Zusammenfassung Analysis II

Notation. Im Folgenden seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle.

Integration

Definition. Eine **Zerlegung** eines Intervalls $[a, b] \subset \mathbb{R}, a < b$ ist eine Menge $Z = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$. Die Zahl $\mu_Z := \max\{x_j - x_{j-1} \mid j \in \{1, ..., n\}\}$ heißt **Feinheit** der Zerlegung Z. Wenn Z, Z' zwei Zerlegungen von $[a, b]$ sind mit $Z' \subset Z$, dann heißt Z' Verfeinerung von Z.

Definition. Eine Funktion $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **Treppenfunktion** bezüglich einer Zerlegung $Z = \{x_0 < ... < x_n\}$ von $[a, b]$, wenn für alle $j \in \{1, ..., n\}$ die Funktion ϕ auf dem offenen Intervall (x_{j-1}, x_j) konstant ist. Die Menge aller Treppenfunktionen (bezüglich irgendeiner Zerlegung) eines Intervalls $[a, b]$ wird mit $\mathcal{T}_{[a,b]}$ bezeichnet.

Satz. $\mathcal{T}[a, b]$ ist ein UVR des reellen VR aller reellwertigen Funktionen auf $[a, b]$.

Definition. Sei $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion bezüglich einer Zerlegung $Z = \{x_0 < ... < x_n\}$. Dann heißt

$$\int_a^b \phi(x) \mathrm{d}x := \sum_{j=1}^{n} \phi\left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2}\right)(x_j - x_{j-1})$$

Integral von ϕ.

Bemerkung. Obige Definition ist unabhängig von der gewählten Zerlegung Z.

Satz. Das Integral von Treppenfunktionen ist linear und monoton.

Definition. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann heißt

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \inf\left\{\int_a^b \phi(x)\,\mathrm{d}x : \phi \in \mathcal{T}[a, b], \phi \geq f\right\}$$

Oberintegral und

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \sup\left\{\int_a^b \phi(x)\,\mathrm{d}x : \phi \in \mathcal{T}[a, b], \phi \leq f\right\}$$

Unterintegral von f.

Bemerkung. Da wir in der Definition vorraussetzen, dass die Funktion f beschränkt ist, existieren Ober- und Unterintegral im eigentlichen Sinne. Für Treppenfunktionen sind Oberintegral und Unterintegral gleich dem Integral für Treppenfunktionen. Das Oberintegral ist immer größer gleich dem Unterintegral.

Satz. Für $f, f_1, f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $\lambda \geq 0$ gilt

1. $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = -\overline{\int_a^b} -f(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\overline{\int_a^b} (f_1 + f_2)(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f_1(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_a^b} f_2(x)\,\mathrm{d}x$
3. $\underline{\int_a^b} (f_1 + f_2)(x)\,\mathrm{d}x \geq \underline{\int_a^b} f_1(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_a^b} f_2(x)\,\mathrm{d}x$
4. $\overline{\int_a^b} (\lambda f)(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$
5. $\underline{\int_a^b} (\lambda f)(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$

Definition. Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt genau dann **Riemann-integrierbar**, wenn gilt:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bemerkung. Für Treppenfunktionen stimmt das Riemann-Integral mit dem vorher definierten Integral für Treppenfunktionen überein.

Satz. Die Menge aller Riemann-integrierbaren Funktionen auf einem Intervall $[a, b]$ ist ein UVR des $\mathbb{R}$-VR aller Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (genannt $\mathcal{R}_{[a,b]}$) und das Riemann-Integral verhält sich linear, dh. es gilt für alle $f, g : \mathcal{R}_{[a,b]}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. $\int_a^b (f + g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\int_a^b (\lambda f)(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Satz. Das Riemann-Integral verhält sich monoton.

Satz. Alle monotonen und alle stetigen Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sind Riemann-integrierbar.

Satz. Seien $f, g : R_{[a,b]}$, dann auch Riemann-integrierbar:

1. $f_+ : [a, b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \max\{f(x), 0\}$
2. $f_- : [a, b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \max\{-f(x), 0\}$
3. $|f|^p : [a, b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto |f(x)|^p,$ mit $p \geq 1$
4. $fg : [a, b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)g(x)$

Satz (Erster MWS für das Riemann-Integral)**.** Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g \geq 0$. Dann gibt es ein $x_0 \in [a, b]$, sodass gilt:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(x_0) \int_a^b g(x)dx$$

Definition. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $Z = \{x_0 < ... < x_n\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Dann heißt

1. $R(f, Z, \xi_1, ..., \xi_n) := \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$
   Riemannsche Summe von f bzgl. Z und den Stützstellen $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ für $j \in \{1, ..., n\}$.
2. $O(f, Z) := \sum_{j=1}^{n} (\sup\{f(x) \mid x \in [x_{j-1}, x_j]\})(x_j - x_{j-1})$
   (Darbouxsche) Obersumme von f bzgl. Z
3. $U(f, Z) := \sum_{j=1}^{n} (\inf\{f(x) \mid x \in [x_{j-1}, x_j]\})(x_j - x_{j-1})$
   (Darbouxsche) Untersumme von f bzgl. Z

Bemerkung. Sei Z' eine Verfeinerung von Z, dann gilt $O(f, Z') \leq O(f, Z)$ und $U(f, Z') \geq U(f, Z)$.

Satz. Seien Z_1, und Z_2 Zerlegungen von $[a, b]$, dann gilt $U(f, Z_1) \leq O(f, Z_2)$.

Satz (Charakterisierung des Riemann-Integrals)**.** Für eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sind folgende vier Aussagen äquivalent:

1. f ist Riemann-integrierbar.
2. Für alle $\epsilon > 0$ gibt es eine Zerlegung Z von $[a, b]$, sodass
   $$O(f, Z) - U(f, Z) < \epsilon.$$
3. Es gibt eine Zahl $\iota \in \mathbb{R}$ mit folgender Eigenschaft: Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass für jede Zerlegung $Z = \{x_0 < ... < x_n\}$ von $[a, b]$ der Feinheit $\mu_Z \leq \delta$ und jede Wahl von Stützstellen $\xi_1, ..., \xi_n$ gilt:
   $$|\iota - R(f, Z, \xi_1, ..., \xi_n)| < \epsilon$$
4. Es gibt eine Zahl $\iota \in \mathbb{R}$ mit folgender Eigenschaft: Für alle $\epsilon > 0$ gibt es eine Zerlegung $\widetilde{Z}_\epsilon = \{\widetilde{x}_0 < ... < \widetilde{x}_m\}$ von $[a, b]$, sodass für jede Verfeinerung $Z = \{x_1 < ... < x_n\}$ von $\widetilde{Z}_\epsilon$ und jede Wahl von Stützstellen $\xi_1, ..., \xi_n$ bzgl. Z gilt:
   $$|\iota - R(f, Z, \xi_1, ..., \xi_n)| \leq \epsilon.$$

Satz. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $c \in (a, b)$. Dann ist f genau dann Riemann-integrierbar, wenn $f\,|_{[a,c]}$ und $f\,|_{[c,b]}$ Riemann-integrierbar sind und es gilt in diesem Fall

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Satz (Dreiecksungleichung für das Riemann-Integral)**.** Für $f, g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ gilt $\int_a^b |f(x) + g(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_a^b |g(x)|\,\mathrm{d}x.$

Satz (Vertauschung von Integration und Limes bei glm. Konvergenz)**.** Sei $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ eine Folge Riemann-integrierbarer Funktionen, welche gleichmäßig gegen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

Definition. Eine differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion** von f, wenn die Ableitung von F gerade f ist.

Bemerkung. Zwei Stammfunktionen einer Funktion f unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante.

Satz. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Funktion

$$F : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

eine Stammfunktion von f.

Satz (**Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**). Sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion von f. Dann gilt für alle $x, y \in I$

$$\int_x^y f(x)\,\mathrm{d}x = F(y) - F(x)$$

Satz (Vertauschung von Grenzwerten und Ableitungen). Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen, welche pktw. gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Wenn die Folge der Ableitungen f_n' gleichmäßig gegen eine Funktion $f^* : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert, dann ist auch f differenzierbar und es gilt $f' = f^*$.

Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F(x)$
$x^n, n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\exp(ax)$	$\frac{1}{a}\exp(ax)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$x^n \ln(x)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x - \frac{1}{n+1}),\ n \geq 1$
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a}(x \ln x - x)$

Satz (**Substitutionsregel**). Sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und sei $g: J \to I$ stetig differenzierbar. Dann gilt für $a, b \in J$:

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Satz (**Partielle Integration**). Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt für $a, b \in I$:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

Definition (Riemann-Integral für komplexwertige Funktionen). Eine komplexwertige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt Riemann-integrierbar, wenn ihr Realteil $\Re(f)$ und ihr Imaginärteil $\Im(f)$ Riemann-integrierbar sind. Wir setzen

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \Re(f)\,\mathrm{d}x + i\int_a^b \Im(f)\,\mathrm{d}x.$$

Definition (Uneigentliche Integrale).
- Sei $a < b$ mit $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass $f\mid_{[}a,R]$ für alle $R \in (a,b)$ Riemann-integrierbar ist. Wir setzen
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{R\uparrow b}\int_a^R f(x)\,\mathrm{d}x$$
falls der Grenzwert existiert.
- Sei $a < b$ mit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass $f\mid_{[}R,b]$ für alle $R \in (a,b)$ Riemann-integrierbar ist. Wir setzen
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{R\downarrow a}\int_R^b f(x)\,\mathrm{d}x$$
falls der Grenzwert existiert.
- Sei $a < b$ mit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $c \in (a,b)$. Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass für alle $a < R_1 < c < R_2 < b$ die $f\mid_{[R_1,c]}$ und $f\mid_{[c,R_2]}$ Riemann-integrierbar sind. Wir setzen
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R_1\downarrow a}\int_{R_1}^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{R_2\uparrow b}\int_c^{R_2} f(x)\,\mathrm{d}x$$
falls beide Grenzwerte existieren.

Definition. Für zwei Funktionen $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, eine Zerlegung $Z = \{a = x_0 < ... < x_n = b\}$ von $[a,b]$ und Stützstellen $\xi_1, ..., \xi_n$ bzgl. Z heißt die Summe

$$S(f, \mathrm{d}g, Z, \xi_1, ..., \xi_n) := \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(g(\xi_j) - g(\xi_{j-1}))$$

Riemann-Stieltjes-Summe von f bzgl. g und der Zerlegung Z mit Stützstellen $\xi_1, ..., \xi_n$.

Definition. Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Die Funktion f heißt **Riemann-Stieltjes-integrierbar (RS-integrierbar)** bzgl. der **Gewichtsfunktion** g, wenn gilt:

$$\exists\,\iota : \forall\,\epsilon > 0 : \exists\,\text{Zerlegung } Z \text{ von } [a,b] : \forall\,Z' \subset Z \text{ Verfeinerung} :$$
$$|\iota - S(f, \mathrm{d}g, Z, \xi_1, ..., \xi_n)| \leq \epsilon$$

Dieses (eindeutig bestimmte) ι heißt **Riemann-Stieltjes-Integral (RS-Integral)** von f bzgl. g.

Bemerkung. Für die Identitätsfunktion $g(x) = x$ stimmt das Riemann-Stieltjes-Integral mit dem Riemann-Integral überein.

Satz (Linearität des RS-Integrals).
- Seien $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ bzgl. $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ RS-integrierbar und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)$ bzgl. g RS-integrierbar mit
$$\int_a^b (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x)\,\mathrm{d}g(x) = \lambda_1\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}g(x) + \lambda_2\int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}g(x)$$
- Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bzgl. den Funktionen $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ RS-integrierbar und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann ist f auch bzgl. $(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)$ RS-integrierbar mit
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) = \lambda_1\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g_1(x) + \lambda_2\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g_2(x)$$

Satz. Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $c \in (a,b)$, dann ist f genau dann bzgl. g RS-integrierbar, wenn die Funktionen $f\mid_{[a,c]}$ bzgl $g\mid_{[a,c]}$ und $f\mid_{[c,b]}$ bzgl $g\mid_{[c,b]}$ RS-integrierbar sind und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}g(x) + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}g(x).$$

Satz (Partielle Integration beim RS-Integral). Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bzgl. $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ RS-integrierbar, dann ist auch g bzgl. f RS-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}f(x)$$

Satz (Riemann-Stieltjes- und Riemann-Integral). Sei $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, dann ist f bzgl. g RS-integrierbar mit

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x) = \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Definition. Die **Variation** von $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ bzgl. einer Zerlegung $Z = \{x_0 < ... < x_n\}$ von $[a,b]$ ist die nicht-negative Zahl

$$V(g, Z) := \sum_{j=1}^n |g(x_j) - g(x_{j-1})|.$$

Die **Totalvariation** von $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist

$$V_a^b(g) := \sup\{V(g,Z) : Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}.$$

Falls $V_a^b(g) < \infty$, so heißt g **von beschränkter Variation**.

Satz. Alle monotonen und alle Lipschitz-stetigen Funktionen sind von beschränkter Variation.

Satz. Sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ von beschränkter Variation und $c \in (a,b)$, dann sind auch $g\mid_{[a,c]}$ und $g\mid_{[c,b]}$ von beschränkter Variation und es gilt

$$V_a^c(g\mid_{[a,c]}) + V_c^b(g\mid_{[c,b]}) = V_a^b(g).$$

Satz. Seien $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ von beschränkter Variation, dann gilt

$$V_a^b(g_1 + g_2) \leq V_a^b(g_1) + V_a^b(g_2).$$

Satz. Die Menge aller Funktionen $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ bildet einen UVR des VR der reellwertigen Funktionen auf $[a,b]$.

Satz. Sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ von beschränkter Variation, dann ist jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bzgl. g RS-integrierbar mit

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)\right| \leq \|f\|_{\sup} \cdot V_a^b(g).$$

Satz (1. MWS für RS-Integrale). Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und bzgl einer monoton wachsenden Gewichtsfunktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ RS-integrierbar. Dann gibt es $\mu \in [\inf f([a,b]), \sup f([a,b])]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \mu(g(b) - g(a)).$$

Satz (2. MWS für RS-Integrale). Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f bzgl. g RS-integrierbar und es gibt $c \in [a,b]$, sodass

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) = f(a)(g(c) - g(a)) + f(b)(g(b) - g(c)).$$

Satz. Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen, welche gleichmäßig gegen eine (stetige) Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ von beschränkter Variation, dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}g(x) \right).$$

Satz (Helly-Bray)**.** Sie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen von beschränkter Variation, sodass es eine Konstante $c > 0$ mit $V_a^b(g_n) < c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt. Konvergiere g_n pktw. gegen eine Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g_n(x) \right).$$

Metrische und normierte Räume

Definition. Ein **metrischer Raum** (X,d) ist ein Tupel bestehend aus einer Menge X und einer Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$, genannt **Metrik**, die folgende Eigenschaften erfüllt:

1. $d(x,y) = 0 \iff (x = y)$
2. Symmetrie: $\forall\, x,y \in X : d(x,y) = d(y,x)$
3. Dreiecksungleichung: $\forall\, x,y,z \in X : d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$

Bemerkung. Aus den obigen Axiomen folgt: $\forall\, x,y \in X : d(x,y) \geq 0$

Notation. Sei im folgenden (X,d) ein metrischer Raum.

Definition.
- $$B_r(m) = B_r^d(m) = \{x \in X : d(x,m) < r\}$$
  heißt **offener Ball** oder **offene Kugel** um m von Radius r.
- $$B_r^a(m) = B_r^{a,d}(m) = \{x \in X : d(x,m) \leq r\}$$
  heißt **abgeschlossener Ball** oder **abgeschlossene Kugel** um m.
- $Y \subset X$ heißt eine Umgebung von m bzgl. d, wenn gilt:
  $$\exists\, \epsilon > 0 : B_\epsilon(m) \subset Y.$$

Definition.
- Eine Menge $U \subset X$ heißt **offen** in (X,d) (notiert $U \overset{\circ}{\subset} X$), falls U eine Umgebung von allen Punkten $u \in U$ ist, d. h.
  $$\forall\, u \in U : \exists\, \epsilon_u > 0 : B_{\epsilon_u}(u) \subset U$$
- Eine Menge $U \subset X$ heißt **abgeschlossen** in (X,d) (notiert $U \overset{\bullet}{\subset} X$), falls $X \backslash U$ offen ist.
- Ein Punkt $x \in X$ heißt **Randpunkt** von $Y \subset X$, falls gilt:
  $$\forall\, \epsilon > 0 : (B_\epsilon(x) \cap Y \neq \emptyset \text{ und } B_\epsilon(x) \cap (X \backslash Y) \neq \emptyset).$$
  Die Menge aller Randpunkte von Y wird mit ∂Y bezeichnet.

Bemerkung. Die leere Menge $\emptyset$ und X sind jeweils sowohl offen als auch abgeschlossen in X. Es gilt außerdem $\partial Y = \partial(X \backslash Y)$ für alle $Y \subset X$.

Definition. Sei $Y \subset X$. Dann heißt
- $Y^\circ := Y \backslash \partial Y$ das **Innere** oder der **offene Kern** von Y.
- $\overline{Y} := Y \cup \partial Y$ der **Abschluss** oder die **abgeschl. Hülle** von Y.

Satz. Obige Definition ergeben Sinn, d. h. es gilt für alle $Y \subset X$: $Y^\circ \overset{\circ}{\subset} X$ und $\overline{Y} \overset{\bullet}{\subset} X$

Satz. Sei $Y \subset X$. Dann gilt:
- $(Y \overset{\circ}{\subset} X) \iff (Y \cap \partial Y) = \emptyset$
- $(Y \overset{\bullet}{\subset} X) \iff (\partial Y \subset Y)$

Satz (Metrische Räume sind hausdorffsch)**.** Seien $x,y \in X$ mit $x \neq y$, dann gibt es offene Teilmengen $U_x, U_y \overset{\circ}{\subset} X$ mit $x \in U_x$, $y \in U_y$ und $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Definition. Sei x_n eine Folge in X. Die Folge heißt **konvergent** in (X,d), wenn gilt

$$\exists\, x \in X : \forall\, \epsilon > 0 : \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq N : d(x_n, x) \leq \epsilon.$$

Die eindeutige Zahl x heißt **Grenzwert** oder **Limes** von (x_n), notiert $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Satz (Folgenkriterium für Abgeschlossenheit)**.** Sei $A \subset X$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. A ist abgeschlossen in X.
2. Für jede in X konvergenten Folge, die vollständig in A liegt, gilt $\lim_{n\to\infty} x_n \in A$.

Definition. Eine Folge (x_n) heißt **Cauchyfolge** in (X,d), wenn gilt:

$$\forall\, \epsilon > 0 : \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall\, n,m \in \mathbb{N} : |x_n - x_m| < \epsilon$$

Satz. Jede konvergente Folge (x_n) in einem metrischen Raum ist eine Cauchyfolge.

Definition. Ein metrischer Raum (X,d) heißt **vollständig**, wenn jede Cauchyfolge in (X,d) auch in (X,d) konvergiert.

Definition. Eine **Norm** auf einem reellen VR V ist eine Abbildung

$$\|...\| : V \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|$$

für die gilt:

1. $(\|x\| = 0) \iff (x = 0)$
2. $\forall\, x \in V, \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3. Dreiecksungleichung: $\forall\, x,y \in V : \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Das Tupel $(V, \|...\|)$ heißt **normierter Vektorraum**.

Bemerkung. In jedem normierten Raum gilt $\|x\| \geq 0$.

Bemerkung (Wichtige Normen)**.**
- Die **euklidische Norm** auf $\mathbb{R}^n$:
  $$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_{\text{eukl}} := \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$$
- Die **Maximumsnorm** auf $\mathbb{R}^n$:
  $$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_{\max} := \max\{|x_1|, ..., |x_n|\}$$
- Sei X eine nichtleere Menge. Dann ist die **Supremumsnorm**
  $$\|f\|_{\sup} := \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$
  eine Norm auf $V = \left\{ f : X \to \mathbb{R} : \sup_{x\in X} |f(x)| < \infty \right\}$.
- Sei $V = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ der VR der reellwertigen stetigen Funktionen auf $[a,b]$ und $p \geq 1$. Dann ist die **p-Norm**
  $$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}$$
  eine Norm auf V.
- Seien $(V, \|...\|_V)$ und $(W, \|...\|_W)$ zwei normierte (reelle) VR, dann ist auch $\mathrm{Hom}(V,W) := \{ f : V \to W : f \text{ linear } \}$ ein reeller VR. Die Norm
  $$\begin{aligned} \|f\|_{\text{op}} &:= \sup\left\{ \frac{\|f(x)\|_W}{\|x\|_V} : x \in V \backslash \{0\} \right\} \\ &= \sup\{\|f(x)\|_W : x \in V, \|x\|_V = 1\} \end{aligned}$$
  auf $\mathrm{Hom}(V,W)$ heißt **Operatornorm**.

Definition. Die Abbildung

$$d_{\|...\|} : V \times V \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \|x - y\|$$

ist eine Metrik auf V und heißt von der Norm $\|...\|$ **induzierte Metrik** auf V.

Definition. Ein vollständiger normierter Vektorraum $(V, \|...\|)$ heißt **Banachraum**.

Satz (Bolzano-Weierstraß)**.** Für eine Folge (x_n) in $(\mathbb{R}^m, \|...\|_{\text{eukl}})$ gilt:
- Ist (x_n) beschränkt, d. h. gibt es ein $C > 0$, sodass $\|x_n\|_{\text{eukl}} \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann hat (x_n) eine konvergente Teilfolge.
- Ist (x_n) eine Cauchyfolge, so ist (x_n) konvergent (d. h. $(\mathbb{R}^m, \|...\|_{\text{eukl}})$) ist vollständig).

Definition. Sei V ein reeller VR. Zwei Normen $\|...\|_1$ und $\|...\|_2$ auf V heißen äquivalent, wenn es $c, C > 0$ gibt, sodass für alle $x \in V$ gilt:

$$c\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C\|x\|_2$$

Satz. Alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ (und allen anderen endlich-dimensionalen, reellen VR) sind äquivalent.

Definition. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume und $f : X \to Y$.
- Die Abbildung f heißt **stetig** in $a \in X$, wenn gilt:
  $$\forall\, \epsilon > 0 : \exists\, \delta_a > 0 : d_X(x,a) < \delta_a \implies d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$$
  Wenn f in allen Punkten $x \in X$ stetig ist, so heißt f stetig.

- Die Abbildung f heißt **folgenstetig** in $a \in X$, wenn gilt:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

d. h. für jede Folge (x_n) in X mit $\lim_{n\to\infty} (x_n) = a$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Satz. Für eine Funktion $f : X \to Y$ zwischen zwei metrischen Räumen und $a \in X$ gilt: f stetig in $a \iff f$ folgenstetig in a

Satz. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen zwischen metrischen Räumen und $a \in X$. Falls f in a und g in $f(a)$ stetig sind, so ist $(g \circ f) : X \to Z$ stetig in a.

Satz. Seien $(V, \|...\|_V)$ und $(W, \|...\|_W)$ zwei normierte VR und $f : V \to W$ linear. Dann sind äquivalent:

- f ist stetig
- $\exists C > 0 : \forall x \in V : \|f(x)\|_W < C\|x\|_V$
- $\|f\|_{\text{op}} < \infty$

Korollar. Jede lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen normierten reellen VR ist stetig.

Definition. Sei X eine Menge und (Y, d_Y) ein metrischer Raum. Sei $f_n : X \to Y$ eine Folge von Abbildungen. Die Folge (f_n) **konvergiert gleichmäßig** gegen eine Funktion $f : X \to Y$, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \sup \{d_Y(f_n(x), f(x)) : x \in X\} \leq \epsilon$$

Satz. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume und sei $f_n : X \to Y$ eine Folge stetiger Abbildungen, die gleichmäßig gegen $f : X \to Y$ konvergiert. Dann ist f stetig.

Korollar. Der normierte VR $(\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \|...\|_{\text{sup}})$ der stetigen reellen Funktionen auf $[a, b]$ versehen mit der Supremumsnorm ist vollständig. Allgemeiner ist für jeden metrischen Raum (X, d) der Vektorraum $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ bezüglich der Supremumsnorm vollständig.

Definition. Sei $W \subset X$ eine Teilmenge eines metrischen Raumes (X, d). Eine Familie offener Teilmengen $\{U_i \Subset X : i \in I\}$ heißt **offene Überdeckung** von W, wenn gilt:

$$W \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $K \subset X$ heißt **kompakt** in (X, d), wenn gilt: Jede offene Überdeckung $\{U_i \Subset X : i \in I\}$ besitzt eine endliche offene Teilüberdeckung, d. h. es gibt eine endliche Teilmenge $J \subset I$, sodass $K \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$ gilt.

Satz. Eine kompakte Teilmenge K eines metrischen Raumes (X, d) ist beschränkt und abgeschlossen.

Achtung. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Satz (Heine-Borel)**.** Im $\mathbb{R}^n$ gilt auch die Umkehrung: Eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge $K \subset (\mathbb{R}^n, \|...\|_{\text{eukl}})$ ist kompakt. Allgemeiner ist jede beschränkte und abgeschlossene Teilmenge eines endlich-dimensionalen, normierten, reellen VR kompakt.

Achtung. Obige Aussage gilt nicht für unendlichdimensionale, reelle, normierte VR.

Satz. Sei K eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes (X, d) und $A \subset K$ abgeschlossen in X. Dann ist auch A kompakt.

Definition. Seien $[a_j, b_j], a_j < b_j, j = 1, ..., n$ kompakte Intervalle in $\mathbb{R}$, dann ist

$$\begin{aligned} Q &:= [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \\ &= \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \forall j \in \{1, ..., n\} : a_j \leq x_j \leq b_j\} \end{aligned}$$

ein **abgeschlossener Quader** im $\mathbb{R}^n$.

Satz. Abgeschlossene Quader im $\mathbb{R}^n$ sind kompakt.

Definition. Eine Teilmenge $A \subset X$ eines metrischen Raumes (X, d) heißt **folgenkompakt**, wenn jede Folge (x_n) in A eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert in A liegt.

Satz (Bolzano-Weierstraß)**.** Jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raums ist folgenkompakt.

Bemerkung. Es gilt auch die Umkehrung: Jede folgenkompakte Teilmenge eines metrischen Raums ist kompakt.

Satz. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Sei $K \subset X$ kompakt. Dann ist $f(K) \subset Y$ kompakt.

Satz (Weierstraßscher Satz vom Extremum)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum und $K \subset X$ eine nichtleere kompakte Teilmenge. Sei $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $m, M \in K$, sodass gilt:

$$f(m) = \inf \{f(x) : x \in K\}, \quad f(M) = \sup \{f(x) : x \in K\}$$

Definition. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **gleichmäßig stetig**, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, y \in X : (d_X(x, y) < \delta) \implies (d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon)$$

Satz. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume wobei X kompakt ist und $f : X \to Y$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.

Kurven

Notation. Sei nun $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, das mindestens zwei Punkte enthält. Wir verwenden in diesem Abschnitt die euklidische Norm.

Definition. Eine stetige Abbildung $f : I \to \mathbb{R}^n$ heißt **Kurve** im $\mathbb{R}^n$.

Definition. Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ mit Zerlegung $Z = \{a = t_0 < ... < t_m = b\}$ und $f : I \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve. Dann hat der **Polygonzug** $P_f(Z)$ die Länge

$$L(P_f(Z)) = \sum_{j=1}^{m} \|f(t_j) - f(t_{j-1})\|.$$

Definition. Eine Kurve $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt **rektifizierbar**, wenn gilt: Es gibt ein $L \in \mathbb{R}$, sodass es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für jede Zerlegung Z von $[a, b]$ der Feinheit $\mu_Z \leq \delta$ gilt:

$$|L - L(P_f(Z))| \leq \epsilon$$

Definition. Sei $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Eine Kurve $f : I \to \mathbb{R}^n$ heißt in $t_0 \in I$ **differenzierbar**, wenn der Limes

$$f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

existiert. Wenn f in jedem Punkt $t \in I$ differenzierbar ist, so heißt f differenzierbar. Falls I kein offenes Intervall ist, so heißt die Kurve $f : I \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar, wenn es ein offenes Intervall $J \supset I$ in $\mathbb{R}$ und eine differenzierbare Kurve $F : J \to \mathbb{R}^n$ gibt, sodass $F|_I = f$ gilt.

Bemerkung. Eine Kurve $f = (f_1, ..., f_n) : I \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann in $t \in I$ differenzierbar, wenn alle Komponentenfunktionen $f_1, ..., f_n$ in t differenzierbar sind.

Satz. Jede stetig differenzierbare Kurve $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist rektifizierbar mit Länge

$$L = \int_a^b \|f'(t)\| \, \mathrm{d}t.$$

Definition (Riemann-Integral für Funktionen nach $\mathbb{R}^n$)**.** Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **Riemann-integrierbar**, wenn gilt: Es gibt ein $\iota \in \mathbb{R}^n$, sodass es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für jede Zerlegung $Z = \{a = t_0 < ... < t_m = b\}$ der Feinheit $\mu_Z \leq \delta$ und Wahl von Stützstellen $\xi_1, ..., \xi_m$ bzgl. Z gilt:

$$\|\iota - R(f, Z, \xi_1, ..., \xi_m)\| \leq \epsilon.$$

Der Vektor $\iota \in \mathbb{R}^n$ heißt **Riemann-Integral** von f.

Bemerkung. Eine Funktion $f = (f_1, ..., f_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann **Riemann-integrierbar**, wenn jede Komponentenfunktion $f_j, j = 1, ..., n$ Riemann-integrierbar ist. Es gilt in diesem Fall:

$$\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t = \left(\int_a^b f_1(t) \, \mathrm{d}t, ..., \int_a^b f_n(t) \, \mathrm{d}t \right)$$

Insbesondere sind stetige Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stets Riemann-integrierbar.

Satz. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig, dann gilt:

$$\left\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\mathrm{d}t.$$

Es gilt Gleichheit, wenn alle f(t) gleichgerichtet sind, d. h. für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $f(x_1) \neq 0$ gibt es ein $\lambda \geq 0$, sodass $f(x_2) = \lambda f(x_1)$.

Definition. Eine Kurve $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **regulär**, wenn sie stetig differenzierbar ist und die Ableitung f' keine Nullstelle hat.

Korollar. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve, $x := f(a)$ und $y := f(b)$. Dann gilt für die Länge L_f von f:

$$L_f \geq \|x - y\|.$$

Falls hier Gleichheit gilt, dann gibt es eine stetig differenzierbare bijektive Abbildung $\phi : [a, b] \to [0, 1]$, sodass $f = c_{xy} \circ \phi$ wobei

$$c_{xy} : [0, 1] \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto x + t(y - x)$$

die Strecke von x nach y ist.
Motto: Die Gerade ist die kürzeste Verbindung zweier Punkte.

Partielle Ableitungen

Definition. Sei $U \Subset \mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$ heißt in einem Punkt $u \in U$ **in Richtung v differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$$D_v f(u) := \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(u + hv) - f(u)}{h}$$

existiert. In diesem Fall heißt $D_v f(u)$ die **Richtungsableitung** von f im Punkt $u \in U$ in Richtung $v \in \mathbb{R}^n$.

Definition. Sei $U \Subset \mathbb{R}^n$ und $j \in \{1, ..., n\}$. Eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^m$ heißt

- im Punkt $u \in U$ bzgl. der j-ten Koordinatenrichtung **partiell differenzierbar**, falls die Richtungsableitung

$$D_j f(u) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(u) := D_{e_j} f \in \mathbb{R}^m$$

  existiert. In diesem Fall heißt $D_j f(u)$ die **j-te partielle Ableitung** von f in u.
- (auf U) bzgl. der j-ten Koordinatenrichtung partiell differenzierbar, wenn f in jedem Punkt $u \in U$ bzgl. der j-ten Koordinatenrichtung partiell differenzierbar ist.
- im Punkt $u \in U$ partiell differenzierbar, wenn f für alle $j \in \{1, ..., n\}$ in u bzgl. der j-ten Koordinatenrichtung partiell differenzierbar ist.
- (auf U) partiell differenzierbar, wenn f in jedem Punkt $u \in U$ partiell differenzierbar ist.

Achtung. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$, die in $u \in U$ partiell differenzierbar ist, muss noch lange nicht in u stetig sein!

Definition. Ist $f : U \to \mathbb{R}^m, U \Subset \mathbb{R}^n$, partiell differenzierbar, so setzen wir

$$D_j f = \frac{\partial f}{\partial x_j} : U \to \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto D_j f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$$

Falls die Abbildungen $D_j f$ für alle $j \in \{1, ..., n\}$ wieder partiell differenzierbar sind, also für alle $j, k \in \{1, ..., n\}$ die Abbildungen

$$D_k D_j f := D_k(D_j f) : U \to \mathbb{R}^m$$

existieren, so nennen wir f **zweimal partiell differenzierbar**. Alternative Schreibweise:

$$D_k D_j f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}.$$

Analog definiert man für $l \in \mathbb{N}$ rekursiv die **l-te partielle Ableitung**

$$D_{j_l} D_{j_{l-1}} \cdots D_{j_1} f = \frac{\partial^l f}{\partial x_{j_l} \partial x_{j_{l-1}} \cdots \partial x_{j_1}}.$$

Falls jede l-te partielle Ableitung stetig ist, so heißt f **l-mal stetig partiell differenzierbar**.

Satz (Schwarz / Clairaut)**.** Sei $U \Subset \mathbb{R}^n$, $u \in U$ und $f : U \to \mathbb{R}^m$ sowie $j, k \in \{1, ..., n\}$. Wenn die ersten partiellen Ableitungen $D_j f$, $D_k f$ und die zweiten partiellen Ableitungen $D_j D_k f$ und $D_k D_j f$ im Punkt u stetig sind, dann gilt

$$D_j D_k f(u) = D_k D_j f(u).$$

Die totale Ableitung

Definition. Sei $U \Subset \mathbb{R}^n$ und $u \in U$. Eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^m$ heißt **in u (total) differenzierbar**, wenn gilt: Es gibt eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $A_u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und eine Abbildung $\phi_u : B_{r_u}(0) \to \mathbb{R}^m$ für ein hinreichend kleines $r_u > 0$, sodass gilt

1. $\displaystyle\lim_{\eta \to 0} \frac{\phi_u(\eta)}{\|\eta\|} = 0$
2. für alle $\xi \in B_{r_u}(0)$ gilt $u + \xi \in U$ und
3. $f(u + \xi) = f(u) + A_u(\xi) + \phi_u(\xi)$

Die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung A_u heißt das **totale Differential** von f in u. Man schreibt

$$A_u = Df(u).$$

Wenn f in jedem $u \in U$ total differenzierbar ist, dann heißt f **total differenzierbar**.

Bemerkung. Seien $f_1, f_2 : U \to \mathbb{R}^m$ in $u \in U$ total differenzierbar. Dann ist auch $(f_1 + f_2)$ in u total differenzierbar und es gilt

$$D(f_1 + f_2)(u) = Df_1(u) + Df_2(u)$$

Satz. Ist $f : U \to \mathbb{R}^m$ in $u \in U$ total differenzierbar, so ist f in diesem Punkt u stetig.

Achtung. Wenn f in einem Punkt u partiell differenzierbar ist, so folgt daraus nicht, dass f in diesem u total differenzierbar ist. Selbst wenn in u alle Richtungsableitungen existieren, muss f in u nicht total differenzierbar sein.

Satz. Sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ in $u \in U$ total differenzierbar und $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$. Dann ist f in u in Richtung v ableitbar mit

$$Df(u)(v) = D_v f(u).$$

Definition. Sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ in $u \in U$ total differenzierbar. Dann ist

$$Df(u) = J_u f := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(u), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(u) \right) \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Die Matrix $J_u f$ heißt **Jacobimatrix** von f im Punkt u.

Satz. Sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ partiell diffbar und alle partiellen Ableitungen in $u \in U$ stetig. Dann ist f in u total differenzierbar.

Bemerkung. Es gelten folgende Implikationen:
f ist stetig partiell differenzierbar
$\implies$ f ist total differenzierbar ($\implies$ f ist stetig)
$\implies$ f ist partiell differenzierbar

Satz. Sie $f : U \to \mathbb{R}^m$ k-mal stetig partiell differenzierbar mit $k \in \mathbb{N}$. Sei $1 \leq l \leq k$, dann sind alle l-ten partiellen Ableitungen von f stetig.

Satz (Kettenregel)**.** Sei $U \Subset \mathbb{R}^n$ und $V \Subset \mathbb{R}^m$ sowie $g : U \to V$ und $f : V \to \mathbb{R}^l$ Abbildungen. Wenn g in $u \in U$ und f in $g(u)$ total differenzierbar ist, dann ist $(f \circ g) : U \to \mathbb{R}^l$ in u total differenzierbar mit

$$D(f \circ g)(u) = Df(g(u)) \circ Dg(u).$$

Satz (MWS)**.** Sei $U \Subset \mathbb{R}^n$, $u \in U$ und $f = (f_1, ..., f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Sei außerdem $\xi \in \mathbb{R}^n$, sodass das Bild der Strecke $[0, 1] \to \mathbb{R}^n, t \mapsto u + t\xi$ ganz in U liegt. Dann gilt

$$f(u + \xi) - f(u) = \left(\int_0^1 (J_{u+t\xi} f)\,\mathrm{d}t \right) \cdot \xi = \int_0^1 ((J_{u+t\xi} f) \cdot \xi)\,\mathrm{d}t$$

Korollar (Schrankensatz)**.** Sei $U \Subset \mathbb{R}^n$, $u \in U$, $f = (f_1, ..., f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ wie eben. Sei

$$M := \sup \left\{ \|J_{u+t\xi} f\|_{\mathrm{op}} : t \in [0, 1] \right\},$$

dann gilt

$$\|f(u + \xi) - f(u)\| \leq M\|\xi\|$$

Notation. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ k-mal stetig differenzierbar, $u \in U$ und $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann setzen wir

$$d^k f(u)\,\xi^k := \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_k=1}^{n} (D_{j_k} \cdots D_{j_1} f(u))\,\xi_{j_1} \cdots \xi_{j_k}$$

und

$$d^0 f(u)\xi^0 := f(u).$$

Satz (**Taylorformel** in mehreren Veränderlichen)**.** Sei $U \Subset \mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine $(p + 1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Ferner sei $u \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$, sodass für alle $t \in [0, 1]$ gilt $h(t) := u + t\xi \in U$. Dann gibt es ein $\tau \in [0, 1]$, sodass

$$f(u+\xi) = F(1) = \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}\, d^k f(u)\,\xi^k \right) + \frac{1}{(p+1)!}\, d^{p+1} f(u+\tau\xi)\,\xi^{p+1}.$$

Bemerkung (Taylorformel für $p=2$). Sei $f: U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Wir nennen

$$(\mathrm{Hess}f)(u) := (D_j D_k f(u))_{j,k} = \begin{pmatrix} D_1D_1f(u) & \cdots & D_1D_nf(u) \\ D_2D_1f(u) & \cdots & D_2D_nf(u) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_nD_1f(u) & \cdots & D_nD_nf(u) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

die **Hesse-Matrix** von f in u. Es folgt mit der Taylorformel für $p=2$:

$$f(u+\xi) = f(u) + \sum_{j=1}^{n} Df(u)\,\xi + \frac{1}{2}\cdot \xi^{\mathrm{T}} \cdot (\mathrm{Hess}f)(u)\cdot \xi + R_2^{f,u}(u+\xi).$$

Definition. Sei $U \Subset \mathbb{R}^n$ und $f: U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Ein Punkt $u \in U$ heißt **kritischer Punkt** von f, wenn

$$D_jf(u) = 0 \in \mathbb{R}^{1\times n} \quad \forall j \in \{1,...,n\}.$$

Satz. Sei $U \Subset \mathbb{R}^n$ und $f: U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Hat f in $u \in U$ ein lokales Extremum, dann ist u ein kritischer Punkt von f.

Definition. Eine reelle symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt

- **degeneriert**, wenn $\det(A) = 0$ gilt.
- **positiv definit**, wenn für alle $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt: $\xi^{\mathrm{T}} A \xi > 0$. Äquivalent ist A positiv definit, wenn alle Eigenwerte von A positiv sind.
- **negativ definit**, wenn $-A$ positiv definit ist (bzw. alle Eigenwerte von A negativ sind).
- **indefinit**, wenn A weder degeneriert, noch positiv, noch negativ definit ist (d. h. A besitzt sowohl negative als auch positive Eigenwerte).

Satz (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema)**.** Sei $U \Subset \mathbb{R}^n$, die Funktion $f: U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $u \in U$ ein kritischer Punkt von f. Dann gilt

1. Ist $(\mathrm{Hess}f)(u)$ positiv definit, so hat f in u ein isoliertes lokales Minimum.
2. Ist $(\mathrm{Hess}f)(u)$ negativ definit, so hat f in u ein isoliertes lokales Minimum.
3. Ist $(\mathrm{Hess}f)(u)$ indefinit, so hat f in u kein lokales Extremum (also einen Sattelpunkt).

Achtung. Ist $(\mathrm{Hess}f)(u)$ degeneriert, so ist keine Aussage möglich.

Strategie (Bestimmung globaler Extrema auf Kompakta)**.** Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit $K^\circ \neq \emptyset$ und $f: K \to \mathbb{R}$ eine stetige und auf K° partiell differenzierbare Funktion. Als stetige Funktion auf einem Kompaktum nimmt f auf K ein Maximum und Minimum an. So kann man Maximum und Minimum bestimmen:

1. Bestimme alle kritischen Stellen von $f\,|_{K^\circ}$.
2. Bestimme alle Extrema von f auf dem Rand ∂K.
3. Vergleiche die Funktionswerte von f an den kritischen Stellen in $f\,|_{K^\circ}$ und $f\,|_{\partial K}$.

Strategie (Bestimmung globaler Extrema)**.** Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar.

1. Bestimme alle Funktionswerte von f in allen kritischen Stellen. Sei M der größte und m der kleinste Funktionswert an einer kritischen Stelle.
2. Wenn es ein $R > 0$ gibt, sodass $f\,|_{\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)}$ nur Werte kleiner als M bzw. Werte größer als m annimmt, dann ist M das globale Maximum bzw. m das globale Minimum.

Satz von der Umkehrfunktion

Definition. Sei $U \Subset \mathbb{R}^n$ und $V \Subset \mathbb{R}^m$. Eine Abbildung $f: U \to V$ heißt **($\mathcal{C}^1$-)Diffeomorphismus**, wenn f invertierbar ist und sowohl f als auch f^{-1} stetig partiell differenzierbar sind.

Bemerkung. Sei $f: U \to V$ ein Diffeomorphismus, wobei $U \Subset \mathbb{R}^n$ und $V \Subset \mathbb{R}^m$. Aus der Kettenregel folgt für $u \in U$:

$$(J_uf)^{-1} = J_{f(u)}(f^{-1}).$$

Satz (Banachscher Fixpunktsatz)**.** Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $\psi: K \to K$ eine Kontraktion, d. h. es gibt eine Konstante κ mit $0 < \kappa < 1$, sodass für alle $x, y \in K$ gilt

$$\|\psi(x) - \psi(y)\| \leq \kappa\,\|x-y\|.$$

Dann hat ψ genau einen Fixpunkt in K.

Satz (**Satz von der lokalen Umkehrfunktion**)**.** Sei $U \Subset \mathbb{R}^n$ und $u \in U$ sowie $f: U \to \mathbb{R}^n$ stetig partiell differenzierbar. Wenn $Df(u)$ invertierbar ist, so gibt es offene Umgebungen $X, Y \Subset \mathbb{R}^n$ mit $u \in X \subset U$, sodass $f(X) = Y$ gilt und $f\,|_X : X \to Y$ ein Diffeomorphismus ist.

Bemerkung. Es ist wichtig, dass f stetig partiell differenzierbar ist. Für Funktionen, die lediglich total differenzierbar sind, gilt der Satz von der lokalen Umkehrabbildungen im Allgemeinen nicht.

Korollar (Offenheitssatz)**.** Sei $U \Subset \mathbb{R}^n$ und $f: U \to \mathbb{R}^n$ stetig partiell differenzierbar. Wenn für alle $u \in U$ die Differentiale $Df(u)$ invertierbar sind, dann ist $f(U)$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

Korollar. Sei $U \Subset \mathbb{R}^n$ und $f: U \to \mathbb{R}^n$ eine injektive stetig partiell differenzierbare Abbildung, sodass für alle $u \in U$ die Differentiale $Df(u)$ invertierbar sind. Dann ist f ein Diffeomorphismus auf sein Bild, d. h. $f\,|_{f(U)}$ ist ein Diffeomorphismus.

Satz über implizite Funktionen

Notation. Seien $U \Subset \mathbb{R}^n$ und $V \Subset \mathbb{R}^p$ offene Teilmengen, dann ist $U \times V$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^{n+p}$. Sei $f: U \times V \to \mathbb{R}^q$ stetig differenzierbar. Für ein festes $u \in U$ sei

$$f_u : V \to \mathbb{R}^q, \quad v \mapsto f(u,v).$$

Wir definieren

$$D_Vf(u,v) := D(f_u)(v) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$$

bzw. als Matrix

$$J_Vf(u,v) := J_v(f_u) \in \mathbb{R}^{q\times p}.$$

Analog definieren wir $f^v : U \to \mathbb{R}^q$ und $D_Uf(u,v)$ bzw. $J_Uf(u,v)$.

Bemerkung. Offenbar gilt für $u \in U$ und $v \in V$:

$$J_{(u,v)}f = (J_Uf(u,v), J_Vf(u,v)) \in \mathbb{R}^{q\times(n+p)}.$$

Satz. Seien $U \Subset \mathbb{R}^n$ und $V \Subset \mathbb{R}^p$ und $f: U \times V \to \mathbb{R}^p$ stetig partiell differenzierbar, welche in einem Punkt $(u_0, v_0) \in U \times V$ eine Nullstelle habe, d. h. $f(u_0,v_0) = 0$. Wenn in diesem Punkt $J_Vf(u_0,v_0) \in \mathbb{R}^{p\times p}$ invertierbar ist, dann gibt es

- eine offene Menge $X \Subset U \times V$ mit $(u_0,v_0) \in X$,
- eine offene Menge $Y \Subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ mit $(u_0, 0) \in Y$,
- einen Diffeomorphismus $G: Y \to X$ mit $G(u_0,0) = (u_0,v_0)$,

sodass $f \circ G = \pi_2$.

Satz (**Satz über implizite Funktionen**)**.** Seien $U \Subset \mathbb{R}^n$ und $V \Subset \mathbb{R}^p$ und $f: U \times V \to \mathbb{R}^p$ stetig partiell differenzierbar, welche in $(u_0,v_0) \in U \times V$ eine Nullstelle hat, d. h. $f(u_0,v_0) = 0 \in \mathbb{R}^p$. Wenn in diesem Punkt $J_Vf(u_0,v_0) \in \mathbb{R}^{p\times p}$ invertierbar ist, dann gibt es

- eine offene Menge $X \Subset U \times V$ mit $(u_0,v_0) \in X$,
- eine offene Menge $\widetilde{U} \Subset U$ mit $u_0 \in \widetilde{U}$,
- eine stetig partiell differenzierbare Abbildung $g: \widetilde{U} \to \mathbb{R}^p$,

sodass

$$f^{-1}(0) \cap X = \mathrm{Graph}(g) = \{(u, g(u)) : u \in \widetilde{U}.\}$$

In anderen Worten: Für alle $(u,v) \in X$ gilt

$$f(u,v) = 0 \iff v = g(u).$$

Die Funktion g erfüllt dabei

$$g(u_0) = v_0 \quad \text{und} \quad J_{u_0}g = -\left(J_Vf(u_0,v_0)\right)^{-1} \cdot J_Uf(u_0,v_0).$$

Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

Definition. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt m-dimensionale **Untermannigfaltigkeit** von $\mathbb{R}^n$, wenn gilt: Für alle $u \in M$ gibt es eine offene Teilmenge $U \Subset \mathbb{R}^n$ mit $u \in U$ und eine offene Teilmenge $V \Subset \mathbb{R}^n$ mit $0 \in V$, sowie einen Diffeomorphismus $\Phi : U \to V$ mit $\Phi(u) = 0$, sodass gilt:

$$\Phi(M \cap U) = V \cap \{(x_1, ..., x_m, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n\} \cong V \cap \mathbb{R}^m.$$

Die Abbildung Φ heißt **Karte** von M um den Punkt u.

Definition. Sei $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M \subset \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Kurve mit $c(0) = u \in M$, deren Bild ganz in M liegt, dann heißt der Vektor $c'(0) \in \mathbb{R}^n$ **Tangentialvektor** an M in $u \in M$. Für $u \in M$ setzen wir

$$T_u M := \{v \in \mathbb{R}^n : v \text{ Tangentialvektor an } M \text{ in } u\}.$$

Die Menge $T_u M$ heißt **Tangentialraum** von M im Punkt u.

Satz. Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ und $u \in M$, dann ist $T_u M$ ein m-dimensionaler UVR von $\mathbb{R}^n$.

Definition. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $u \in M$. Das orthogonale Komplement (bzgl. des Standardskalarprodukts $\langle ..., ... \rangle$)

$$N_u M = (T_u M)^\perp$$

von $T_u M$ in $\mathbb{R}^n$ heißt **Normalraum** von M im Punkt u.

Definition. Sei $U \Subset \mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}^p$ mit $p \leq n$ stetig partiell differenzierbar. Ein Punkt $u \in U$ wird **regulärer Punkt** von f genannt, wenn die lineare Abbildung $Df(u) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ Rang p hat (also surjektiv ist). Sei $Y \in \mathbb{R}^p$, dann heißt sein Urbild

$$f^{-1}(\{y\}) = \{u \in U : f(u) = y\}$$

reguläres Urbild oder **reguläre Niveaumenge**, wenn alle Punkte in $f^{-1}(\{y\})$ reguläre Punkte von f sind.

Definition. Sei $U \Subset \mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}^p$ mit $p \leq n$ stetig partiell differenzierbar. Ist $y \in \text{Bild}(f)$ und $M := f^{-1}(\{y\})$ ein reguläres Urbild, dann ist M eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, wobei $m = n - p$.

Definition. Sei $U \Subset \mathbb{R}^n$ und $g : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Dann heißt die Abbildung

$$\nabla g : U \to \mathbb{R}^m, \quad u \mapsto \begin{pmatrix} D_1 g(u) \\ \vdots \\ D_n g(u) \end{pmatrix}$$

Gradient von g. Ist g in u differenzierbar, so gilt

$$\nabla g(u) = (J_u g)^\perp.$$

Satz. Sei $U \Subset \mathbb{R}^n$ und $f = (f_1, ..., f_p) : U \to \mathbb{R}^p, p \leq n$ stetig partiell differenzierbar. Ist $y = (y_1, ..., y_p) \in \text{Bild}(f)$ und $M := f^{-1}(\{y\})$ ein reguläres Urbild sowie $u \in M$, dann ist $\{\nabla f_1(u), ..., \nabla f_p(u)\}$ eine Basis von $N_u M$.

Satz (Lokale Extrema unter Nebenbedinungen)**.** Sei $U \Subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Ferner sei $M \subset U \Subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $u_0 \in M$ ein Punkt, an welchem $f\,|_M$ ein lokales Extremum annimmt. Dann gilt $\nabla f(u_0) \in N_{u_0} M$.

Ist M sogar ein reguläres Urbild einer stetig partiell differenzierbaren Abbildung $g = (g_1, ..., g_p) : U \to \mathbb{R}^p$, dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $\lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{R}$, sodass

$$\nabla f(u_0) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \nabla g_j(u_0).$$

Die Zahlen $\lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{R}$ heißen **Lagrange-Multiplikatoren**.