

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Tim Kalan

**Spodbujevalno učenje pri igranju namiznih iger**

Delo diplomskega seminarja

Mentorica: izr. prof. dr. Marjetka Knez

Ljubljana, 2021

## KAZALO

1. Uvod	4
1.1. Motivacija	4
1.2. Strojno učenje	4
1.3. Struktura naloge	4
2. Spodbujevalno učenje	5
2.1. Osnovni koncepti	5
2.2. Korak spodbujevalnega učenja	7
2.3. Markovski proces odločanja	8
3. Algoritmi pri spodbujevalnem učenju	12
3.1. Dinamično programiranje - Reševanje poznanih MDP-jev	13
3.2. Monte Carlo	15
3.3. TD(0)	16
3.4. TD( $\lambda$ )	16
3.5. Izboljšave	16
4. Namizne igre	16
4.1. Pregled konceptov teorije iger	16
4.2. Kompleksnost iger	17
4.3. Morda kaj o optimal board representationu?	17
4.4. Pride še kaj v poštev tu?	17
5. Spodbujevalno učenje pri namiznih igrah	17
5.1. Parcialni model - »po-stanja«	17
5.2. Učenje	17
5.3. Kombinacija z iskanjem - generalised policy eval?	17
5.4. Algoritem - zaključena celota	17
6. Empirični rezultati	17
6.1. m,n,k-igra	17
7. Uspehi glede na velikost	17
8. Primerjava, grafi	17
Literatura	17

## Spodbujevalno učenje pri igranju namiznih iger

### POVZETEK

V povzetku na kratko opišite vsebinske rezultate dela. Sem ne sodi razlaga organizacije dela – v katerem poglavju/razdelku je kaj, pač pa le opis vsebine.

## Reinforcement learning in board games

### ABSTRACT

Prevod zgornjega povzetka v angleščino.

**Math. Subj. Class. (2010):** navedite vsaj eno klasifikacijsko oznako – dostopne so na [www.ams.org/mathscinet/msc/msc2010.html](http://www.ams.org/mathscinet/msc/msc2010.html)

**Ključne besede:** Spodbujevalno učenje, Markovski proces odločanja

**Keywords:** Reinforcement learning, Markov decision process

## 1. UVOD

Namizne igre ljudje igramo že od prazgodovine. Na Kitajskem je bila igra Go znana kot ena izmed štirih umetnosti Kitajskega učenjaka poleg igranja inštrumenta s strunami, kaligrafije in slikanja. Spremljajo nas že zelo dolgo časa, zato je naravno, da jih želimo ljudje čim bolje igrati.

Z adventom računalnika in računalništva je bil ta problem postavljen v novi luči. Vprašanje ni bilo več samo, kako dobro lahko človek igra igro sam, temveč tudi do kakšnega nivoja lahko spravi računalnik. Izkazalo se je, da nam pri tem problemu (in mnogih drugih) zelo dobro koristi »umetna inteligenca« oz. metode strojnega učenja (SU). Eno izmed vej SU bomo predstavili v tem delu in pogledali, kako nam lahko pomaga pri igranju namiznih iger.

Ideja, da bi nek stroj igral igre ni nova, in kompleksnosti takega stroja so se zavedali ljudje že pred obstojem računalnika. Za konec uvodnega dela morda zabeležimo še citat iz eseja ameriškega pisatelja in pesnika Edgarja Allana Poea, ki govori o mehaničnem igralcu šaha:

»Če prej omenjenemu [igralcu šaha] rečemo čisti stroj, moramo biti pripravljeni priznati, da je zunaj vseh primerjav, najbolj čudovit izum človeštva.

**1.1. Motivacija.** Spodbujevalno učenje ima zelo lepo motivacijo, in sicer izhaja iz psihologije. Znana psihologa Thorndike in Skinner, sta na živalih izvajala eksperimente; postavila sta jih v neko novo situacijo, kjer je lahko žival naredila akcijo, ki je rezultirala v neki nagradi. Ko je bila žival ponovno postavljena v to situacijo, je hitreje ugotovila, katero akcijo mora storiti, da pride do nagrade.

Koncept, ki je opisan v zgornjem odstavku, se imenuje instrumentalno pogojevanje. Z njim se srečamo tudi ljudje; tako se namreč učijo otroci, odrasli ljudje pa se bolj zanesejo na logično razmišljanje. Vseeno pa je to motiviralo utemeljitelje spodbujevanega učenja

**1.2. Strojno učenje.** To relativno novo raziskovalno področje se deli na tri glavne veje:

- **Nadzorovano učenje** se ukvarja s tem, kako iz nekih označenih podatkov naučimo računalnik, da prepozna različne signale (slike, govor, tekst, ...) in to znanje uporabi za razpoznavo novih, neoznačenih podatkov.
- **Nenadzorovano učenje** odstrani označevanje iz podatkov in v njih probava odkriti skrite vzorce.
- **Spodbujevalno učenje** se ukvarja z »učenjem iz izkušenj.«

**1.3. Struktura naloge.** Naloga je razdeljena na štiri glavne dele. Na začetku so predstavljeni osnovni koncepti spodbujevalnega učenja in nekateri glavni algoritmi s tega področja. Potem se fokus obrne na namizne igre in ob nekaj malega teorije iger povzame osnovne koncepte, na katere naletimo tam. V naslednjem odseku potem združimo znanje iz prejšnjih dveh in predstavimo, kako nam teorija iger pripomore pri spodbujevalnem učenju v tem kontekstu. Na koncu pa so predstavljeni nekateri empirični rezultati, ki so posledica zgoraj navedene teorije.

## 2. SPODBUJEVALNO UČENJE

Spodbujevalno učenje se ukvarja s ti. učenjem iz interakcije oz. izkušenj. Čeprav se to na prvi pogled ne zdi kot računska metoda, pač pa stvar psihologije, bomo kmalu dognali, kako prevesti to idejo v računalniku razumljiv jezik.

**2.1. Osnovni koncepti.** V osnovi nas zanima precej preprosta stvar: kako preslikati neko opazovano situacijo v akcijo na tak način, da učenec, ki mu v spodbujevalnem učenju pravimo **agent**, maksimizira neko numerično nagrado. Pri tem ne obstaja opazovalec, ki bi agentu povedal ali pa namignil, katere akcije so dobre, to mora ugotoviti sam, s poskušanjem in napakami. V tem dejstvu se skriva bistvena razlika med spodbujevalnim učenjem in ostalimi vejami strojnega učenja.

Pomembna razlika tiči tudi v pomembnosti časa pri spodbujevalnem učenju. Pri drugih oblikah strojnega učenja se ponavadi ukvarjamo s tabelaričnimi podatki, tu pa ponavadi modeliramo nek dinamičen proces, zato je naravno, da je pomemben čas. Čeprav se ga da v tem kontekstu modelirati zvezno, je za naše namene dovolj, da ga jemljemo kot diskretne točke  $t \in 1, \dots, T$ , kjer  $T$  označuje nek končni čas (v splošnem je lahko seveda  $T = \infty$ ).

**2.1.1. Nagrada.** Prvi pomemben koncept pri spodbujevanem učenju je nagrada. Kot smo že zgoraj omenili, to za nas pomeni neko numerično vrednost, pozitivno število indicira pozitivno nagrado, negativno pa »kazen«. S pomočjo tega koncepta formaliziramo *cilj* učenja. Edini cilj agenta je maksimizacija te nagrade, pri čemer je vredno omeniti, da na nagrado agent lahko vpliva samo s svojimi akcijami (ne more recimo spremeniti načina, na katerega dobi nagrado).

Posebaj pomembno je na tem mestu poudariti, da akcije nimajo nujno neposredne nagrade. Le-te lahko pridejo v poljubnem kasnejšem časovnem obdobju. To je smiselno, če pomislimo z vidika namiznih iger: pri šahu ne razmišljamo samo o neposrednih akcijah, temveč razvijamo neko dolgoročno strategijo ki nas na koncu nagradi z zmago.

**Zgled 2.1** (Križci in krožci). *Pri tej znani otroški igri (in pri mnogo drugih namiznih igrah) modeliramo nagrado na preprost način: če zmagamo, prejmemo nagrado 1, če izgubimo pa  $-1$ . V vseh ostalih situacijah, torej za izenačenje in po vsaki potezi, prejmemo nagrado 0.*

Zavedati se moramo tudi potencialnih omejitev oz. pomanjkljivosti takega modela. Razmislimo malo o:

**Definicija 2.2** (Hipoteza o nagradi). Vse cilje je mogoče opisati kot maksimizacijo neke kumulativne numerične nagrade.

**Zgled 2.3** (Protiprimera hipotezi o nagradi). *Problem je, da hipoteza dovoljuje samo enodimezionalnost:*

- *Ko kupujemo hamburger, nam je pomemben okus in cena; kaj nam več pomeni?*
- *Država želi med epidemijo ohraniti življenja in gospodarstvo; v kakšni meri naj prioritizira ti dve kategoriji?*

*Na tem mestu poudarimo še, da se da tudi v takih situacijah modelirati nagrado na zgoraj opisani način in da je ta koncept vseeno dovolj splošen, da zajame zelo velik razred problemov.*

2.1.2. *Okolje*. Okolje predstavlja del našega sistema, na katerega agent nima nobene vpliva. Funkcija okolja je, da agentu pokaže **stanje** (angl. *state*) in mu da nagrado glede na **akcijo**, ki jo prejme od njega. Če se ponovno osredotočimo na namizne igre, bi lahko rekli, da je okolje igralna plošča pri šahu *in* nasprotnik - tudi nanj namreč nimamo vpliva. Okolje nam služi tudi kot sodnik akcij oz. stanj. V kontekstu programa za igranje iger torej okolje izbira nasprotnikove akcije, odloča katero stanje pomeni zmago in dodeljuje nagrade.

**Zgled 2.4** (Križci in krožci). *Okolje za nas pomeni  $3 \times 3$  igralno polje in našega nasprotnika.*

2.1.3. *Agent*. Kot smo že omenili zgoraj, je agent naš učenec. Njegov cilj je torej maksimizacija numerične nagrade, to težnjo pa dosega s pomočjo **strategije** (angl. *policy*), ki mu pove, katero akcijo naj izbere v določenem stanju. Za ocenjevanje stanja, si pomaga z **vrednostno funkcijo** (angl. *value function*). Kot ime implicira, je to funkcija, ki določa vrednosti stanjem (in akcijam).

Nagrada nam pove takojšnjo vrednost stanja, vrednostna funkcija pa to vrednost gleda na dolgi rok. Je izpeljanka nagrade, a veliko bolj primerna za maksimizacijo kot nagrada, saj upošteva, da so tudi stanja, ki ne prinesejo takojšnje nagrade, lahko veliko vredna.

Poleg tega je v splošnem lažje učenje prek vrednostnih funkcij kot prek strategij neposredno, saj je ponavlja stanj mnogokrat manj kot možnih strategij agenta.

Formalno gledano:

**Definicija 2.5.** Naj  $R_t, S_t, A_t$  zaporedoma označujejo nagrado, stanje in akcijo ob času  $t$ . Definiramo naslednje pojme:

- Agentova **strategija** je takšna preslikava  $\pi : S \rightarrow A$  da velja

$$a = \pi(s) \text{ oz.}$$

$$\pi(a|s) = P(A_t = a \mid S_t = s).$$

Pri čemer prva formula definira *deterministično* strategijo, druga pa *stohastično*.  $a$  in  $s$  sta realizaciji akcije in stanja v času  $t$  (to sta načeloma slučajni spremenljivki.)

- Naj bodo  $R_{t+1}, \dots, R_T$  nagrade, ji jih bomo prejeli od trenutka  $t$  do končnega časa. **Povračilo** (angl. *return*)  $G_t$  v splošnem definiramo za  $T = \infty$

$$G_t = R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k R_{t+k+1},$$

kjer je  $\gamma \in [0, 1]$  *diskontni faktor*. Predstavlja dejstvo, da imamo raje nagrade, ki bodo prišle prej. Formalno gledano, je cilj učenja maksimizacija pričakovanega povračila

- Naj bo  $\pi$  dana strategija agenta. **Vrednostna funkcija stanja** (angl. *state value function*) glede na strategijo  $\pi$  je

$$v_{\pi}(s) = E[G_t \mid S_t = s].$$

Predstavlja torej pričakovani izplen, če se vedemo skladno s strategijo  $\pi$ .

- Naj bo  $\pi$  še vedno dana strategija agenta. **Vrednostna funkcija akcije** (tudi stanja-akcije) (angl. *action value function*) glede na strategijo  $\pi$  definiramo

$$q_{\pi}(s, a) = E[G_t \mid S_t = s, A_t = a].$$

Pove nam pričakovani izplen, če ob času  $t$  naredimo akcijo  $a$ , nato pa se vedemo skladno s strategijo  $\pi$ .

**Zgled 2.6** (Križci in krožci). *Agent je v tem primeru računalniški program, ki prejme igralno ploščo, nasprotnikove poteze in nagrade, vrne pa optimalno strategijo (to si želimo).*

2.1.4. *Model.* Model je nenujen del našega sistema. Predstavlja znanje, ki ga ima agent o svojem okolju. Če imamo model, da lahko uporabimo, da napovemo, kako se bo vedlo okolje in s tem premaknemo agentovo učenje iz čistih poskusov in napak na *načrtovanje* (angl. *planning*). Model je torej poleg strategije in vrednostne funkcije še tretja komponenta agenta. Na podlagi modela lahko agent »preračuna« smiselnost svojih akcij, brez da bi dejansko karkoli storil.

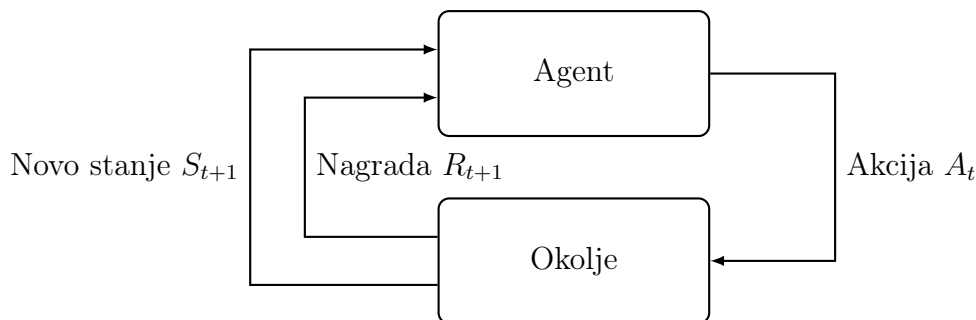
Prisotnost modela je glavna ločnica med dvema velikima, a zelo različnima vejama spodbujevalnega učenja.

2.2. **Korak spodbujevalnega učenja.** Spodbujevalno učenje se pogosto ukvarja s procesi, ki naravno razpadejo v ti. **epizode**. Tak proces so recimo namizne igre, kjer so epizode precej naravno posamezne igre. Ni pa nujno, da je delitev tako naravna (ali pa sploh možna oz. smiselna). Za namene te diplomske naloge lahko privzamemo, da taka delitev obstaja.

Ideja učenja je, da agenta spustimo v okolje in mu dovolimo, da doživi (igra) mnogo epizod. Nato na nek način (bo razjasnjeno kasneje) ob nekih določenih časih (npr. po koncu epizode) posodobi svojo strategijo (in/ali vrednostno funkcijo).

Dejanski korak (npr. poteza v namizni igri) v epizodi pa formalno gledano opredelimo:

- Agent naredi akcijo  $A_t$  ob prejetem stanju  $S_t$  in prejme nagrado  $R_t$ .
- Okolje prejme akcijo  $A_t$ , posreduje agentu stanje  $S_{t+1}$  in nagrado  $R_{t+1}$



2.2.1. *Raziskovanje in izkoriščanje.* Eden izmed glavnih problemov, s katerim se srečamo pri spodbujevalnem učenju je problem raziskovanja in izkoriščanja. Ko se agent uči, začne dojemati katere akcije ali pa kombinacije akcij mu pripeljejo nagrado. Ko to ugotovi, seveda lahko začne te akcije *izkoriščati* in prejemativso nagrado, jim pripada. Pri tem pa naletimo na problem. Agent lahko izkorišča te akcije in nikoli ne ugotovi, da neka druga akcija prinese še višjo nagrado; tega ne izve, ker ne *raziskuje*. Če pa samo raziskuje pa nikoli ne izkoristi potencialnih nagrad, ki jih sreča to je, ničesar se ne nauči.

Uravnoteženje raziskovanja in izkoriščanja je pomemben problem, a se izkaže, da ima dokaj enostavno rešitev (ki deluje dovolj dobro). Spoznali jo bomo v kratkem.

Morda se nekaterim bralcem zdi, da smo zaenkrat preceč »mahali z rokami«, to je zato, ker želimo, da se do te točke razvije intuicija o predstavljenih pojmi. V nadaljevanju bomo do sedaj opisane stvari bolj formalizirali.

**2.3. Markovski proces odločanja.** Spomnimo se najprej procesa spodbujevalnega učenja in ga poskusimo opisati bolj formalno: imamo zaporedje časovnih korakov  $t = 0, 1, 2, \dots$ , ob katerih med sabo interaktirata agent in okolje. Ob koraku  $t$  agent prejme od okolja stanje (oz. reprezentacijo stanja)  $S_t \in \mathcal{S}$ , kjer  $\mathcal{S}$  označuje množico vseh stanj. Na podlagi stanja in strategije, ki jo ima, izbere akcijo  $A_t \in \mathcal{A}(S_t)$ , kjer  $\mathcal{A}(S_t)$  predstavlja množico akcij, ki jih ima agent na voljo v stanju  $S_t$ . Rezultat te akcije je nagrada  $R_{t+1} \in \mathcal{R}$  in novo stanje  $S_{t+1}$ .

Čeprav se da vse opisane koncepte posplošiti na števne in celo neštene množice stanj in akcij, se bomo mi omejili na končne množice. To je glede na problem, s katerim se ukvarjamo, dovolj.

**2.3.1. Markovska veriga.** Dogajanje pri spodbujevalnem učenju lahko v grobem opišemo s slučajnim procesom stanj  $(S_t)_{t=0}^T$ . Zato je pomembno, da si natančno pogledamo nekaj lastnosti, ki jih lahko pričakujemo.

**Definicija 2.7** (Markovska veriga). Slučajni proces  $(S_t)_{t=0}^T$  na končnem verjetnostnem prostoru  $(\Omega, P)$  je **Markovska veriga oz. Markovski proces** (angl. *Markov chain*), če zanj velja Markovska lastnost

$$P(S_{t+1} = s_{t+1} \mid S_t = s_t, \dots, S_0 = s_0) = P(S_{t+1} = s_{t+1} \mid S_t = s_t).$$

Na kratko to *prehodno verjetnost* označimo  $p_{ss'} := P(S_{t+1} = s' \mid S_t = s)$ . Opazimo, da lahko te verjetnosti zložimo v matriko  $\mathcal{P} := [p_{ss'}]_{s,s' \in \mathcal{S}}$ , ki ji pravimo *prehodna matrika*.

Zdaj Markovsko verigo predstavimo še na alternativni način: kot dvojico  $(\mathcal{S}, \mathcal{P})$ , kjer je  $\mathcal{P}$  zgoraj definirana prehodna matrika.

Markovska lastnost pomeni, da je prihodnost neodvisna od preteklosti, če poznamo sedanost. Spodbujevalno učenje se ukvarja predvsem s problemi, kjer to dejstvo drži. Tudi pri našem ciljnem problemu to načeloma velja: če pogledamo igralno ploščo na katerikoli točki pogosto izvemo enako o trenutnem stanju, kot če bi opazovali igro od začetka.

**2.3.2. Markovski proces nagrajevanja.** Podoben koncept, ki se malo bolj približa dejanski situaciji v spodbujevalnem učenju je *Markovski proces nagrajevanja*. Kot že ime morda namigne, je precej podoben Markovski verigi, le da v njem nastopajo *nagrade*.

**Definicija 2.8** (Markovski proces nagrajevanja). Pričakovani nagradi glede na stanje  $s$  in akcijo  $a$  pravimo **nagradna funkcija** (angl. *reward function*) in označimo

$$\mathcal{R}_s^a = E[R_{t+1} \mid S_t = s, A_t = a].$$

Naboru  $(\mathcal{S}, \mathcal{P}, \mathcal{R}, \gamma)$ , za katerega velja

- $\mathcal{S}$  je (končna) množica stanj,
- $\mathcal{P}$  je prehodna matrika  $\mathcal{P}_{ss'} = P(S_{t+1} = s' \mid S_t = s)$ ,
- $\mathcal{R}$  je nagradna funkcija  $\mathcal{R}_s = E[R_{t+1} \mid S_t = s]$ ,
- $\gamma \in [0, 1]$  je *diskontni faktor*,

pravimo **Markovski proces nagrajevanja** (angl. *Markov reward process*).



Od navadne Markovske verige se torej razlikuje samo v prisotnosti nagrad ob vsakem koraku. Če te nagrade postavimo na  $R_t = 0 \forall t$ , dobimo navadno Markovsko verigo. Pomembna razlika je še prisotnost diskontnega faktorja  $\gamma$ . Če velja  $\gamma < 1$ , potem procesu pravimo *diskontirani Markovski proces nagrajevanja*.

Diskontiranje je motivirano iz različnih vidikov: po eni strani nam pomaga, da se v primeru cikličnih procesov izognemo neomejenim povračilom. Poleg tega pa je diskontiranje v mnogo pogledih naraven način za opis situacije: pogosto imamo raje nagrade, ki pridejo prej. Primer tega poznamo recimo iz ekonomije; denar, ki ga dobimo kasneje nam pomeni manj, kot tisti, ki ga dobimo takoj.

Še vedno pa tovrsten proces ne opiše situacije v kateri se znajdemo pri spodbujevalnem učenju, saj ne vsebuje koncepta akcij. Je pa že dovolj »globok«, da v njem lahko definiramo vrednostno funkcijo  $v(s) = E[G_t \mid S_t = s]$ , ki je v tem primeru neodvisna od strategije  $\pi$ , saj strategija v tem modelu nima pomena.

Za vrednostno funkcijo lahko izpeljemo rekurzivno enačbo, s pomočjo katere lahko »rešimo« Markovski proces nagrajevanja. S tem mislimo, da vsakemu stanju dodelimo pravo vrednost.

$$\begin{aligned}
v(s) &= E[G_t \mid S_t = s] \\
&= E\left[\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k R_{t+k+1} \mid S_t = s\right] \\
&= E\left[R_{t+1} + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k R_{t+k+1} \mid S_t = s\right] \\
&= E\left[R_{t+1} + \gamma \left(\sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{k-1} R_{t+k+1}\right) \mid S_t = s\right] \\
&= E[R_{t+1} + \gamma G_{t+1} \mid S_t = s] \\
&= E[R_{t+1} + \gamma v(S_{t+1}) \mid S_t = s]
\end{aligned}$$

Dobili smo torej

$$(1) \quad v(s) = E[R_{t+1} + \gamma v(S_{t+1}) \mid S_t = s] \text{ oz.}$$

$$(2) \quad v(s) = \mathcal{R}_s + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'} v(s'),$$

kjer smo v drugi vrstici upoštevali aditivnost in idempotentnost matematičnega upanja. To je **Bellmanova enačba za Markovske procese nagrajevanja**.

Ker se ukvarjamo s primerom, ko je stanj končno mnogo, recimo  $n$ , jih lahko brez škode za splošnost označimo kar  $1, \dots, n$ . Potem lahko Bellmanovo enačbo prepisemo v matrični obliki

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} v(1) \\ \vdots \\ v(n) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathcal{R}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{R}_n \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{11} & \dots & \mathcal{P}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathcal{P}_{n1} & \dots & \mathcal{P}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(1) \\ \vdots \\ v(n) \end{bmatrix} \text{ ali krajše} \\
v &= \mathcal{R} + \gamma \mathcal{P} v
\end{aligned}$$

Opazimo, da je to *linear*na enačba in da v splošnem eksplicitno rešitev:

$$\begin{aligned}
v &= \mathcal{R} + \gamma \mathcal{P}v \\
(I - \gamma \mathcal{P})v &= \mathcal{R} \\
v &= (I - \gamma \mathcal{P})^{-1} \mathcal{R}
\end{aligned}$$

Ta rešitev predpostavlja obrnljivost matrike  $(I - \gamma \mathcal{P})$  in računanje njenega inverza, kar zahteva  $O(n^3)$  operacij, zato je smiselna samo za majhne procese. Za večje obstajajo iterativni algoritmi in metode, nekater izmed njih bomo spoznali v nasljenem odseku.

Ta del lahko še rahlo matematiziraš - enoličnost rešitev

**2.3.3. Markovski proces odločanja.** Kot ime že nakazuje, *Markovski proces odločanja (MDP)* razširja koncept procesa nagrajevanja z dodatkom odločanja - akcij. S tem dodatkom imamo v popolnosti opisan problem spodbujevalnega učenja: opisujemo torej nek proces, kjer ima agent možnost odločanja, izid pa je vsaj delno slučajan in odvisen od okolja.

**Definicija 2.9** (Markovski proces odločanja). Naboru  $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{P}, \mathcal{R}, \gamma)$ , za katerega velja

- $\mathcal{S}$  je (končna) množica stanj,
- $\mathcal{A}$  je (končna) množica akcij,
- $\mathcal{P}$  je prehodna matrika  $\mathcal{P}_{ss'}^a = P(S_{t+1} = s' \mid S_t = s, A_t = a)$ ,
- $\mathcal{R}$  je nagradna funkcija  $\mathcal{R}_s^a = E[R_{t+1} \mid S_t = s, A_t = a]$ ,
- $\gamma \in [0, 1]$  je *diskontni faktor*,

pravimo **Markovski proces odločanja** (angl. *Markov decision process*).

Prehodna matrika in nagradna funkcija sta sedaj seveda odvisna tudi od akcije. V kontekstu MDP-jev lahko sedaj formalno definiramo strategijo agenta  $\pi$ , ki je zahvaljujoč Markovski lastnosti odvisna od enega stanja in ne celotne zgodovine procesa. Definiramo tudi vrednostno funkcijo stanja  $v_\pi(s)$  in vrednostno funkcijo akcije  $q_\pi(s, a)$ . Njihove definicije se ne spremenijo, so pa sedaj formalno umeščene v model.

Opazimo tudi, da je v MDP-ju pri fiksni strategiji  $\pi$  zaporedje oz. proces stanj  $S_1, S_2, \dots$  Markovska veriga  $(\mathcal{S}, \mathcal{P}^\pi)$ . Če v zaporedje stanj pomešamo še nagrade, torej  $S_1, R_2, S_2, R_3, \dots$ , dobimo Markovski proces nagrajevanja  $(\mathcal{S}, \mathcal{P}^\pi, \mathcal{R}^\pi, \gamma)$ , kjer smo označili

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^\pi &= \sum_{a \in \mathcal{A}} \pi(a|s) \mathcal{P}_{ss'}^a \\
\mathcal{R}^\pi &= \sum_{a \in \mathcal{A}} \pi(a|s) \mathcal{R}_s^a.
\end{aligned}$$

**Opomba 2.10.** Morda je nekatere bralce zbudilo, da v zaporedju stanj in nagrad  $S_1$  ne sledi  $R_1$ , temveč  $R_2$ . Za tako notacijo smo se odločili, da poudarimo, da okolje agentu sočasno poda  $S_2$  in  $R_2$ , glede na stanje  $S_1$  pa se agent odloča o akciji  $A_1$ .

MDP-ji so splošna orodja za obravnavo stohastičnih procesov, ki vključujejo odločitve v diskretnem času. Njihov utemeljitelj je Richard Bellman, ki je znan predvsem po izumu dinamičnega programiranja, zato morda ni presenetljivo, da nam prav

dinamično programiranje poda osnovo za njihovo reševanje. Kot pri procesih nagrajevanja, lahko tudi tu izpeljemo Bellmanovo enačbo. Najprej zapišemo rekurzivni zvezi za vrednostni funkciji stanjja in akcije:

$$\begin{aligned}v_{\pi}(s) &= \mathbb{E}[R_{t+1} + \gamma v_{\pi}(S_{t+1}) \mid S_t = s] \\q_{\pi}(s, a) &= \mathbb{E}[R_{t+1} + \gamma q_{\pi}(S_{t+1}, A_{t+1}) \mid S_t = s, A_t = a].\end{aligned}$$

Opazimo, da  $v_{\pi}$  in  $q_{\pi}$  povezujeta zvezi:

$$\begin{aligned}v_{\pi}(s) &= \sum_{a \in \mathcal{A}} \pi(a|s) q_{\pi}(s, a) \\q_{\pi}(s, a) &= \mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^a v_{\pi}(s').\end{aligned}$$

Če zvezi združimo, dobimo:

$$\begin{aligned}v_{\pi}(s) &= \sum_{a \in \mathcal{A}} \pi(a|s) \left[ \mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^a v_{\pi}(s') \right] \\q_{\pi}(s, a) &= \mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^a \left[ \sum_{a' \in \mathcal{A}} \pi(a'|s') q_{\pi}(s', a') \right].\end{aligned}$$

Prvo enačbo (dej to un reference) imenujemo **Bellmanova enačba pričakovanja** (angl. *Bellman expectation equation*), ki ima ponovno matrično obliko in eksplicitno (ENOLIČNO - ZAKAJ) rešitev:

$$\begin{aligned}v_{\pi} &= \mathcal{R}^{\pi} + \gamma \mathcal{P}^{\pi} v_{\pi} \\v_{\pi} &= (I - \gamma \mathcal{P}^{\pi})^{-1} \mathcal{R}^{\pi}\end{aligned}$$

Ta enačba je sicer pomembna, a nas najbolj zanima »rešitev« MDP-ja. Želimo najti torej optimalno strategijo. Pri tem nam pomaga naslednje:

**Definicija 2.11.**

- **Optimalna vrednostna funkcija stanja** (angl. *optimal state-value function*)  $v_*(s)$  je največja med vsemi vrednostnimi funkcijami stanj

$$v_*(s) = \max_{\pi} v_{\pi}(s).$$

- **Optimalna vrednostna funkcija akcije** (angl. *optimal action-value function*)  $q_*(s, a)$  je največja med vsemi vrednostnimi funkcijami akcij

$$q_*(s, a) = \max_{\pi} q_{\pi}(s, a).$$

- Na množici vseh možnih strategij  $\Pi$  definiramo delno urejenost na naslednji način:

$$\pi \geq \pi', \text{ če } v_{\pi}(s) \geq v_{\pi'}(s) \ \forall s.$$

Če za strategiji velja kot zgoraj, pravimo, da je  $\pi$  *boljša ali enaka* kot  $\pi'$ .

Do konca nas potem pripelje naslednji izrek.

**Izrek 2.12.** *Za vsak Markovski proces odločanja velja:*

- *Obstaja optimalna strategija  $\pi_*$ , ki je boljša ali enaka kot vse ostale strategije;  $\pi_* \geq \pi \ \forall \pi \in \Pi$ .*
- *Vedno obstaja deterministična optimalna strategija.*
- *Vse optimalne strategije določajo optimalno vrednostno funkcijo stanja in optimalno vrednostno funkcijo akcije;*

$$\begin{aligned} v_{\pi_*}(s) &= v_*(s) \\ q_{\pi_*}(s, a) &= q_*(s, a). \end{aligned}$$

Izrek nam pove, da če poznamo  $q_*(s, a)$ , poznamo tudi optimalno deterministično strategijo, ki jo dobimo kot  $\pi_*(a|s) = \mathbb{1}(a = \arg \max_{a \in \mathcal{A}} q_*(s, a))$ .

Podobno, kot za poljubne vrednostne funkcije, lahko tudi za optimalne vrednostne funkcije izpeljemo Bellmanovo enačbo, ki jo sedaj imenujemo **Bellmanova enačba optimalnosti** (angl. *Bellman optimality equation*). Sprva opazimo zvezi med  $q_*$  in  $v_*$ :

$$\begin{aligned} v_*(s) &= \max_a q_*(s, a) \\ q_*(s, a) &= \mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^a v_*(s'). \end{aligned}$$

Ti zvezi nato vstavimo eno v drugo, in dobimo enačbi:

$$(3) \quad v_*(s) = \max_a \mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^a v_*(s)$$

$$(4) \quad q_*(s, a) = \mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^a \max_{a'} q_*(s', a')$$

Opazimo, da sta enačbi tokrat nelinearni, kar močno oteži direktno reševanje. Na srečo pa tudi v tem primeru pridejo prav metode iz naslednjega odseka.

### 3. ALGORITMI PRI SPODBUJEVALNEM UČENJU

Algoritmov za reševanje MDP-jev je precej. Mi se bomo omejili predvsem na algoritme, ki se učijo prek vrednostne funkcije in izhajajo iz dinamičnega programiranja, a naj na tem mestu omenimo, da obstajajo tudi algoritmi, ki posodablajo strategijo neposredno (mogoče kakšen reference al pa kej).

Še en pomemben razlikovalec pri reševanju MDP-jev je, ali je MDP *poznan*, ali ne. Poznan MDP pomeni, da so nam znane vse komponente - dobro je definirana prehodna matrika  $\mathcal{P}$ . Pogosto se pojavijo problemi, kjer te matrike ne poznamo, eden izmed takih problemov je tudi igranje namiznih iger.

Poleg tega naj na tem mestu omenimo, da reševanju celotnega problema spodbujevalnega učenja pravimo **načrtovanje** (angl. *planning*), le-ta pa se deli na dve stopnji:

- **Napovedovanje** - pri tem podproblemu podamo nek MDP in strategijo, algoritem nam vrne vrednostno funkcijo stanja (glede na strategijo).
- **Upravljanje** - to je bolj poln problem: podan je MDP, algoritem pa nam vrne optimalno vrednostno funkcijo in optimalno strategijo.

**3.1. Dinamično programiranje - Reševanje poznanih MDP-jev.** Dinamično programiranje je optimizacijska metoda deluje na principu deljenja velikega problema na manjše prekrivajoče podprobleme. V jedru reševanja je **Bellmanova enačba**, ki opisuje odnos med vrednostmi podproblemov in glavnega problema. Ker je ideja dinamičnega programiranja (DP) in MDP-jev dobil Bellman ob istem času, je naravno, da je DP metoda, ki je prilagojena prav situaciji v MDP-ju.

Problem mora v splošnem zadoščati dveh lastnostim, da je zanj primerno reševanje z dinamičnim programiranjem. Prvi pravimo **lastnost optimalne podstrukture**, ki pravi, da problem lahko razstavimo na podprobleme in rešitve podproblemov lahko potem sestavimo nazaj v rešitev celotnega problema. Druga pomembna lastnost pa so **prekrivajoči podproblemi**, ki implicira, da lahko že poznane rešitve podproblemov večkrat uporabimo.

Opazimo, da obe lastnosti veljata za MDP-je; Bellmanova enačba, nam razdeli problem na podprobleme, vrednostna funkcija pa hrani in ponovno uporablja rešitve. Lastnosti veljata tudi za MRP-je in tudi metode, ki jih bomo spoznali so aplikativne na njih, a mi se bomo posvetili predvsem procesom odločanja.

Morda formalno bolj o bellmanovih enačbah?

**3.1.1. Iterativno ocenjevanje strategije.** Podatki so tu poznan MDP in strategija  $\pi$ . Za algoritmom stoji Bellmanova enačba pričakovanja, z njo na vsakem koraku posodobimo  $v_k(s) \rightarrow v_{k+1}(s)$  s pomočjo  $v(s')$ , kjer je  $s'$  naslednje stanje od  $s$ . Enačba iteracije se potem glasi

$$v_{k+1}(s) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \pi(a|s) \left[ \mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^a v_k(s') \right] \text{ ali na kratko}$$

$$v_{k+1} = \mathcal{R}_\pi + \gamma \mathcal{P}_\pi v_k.$$

**Izrek 3.1.** *Iterativno ocenjevanje strategije konvergira proti vrednostni funkciji, ki jo določa strategija  $\pi$ .*

*Dokaz.* Pokazali bomo, da iz iteracije lahko pridobimo skrčitev, iz izrekov o fiksni točki potem sledi naš rezultat (MOGOČE DEJMO NAVEST IZREK? - BANACH, CONTRACTION MAPPING).

Definiramo **Bellmanov operator pričakovanja** kot

$$T_\pi(v) = \mathcal{R}_\pi + \gamma \mathcal{P}_\pi v.$$

Naj bosta  $u$  in  $v$  vrednostni funkciji. Potem je zgornji operator skrčitev glede na neskončno normo:

$$\begin{aligned} \|T_\pi(v) - T_\pi(u)\|_\infty &= \|\mathcal{R}_\pi + \gamma \mathcal{P}_\pi v - \mathcal{R}_\pi + \gamma \mathcal{P}_\pi u\|_\infty \\ &= \|\gamma \mathcal{P}_\pi (v - u)\|_\infty \\ &\leq \|\gamma \mathcal{P}_\pi\| \|v - u\|_\infty \\ &\leq \gamma \|v - u\|_\infty, \end{aligned}$$

kjer smo upoštevali, da velja  $\|\mathcal{P}_\pi\|_\infty \leq 1$ , saj so elementi  $\mathcal{P}_\pi$  verjetnosti.

□

S tem procesom tako res dobimo vrednostno funkcijo, ki jo določa strategija, a strategija je statična; to reši problem napovedovanja.

Da rešimo problem upravljanja, uporabimo enostavno idejo: strategijo izboljšamo **požrešno**. To pomeni, da izberemo tako akcijo, ki nas pripelje v stanje, ki je dosegljivo in ima trenutno največjo vrednost  $v_\pi$ .

**3.1.2. Iteracija strategije.** Algoritem, ki ga dobimo s tem, da združimo iterativno ocenjevanje strategije in požrešno izboljšavo strategije, imenujemo iteracija strategije (angl. *policy iteration*). S tem algoritmom lahko sedaj rešimo problem upravljanja in s tem celoten problem poznane MDP-ja.

**Trditev 3.2.** *Iteracija strategije vedno konvergira k optimalni strategiji  $\pi_*$ .*

*Dokaz.* Ukvarjali se bomo samo z determinističnimi strategijami, saj so zaradi požrešne izbire strategije le-te vedno deterministične, razen začetne. Ker je izbira začetne strategije za trditev nepomembna, lahko izberemo neko naključno deterministično strategijo  $a = \pi(s)$ .

Požrešno vedenje zdaj za nas pomeni, da vzamemo  $\pi'(s) = \arg \max_{a \in \mathcal{A}} q_\pi(s, a)$ . To očitno izboljša vrednost za vsako stanje

$$q_\pi(s, \pi'(s)) = \max_{a \in \mathcal{A}} q_\pi(s, a) \geq q_\pi(s, \pi(s)) = v_\pi(s).$$

Posledično izboljša tudi vrednostno funkcijo:

$$\begin{aligned} v_\pi(s) &\leq q_\pi(s, \pi'(s)) = \mathbb{E}_{\pi'}[R_{t+1} + \gamma v_\pi(S_{t+1}) \mid S_t = s] \\ &\leq \mathbb{E}_{\pi'}[R_{t+1} + \gamma q_\pi(S_{t+1}, \pi'(S_{t+1})) \mid S_t = s] \\ &\leq \mathbb{E}_{\pi'}[R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \gamma^2 q_\pi(S_{t+2}, \pi'(S_{t+2})) \mid S_t = s] \\ &\leq \mathbb{E}_{\pi'}[R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \dots \mid S_t = s] = v_{\pi'}(s) \end{aligned}$$

Če se izboljšave nehajo, dobimo

$$q_\pi(s, \pi'(s)) = \max_{a \in \mathcal{A}} q_\pi(s, a) = q_\pi(s, \pi(s)) = v_\pi(s).$$

To se zgodi, saj zaradi končnih nagrad tudi vrednostne funkcije zavzemajo končne vrednosti. Potem opazimo, da je zaradi  $v_\pi(s) = \max_{a \in \mathcal{A}} q_\pi(s, a)$  zadoščeno Bellmanovi enačbi optimalnosti in zato po izreku 2.12 velja  $v_\pi(s) = v_*(s) \forall s \in \mathcal{S}$ , torej je  $\pi$  optimalna strategija.  $\square$

**3.1.3. Iteracija vrednosti.** K problemu lahko pristopimo tudi neposredno prek Bellmanove enačbe optimalnosti in se s tem izognemo neposredni uporabi strategije, vseeno pa rešimo problem upravljanja. Ideja je podobna kot pri iterativnem ocenjevanju strategije, le da imamo drugačno enačbo za iteracijo:

$$\begin{aligned} v_{k+1}(s) &= \max_{a \in \mathcal{A}} \left[ \mathcal{R}_s^a + \gamma \sum_{s' \in \mathcal{S}} \mathcal{P}_{ss'}^a v_k(s') \right] \\ v_{k+1} &= \max_{a \in \mathcal{A}} \mathcal{R}^a + \gamma \mathcal{P}^a v_k. \end{aligned}$$

Podobno kot pri iterativnem ocenjevanju strategije pokažemo, da zgornja iteracija konvergira k  $v_*$ .

**3.1.4. Časovna zahtevnost.** Za korak obeh iteracij je potrebnih  $O(mn^2)$  operacij, kjer je  $m$  število akcij in  $n$  število stanj. Popolnoma enake algoritme lahko uporabimo za iteracijo  $q_\pi(s, a)$  oz.  $q_*(s, a)$ , le da sedaj pridemo do časovne zahtevnosti  $O(m^2n^2)$ .

**3.2. Monte Carlo.** Do sedaj smo se ukvarjali s poznanim MDP-jem, kar pa ni naš končen cilj. V nadaljevanju se bomo posvetili nepoznanim. Metode, ki jih bomo spoznali so tako bolj splošno aplikativne. Svoje bistvo pa črpajo pri dosedaj poznanem.

Prva taka metoda je Monte Carlo. Spopada se s problemom napovedovanja z dodatno izboljšavo, da ne rabi poznati matrike  $\mathcal{P}$ . Potrebujemo pa strategijo  $\pi$ , na podlagi katere opazujemo epizode dogajanja. Ideja delovanja je, da se namesto na direktno računanje pričakovanega povračila, osredotočimo na računanje *empiričnega* povračila:

- Ob vsakem (ali samo prvem) obisku stanja  $s$ :

$$\begin{aligned} N(s) &\leftarrow N(s) + 1 \\ S(s) &\leftarrow S(s) + G_t. \end{aligned}$$

- Po zadostni količini epizod (ob koncu učenja):

$$V(s) \leftarrow S(s)/N(s)$$

Opazimo, da vrednost  $V(s)$  konvergira proti  $v_\pi(s)$ , ko gre  $N(s) \rightarrow \infty$  po krepkem zakonu velikih števil. Opazimo tudi, da metoda deluje samo za probleme, ki imajo končne epizode. Če za vsako stanje  $s$  hranimo  $N(s)$  in  $S(s)$ , tako dobimo oceno za  $v_\pi(s) \forall s \in \mathcal{S}$ .

Prostorsko zahtevnost lahko izboljšamo, če upoštevamo, da povprečje  $\mu$  nekega zaporedja  $X_1, X_2, \dots$  lahko izračunamo inkrementalno:

$$\begin{aligned} \mu_k &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i \\ &= \frac{1}{k} \left[ X_k + \sum_{i=1}^{k-1} X_i \right] \\ &= \frac{1}{k} [X_k + (k-1)\mu_{k-1}] \\ &= \mu_{k-1} + \frac{1}{k} (X_k - \mu_{k-1}). \end{aligned}$$

Na podlagi te zveze lahko implementiramo inkrementalni Monte Carlo, tako da po končani epizodi za vsako stanje  $S_t$  s povračilom  $G_t$  posodobimo:

$$\begin{aligned} N(S_t) &\leftarrow N(S_t) + 1 \\ V(S_t) &\leftarrow V(S_t) + \frac{1}{N(S_t)}(G_t - V(S_t)). \end{aligned}$$

Izkaže se, da lahko zgornje še malo posplošimo, in uporabimo:

$$(5) \quad V(S_t) \leftarrow V(S_t) + \alpha(G_t - V(S_t)),$$

kjer  $\alpha$  imenujemo **velikost koraka** oz. **hitrost učenja** (angl. *learning rate*).

Posodobitveno pravilo (5) je konkreten primer bistvene ideje spodbujevalnega učenja prek vrednostne funkcije. Vsi ostali algoritmi nam dajo pravilo podobne oblike:

$$(6) \quad \text{nova ocena} \leftarrow \text{stara ocena} + \text{korak} (\text{tarča} - \text{stara ocena}).$$

**3.3. TD(0).** V spodbujevalnem učenju obstaja skupina algoritmov, ki se imenujejo **algoritmi učenja s časovno razliko** (angl. *temporal-difference learning*). Delujejo v podobnih pogojih kot Monte Carlo in tudi dosegajo enak cilj. Pomembna razlika je, da ne potrebujejo povračila pri posodobitvi. Delujejo lahko tudi v sistemih, ki se ne delijo na epizode oz. ne potrebujejo končanih epizod za svoje delovanje.

Najpreprostejši algoritem učenja s časovno razliko je TD(0). Ideja je, da v stanju ocenimo povračilo kot  $G_t \approx R_{t+1} + \gamma V(S_{t+1})$ . To potem uporabimo za *tarčo* v pravilu (6). To nam da pravilo:

$$(7) \quad V(S_t) \leftarrow V(S_t) + \alpha(R_{t+1} + \gamma V(S_{t+1}) - V(S_t)).$$

**3.3.1. Primerjava z Monte Carlo.**

- Tarča pri MC je nepristranska ocena  $v_\pi(S_t)$ , medtem ko je pri TD(0) tarča pristranska ocena. Ta prednost MC je uravnotežena s tem, da ima TD(0) tarča nižjo varianco, saj je odvisna od ene same slučajne spremenljivke, medtem ko je pri MC odvisna od mnogih slučajnih dogodkov.
- Prav tako je pomembna razlika v dejstvu, da MC nujno rabi popolne epizode in se lahko izvede le po končani epizodi, TD(0) pa se lahko uči sproti (angl. *online*) in sploh ne potrebuje končnih epizod.
- Razlika je tudi v tem, kam konvergirata algoritma, če imamo na voljo samo končno količino epizod. Naj  $K$  označuje število epizod in  $k$  nakazuje, v kateri epizodi smo. Potem MC konvergira k rešitvi z minimalno povprečno kvadratno napako (MSE)  $\sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^{T_k} (G_t^k - V(s_t^k))^2$  - najbolje se prilega opazovanim povračilom.

TD(0) pa konvergira k rešitvi modela največjega verjetja Markova; to je rešitev MDP-ja, ki se najbolj prilega podatkom. Dobimo torej naslednji cenilki: (TO SI ŠE POGLEJ)

$$\hat{\mathcal{P}}_{ss'}^a = \frac{1}{N(s, a)} \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^{T_k} \mathbb{1}(s_t^k, a_t^k, s_{t+1}^k = s, a, s')$$

$$\hat{\mathcal{R}}_s^a = \frac{1}{N(s, a)} \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^{T_k} \mathbb{1}(s_t^k, a_t^k = s, a) r_t^k$$

- Zadnja pomembna razlika je, da TD izrabi Markovsko lastnost, medtem ko je MC ne. Zato je vsaj v teoriji TD veliko bolj učinkovit v MDP-jih.

**3.4. TD( $\lambda$ ).**

**3.5. Izboljšave.**

**3.5.1. Nevronske mreže.**

## 4. NAMIZNE IGRE

**4.1. Pregled konceptov teorije iger.**

**4.1.1. Nashevo ravnotežje.**



4.1.2. *Igre z vsoto nič.*

4.1.3. *Ekstenzivne igre.*

4.2. **Kompleksnost iger.**

4.2.1. *Game tree ...*

4.3. **Morda kaj o optimal board representationu?**

4.4. **Pride še kaj v poštev tu?**

## 5. SPODBUJEVALNO UČENJE PRI NAMIZNIH IGRAH

5.1. **Parcialni model - »po-stanja«.**

5.2. **Učenje.**

5.2.1. *Samoigra.*

5.2.2. *Igre iz podatkovnih baz.*

5.2.3. *Naključni nasprotnik.*

5.3. **Kombinacija z iskanjem - generalised policy eval?**

5.4. **Algoritem - zaključena celota.**

5.4.1. *Opomba: deluje, tudi ko ni vsota 0.*

## 6. EMPIRIČNI REZULTATI

6.1. **m,n,k-igra.**

6.1.1. *Kompleksnost m,n,k-igre.*

## 7. USPEHI GLEDE NA VELIKOST

7.0.1. *Morda tudi kaj z bolj modificiranimi mnk igrami.*

## 8. PRIMERJAVA, GRAFI

### LITERATURA

- [1] Richard E. Bellman. *Dynamic Programming*. Princeton University Press, Princeton, 1957.
- [2] Richard E. Bellman. A markov decision process. *Journal of Mathematical Mechanics*, (6), 1957.
- [3] Imran Ghory. Reinforcement learning in board games. 2004.
- [4] David Silver. Introduction to reinforcement learning. <https://deepmind.com/learning-resources/-introduction-reinforcement-learning-david-silver>, 2015.
- [5] Richard S. Sutton and Andrew G. Barto. *Reinforcement Learning: An introduction*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 2 edition, 2015.
- [6] Csaba Szepesvari. *Algorithms for Reinforcement Learning*. Morgan & Claypool Publishers, Alberta, Canada, 2009.