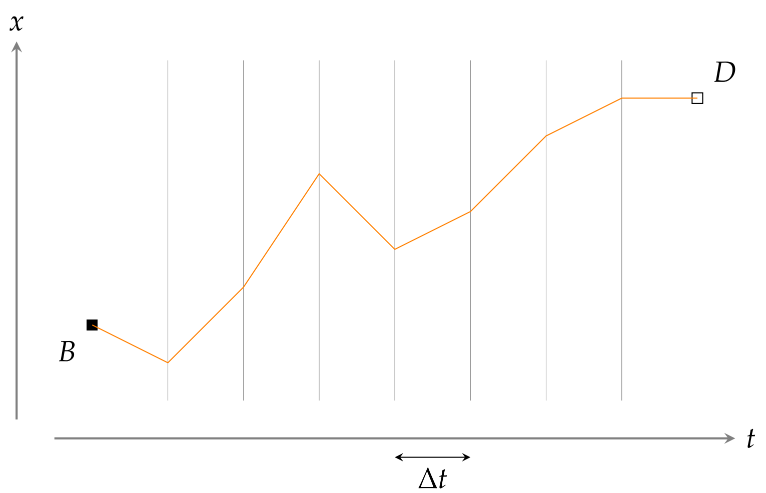
1.5 Nog meer spleten

We hebben genoeg informatie over padintegralen verzameld om een concrete afleiding te geven. Hiervoor keren we weer terug naar de spleten-experimenten. In voorgaande secties vonden onze experimenten plaats in een twee dimensionale ruimte. Nu doen we een stapje terug en beschouwen een pad van een bron B naar een detector D in slechts één dimensie. Ons deeltje bevind zich op tijdstip t_B in x_B en op t_D in x_D. Om een pad te kunnen karakteriseren splitsen we de tijd op in N *snedes* van grootte Δt zodat

$$\Delta t := \frac{t_D - t_B}{N}. \tag{1.10}$$

In Figuur 1.10 is een mogelijk pad getekend van bron naar detector. Het pad is in de tijd uitgerekt, zodat we op ieder tijdstip t_n kunnen aangeven waar het deeltje zich bevindt. Zo een positie is op te vatten als een *spleet* in een scherm op tijdsnede n. Het is natuurlijk goed mogelijk dat het deeltje op een snede een *andere* spleet had gekozen, met als gevolg dat het een ander pad aflegt. Hier komen we later op terug. Merk op dat het deeltje, zoals we hebben beredeneerd in §1.4, niet terug kan in de tijd. Wel kan het heen en weer bewegen in de plaats en hoeft dus niet met constante snelheid van B naar D te reizen.



Figuur 1.10

Om de padintegraal af te leiden lopen we effectief de postulaten uit §1.3 in omgekeerde volgorde af. Uit het derde postulaat weten we dat de *bijdrage* aan een pad proportioneel is met de actie. Wanneer we van tijdsnede n naar snede $n+1$ gaan kunnen we de bijdrage $\psi_{n\to n+1}$ uitrekenen met

$$\psi_{n\to n+1} = A\,\mathrm{e}^{iS/\hbar}\,.$$

Wel moeten we de actie voor dit korte pad kunnen uitrekenen. Dit kan met een benadering van de Lagrangiaan tot op eerste orde, zodat

$$S \approx L\left(\frac{x_{n+1}+x_n}{2}, \frac{x_{n+1}-x_n}{\Delta t}, \frac{t_{n+1}+t_n}{2}\right)\Delta t. \tag{1.11}$$

De bijdrage voor een stukje pad tussen tijdstippen t_n en t_{n+1} is dan bij benadering

$$\psi_{n\to n+1} \approx A\exp\left[\frac{i}{\hbar}L\left(\frac{x_{n+1}+x_n}{2}, \frac{x_{n+1}-x_n}{\Delta t}, \frac{t_{n+1}+t_n}{2}\right)\Delta t\right].$$

Maar we willen de bijdrage van het *volledige* pad. Hier komen de fasoren weer om de hoek kijken. De gebeurtenissen $t_0, t_1, \ldots, t_N$ vinden na elkaar plaats op hetzelfde pad. Stel je op t_0 een fasor voor die langs de reële as ligt ($\varphi_0 = 0$). We laten de fasor nu meereizen over het pad. Wanneer hij is aangekomen op t_1 is hij gedraaid met een hoek $\varphi_1 = (L\left(\frac{x_{n+1}+x_n}{2}, \frac{x_{n+1}-x_n}{\Delta t}, \frac{t_{n+1}+t_n}{2}\right)\Delta t)/\hbar$. Vervolgens draait hij weer verder wanneer hij naar t_2 beweegt. We moeten de *fases* die bij iedere tijdsnede horen dus bij elkaar *optellen*. Dit staat gelijk aan het *vermenigvuldigen* van de bijbehorende *fasoren*. De totale bijdrage van t_0 naar t_N wordt dan

$$\begin{aligned}\psi_{0\to N} &\approx \prod_{n=0}^{N-1}\psi_{n\to n+1}\\ &= A^N\prod_{n=0}^{N-1}\exp\left[\frac{i}{\hbar}L\left(\frac{x_{n+1}+x_n}{2}, \frac{x_{n+1}-x_n}{\Delta t}, \frac{t_{n+1}+t_n}{2}\right)\Delta t\right].\end{aligned}$$

Om de *waarschijnlijkheidsamplitude* uit te rekenen bij de overgang van B naar D moeten we, volgens het tweede postulaat, de som nemen over *alle mogelijke paden* van x_B naar x_D. Tot nu toe hebben we alleen maar één pad uitgerekend. Daarbij zijn we er van uit gegaan dat ons pad op ieder tijdstip t_n over vastgelegde punten x_n loopt. (Met andere woorden: we laten het deeltje door specifieke spleten gaan.) Deze plaats is natuurlijk willekeurig te kiezen uit *alle mogelijke waarden* van x. Om elk mogelijk pad van B naar D te krijgen, moeten we dus integreren over alle mogelijke tussen punten voor elke tijdsnede t_n. In Figuur 1.10 kunnen we zien dat t_0 en t_N hierop een uitzondering zijn, de bijbehorende x-waarden liggen immers vast. We krijgen dus $N-1$ keer een integraal over x_n waarbij n loopt van 1 tot $N-1$. Dit leid tot

$$\psi \approx \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_{0\to N}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\cdots\,\mathrm{d}x_{N-1}.$$

Hier hebben we nog steeds te maken met een benadering. Door onze tijdsnedes smaller te maken, krijgen we de correcte uitdrukking voor de waarschijnlijkheidsamplitude. We nemen dus de limiet van N naar ∞ zodat Δt naar 0 gaat volgens de definitie in (1.10).

$$\begin{aligned}\psi &= \lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{0\to N}\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_{N-1} \\ &=: \int_{x_B}^{x_D} \mathrm{e}^{iS/\hbar}\, \mathcal{D}x.\end{aligned}$$

Hierbij is de uitdrukking

$$\int_{x_B}^{x_D} \mathcal{D}x := \lim_{N\to\infty} A^N \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_{N-1}$$

de *maat* van de padintegraal. Wat ons nu nog rest is het berekenen van de normalisatie constante A.

1.6 De laatste stap

Tot nu toe beschouwden we ψ als een waarschijnlijkheidsamplitude. Wanneer we hier de modulus kwadraat van nemen, komen we achter de waarschijnlijkheid om een deeltje dat zich bevond in x' op t' aan te treffen in x op t. Dit kunnen we ook noteren als

$$K(x,t;x',t')$$

en wordt ook wel de *kernel* genoemd. Stel nu dat we de *toestand* van het deeltje op positie x' en tijdstip t' al weten: hij is gegeven door de *toestandsfunctie* $\Psi(x',t')$. Wat we willen is de toestandsfunctie Ψ berekenen voor x op t. Dit kunnen we doen met de formule

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t;x',t')\Psi(x',t')\, \mathrm{d}x'.$$

We splitsen als het ware het pad op in tweeën: een pad naar x' en vervolgens naar x. De kernel is in dit geval een *overgangsamplitude*.

Stel nu dat we in een tijdsinterval Δt van x' naar x willen. We kunnen de actie op eenzelfde manier benaderen als in (1.11), zodat bovenstaande vergelijking transformeert in

$$\Psi(x,t+\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} A \exp\left[\frac{i}{\hbar} L\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{x-x'}{\Delta t}, t + \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t\right] \Psi(x',t)\, \mathrm{d}x'. \tag{1.12}$$

Laten we deze keer een concrete Lagrangiaan nemen

$$L := \frac{1}{2} m\dot{x}^2,$$

een vrij deeltje. Natuurlijk versimpelen we het probleem hier, maar het is voldoende voor de rest van deze tekst. Wanneer we dit invullen in (1.12) vinden we

$$\Psi(x, t+\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} A \exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{1}{2}m\left(\frac{x-x'}{\Delta t}\right)^2 \Delta t\right]\Psi(x', t)\,\mathrm{d}x'$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} A \exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{m(x-x')^2}{2\Delta t}\right]\Psi(x', t)\,\mathrm{d}x'.$$

Net als in ?? zie we dat wanneer x' veel verschilt van x, de exponent sterk oscilleert. De integraal levert in deze gevallen een kleine waarde op. Pas als x' in de buurt komt van x ontstaan wel significante contributies. Hierop gebaseerd maken we de substitutie

$$x' := x + \Delta x$$

waarbij Δx kleine variaties zijn op x. Belangrijke contributies komen dus alleen voor wanneer Δx klein is. Voor onze overgangsamplitude volgt dat

$$\Psi(x, t+\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} A \exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{m\Delta x^2}{2\Delta t}\right]\Psi(x+\Delta x, t)\,\mathrm{d}(\Delta x) \tag{1.13}$$

We zien dat de exponent varieert op eerste orde, wanneer

$$\Delta x \sim \sqrt{\frac{2\hbar}{m}\Delta t}.$$

Wanneer we (1.13) willen expanderen tot op eerste orde in Δx (deze was immers klein ten opzichte van x) moeten we rekening houden met een expansie van Δt tot op orde twee:

$$\Psi(x,t) + \frac{\partial \Psi}{\partial t}\Delta t = \int_{-\infty}^{\infty} A \exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{m\Delta x^2}{2\Delta t}\right]\left(\Psi(x,t) + \Delta x\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\right). \tag{1.14}$$

Wanneer we bovenstaande term voor term bekijken, zien we dat moet gelden

$$\Psi(x,t) = A\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{m\Delta x^2}{2\Delta t}\right]\Psi(x,t).$$

De enige mogelijkheid om hier aan te voldoen is wanneer de integraal gelijk is aan een. Hierdoor kunnen we een restrictie opleggen voor A:

$$\frac{1}{A} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{m\Delta x^2}{2\Delta t}\right]\,\mathrm{d}(\Delta x)$$
$$= \sqrt{\frac{2\pi i \Delta t}{m}}$$

ofwel:

$$A = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \Delta t}}. \tag{1.15}$$

Todo Bij het berekenen van paden die recht zijn (zoals in het reflectie-experiment) kom ik tot de volgende redenatie:

Wanneer we terugkijken naar het reflectie-experiment in §1.4 zien we dat we niet alle paden tussen de bron en de detector toestaan. We laten alleen die paden toe die vanuit B recht naar de plaat gaan, daar reflecteren en in D terecht komen. Dit zijn twee paden van gebeurtenissen die *na elkaar* plaats vinden. Net als in §1.5 moeten we de bijbehorende bijdragen met elkaar vermenigvuldigen. De beide bijdragen bevatten de factor A, zodat deze in het kwadraat komt te staan. Vervolgens nemen we N reflectiepunten op de plaat, en berekenen voor elk pad dat via zo'n punt loopt de amplitude. Dit zijn *verschillende* paden bij *dezelfde* gebeurtenis, dus moeten we de gebeurtenissen optellen. Om de uiteindelijke amplitude onafhankelijk te maken van het aantal paden, delen we nog door N. De correcte waarschijnlijkheidsamplitude bij het reflectie-experiment wordt dan

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} K(D,p_n)K(p_n,B)\\ &= \frac{A^2}{N}\sum_{n=0}^{N}\exp\left[\frac{i}{\hbar}S(D,p_n)\right]\exp\left[\frac{i}{\hbar}S(p_n,B)\right]\\ &= \frac{m}{2\pi i(t_D-t_B)}\sum_{n=0}^{N}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\Big(S(D,p_n)+S(p_n,B)\Big)\right].\end{aligned}$$