Zusammenfassung Analysis III

Maßtheorie

Problem (Schwaches Maßproblem)**.** Gesucht: Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [\mathbb{R}, \infty]$ mit folgenden Eigenschaften:

- Normierung: $\mu([0,1]^n) = 1$
- Endliche Additivität: Sind $A, B \subset \mathbb{R}^n$ disjunkt, so gilt $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$
- Bewegungsinvarianz: Für eine euklidische Bewegung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt $\mu(f(A)) = \mu(A)$.

Satz (Hausdorff)**.** Das schwache Maßproblem ist für $n \geq 3$ nicht lösbar.

Satz (Banach)**.** Das schwache Maßproblem ist für $n = 1, 2$ lösbar, aber nicht eindeutig lösbar.

Problem (Starkes Maßproblem)**.** Gesucht ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ wie im schwachen Maßproblem, die anstelle der endlichen Additivität die Eigenschaft der σ-Additivität besitzt:

- Für eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ist
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$$

Satz. Das starke Maßproblem besitzt keine Lösung.

Notation. Sei im Folgenden Ω eine Menge.

Definition. Eine Teilmenge $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt **Ring**, wenn für $A, B \in \mathfrak{R}$ gilt:

- $\emptyset \in \mathfrak{R}$
- Abgeschlossenheit unter Differenzbildung: $A \setminus B \in \mathfrak{R}$
- Abgeschlossenheit unter endlichen Vereinigungen: $A \cup B \in \mathfrak{R}$

Definition. Eine Teilmenge $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt **Algebra**, wenn für $A, B \in \mathfrak{A}$ gilt:

- $\emptyset \in \mathfrak{A}$
- Abgeschlossenheit unter Komplementbildung: $A^c = \Omega \setminus A \in \mathfrak{A}$
- Abgeschlossenheit unter endlichen Vereinigungen: $A \cup B \in \mathfrak{A}$

Definition. Eine Algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega))$ heißt **σ-Algebra**, wenn $\mathfrak{A}$ unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen ist, d. h. für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{A}$ gilt
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}$$

Bemerkung.
- Jede Algebra ist auch ein Ring.
- Ein Ring $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist auch unter endlichen Schnitten abgeschlossen, da $A \cap B = A \setminus (B \setminus A) \in \mathfrak{R}$
- Ein Ring $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist genau dann eine Algebra, wenn $\Omega \in \mathfrak{R}$
- Eine σ-Algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist auch unter abzählbaren Schnitten abgeschlossen: Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathfrak{A}$, dann gilt
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n)^c\right)^c \in \mathfrak{A}$$

Notation. Sei im Folgenden $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein Ring.

Satz. Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Ringen / Algebren / σ-Algebren über Ω. Dann ist auch $\cap_{i\in I} A_i$ ein Ring / eine Algebra / eine σ-Algebra über Ω.

Definition. Sei $E \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Setze
$$\mathcal{R}(E) := \{\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega) \,|\, E \subset \mathfrak{R}, \mathfrak{R} \text{ Ring}\} \text{ und}$$
$$\mathcal{A}(E) := \{\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega) \,|\, E \subset \mathfrak{A}, \mathfrak{A}\ \sigma\text{-Algebra}\}.$$
Dann heißen
$$\mathfrak{R}(E) := \bigcap_{\mathfrak{R}\in\mathcal{R}(E)} \mathfrak{R}, \qquad \mathfrak{A}(E) := \bigcap_{\mathfrak{A}\in\mathcal{A}(E)} \mathfrak{A}$$
von E **erzeugter Ring** bzw. von E **erzeugte σ-Algebra**.

Definition. Ist $(\Omega, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, dann heißt $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\Omega, \mathcal{O}) := \mathfrak{A}(\mathcal{O})$ **Borelsche σ-Algebra** von $(\Omega, \mathcal{O})$.

Bemerkung. Die Borelsche σ-Algebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ wird auch erzeugt von $\{I \subset \mathbb{R} \,|\, I \text{ Intervall }\}$. Dabei spielt es keine Rolle, ob man nur geschlossene, nur offene, beliebig halboffene Intervalle oder gar nur Intervalle mit Endpunkten in $\mathbb{Q}$ zulässt.

Definition. Eine Funktion $\mu : \mathfrak{R} \to [0, \infty]$ heißt **Inhalt** auf $\mathfrak{R}$, falls

- $\mu(\emptyset) = 0$ und
- $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$ für disjunkte $A, B \in \mathfrak{R}$.

Definition. Ein Inhalt $\mu : \mathfrak{R} \to [0, \infty]$ heißt **Prämaß** auf $\mathfrak{R}$, wenn μ σ-additiv ist, d. h. wenn für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Elemente von $\mathfrak{R}$ mit $\sqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{R}$ gilt:
$$\mu\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$$

Definition. Ein Maß ist ein Prämaß auf einer σ-Algebra.

Satz. Für einen Inhalt μ auf $\mathfrak{R}$ gilt für alle $A, B \in \mathfrak{R}$:

- $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$
- Monotonie: $A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$
- Aus $A \subset B$ und $\mu(B) < \infty$ folgt $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$
- Subadditivität: Für $A_1, ..., A_n \in \mathfrak{R}$ ist $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$
- Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge disjunkter Elemente aus $\mathfrak{R}$, sodass $\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{R}$, so gilt $\mu(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$.

Definition. Ein Inhalt / Maß auf einem Ring $\mathfrak{R}$ / einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ heißt **endlich**, falls $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in \mathfrak{R}$ bzw. $A \in \mathfrak{A}$.

Satz. Ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ ist σ-subadditiv, d. h. für alle Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{A}$ gilt
$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

Definition. Sei $A \subset \Omega$. Dann heißt die Abbildung
$$1_A : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in A \\ 0, & \text{falls } \omega \notin A \end{cases}$$
Indikatorfunktion oder **charakteristische Funktion** von A.

Definition. Wir sagen eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert** gegen $A \subset \Omega$, notiert $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, wenn $(1_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen 1_A konvergiert.

Definition. Für eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{P}(\Omega)$ heißen
$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \text{ liegt in undendlich vielen } A_n\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n$$
$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \text{ liegt in allen bis auf endlich vielen } A_n\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_n$$
Limes Superior bzw. **Limes Inferior** der Folge A_n.

Satz. Es gilt $\lim_{n\to\infty} A_n = A \iff \liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = A$.

Definition. Eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{P}(\Omega)$ heißt

- **monoton wachsend**, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A_n \subset A_{n+1}$,
- **monoton fallend**, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A_n \supset A_{n+1}$.

Satz. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{P}(\Omega)$.

- Ist (A_n) monoton wachsend, so gilt $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
- Ist (A_n) monoton fallend, so gilt $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Satz. Sei μ ein Inhalt auf $\mathfrak{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Wir betrachten folgende Aussagen:

(i) μ ist ein Prämaß auf $\mathfrak{R}$.

(ii) Stetigkeit von unten: Für jede monoton wachsende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{R}$ mit $A := \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathfrak{R}$ gilt $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

(iii) Stetigkeit von oben: Für jede monoton fallende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{R}$ mit $\mu(A_0) < \infty$ und $A := \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathfrak{R}$ gilt $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

(iv) Für jede monoton fallende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{R}$ mit $\mu(A_0) < \infty$ und $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \emptyset$ gilt $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

Dann gilt $(i) \iff (ii) \implies (iii) \iff (iv)$.
Falls μ endlich, gilt auch $(iii) \implies (ii)$.

Satz. Sei μ ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Dann gilt:

- Für eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{A}$ gilt $\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty}(\mu(A_n))$.
- Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathfrak{A}$, sodass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $\mu\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n\right) < \infty$, dann gilt $\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n)$.
- Sei μ endlich und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathfrak{A}$, dann gilt
$$\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right).$$
- Sei μ endlich und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen A konvergente Folge in $\mathfrak{A}$, dann gilt $A \in \mathfrak{A}$ und $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.