alle bis auf endlich viele Ereignisse der Folge A_n eintreten.

Definition. Ein **Ring** $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist ein System von Teilmengen einer Menge Ω mit $\emptyset \in \mathfrak{A}$, das unter folgenden Operation stabil ist:

- Vereinigung: $A, B \in \mathfrak{A} \implies A \cup B \in \mathfrak{A}$
- Differenz: $A, B \in \mathfrak{A} \implies B \setminus A = B \cap A_C \in \mathfrak{A}$

Ein Ring, der nicht nur unter endlicher, sondern sogar unter abzählbarer Vereinigung stabil ist, heißt **σ-Ring**.

Bemerkung. $\mathfrak{A}$ (σ-) Algebra $\iff$ $\mathfrak{A}$ (σ-) Ring und $\Omega \in \mathfrak{A}$.