

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO  
FAKULTETA ZA RAČUNALNIŠTVO IN INFORMATIKO

Računalništvo in matematika – 2. stopnja

Tim Kalan

## **VEČSTRANSKI PODPISI**

Magistrsko delo

Mentor: doc. dr. Tilen Marc

Ljubljana, 2025



# Kazalo

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Kriptografske osnove</b>	<b>2</b>
2.1	Aritmetika v $\mathbb{Z}_p^*$	2
2.2	Zgoščevalne funkcije	3
2.3	Kriptografija javnega ključa	4
2.4	Digitalni podpisi	5
2.5	Interaktivni protokoli	6
2.6	Varnost	6
<b>3</b>	<b>Schnorrov podpis</b>	<b>7</b>
3.1	Schnorrov podpis v splošnih grupah	10
3.2	Varnost Schnorrovega podpisa	11
3.2.1	Dokaz varnosti Schnorrovega podpisa	12
<b>4</b>	<b>Pregled skupinskih podpisov</b>	<b>12</b>
4.1	Skupinski podpisi	13
4.2	Pragovni podpisi	13
4.3	Večstranski podpisi	13
4.4	Agregirani podpisi	14
<b>5</b>	<b>Večstranski Schnorrov podpis</b>	<b>14</b>
5.1	Večstranski podpis podskupine z odgovornostjo	14
5.1.1	Robustnost, varnost in napadalec	15
5.1.2	Model slučajnega oraklja	16
5.2	Konstrukcija večstranskega Schnorrovega podpisa	17
5.2.1	Naivna verzija	17
5.2.2	Generiranje parametrov: Predpostavka DL	18
5.2.3	Napad na generiranje ključev: Dokazi brez razkritja znanja	19
5.2.4	Učinkovitost podpisovanja: Merklova drevesa	21
5.3	Definicija večstranskega Schnorrovega podpisa	23
5.3.1	Skupni parametri	23
5.3.2	Generiranje ključev	24
5.3.3	Podpisovanje	25
5.3.4	Preverjanje	25
5.4	Varnost večstranskega Schnorrovega podpisa	26
5.4.1	Šibek napadalec	26
5.4.2	Dokaz varnosti	28
<b>6</b>	<b>Varnost večstranskih podpisov v splošnem</b>	<b>34</b>
<b>7</b>	<b>MuSig2</b>	<b>34</b>
7.1	Konstrukcija	34
	<b>Literatura</b>	<b>35</b>



## Program dela

Mentor naj napiše program dela skupaj z osnovno literaturo.

## Osnovna literatura

1. S. Micali, K. Ohta in L. Reyzin, *Accountable-subgroup multisignatures*, v: Proceedings of the 8th ACM conference on Computer and Communications Security (ur. P. Samarati), ACM, Philadelphia, PA, USA, 2001, str. 245–254, DOI: 10.1145/501983.502017, dostopno na <https://doi.org/10.1145/501983.502017>.

Podpis mentorja:



## **Večstranski podpisi**

### **POVZETEK**

Tukaj napišemo povzetek vsebine. Sem sodi razlaga vsebine in ne opis tega, kako je delo organizirano.

## **Multisignatures**

### **ABSTRACT**

An abstract of the work is written here. This includes a short description of the content and not the structure of your work.

**Math. Subj. Class. (2020):** 94A60, 11T71

**Ključne besede:** kriptografija, digitalni podpis, Schnorrov podpis, večstranski podpis

**Keywords:** cryptography, digital signature, Schnorr signature, multisignature





# 1 Uvod

Odkar se je na svetu pojavil koncept (ročnega) podpisa, je večina primerov uporabe temeljila na pridobivanju podpisov več deležnikov, saj je bila večina podpisanih dokumentov sporazum ali pogodoba med večimi deležniki. Odličen primer je npr. Deklaracija neodvisnosti Združenih držav Amerike, vidna na sliki 1.



Slika 1: Deklaracija neodvisnosti Združenih držav Amerike s podpisi podpornikov spodaj. Vir slike Wikipedia [15].

S pojavom računalnika in napredkom v kriptografiji se je pojavila alternativna oblika podpisovanja. *Digitalni podpisi* so dandanes povsod. Uporabljeni so vsakič, ko dostopamo do spletnih strani, prenašamo podatke ali pa opravljamo kakršnakoli plačila. Poleg avtomatiziranih podpisovanj, ki se zgodijo v ozadju zgoraj omenjenih procesov, pa so digitalni podpisi na voljo tudi kot alternativa ročnemu podpisu človeka. V praktično vseh pogledih so mnogo varnejši od tradicionalnih podpisov, omogočajo bolj sistematično preverjanje (prek računalnikov) in so skorajda enostavnejši za uporabo in prenašanje.

Prav tako lahko digitalne podpise uporabimo, če mora skupina deležnikov podpisati pogodbo – vsak enostavno pripne svoj digitalni podpis. Če je skupina velika, če je računska moč omejena (npr. če želimo zmanjšati ceno transakcij pri tehnologiji veriženja blokov), ali pa če enostavno želimo preverjevalcu podpisov olajšati delo, lahko poskrbimo, da se skupina podpiše z enim samim, *večstranskim* podpisom. Ta podpis vseeno priča o vseh podpisnikih, njegova verifikacija oz. preverjanje, pa zajema približno enako dela, kot preverjanje enega samega podpisa.

Taki podpisi so samo en izmed možnih načinov, kako se skupina podpiše. Od ostalih načinov izstopajo po tem, da omogočajo vpogled v sestavo skupine podpisnikov, kar nudi preverjevalcu več informacij pri odločanju, če je podpis sprejemljiv, hkrati pa ohranja odgovornost individualnih skupine. Pri tradicionalnih sku-

pinskih podpisih podpis samo priča o podpisu celotne skupine, ustvari pa ga lahko katerkoli član. Take lastnosti so v določenih primerih zelo zaželene, npr. pri tehnologiji veriženja blokov je zelo pomembno, da je znano iz katerih naslovov prihajajo transakcije. To, v kombinaciji s popularizacijo Schnorrovega podpisa, je privedlo mnogo raziskovalcev do želje po večstranskih podpisih, ki vrnejo navadne Schnorrove podpise, in so tako enostavno zamenljivi.

V poglavju 2 najprej predstavimo kriptografske osnove, ki so potrebne za razumevanje besedila. To zajema modularno aritmetiko in grupe, zgoščevalne funkcije, kriptografijo javnega ključa, nekaj splošnih definicij pri digitalnih podpisih in potem še nekaj besed o varnosti. V poglavju 3 predstavimo Schnorrov podpis, ki je osnova za ostale sheme, ki jih obravnavamo. V poglavju 4 so predstavljeni vsi možni načini za podpisovanje skupin. Poglavje 5 predstavi večstranski Schnorrov podpis, tam tudi dokažemo njegovo varnost v modelu slučajnega oraklja.

## 2 Kriptografske osnove

Preden si lahko pogledamo natančneje kako lahko skupina generira en sam podpis sporočila, si moramo pogledati nekaj kriptografskih osnov. Bolj kompleksnejši pojmi bodo opisani sproti, namen tega poglavja je predstaviti stvari, ki so predpogoj za branje praktično kakršnegakoli kriptografskega besedila s področja digitalnih podpisov.

### 2.1 Aritmetika v $\mathbb{Z}_p^*$

V kriptografiji imamo pogosto opravka z multiplikativnimi grupami, najenostavnejša med njimi (in tudi tradicionalno največ uporabljena) je *multiplikativna grupa naravnih števil modulo  $p$* , ki jo označimo  $\mathbb{Z}_p^*$ . Njeni elementi so števila v  $\{0, 1, \dots, p-1\}$ , ki so tuja številu  $p$ . V posebnem primeru, ko je  $p$  praštevilo, so to torej števila  $\{1, 2, \dots, p-1\}$  in je red grupe (število elementov)  $\text{ord}(\mathbb{Z}_p^*) = |\mathbb{Z}_p^*| = p-1$ . Operacija v tej grupi je, kot ime že nakazuje, množenje modulo  $p$ .

Spomnimo se, da je red elementa  $g$  v grupi najmanjše naravno število  $q$ , da velja  $g^q \equiv 1 \pmod{p}$ , kjer je 1 enota za množenje. V primeru, da je  $p$  praštevilo, je grupa  $\mathbb{Z}_p^*$  ciklična, kar pomeni, da v njej obstaja element  $g$ , katerega red je enak redu grupe, torej  $\text{ord}(g) = p-1$ . V tem primeru se  $g$  imenuje *generator*.

**Primer 2.1** (Grupa  $\mathbb{Z}_{11}^*$ ). Ker je 11 praštevilo, v grupi  $\mathbb{Z}_{11}^*$  obstaja generator, oz. je grupa ciklična z redom  $10 = 11-1$ . Z zaporednim računanjem potenc lahko vidimo, da je  $\text{ord}(2) = 10$ , torej je 2 generator.

$$\begin{array}{ll} 2^1 \equiv 2 \pmod{11} & 2^6 \equiv 9 \pmod{11} \\ 2^2 \equiv 4 \pmod{11} & 2^7 \equiv 7 \pmod{11} \\ 2^3 \equiv 8 \pmod{11} & 2^8 \equiv 3 \pmod{11} \\ 2^4 \equiv 5 \pmod{11} & 2^9 \equiv 6 \pmod{11} \\ 2^5 \equiv 10 \pmod{11} & 2^{10} \equiv 1 \pmod{11} \end{array}$$

◇

**Opomba 2.2.** Spomnimo se *kongruence*:  $a \equiv b \pmod{m} \iff m \mid a-b$ .

## 2.2 Zgoščevalne funkcije

V grobem so (kriptografske) *zgoščevalne funkcije* take funkcije, ki prejmejo poljubno dolg binarni niz (ki lahko predstavlja besede, številke, celotne dokumente, ...), vrnejo pa binarni niz, ki ima vnaprej določeno dolžino. Tem rezultatom pravimo *zgostitve*. Namen zgoščevalnih funkcij je za dokument ustvariti unikaten niz, ki zelo verjetno unikatno identificira dokument. Želimo si, da je v praksi nemogoče najti dva različna niza z enako zgostitvijo, natančno pa zgoščevalne funkcije definiramo:

**Definicija 2.3. Kriptografska zgoščevalna funkcija**  $H : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^n$  je funkcija, ki slika binarne nize  $m$  poljubne dolžine v njihove **zgostitve**  $H(m)$ , tj. binarne nize vnaprej določene dolžine  $n$ . Zadoščati mora naslednjim lastnostim:

- **Določenost** pomeni, da bo zgoščevanje enakih nizov vedno privedlo do enake zgostitve. Zapišemo lahko  $\forall m : ((h_1 = H(m) \wedge h_2 = H(m)) \implies h_1 = h_2)$ .
- **Učinkovitost** pomeni, da lahko računalnik izračuna poljubno zgostitev v dognednem času. Izračun zgostitve mora biti računsko učinkovit. Ponavadi tu zahtevamo, da je časovna zahtevnost funkcije  $H$  polinomska v dolžini vhodnega niza.
- **Enosmernost oz. odpornost na praslisko** pomeni, da iz predložene zgostitve zelo težko ugotovimo, kateri niz je funkcija prejela kot vhod. Če torej poznamo zgostitev  $h$  za nek neznan  $m$ , je računsko neizvedljivo najti niz  $m$ , da velja  $h = H(m)$ .
- **Odpornost na drugo praslisko** pomeni, da če poznamo niz in njegovo zgostitev, zelo težko najdemo drug niz z enako zgostitvijo. Če torej poznamo niz  $m_1$ , je računsko neizvedljivo najti zgostitev  $m_2$ , da velja  $H(m_1) = H(m_2)$ .
- **Skoraj brez trčenj oz. odpornost na trčenja** pomeni, da je verjetnost, da imata dva izraza enako zgostitev, majhna. Želimo, da je računsko neizvedljivo najti dva niza  $m_1$  in  $m_2$ , ki imata enako zgostitev, oz. da velja  $H(m_1) = H(m_2)$ .
- **Učinek plaz** pomeni, da vsaka sprememba v vhodnem nizu povzroči veliko spremembo v zgostitvi. Ob katerikoli spremembi se vsak bit zgostitve se spremeni z verjetnostjo vsaj  $1/2$ .

**Opomba 2.4.** Vse varne kriptografske zgoščevalne funkcije, ki so v uporabi zadoščajo zgornjim lastnostim. To pomeni, da za nobeno od teh funkcij nihče še ni našel trka.

**Primer 2.5.** Ena izmed najbolj znanih zgoščevalnih funkcij je **SHA-256**. Njeno ime pomeni *Secure Hash Algorithm* (slov. varen zgoščevalni algoritem), 256 pa predstavlja dolžino vrnjene zgostitve. Pogostokrat to ime zasledimo pri nameščanju programske opreme, kjer služi kot avtentikator, da smo res naložili pravo stvar. Preverja namreč, da se zgostitvi naloženih in prenešenih datotek ujemajo.

Za primer si lahko ogledamo zgostitvi dveh podobnih nizov, *Ljubljana* in *Ljubljena*. Kljub podobnosti bomo videli, da sta rezultata popolnoma drugačna, kar si tudi želimo pri zgoščevalnih funkcijah.

SHA-256(Ljubljana) =  
b7f147d8b4a6703a951336654355071f9752385f85d0860379e99b484aee7a82

SHA-256(Ljubljena) =  
995d2d8ffb40e1838219e65dd2c665701ba34a90e11f7195a4b791838b6787fe

Za preglednost nismo prevajali besed v binarne nize, to bi storili npr. z ASCII ali UTF-8 tabelo. Prav tako smo rezultat napisali v šestnajstiškem sistemu, saj je tako krajši. Iz rezultatov pa nazorno vidimo učinek plazu, saj sta popolnoma drugačna.

◇

## 2.3 Kriptografija javnega ključa

Prve šifre, ki smo jih uporabljali ljudje, so bile *simetrične*, kar pomeni, da sta osebi za komunikacijo obe morali poznati skriven *ključ*, ki je definiral, kako je bila šifra ustvarjena.

**Primer 2.6** (Cezarjeva šifra). Ena najbolj znanih šifer, ki izvira iz Antičnega Rima, je *Cezarjeva šifra*. Njen ključ je število, ki je krajše od dolžine naše abecede, v Cezarjevem primeru je bilo to število 3. Šifra potem deluje tako, da vsako črko zamakne za toliko mest v abecedi, kolikor definira ključ. Npr. za slovensko abecedo, bi šifra zamaknila črke:

A	B	C	Č	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	R	S	Š	T	U	V	Z	Ž
Č	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	R	S	Š	T	U	V	Z	Ž	A	B	C

To bi izraz JAVNI KLJUČ preslikalo v MČARL NOMŽF. Cezarjeva šifra se imenuje tudi *zamična šifra*.

◇

V prejšnjem stoletju pa se je pojavila alternativa, imenovana *asimetrična kriptografija*, oz. *kriptografija javnega ključa*. Glavna prednost te je, da osebi za komunikacijo ne rabita poznati enakega skrivnega ključa, vendar ima vsak od njiju par ključev, ki ju imenujemo **javni ključ** (angl. *public key*) in **zasebni ključ** (angl. *secret/private key*) in označimo kot par (pk, sk). Vsaka oseba objavi svoj javni ključ in poskrbi, da nihče ne izve, kaj je njen zasebni ključ.

Šifriranje potem poteka tako, da pridobimo javni ključ od osebe, s katero želi komunicirati, ga uporabimo za šifriranje in objavimo šifrirano sporočilo. Lastnik ustreznega zasebnega ključa (vsakemu javnemu pripada natanko en zasebni) potem pridobi šifrirano sporočilo in ga z zasebnim ključem dešifrira. Kriptosistemi delujejo na način, da lahko sporočilo, šifrirano z javnim ključem dešifrira samo ustrezen zasebni ključ. Tako zagotovimo varno komunikacijo.

**Primer 2.7** (RSA). En prvih algoritmov javnega ključa, ki se uporablja še danes, je *RSA*. Njegova varnost izhaja iz (domnevne) težavnosti problema iskanja prafaktorjev velikega števila. Svoj ključ definiramo tako, da si izberemo dve (zelo veliki) praštevili  $p$  in  $q$ , ter ju zmnožimo v  $n = pq$ . Za primer vzemimo  $p = 23$  in  $q = 17$ .

$n$  je potem enak 391. Izbrati si moramo še eksponent  $e$ , vzemimo npr.  $e = 3$ . Naš javni ključ je potem par

$$(n, e) = (391, 3).$$

Postopek šifriranja poteka tako, da oseba, s katero komuniciramo, izbere sporočilo  $m$ , npr.  $m = 10$ , pridobi naš javni ključ, in izračuna šifro  $c$  kot

$$c = m^e \bmod n = 10^3 \bmod n = 218.$$

Dogovoriti se moramo še o zasebnem ključu. Za to bomo potrebovali eksponent za dešifriranje  $d$ , tako da bo veljalo

$$(m^e)^d \equiv 1 \pmod{\varphi(n)},$$

kjer  $\varphi$  označuje Eulerjevo funkcijo. Iščemo torej multiplikativni inverz eksponenta  $e$ , modulo  $\varphi(n)$ . V našem primeru je to  $d = 235$ . Zasebni ključ je potem

$$(p, q, d) = (23, 17, 235).$$

Iz zasebnega ključa torej lahko kadarkoli izračunamo javnega, saj enostavno zmnožimo  $p$  in  $q$  ter izračunamo inverz, v splošnem pa iz  $n$  učinkovito ne moremo pridobiti faktorjev  $p$  in  $q$ , kar nam zagotavlja varnost.

Ko prejmemo šifrirano sporočilo  $c$ , ga dešifriramo tako, da izračunamo

$$m = c^d \bmod n = 218^{235} \bmod 391 = 10.$$

◇

Poleg šifriranja, brez da bi si delili ključ, pa je kriptografija javnega ključa omogočila tudi *digitalne podpise*. Ti so uporabljeni vsakič, ko pošljemo transakcijo ali dostopamo do katerekoli spletne strani. Delujejo na podoben način, kot šifriranje z javnim ključem, le da najprej uporabimo zasebni ključ na sporočilu, prek javnega ključa pa preverjamo veljavnost podpisa. Velikokrat sta šifriranje in podpisovanje uporabljena hkrati, saj tako pošljemo šifrirano sporočilo, za katerega lahko oseba, s katero komuniciramo preveri, da je res prišlo od nas.

## 2.4 Digitalni podpisi

Ideja *kriptografskih* ali *digitalnih podpisov* (angl. *digital signatures*) je, da služijo kot izboljšava človeškega ročnega podpisa. Za razliko od ročnega podpisa, lahko z digitalnim dosežemo pravo identifikacijo posameznika, ki temelji na njegovem zasebnem ključu. Tako smo lahko za digitalno podpisan dokument prepričani, da ga je res podpisal lastnik točno določenega zasebnega ključa (če predpostavimo, da podpisnik ključa ni posredoval nikomur).

Podpis dokumenta poteka nekoliko drugače, kot pri ročnih podpisih. Pri ročnem podpisu ta postane del dokumenta, digitalni podpis pa je od njega ločen, vseeno pa nastane s pomočjo zgostitve podpisanega dokumenta, zato bo podpis za dva različna dokumenta vedno drugačen.

Ostane še vprašanje preverjanja avtentičnosti podpisa. Pri ročnem podpisu to lahko storimo prek primerjave z znanim, preverjeno avtentičnim podpisom. Ta

postopek je zamuden in nenatančen, veliko večino ročnih podpisov je moč ponarediti z nekaj prakse. Preverjanje digitalnega podpisa pa temelji na kriptografiji javnega ključa. Ker je podpis nastal s pomočjo podpisnikovega zasebnega ključa, lahko s pomočjo ujemajočega javnega ključa preverimo avtentičnost.

**Definicija 2.8. Digitalni ali kriptografski podpis**  $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{S}, \mathcal{V})$  je četvorka učinkovitih algoritmov  $\mathcal{P}$  za ustvarjanje parametrov podpisa,  $\mathcal{G}$  za ustvarjanje ključa,  $\mathcal{S}$  za podpisovanje in  $\mathcal{V}$  za preverjanje podpisa. Definirana je nad končno množico možnih sporočil  $\mathcal{M}$ , vrnjeni podpis pa leži v končni množici podpisov  $\Sigma$ .

- $\mathcal{P}$  je algoritem za ustvarjanje javnih parametrov podpisa. Definira grupo  $G$ , ki bo uporabljena pri podpisu. V praksi je ta korak izpuščen, sodelujoči pri podpisu uporabijo dobro poznane varne grupe.
- $\mathcal{G}$  je naključnostni algoritem za ustvarjanje para ključev  $(pk, sk)$ , ki ne prejme nobenega argumenta.  $pk$  je javni ključ za preverjanje avtentičnosti podpisa,  $sk$  pa je zasebni ključ za podpisovanje.
- $\mathcal{S}$  je naključnostni algoritem, ki za svoja argumenta prejme zasebni ključ  $sk$  in sporočilo  $m$ , vrne pa podpis  $\sigma$  sporočila  $m$  z zasebnim ključem  $sk$  oz.

$$\sigma = \mathcal{S}(sk, m).$$

- $\mathcal{V}$  je determinističen algoritem, ki preverja veljavnost podpisov. Za svoje argumente prejme javni ključ  $pk$ , sporočilo  $m$  in podpis  $\sigma$ , vrne *veljaven*, če je podpis veljaven in *neveljaven*, sicer. Velja torej

$$\mathcal{V}(pk, m, \sigma) = \begin{cases} \text{veljaven}, & \sigma = \mathcal{S}(sk, m), \\ \text{neveljaven}, & \sigma \neq \mathcal{S}(sk, m). \end{cases}$$

## 2.5 Interaktivni protokoli

**TODO: SI INTERAKTIVNI PROTOKOLI, IDENTIFIKACIJSKE IN AVTENTIKACIJSKE SCHEME, DOKAZI (ZNANJA) BREZ RAZKRITJA ZNANJA, FIAT-SHAMIRJEVA HEVRISTIKA ZASLUŽI OBRAVNAVO POSEBAJ?**

## 2.6 Varnost

Glavna stvar, ki nas zanima pri obravnavi kateregakoli kriptosistema, je njegova *varnost*. Ker je cilj digitalnih podpisov sogovorniku zagotoviti, da sporočilo res pošiljamo mi, nas glede varnosti najbolj skrbi, da bi *napadalec* lahko ponaredil naš podpis in nam s tem ukradel identiteto. Pri tem je lahko uspešen na več nivojih, ki so od najmanj do najbolj škodljivega:

- **Eksistencialno ponarejanje** (angl. *existential forgery*) pomeni, da obstaja sporočilo, za katerega napadalec lahko ustvari ponarejen podpis (torej podpis, pri katerem ni bil uporabljen zasebni ključ). To pomeni, da lahko najde vsaj en par  $(m, \sigma)$ , da velja  $\mathcal{V}(pk, m, \sigma) = \text{veljaven}$ .

- **Selektivno ponarejanje** (angl. *selective forgery*) pomeni, da lahko napadalec z nezanemarljivo verjetnostjo podpiše sporočilo, ki mu ga da nekdo drug in ga lastnik zasebnega ključa še ni podpisal. Torej, če napadalcu nekdo predloži sporočilo  $m$ , lahko z nezanemarljivo verjetnostjo najde podpis  $\sigma$ , da velja  $\mathcal{V}(\text{pk}, m, \sigma) = \text{veljaven}$ .
- **Popoln zlom** (angl. *total break*) pomeni, da napadalec ugotovi zasebni ključ napadenega in s tem pozna celoten podpisovalni algoritem. V imenu napadenega lahko podpiše katerokoli sporočilo.

Poleg zgoraj definiranih *ciljev napadalca*, lahko za vsak kriptosistem definiramo tudi *model napada*, in pa *tip varnosti*, ki ga zagotavlja shema. Varnost večine shem za digitalne podpise temelji na (domnevni) težavnosti določenih matematičnih problemov.

Stinson [12] definira naslednje modele napada:

- **Napad samo s ključem** je napad, kjer napadalec pozna samo javni ključ  $\text{pk}$ . Pozna torej algoritem za preverjanje podpisov  $\mathcal{V}$ .
- **Napad z znanimi sporočili** je napad, kjer napadalec poseduje seznam parov sporočil in njihovih podpisov  $(m_1, \sigma_1), (m_2, \sigma_2), \dots$ , kjer za vsak  $i$  velja  $\sigma_i = \mathcal{S}(\text{sk}, m_i)$ .
- **Napad z izbranimi sporočili** je napad, kjer napadalec podpisniku da seznam sporočil  $m_1, m_2, \dots$ , ta pa mu vrne seznam podpisov, da za vsak  $i$  velja  $\sigma_i = \mathcal{S}(\text{sk}, m_i)$ . Napadalčev cilj je iz predloženih parov izvleči zasebni ključ, ali pa na nek drug način podpisati še ne podpisano sporočilo.

Ostane nam še pregled varnosti, ki jo lahko pričakujemo oz. zahtevamo od sheme za podpisovanje. Takšna shema ne more biti *brezpogojno varna*, kar bi pomenilo, da je tudi z neomejenimi računskimi zmožnostmi nemogoče ponarediti podpis. To je zato, ker lahko napadalec sistematično preveri vse podpise za neko sporočilo s pomočjo algoritma  $\mathcal{V}$ , dokler ne najde pravega. Pričakujemo pa lahko *računsko varnost*, kar pomeni, da napadalec ne more najti ponaredka v doglednem času, če ima omejene računske sposobnosti, in/ali pa *dokazljivo varnost*, kar pomeni, da lahko varnost prevedemo na težavnost nekega matematičnega problema.

### 3 Schnorrov podpis

Eden izmed najenostavnejših, dokazano varnih podpisov je ravno *Schnorrov podpis* [2]. Kot vsi podpisi, tudi ta potrebuje tri algoritme: za generiranje ključa, podpisovanje sporočil in preverjanje podpisa.

Za generiranje para ključev, je potrebno najprej generirati dve praštevili  $p$  in  $q$ , tako da  $q$  deli  $p - 1$ . Potem je potrebno izbrati element  $g$  iz multiplikativne grupe celih števil modulo  $p$ , torej  $g \in \mathbb{Z}_p^*$ , ki je reda  $q$ . Za konec je potreben še izbor naključnega števila  $s \in [0, q - 1]$  in izračun

$$I = g^s \bmod p.$$

O pomenu tega izračuna bomo govorili kasneje, v poglavju o varnosti 3.2. Ključno pa je to, da je iz  $I$  zelo težko izračunati  $s$  (to je *problem diskretnega logaritma*). Ko vse to opravimo, smo uspešno ustvarili par ključev

$$\begin{aligned} \text{pk} &= (p, q, g, I), \\ \text{sk} &= s. \end{aligned}$$

Ideja v ozadju teh števil je, da  $p$  določa multiplikativno grupo števil  $\mathbb{Z}_p^*$ . Za podpis je potrebno najti podgrupo, katere red je praštevilo, je pa vseeno dovolj velika, da omogoča varnost. Red te podgrupe je  $q$ , določa pa jo generator  $g$ . Iz varnostnih razlogov mora  $p$  imeti vsaj 2048 bitov,  $q$  pa 224. Čeprav je grupa  $\mathbb{Z}_p^*$  zelo velika, je Schnorrov podpis vseeno učinkovit, saj večina izračunov poteka znotraj podgrupe, ki jo generira  $g$ .

Poleg parametrov  $p, q$  in  $g$ , morata podpisnik in preverjevalec določiti oz. imeti dostop do iste varne kriptografske zgoščevalne funkcije  $H : \{0, 1\}^* \rightarrow \mathbb{Z}_q$ . Za varno funkcijo smatramo vsako, ki zadošča lastnostim iz definicije 2.3. Velikost kodomene te funkcije definira velikost končnega podpisa. Iz zgostitve, dolge  $\log_2 q$  bitov, dobimo podpis, dolg  $2 \log_2 q$  bitov [12]. Tu se pokaže glavna prednost Schnorrovega podpisa. Vrača relativno kratke podpise, hkrati pa lahko izkoristi velikost grupe  $\mathbb{Z}_p^*$  za varnost.

Za podpis enega sporočila mora podpisnik generirati naključno število  $r \in [0, q - 1]$  in izračunati *zavezo*

$$X = g^r \bmod p.$$

Ta korak je podoben zadnjemu delu generiranja ključev, le da je skrivni del ključa  $s$  uporabljen večkrat (zasebni ključ se ne spreminja, razen če ustvarjamo nov par ključev),  $r$  pa mora biti generiran za vsako sporočilo znova (glej opombo 3.1).

Potem z uporabo funkcije  $H$  izračunamo *izziv*

$$e = H(X || m),$$

kjer  $||$  označuje stikanje nizov. Za konec je potrebno izračunati še

$$y = es + r \bmod q,$$

podpis sporočila  $m$  pa je potem par  $(X, y)$  oz.

$$S(s, m) = (X, y).$$

**Opomba 3.1.** V primeru, da je enak  $r$  uporabljen večkrat, podpisnik tvega, da lahko napadalec iz dveh njegovih podpisov izračuna njegov zasebni ključ  $s$ . Naj bosta  $(X_1, y_1)$  in  $(X_2, y_2)$  podpisa sporočil  $m_1$  in  $m_2$ . Potem velja

$$y_1 - y_2 \equiv e_1 s + r_1 - e_2 s - r_2 \equiv (e_1 - e_2)s + (r_1 - r_2) \pmod{q}.$$

V primeru, da sta  $r_1$  in  $r_2$  enaka, lahko napadalec z enostavnim izračunom inverza  $(e_1 - e_2)$  pridobi zasebni ključ  $s$  (za izračun  $e_1$  in  $e_2$  ima napadalec dovolj informacij, saj je izbrana zgoščevalna funkcija javna).

Izkaže se, da je lahko problematična že uporaba generatorja naključnih števil za pridobivanje  $r$ , ki ne vrača enakomerno porazdeljenih števil. Če napadalec dobi dovolj veliko količino sporočil in podpisov, lahko v tem primeru reši *problem skritega števila* in pridobi zasebni ključ [13].



Za preverjanje veljavnosti podpisa  $(X', y')$  sporočila  $m$ , je potrebno izračunati

$$e' = H(X' || m)$$

in preveriti, če velja

$$g^{y'} \stackrel{?}{=} X' \cdot I^{e'} \pmod{p}. \quad (3.1)$$

Da vidmo, zakaj ta enačba preverja veljavnost Schnorrovega podpisa, moramo uporabiti nekaj lastnosti cikličnih grup in modularne aritmetike.

**Trditev 3.2.** *Naj bosta  $p$  in  $q$  praštevili, kjer  $q$  deli  $p - 1$ , oz.  $q \mid p - 1$ . Naj bo  $g$  element grupe  $\mathbb{Z}_p^*$  reda  $q$ , kar pomeni, da je  $g^q \equiv 1 \pmod{p}$ . Naj bo  $k$  naravno število. Potem velja*

$$g^k \pmod{p} = g^{k \bmod q} \pmod{p}.$$

*Dokaz.* Po osnovnem izreku o deljenju naravnih števil, lahko  $k$  na en sam način zapišemo kot  $k = nq + r$ , kjer velja  $n \in \mathbb{N}, r < q$ .

Leva stran enačbe se potem prepíše

$$\begin{aligned} g^k \pmod{p} &= g^{nq+r} \pmod{p} = \\ &= (g^q)^n g^r \pmod{p} = \\ &= 1^n g^r \pmod{p} = \\ &= g^r \pmod{p}. \end{aligned}$$

Desna stran pa se prepíše kot

$$\begin{aligned} g^{k \bmod q} \pmod{p} &= g^{(nq+r) \bmod q} \pmod{p} = \\ &= g^r \pmod{p}. \end{aligned}$$

Ker sta obe strani enaki, je trditev dokazana. □

Po trditvi 3.2 lahko levo stran enačbe za preverjanje Schnorrovega podpisa (3.1) prepíšemo

$$\begin{aligned} g^{y'} \pmod{p} &= g^{es+r \bmod q} \pmod{p} = \\ &= g^{es+r} \pmod{p}. \end{aligned}$$

Za pretvorbo desne strani moramo uporabiti nekaj lastnosti modularne aritmetike.

**Trditev 3.3.** *Naj bodo  $a, b$  in  $p$  naravna števila. Potem za modularno množenje in potenciranje velja*

$$a \cdot b \pmod{p} = (a \pmod{p}) \cdot (b \pmod{p}) \pmod{p}, \quad (3.2)$$

$$a^b \pmod{p} = (a \pmod{p})^b \pmod{p}. \quad (3.3)$$

*Dokaz.*  $a$  in  $b$  lahko po osnovnem izreku o deljenju naravnih števil na en sam način zapišemo kot

$$\begin{aligned} a &= n_a p + r_a, \\ b &= n_b p + r_b, \end{aligned}$$

kjer velja  $r_a < p$ .

(3.2): Levo stran preoblikujemo

$$\begin{aligned} a \cdot b \bmod p &= (n_a p + r_a) \cdot (n_b p + r_b) \bmod p = \\ &= (n_a n_b p^2 + n_a p r_b + n_b p r_a + r_a r_b) \bmod p = \\ &= r_a r_b \bmod p, \end{aligned}$$

desno pa

$$\begin{aligned} (a \bmod p) \cdot (b \bmod p) \bmod p &= (n_a p + r_a \bmod p) \cdot (n_b p + r_b \bmod p) \bmod p = \\ &= r_a r_b \bmod p. \end{aligned}$$

Ker se strani ujemata, je trditev dokazana.

(3.3): Ker je potenciranje samo zaporedna uporaba množenj, lahko trditev pokažemo z indukcijo na  $b$  in enačbo (3.2):

- $b = 2$ : Primer, ko je  $b = 1$  (ali  $b = 0$ ) je trivialen, če pa je  $b = 2$ , pa se problem reducira v

$$a \cdot a \bmod p \stackrel{?}{=} (a \bmod p) \cdot (a \bmod p) \bmod p,$$

kar drži neposredno po enačbi (3.2).

- $n \rightarrow n + 1$ : Predpostavimo, da enačba (3.3) drži za  $b = n$  (I.P.). Ko je  $b = n + 1$ , dobimo

$$\begin{aligned} a^{n+1} \bmod p &= a^n a \bmod p = \\ &\stackrel{(3.2)}{=} (a^n \bmod p)(a \bmod p) \bmod p = \\ &\stackrel{\text{I.P.}}{=} (a \bmod p)^n (a \bmod p) \bmod p = \\ &= (a \bmod p)^{n+1} \bmod p. \end{aligned}$$

S tem je indukcija končana in trditev dokazana. □

Desno stran enačbe (3.1) torej lahko prepisemo

$$\begin{aligned} X' \cdot I^{e'} \bmod p &= g^r \bmod p \cdot (g^s \bmod p)^e \bmod p = \\ &\stackrel{(3.3)}{=} (g^r \bmod p) \cdot (g^{es} \bmod p) \bmod p = \\ &\stackrel{(3.2)}{=} g^{es+r} \bmod p, \end{aligned}$$

kjer smo pri prehodu v drugo vrstico uporabili lastnost (3.3), pri prehodu v tretjo pa lastnost (3.2). Ker se obe strani ujemata za veljavne podpisne vrednosti, ta enačba res preverja Schnorrov podpis.

### 3.1 Schnorrov podpis v splošnih grupah

Čeprav je Schnorr originalno [2] opisal podpis v multiplikativnih grupah naravnih števil modulo  $p$   $\mathbb{Z}_p^*$ , pri njem zares ni nič, kar bi specifično delalo samo v teh grupah. Zares je Schnorrov podpis mogoče posplošiti na katerekoli končne grupe, kjer obstaja učinkovit algoritem za množenje in je problem diskretnega logaritma težek.

Naj bo grupa  $G$  taka končna grupa reda  $p$ . V njej si izberemo element  $g$  reda  $q$ , kjer mora veljati, da je  $q$  dovolj velik (velikost je odvisna od varnostnega parametra). Pri osnovni verziji je tu moralo veljati, da  $q$  deli  $p - 1$ , v splošnem pa sta lahko  $p$  in  $q$  tudi enaka. Efektivno grupo, v kateri računamo določa  $q$ , tako da se v tem primeru navadno predpostavi, da je red grupe  $G$  kar  $q$ . Za generiranje ključa si potem izberemo naključno število  $s \in [0, q - 1]$  in izračunamo

$$I = g^s$$

z uporabo učinkovitega algoritma za množenje. Javni ključ  $I$  je torej element grupe  $G$ , zasebni ključ  $s$  pa je element  $\mathbb{Z}_q$ .

Izračun podpisa poteka podobno, kot pri osnovni verziji. Najprej si izberemo naključno število  $r \in [0, q - 1]$  in izračunamo

$$X = g^r.$$

Potem z uporabo zgoščevalne funkcije  $H : \{0, 1\}^* \rightarrow \mathbb{Z}_q$  izračunamo  $e = H(X||m)$ , drugi del podpisa pa izračunamo kot

$$y = es + r.$$

Preverjanje podpisa poteka praktično enako kot prej, ob predloženem podpisu  $(X', y')$  sporočila  $m$  je potrebno izračunati  $e = H(X'||m)$  in preveriti, če velja

$$g^{y'} \stackrel{?}{=} X' \cdot I^{e'}.$$

Schnorrov podpis je tako precej splošno orodje, v zadnjem času je precej popularna uporaba Schnorrovih podpisov v *eliptičnih grupah*. Te omogočajo izbiro manjših parametrov, kar naredi podpis bolj časovno in prostorsko učinkovit.

### 3.2 Varnost Schnorrovega podpisa

Najbolj očitna nevarnost kateregakoli kriptosistema z javnimi ključi bi bila možnost izračuna zasebnega ključa iz javnega. Slednji je dostopen vsem, zato bi lahko kdorkoli pridobil zasebni ključ, kar popolnoma izniči pomen šifriranja ali podpisovanja.

Pri Schnorrovem podpisu je javni ključ poleg parametrov uporabljene grupe  $p, q$  in  $g$ , še število  $I$ , izračunano kot

$$I = g^s \bmod p.$$

Za izračun je torej neposredno uporabljen zasebni ključ  $s$ . Zaradi notacije bi morda kdo hitro pomislil, da lahko zgornjo enačbo obrnemo in  $s$  izračunamo kot

$$s = \log_g(I) \bmod p.$$

Taki izračuni v grupah  $\mathbb{Z}_p^*$  žal (ali pa na srečo) niso tako enostavni, prišli smo do koncepta *diskretnega logaritma*. V diskretnih grupah, kot je  $\mathbb{Z}_p^*$ , ni koncepta urejenosti, kar smo videli tudi v primeru 2.1, zato nam »približki« logaritma ne pomagajo čisto nič. Za izračun takih logaritmov se moramo zanesti na drugačne metode, kot za izračun navadnih.

**Definicija 3.4** (Problem diskretnega logaritma [1]). Naj bo  $G$  ciklična grupa reda  $q$ , ki jo generira element  $g$ . Naj bo  $h$  naključni element iz grupe  $G$ . Naj velja  $g^x = h$ .  $x$  Potem imenujemo **Diskretni logaritem (DL)**.

Zamislimo si igro, kjer izzivalec in nasprotnik kot vhod prejmeta opis grupe  $G$  (torej  $q$  in  $g \in G$ ). Izzivalec potem izbere naključen element  $\alpha \in G$  in izračuna  $h = g^\alpha$ .  $h$  pošlje nasprotniku, le-ta pa mora odgovoriti nazaj z elementom  $\alpha$ . To igro imenujemo **problem diskretnega logaritma (PDL)** (angl. *discrete logarithm problem*).

Pri tej igri nas zanima verjetnost pravilnega odgovora nasprotnika, ki je računsko omejen. S tem mislimo, da ima na voljo polinomsko mnogo časa (glede na velikost grupe). Če je grupa  $G$  takšna, da je verjetnost zanemarljiva, pravimo, da za grupo  $G$  drži *predpostavka diskretnega logaritma*.

Izkaže se, da za grupe, kot je  $\mathbb{Z}_p^*$ , ne poznamo učinkovitega (subeksponentnega) algoritma za izračun diskretnega logaritma, torej v njih drži predpostavka DL. To torej pomeni, da ob pridobljenem javnem ključu za Schnorrov podpis, napadalec ne more učinkovito izračunati zasebnega.

### 3.2.1 Dokaz varnosti Schnorrovega podpisa

**TODO: DOKAZ VARNOSTI: NAREDIM PREK IDENTIFIKACIJSKE SCHEME + FIAT SHAMIR ALI PREK FORKING LEMME? SE DA DOKAZATI V STANDARDNEM MODELU?**

## 4 Pregled skupinskih podpisov

Ko pridemo do podpisovanja skupin, si lahko zamislimo več različnih rešitev. Micali v [11] definira dve lastnosti oz. spektra, ki jim lahko zadošča podpis skupine:

- **Prilagodljivost** (angl. *flexibility*): Popolnoma prilagodljiv podpis skupine je takšen, ki ga lahko proizvede katerakoli podskupina originalne skupine podpisnikov. Ko je podpis preverjen, se mora tisti, ki ga je preveril, odločiti, če je ustrezen del skupine podal svoj podpis. Popolnoma neprilagodljiv podpis bi bil takšen, ki ga lahko v imenu skupine ustvari katerikoli član.
- **Odgovornost** (angl. *accountability*): Če lahko iz podpisa ugotovimo, kateri člani so sodelovali pri ustvarjanju, nam podpis omogoča odgovornost. Ta lastnost je lahko zaželeno, če se želimo prepričati, ali je ustrezen del skupine sodeloval pri podpisu (npr. ali je pri podpisovanju sodeloval generalni direktor podjetja). V drugih primerih pa si želimo anonimnost posameznih članov (npr. če bi generiranje podpisa predstavljalo nekakšno tajno glasovanje, bi želeli vedeti samo, koliko članov je sodelovalo).

V nadaljevanju bomo skupino potencialnih podpisnikov (torej podpisnikov, ki imajo možnost sodelovati pri podpisovanju) označili z  $G = P_1, \dots, P_L$ , kjer ima skupina  $L$  članov. Dejanski podpis pa bo generiral samo del skupine  $S \subseteq G$ .

**TODO: JE SMISELNO DATI TU FORMALNE DEFINICIJE VSEH VRST PODPISOV?**

## 4.1 Skupinski podpisi

**Skupinski podpis** (angl. *group signature*) v imenu celotne skupine  $G$  ustvari en anonimen član. To torej pomeni, da je podpis popolnoma neprilagodljiv, saj ni možno prisiliti skupine, da bi podpis ustvaril več kot en član. Prav tako v splošnem noben član, niti tisti, ki preverja podpis, ne more ugotoviti, kdo je podpis ustvaril. Da skupinski podpisi omogočijo vsaj delno odgovornost, skupina določi *vodjo skupine*, ki ima možnost razkriti identiteto podpisnika, če pride do težav. V tem primeru seveda vodja predstavlja atraktivno tarčo za napad. Skupinske podpise sta si zamislila Chaum in van Heyst [4].

**Primer 4.1.** Skupinski podpisi so zelo uporabni v primerih, ko moramo vedeti samo, da neka oseba pripada skupini. Primer je recimo dostop do varovanih območij, kjer je neprimerno, da bi natančno sledili vsem posameznikom, vseeno pa mora biti dostop omejen samo zaposlenim.  $\diamond$

## 4.2 Pragovni podpisi

Če želimo zagotoviti, da se s podpisom strinja zadosten delež skupine, lahko uporabimo **pragovni podpis** (angl. *threshold signature*). Ta nam omogoča določeno mero prilagodljivosti, saj lahko katerikoli zadosten delež skupine ustvari podpis. Še vedno je nemogoče upoštevati morebitno hierarhično strukturo skupine. Pragovni podpisi omogočajo tudi popolno anonimnost podpisnikov, in s tem torej nično odgovornost.

Večina pragovnih podpisov temelji na interpolaciji polinoma  $(l - 1)$ -stopnje z  $l$  točkami. Podpis je potem ustvarjen s pomočjo vrednosti polinoma v neki točki. Po interpolaciji se informacija o tem, točno katere točke smo uporabili, izgubi. Take podpise imenujemo tudi  *$l$ -od- $L$  sheme*.

**Primer 4.2.** Denimo, da ima banka sef, v katerem hrani vse pomembne dokumente in denar, ki ga hrani. Zaradi izjemne pomembnosti sefa si ne želimo, da bi ga lahko odprla katerakoli posamezna oseba. Če osebje banke uporabi pragovni podpis, lahko zagotovi, da je pri odpiranju sefa vedno prisotnih več ljudi, vseeno katerih. Vsak zaposleni dobi točko interpolacije, ko se jih zbere dovolj, lahko skupaj ugotovijo vrednost polinoma v vnaprej določeni točki in odklenejo sef.  $\diamond$

## 4.3 Večstranski podpisi

Za nekatere uporabe podpisov, bi si od njih želeli podobne lastnosti, kot jih ima večstranski ročen podpis. Pri njem lahko hitro preberemo podpisnike, torej imamo popolno prilagodljivost. Vidimo lahko seznam podpisnikov, torej lahko presodimo, če so med njimi tisti, ki smo jih želeli. Prav tako podpisniki nosijo popolno odgovornost, saj na papirju piše njihovo ime.

Podoben učinek bi z digitalnimi podpisi lahko dosegli, če bi namesto enega podpisa skupine, od članov zbrali individualne podpise in jih nanizali v seznam. Dobili bi torej digitalni podpis skupine, ki ponuja popolno prilagodljivost in odgovornost. Težava je samo, da je dolžina podpisa (in s tem čas preverjanja) proporcionalna številu podpisnikov. **Večstranski podpisi** (angl. *multisignatures*) ohranijo lastnosti seznama podpisov, rezultat sheme je pa en sam podpis, ki je enako dolg ne glede na število podpisnikov, prav tako je od števila neodvisen čas preverjanja. Tega s seznamom podpisov ni mogoče doseči, saj tako dolžina podpisa, kot čas preverjanja podpisa raste linearno s številom podpisnikov (vsak doda en podpis seznamu, ki ga je potrebno preveriti). Večstranski podpisi so torej odlična posplošitev ročnih podpisov skupin, ki vseeno ohrani učinkovito preverjanje.

**Primer 4.3.** Recimo, da imamo nek organ, ki izdaja certifikate avtentičnosti uporabnikov (npr. potrjuje avtentičnost javnih ključev). Za večjo robustnost in varnost, je lahko ta organ razporejen na več strežnikov. Tako preprečimo razpad sistema v primeru izpada enega strežnika. Zato je torej tudi pomembno, da certifikacijo uporabnika potrdi nekaj strežnikov, ne pa nujno vsi. Tu lahko torej neka podskupina vseh strežnikov organa skupaj izda en večstranski podpis, ki potrjuje avtentičnost uporabnika.  $\diamond$

## 4.4 Agregirani podpisi

Rezultat agregiranega podpisa je zelo podoben večstranskemu. Poleg standardnih algoritmov pri digitalnih podpisih za ustvarjanje ključev  $\mathcal{G}$ , podpisovanje  $\mathcal{S}$  in preverjanje  $\mathcal{V}$ , imajo agregirani podpisi (angl. *aggregate signatures*) še dodaten algoritem za združevanje podpisov  $\mathcal{C}$ . Ta algoritem prejme seznam trojic javnih ključev, sporočil in podpisov, vrne pa en sam podpis. Od večstranskih podpisov se razlikuje po tem, da sporočila niso nujno vsa enaka [14].

**Primer 4.4.** Recimo, da avtentičnost ključev posameznih podpisnikov preverja niz centrov za certificiranje podpisov, kjer vsak naslednji center jamči za avtentičnost centra pod njem. Prvi center zajamči avtentičnost našega ključa, naslednji zajamči avtentičnost centra in tako naprej. Ko bi želel nekdo prejeti naš certificiran javni ključ, bi moral preveriti veljavnost podpisov vseh centrov, s pomočjo agregiranih podpisov bi to lahko storil z enim samim preverjanjem.  $\diamond$

## 5 Večstranski Schnorrov podpis

Micali et al. [11] so prvi definirali formalni model za večstranske podpise in podali formalni dokaz varnosti za podpisno shemo v tem modelu. Zamislili so si večstranski podpis, ki temelji na Schnorrovem in ga poimenovali **večstranski podpis podskupine z odgovornostjo** (angl. *Accountable-Subgroup Multisignature (ASM)*). V tem razdelku predstavimo njihov model, podpis in argument varnosti.

### 5.1 Večstranski podpis podskupine z odgovornostjo

Kljub daljšemu imenu, večstranski podpis podskupine z odgovornostjo le bolj formalno definira idejo večstranskega podpisa, predstavljeno v razdelku 4.3. Ideja oz.

cilj večstranskega podpisa je torej, da lahko katerakoli podskupina podpisnikov  $S$ , neke skupine  $G$ , brez potrebe po **centru zaupanja** (angl. *trusted third party (TTP)*) ustvari podpis. Generiranje ključev je torej popolnoma v domeni skupine  $G$ . Podpis, ki ga ustvari  $S$  predstavlja splošno preverljiv dokaz strukture  $S$  in dejstva, da vsak član skupine stoji za (torej podpisuje) sporočilom  $m$ .

**Definicija 5.1** (Večstranski podpis (podskupine z odgovornostjo)). Skupina  $G$  je sestavljena iz  $L$  podpisnikov, torej

$$G = P_1, P_2, \dots, P_L.$$

Podpisnik predstavlja verjetnostni Turingov stroj, omejen s polinomskim časom. Vsak podpisnik pozna svojo identifikacijsko številko (eno od števil  $1, \dots, L$ ) in pa *varnostni parameter*  $k$ , ki je enak za vse podpisnike.

Kot vsi digitalni podpisi 2.8, ima tudi ta tri glavne komponente:

- $\mathcal{G}$  je algoritem za ustvarjanje ključev. Za neko skupino podpisnikov  $G$  je pognan samo enkrat, na začetku sodelovanja. Vsak podpisnik  $P_i$  dobi kot vhod seznam vseh podpisnikov v  $G$  in požene  $\mathcal{G}$ , ki vrne par ključev  $(pk_i, sk_i)$ . Zapišemo lahko torej

$$\mathcal{G}_i(L) = (pk_i, sk_i),$$

kjer smo brez škode za splošnost predpostavili, da velikost skupine  $L$  enolično opiše skupino  $G$ .

- $\mathcal{S}$  je algoritem za podpisovanje. Pognan je vsakič, ko neka podskupina  $S$  želi ustvariti podpis. Vsak podpisnik kot vhod prejme seznam vseh podpisnikov  $S$ , njihove javne ključe  $pk_j$ , kjer  $j$  teče po identifikacijskih številkah vseh članov  $S$ , sporočilo  $m$  in lasten zasebni ključ  $sk_i$ . Algoritem  $\mathcal{S}$  je porazdeljen protokol, pri izvedbi morajo sodelovati vsi člani  $S$ . Po uspešni izvedbi lahko en od članov objavi podpis  $\sigma$ .

**TODO: RAZMISLI, KAKO BI NA PAMETEN NAČIN NAPISAL TO Z ENAČBO, ENAKO ZA PREVERJANJE**

- $\mathcal{V}$  je algoritem za preverjanje veljavnosti podpisa. Požene ga tisti, ki želi preveriti veljavnost večstranskega podpisa. Ni nujno, da je to eden izmed podpisnikov iz  $G$ . Kot vhod algoritem dobi seznam podpisnikov  $S$ , pripadajoče javne ključe, sporočilo  $m$  in morebiten podpis  $\sigma$ . Algoritem potem vrne

$$\mathcal{V}((id_1, \dots, id_l), (pk_{id_1}, \dots, pk_{id_l}), m, \sigma) = \begin{cases} \text{veljaven}, & \sigma = \text{podpis}(S, m), \\ \text{neveljaven}, & \sigma \neq \text{podpis}(S, m). \end{cases}$$

### 5.1.1 Robustnost, varnost in napadalec

Definiran večstranski podpis ni robusten. To pomeni, da v primeru izpada enega od podpisnikov  $P_i$ , ki je del podskupine  $S$ , ta ne more ustvariti večstranskega podpisa. Podpis še vedno lahko ustvari  $S \setminus \{P_i\}$ . To dejstvo nam dovoli definicijo napadalca, ki ima zelo velik vpliv na celoten sistem, saj ne iščemo robustnosti.

**Definicija 5.2** (Napadalec pri ASM). Napadalec v modelu večstranskih podpisov podskupine z odgovornostjo ima naslednje zmožnosti:

- Ima popoln nadzor nad vsemi komunikacijskimi kanali med člani skupine  $G$ . Lahko bere, spreminja in preprečuje dostavo vseh sporočil. Prav tako lahko v imenu kateregakoli podpisnika pošlje sporočilo.
- Kadarkoli lahko *pokvari* kateregakoli podpisnika. Ko je podpisnik pokvarjen, napadalec izve njegovo celotno notranje stanje, vključno z vsemi skrivnostmi.
- Nadzira lahko vhod algoritma za ustvarjanje ključev  $\mathcal{G}$  za vse podpisnike. Vsakemu lahko poda drugačno skupino  $G$ .
- Od kateregakoli nepokvarjenega podpisnika lahko kadarkoli zahteva podpis nekega sporočila skupaj s podskupino, ki jo določi napadalec. To je *napad z izbranim sporočilom in podskupino*.

Zaradi obširnih zmožnosti napadalca, ta lahko vedno prepreči podpis sporočila. Naš cilj, kar se tiče varnosti, je, da preprečimo eksistencialno ponarejanje podpisa. Želimo torej, da napadalec ni zmožen ponarediti podpisa za katerokoli sporočilo v imenu katerekoli podskupine.

**Definicija 5.3** (Varnost pri ASM). Naj bo  $k$  varnostni parameter (ki si ga delijo vsi podpisniki). Naj bo  $c > 0$  poljubna konstanta. Naj bo  $F$  napadalec, čigar računska moč je omejena s polinomskim časom v parametru  $k$ . Naj bo  $p$  verjetnost, da  $F$  vrne trojico  $(\sigma, m, S)$ , za katero velja:

- $\sigma$  je veljaven večstranski podpis sporočila  $m$  s strani skupine  $S$ .
- Obstaja nepokvarjen podpisnik  $P$  iz skupine  $S$ , od katerega  $F$  ni zahteval podpisa sporočila  $m$  s strani skupine  $S$ .

Shemi za večstranske podpise podskupine z odgovornostjo bomo rekli, da je **varna**, če velja

$$p < k^{-c}.$$

Kot ponavadi pri digitalnih podpisih, tudi tu predpostavimo, da tisti, ki preverja veljavnost podpisa, lahko vedno pridobi prave javne ključne podpisanikov iz  $S$ . Zaradi močnega napadalca pri ASM, lahko tudi pridemo v situacijo, ko podpisnik  $P_1$  ne ve, kdo je zares podpisnik  $P_2$ . Tukaj predpostavimo, da preverjevalec natančno ve, kdo je  $P_2$  v resnici, in lahko pridobi ustrezen javni ključ.

### 5.1.2 Model slučajnega oraklja

Ko obravnavamo varnost kriptosistemov, ponavadi pogovarjamo o *standardnemu modelu* kriptografije. Ta model ima samo eno predpostavko: napadalec je omejen samo s časom in količino računske moči, ki mu je na voljo (tu je ponavadi predpostavljeno, da ima napadalec realno računsko moč). Občasno se znajdemo v primeru, ko moramo za dokaz varnosti sprejeti dodatne predpostavke. V tem primeru govorimo o alternativnih modelih kriptografije.



Ko imamo opravka z zgoščevalnimi funkcijami, je pogosto potrebno sprejeti dodatne predpostavke, da lahko pokažemo varnost. Specifično, ko imamo opravka z zgoščevalno funkcijo  $H : A \rightarrow B$  predpostavimo, da je bila ta funkcija izbrana naključno med vsemi funkcijami, ki slikajo  $A$  v  $B$ . To idealizirano verzijo zgoščevalne funkcije imenujemo **slučajni orakelj** (angl. *random oracle*). Za poljuben vhod torej vedno vrne enak odgovor, vendar je bil ta odgovor popolnoma naključno izbran.

**Model slučajnega oraklja** (angl. *random oracle model*) je model kriptografije, kjer poleg standardnih predpostavk, vsako uporabo zgoščevalne funkcije nadomestimo s slučajnim orakljem [1]. Predpostavimo, da imajo do oraklja dostop vsi vpleteni v kriptosistem, vključno z napadalcem.

Varnostni dokazi, ki temeljijo na uporabi takih slučajnih orakljev, vseeno pričajo o varnosti shem, ki namesto orakljev uporabljajo zgoščevalne funkcije, vsaj dokler je uporabljena zgoščevalna funkcija varna (npr. zanjo nihče še ni našel trčenja).

**Definicija 5.4** (Slučajni orakelj pri ASM). Varnostna obravnava shem za večstranske podpise podskupine z odgovornostjo zahteva model slučajnega oraklja. Zato predpostavimo, da je  $k_2$  še en varnostni parameter. Vsi člani skupine  $G$  in napadalec imajo dostop do slučajnega oraklja  $H : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^{k_2}$ , ki je naključno izbrana funkcija med vsemi funkcijami, ki slikajo med  $\{0, 1\}^*$  in  $\{0, 1\}^{k_2}$ .

## 5.2 Konstrukcija večstranskega Schnorrovega podpisa

V nadaljevanju bomo konstruirali večstransko verzijo Schnorrovega podpisa, predstavljenega v poglavju 3. Končna shema spada med večstranske podpise podskupin z odgovornostjo. Ideja konstrukcije je, da začnemo z naivno verzijo, nato pa rešimo njene probleme, kar nas privede do formalne definicije v razdelku 5.3 in dokaza varnosti v razdelku 5.4.

### 5.2.1 Naivna verzija

Vsi podpisniki v skupini  $G$  poznajo skupne parametre  $p, q$  in  $g$ . Vsak podpisnik  $P_i$  si neodvisno in naključno izbere skrivno število  $s_i \in [0, \dots, q-1]$  in izračuna

$$I_i = g^{s_i} \bmod p.$$

Tako vsak podpisnik ustvari svoj par ključev

$$\begin{aligned} \text{pk}_i &= (p, q, g, I_i), \\ \text{sk}_i &= s_i. \end{aligned}$$

Poljubna podskupina  $S = \{P_{id_1}, \dots, P_{id_l}\}$  skupine  $G$  podpiše sporočilo  $m$  s tremi krogi komunikacije:

1. Vsak podpisnik  $P_i$  iz podskupine  $S$  si izbere naključen element  $r_i \in [0, q-1]$  in izračuna zavezo

$$X_i = g^{r_i} \bmod p.$$

Podpisniki potem pošljejo svoje zaveze izbranemu podpisniku  $D$ .

2.  $D$  izračuna *skupno zavezo*

$$\tilde{X} = (X_{id_1} \cdot X_{id_2} \cdot \dots \cdot X_{id_l}) \bmod p.$$

in jo pošlje vsem podpisnikom.

3. Vsak podpisnik s pomočjo slučajnega oraklja izračuna izziv

$$e = H(\tilde{X} || m || S)$$

in svoje *individualne podpise*

$$y_{id_i} = es_{id_i} + r_{id_i} \bmod q.$$

Individualni podpisi so potem spet poslani podpisniku  $D$ , ta pa sedaj lahko izračuna

$$\tilde{y} = (y_{id_1} + y_{id_2} + \dots + y_{id_l}) \bmod q$$

in vrne končen večstranski podpis

$$\sigma = (\tilde{X}, \tilde{y}).$$

Preverjanje veljavnosti podpisa je podobno kot pri navadnemu Schnorrovemu podpisu. Da preverimo podpis  $(\tilde{X}', \tilde{y}')$  sporočila  $m$  najprej izračunamo

$$e' = H(\tilde{X}' || m || S)$$

in preverimo, če velja

$$g^{\tilde{y}'} \stackrel{?}{=} \tilde{X}' \cdot \left( \prod_{P_i \in S} I_i \right)^{e'} \pmod{p}.$$

### 5.2.2 Generiranje parametrov: Predpostavka DL

Micali et al. [11] so izpostavili in rešili več problemov z zgornjo naivno idejo. Prvi problem se pojavi pri generiranju skupnih parametrov javnega ključa  $p, q$  in  $g$ . Ker si podpisniki delijo samo varnostni parameter  $k$  in pa slučajnega oraklja  $H$ , morajo za parametre uporabiti  $H$  na vneprej dogovorjen način. Napadalec bo tako poznal točen postopek ustvarjanja skupnih parametrov, kar mu potencialno da prednost. Izkaže se, da lahko s primerno uporabo  $H$  poskrbimo, da to ne predstavlja nevarnosti, in generiranje parametrov dodamo k predpostavki diskretnega logaritma za večstranske podpise.

**Definicija 5.5** (Predpostavka diskretnega logaritma pri ASM). Predpostavka o varnosti je poleg standardnega PDL tu razširjena še z algoritmom za pridobivanje deljenih parametrov in jo lahko zapišemo:

- *Parametri*: Verjetnostni algoritem  $Gen(k)$  1 teče v pričakovanem polinomskem času:
- *Težavnost PDL*: Naj bo  $A$  algoritem, ki za svoje parametre sprejme

---

**Algoritem 1** Algoritem  $Gen(k)$  za generiranje praštevil.

---

```

 $q \leftarrow$  naključno izbran  $k$ -bitni niz
 $p \leftarrow 2q + 1$ 
while  $q$  ni praštevilo in  $p$  ni praštevilo do
     $q \leftarrow$  naključno izbran  $k$ -bitni niz
     $p \leftarrow 2q + 1$ 
end while
return  $p, q$ 

```

---

- praštevili  $p$  in  $q$ , da velja  $p = 2q + 1$  in  $q$  je dolg  $k$ -bitov,
- naključni element  $g \in \mathbb{Z}_p^*$  reda  $q$ ,
- naključni element  $I$  iz podgrupe  $\mathbb{Z}_p^*$ , ki jo generira  $g$ .

Naj  $p_k^A$  označuje verjetnost, da  $A$  vrne  $s \in [0, q - 1]$ , tako da velja

$$I \equiv g^s \pmod{p}.$$

Potem za vsak verjetnostni algoritem  $A$ , ki teče v polinomskem času, za vsako konstanto  $c > 0$  in za vsak dovolj velik  $k$  velja

$$p_k^A < k^{-c}.$$

Pri obravnavi večstranskega Schnorrovega podpisa bomo torej predpostavili, da držita obe točki iz definicije 5.5. Predpostavka o težavnosti diskretnega logaritma je za sheme, ki temeljijo na njem standardna, prva predpostavka pa nam zagotavlja učinkovit in standarden način za generiranje skupnih parametrov, ki napadalcu ne izda dodatnih informacij.

### 5.2.3 Napad na generiranje ključev: Dokazi brez razkritja znanja

Naslednja težava nastopi v obliki napada v fazi generiranja ključev. Ker napadalec nadzoruje vso komunikacijo, si lahko privošči vstopiti v podpisovanje kot zadnji izmed podpisnikov  $P_L$ , in lahko zadnji generira svoj par ključev. Če si torej izbere naključen  $s \in [0, q - 1]$ , lahko izračuna svoj javni ključ kot

$$I_L = \left( \prod_{i=1}^{L-1} I_i \right)^{-1} \cdot g^s \pmod{p}.$$

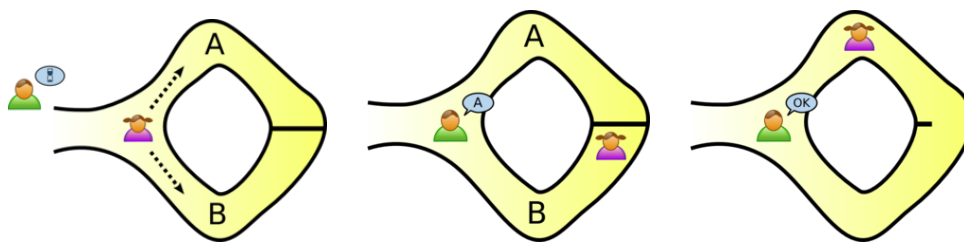
To mu omogoča, da se podpisuje v imenu celotne podskupine  $S$ , saj bo pri množenju v enačbi za preverjanje tako izničil vse ostale javne ključe.

Za rešitev tega problema potrebujemo nekaj novih kriptografskih orodij. Prvo izmed njih so **dokazi brez razkritja znanja** (angl. *zero-knowledge proofs*). Za intuicijo si najprej pogledjmo primer.

**Primer 5.6** (Jama Ali Babe [3]). V zgodbi o Jami Ali Babe nastopata Ana in Bojan. Živita ob Jami Ali Babe, ki je v obliki prstana. Pri vhodu sta na levo in desno vidni dve poti, ki se kasneje združita, vendar prehod preprečujejo vrata, ki

jih lahko odpre samo skrivno geslo. Ana je ugotovila, kaj to geslo je, vendar ga ne želi povedati Bojanu, vseeno pa ga želi prepričati, da geslo pozna.

Da Ana Bojanu dokaže svoje znanje, si zamisli igro. Najprej bo ona odšla v jamo po eni izmed poti. Potem bo v jamo vstopil Bojan in povedal, če želi da se Ana vrne po levi ali desni poti. Če se bo Ana dovolj velikokrat vrnila po poti, ki jo je povedal Bojan (in nikoli po napačni), bo lahko z veliko verjetnostjo prepričan, da Ana res pozna geslo. Primer enega kroga protokola je prikazan na sliki 2. ◇



Slika 2: Igra Ane in Bojana v jami Ali Babe. Vir slike Wikipedia [16].

Dokazi brez razkritja znanja so torej orodje, s katerim lahko pokažemo, da nekaj vemo, brez da bi izdali skrivnost. V osnovi so to interaktivni protokoli med *dokazovalcem* in *preverjevalcem*. Dokazovalec želi preverjevalca prepričati, da pozna skrivnost, brez da bi mu jo izdal. Taki protokoli sodijo med **interaktivne dokaze**, kar pomeni, da zadoščajo dvema lastnostima:

- **Kompletnost** (angl. *completeness*): Če trditev, ki se dokazuje, drži, potem bo preverjevalec sprejel dokaz dokazovalca (če noben od njiju ne bo goljufal).
- **Zadostnost** (angl. *soundness*): Če trditev, ki se dokazuje, ne drži, potem noben dokazovalec (tudi tak, ki goljufa) ne more predložiti dokaza, ki bi ga preverjevalec sprejel, razen z zelo majhno verjetnostjo.

Poleg teh dveh lastnosti, mora dokaz brez razkritja znanja zadoščati še eni, o njej govori že samo ime:

- **Brez razkritja znanja** (angl. *zero-knowledge*): Če trditev, ki se dokazuje, drži, potem noben preverjevalec (tudi tak, ki goljufa) ne bo iz dokaza izvedel ničesar več, kot samo to, da trditev drži.

**Opomba 5.7.** Dokazi brez razkritja znanja niso zares dokazi v matematičnem smislu. Vedno obstaja določena verjetnost, da lahko goljufiv dokazovalec prepriča iskrenega preverjevalca o trditvi, ki ne drži.

## TODO: NATANČNEJE O ZKP: SIGMA PROTOCOLS, ZERO KNOWLEDGE PROOF (OF KNOWLEDGE) FIAT-SHAMIR

IDEJA: kaj je fiat shamir [10]: Če dokazovalec *A* želi prepričati preverjevalca *B* o svoji identiteti, lahko uporabi eno od treh vrst shem:

- **avtentikacijska shema** (angl. *authentication scheme*) dovoli *A*, da dokaže *B* svojo identiteto, vendar nihče drug ne more *B* dokazati, da je *A*.

- **identifikacijska shema** (angl. *identification scheme*) dovoli  $A$ , da dokaže  $B$  svojo identiteto, vendar more  $B$  dokazati nikomur drugemu, da je  $A$ .
- **podpisna shema** (angl. *signature scheme*) dovoli  $A$ , da dokaže  $B$  svojo identiteto, vendar niti  $B$  ne more sebi dokazati, da je  $A$ .

dokaz varnosti [6]:

Torej, da preprečimo napad na generiranje ključev, od vsakega podpisnika  $P_i$  zahtevamo, da poleg svojega javnega ključa  $I_i$  objavi tudi dokaz o znanju brez razkritja znanja za svoj zasebni ključ glede na javni ključ. Objaviti mora torej dokaz, da pozna diskretni logaritem  $I_i$  modulo  $g$ . Ta dokaz je neinteraktiven, saj obravnavamo model slučajnega oraklja in lahko uporabimo Fiat-Shamirjevo heuristiko.

Ker tovrstni dokazi brez preverjevalca nimajo smisla, se na tej točki vredno vprašati, kdo bo preverjal veljavnost dokazov. Izkaže se, da je najbolj enostavno, da se dokaze doda v posamezne javne ključe. Tako pade breme preverjanja na tistega, ki bo preverjal podpis. Problematično je dejstvo, da taka sprememba podaljša javne ključe in privede do izgube učinkovitosti. Preverjanje veljavnosti podpisov bo sedaj poleg dveh modularnih potenciranj potrebovalo še dodatnih  $2|S|$ , saj je potrebno preveriti vse dokaze javnih ključev. Posamezni preverjevalec podpisov lahko sicer dodatno delo opravi le enkrat za vsako skupino, če natančno beleži rezultate preverjanja dokazov.

#### 5.2.4 Učinkovitost podpisovanja: Merklava drevesa

Za dokaz varnosti je potrebno, da lahko algoritem, ki bo simuliral proces podpisovanja in napadanja (pogosto se tak algoritem imenuje *simulator*), v polinomskem času za vsakega pokvarjenega podpisnika  $P_j$  pridobi diskretni logaritem  $I_j$  iz predloženega dokaza o znanju brez razkritja znanja. Izkaže pa se, da če je  $P_j$  dokaz izračuna s  $q$  klici slučajnega oraklja, potem simulator uspešno pridobi diskretni logaritem z verjetnostjo največ  $1/q$ . Torej, če je  $k$  pokvarjenih podpisnikov, bo simulator uspešen z verjetnostjo največ  $1/q^k$ . Z drugimi besedami, če želimo polinomski simulator, je podpisnikov lahko največ logaritemsko mnogo v številu klicev oraklja  $q$ .

#### TODO: KAJ POMENI LOGARITEMSKO MNOGO - JE TO PRAV?

Ta problem lahko rešimo tako, da vsak podpisnik  $P_i$  najprej izračuna svoj par ključev  $(s_i, I_i)$  in tudi zavezo  $X_i$ . Potem si vsi izmenjajo  $I_i$  in  $X_i$ . Vsak podpisnik lahko sedaj izračuna *skupni izziv*

$$e = H(X_1 || I_1 || X_2 || I_2 || \dots || X_L || I_L).$$

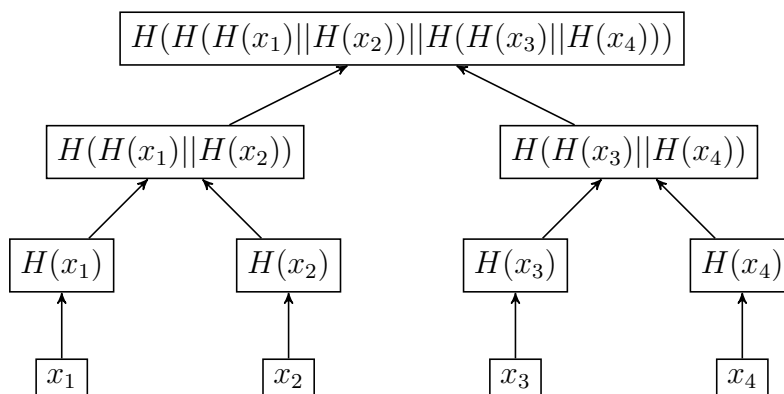
Podpisniki za dokaz znanja sedaj uporabijo Schnorrov podpis  $e$  s svojim parom ključev.

#### TODO: A TO PRAVILNO RAZUMEM?

To pomeni, da za generiranje dokazov  $k$  pokvarjenih podpisnikov sedaj rabi le  $kq$  klicev oraklja, torej je polinomski simulator uspešen z verjetnostjo  $1/kq$ . To omogoča, da je podpisnikov več kot logaritemsko mnogo. Pojavi pa se drugačen problem z učinkovitostjo, saj mora sedaj vsak podpisnik v svojem javnem ključu hraniti še

Schnorrov podpis sporočila  $e$  in pa tudi vse javne ključe sopodpisnikov in njihove zaveze. Brez teh podatkov namreč dokaz znanja (Schnorrov podpis) ni preverljiv. To pomeni, da je za katerokoli podskupino  $S$  velikost ključa proporcionalna velikosti celotne skupine  $G$ . Poleg tega mora sedaj preverjevalec preveriti, da se vsi vektorji javnih ključev ujemajo. V primerjavi z osnovno naivno idejo, kjer je preverjevalec potreboval le  $|S|$  navadnih Schnorrovih javnih ključev, je v tej izvedbi velikost javnega ključa nedopustno velika.

Da nazaj pridobimo učinkovit podpis, se lahko zanesemo na slučajnega oraklja in kriptografsko orodje, imenovano **Merklovo drevo** (angl. *Merkle tree*). V osnovi je to *binarno drevo*, torej drevo, kjer ima vsako vozlišče največ dva otroka. Ideja je, da v liste shranimo zgostitve katerekolih podatkov, pridobljene s pomočjo izbranega slučajnega oraklja ali zgoščevalne funkcije. Drevo potem gradimo navzgor tako, da v vsako vozlišče shranimo zgostitev stika zgostitev levega in desnega otroka. Tako nadaljujemo do korena. Pomembno je, da je za pridobivanje zgostitev uporabljena zgoščevalna funkcija, ki je skoraj brez trčenj ali pa slučajni orakelj. Osnovna struktura je prikazana na sliki 3.



Slika 3: Primer Merklovega drevesa s štirimi listi. Imamo torej 4 vhodne podatke  $x_1, x_2, \dots, x_4$ , na vsakem nivoju drevesa se izračuna stik in zgostitev. Ustvarjeno s pomočjo [9].

Pomembno je opaziti, da če zgoščevalna funkcija ustvarja zgostitve, dolge  $k$  bitov, bodo toliko dolgi vsi podatki, ki jih hranijo vsa vozlišča drevesa. Za Merklova drevesa je ključno, da je v primeru varne zgoščevalne funkcije računsko zelo težko spremeniti katerokoli vrednost v drevesu, brez da bi se spremenila vrednost v korenu. Enako velja za spremembe vhodnih podatkov. Merklova drevesa nam torej omogočajo, da se zavežemo  $L$  vrednostim  $x_1, x_2, \dots, x_L$  tako, da enostavno vrnemo en sam  $k$ -bitni niz. To storimo tako, da shranimo zgostitve vrednosti  $x_1, x_2, \dots, x_L$  v liste drevesa in izračunamo koren. Vrednostim se zavežemo tako, da preverjevalcu damo vrednost korena. Ko mu kasneje želimo razkriti vrednosti, mu jih enostavno povemo, on pa lahko z izračunom drevesa preveri, da so vrednosti prave. Povzeto po [7].

**Trditev 5.8** (Overjevalna pot [7]). *Naj bo  $A$  zavezovalec, ki se želi zavezati vrednostim  $x_1, x_2, \dots, x_L$  preverjevalcu  $B$ . Če se  $A$  zaveže tako, da  $B$  pove vrednost korena Merklovega drevesa, izračunanega na podlagi vrednosti  $x_1, x_2, \dots, x_L$ , potem lahko dokaže zavezo eni vrednosti  $x_i$  ( $1 \leq i \leq L$ ) tako, da preverjevalcu  $B$  pove  $1 + \lceil \log L \rceil$*

vrednosti:  $x_i$  in pa **overjevalno pot**, torej vrednosti, shranjene v sestrskih vozliščih vseh vozlišč na poti med vključno  $x_i$  in korenem (brez korena, ki ga  $B$  že pozna).

*Dokaz.* Trditev lahko dokažemo z indukcijo na globino Merklovega drevesa  $d$ . Naj bo  $x$  vrednost, za katero želimo dokazati zavezo in  $w_1, w_2, \dots, w_d$  overjevalna pot.

- $d = 2$ : Če je globina drevesa 2, želimo pokazati, da moramo poleg  $x$  povemo samo eno dodatno vrednost. Ta vrednost je torej zgostitev  $x$ -ove sosednje vrednosti  $y$ . Ko  $B$  izračuna  $H(x||y)$ , je to že koren, in lahko vrednost primerja z zabeleženo.
- $n \rightarrow n + 1$ : Predpostavimo torej, da za globino drevesa  $n$  lahko preverimo zavezo s podanimi  $1 + d$  vrednostmi. To nam omogoča izračuna vrednosti v enem od korenovih otrok v drevesu globine  $n + 1$ , po indukcijski predpostavki. Če poznamo še vrednost drugega otroka, je možen izračun korena.

□

Merklova drevesa lahko sedaj uporabimo, da naredimo večstranski podpis bolj učinkovit. Podpisniki še vedno predložijo dokaze znanja prek Schnorrovega podpisa, po izmenjavi dokazov pa vsak izračuna Merklovo drevo z listi  $I_1, I_2, \dots, I_L$ . To drevo bo torej globine  $\log L$ . Za svoj javni ključ potem vsak podpisnik  $P_i$  nastavi  $I_i$  in overjevalno pot za  $I_i$ . Ker je ponavadi  $I_i$  veliko daljši od dolžine zgostitev, in ker je v overjevalni poti le  $\log L$  zgostitev, se ključ ne podaljša veliko (npr. če je  $I_i$  dolg 2000 bitov in so zgostitve 200-bitne, bo 1000 podpisnikov ustvarilo ključ, dolge manj od 4000 bitov, torej manj kot dvakrat daljše).

Ko sedaj preverjevalec preverja podpis sporočila  $m$  s strani  $S$ , lahko za vsakega podpisnika izračuna vrednost korena Merklovega drevesa in preveri, da se vse ujemajo. Obstoj enega nepokvarjenega podpisnika tako prisili vse pokvarjene, da uporabljajo prave ključke (ali pa najdejo trk v zgoščevalni funkciji, kar je izjemno težko). S to spremembo smo tako uspešno ohranili podpise varne in časovno učinkovite.

## 5.3 Definicija večstranskega Schnorrovega podpisa

Sedaj smo pripravili vse potrebno, da podamo natančno definicijo končne sheme.

### 5.3.1 Skupni parametri

Vsi podpisniki se strinjajo o skupnem varnostnem parametru  $k$  in sekundarnem varnostnem parametru  $k'$ , ki je deterministično izračunan iz  $k$  (ponavadi kar  $k' = 100$ ). Za velikost  $L$  skupine podpisnikov  $G$  predpostavimo, da je polinomska v  $k$ .

Shemo obravnavamo v modelu slučajnega oraklja, tako da imajo vsi podpisniki dostop do slučajnega oraklja  $H$ . Na dogovorjen način ga uporabijo, da ustvarijo pet neodvisnih orakljev

$$\begin{aligned} H_1, H_2 &: \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}, \\ H_3, H_5 &: \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^{k'}, \\ H_4 &: \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^{2k'}. \end{aligned}$$

Prav tako predpostavimo, da imajo vsi podpisniki dostop do algoritma  $Gen(k)$  1.

Za lažjo obravnavo si izberemo še enega izmed podpisnikov, in ga označimo z  $D$ . Ta podpisnik bo vrnil končni podpis, ne ve pa nobenih dodatnih skrivnosti.  $D$  lahko tudi predstavlja vse podpisnike, a je opis sheme malce lažji, če si izberemo enega – v tem primeru je on prejemnik vseh sporočil ostalih podpisnikov, svoje odgovore pa potem oddaja (angl. *broadcast*) ostalim podpisnikom. Če si ne izberemo podpisnika  $D$ , si podpisniki sporočila pošiljajo v krogu (vsak pošlje svoje sporočilo desnemu sosedu, ko prejme sporočilo levega, spet pošlje desnemu. Vsak torej pošlje  $L$  sporočil, na koncu imajo vsi vse potrebne podatke za izračune).

### 5.3.2 Generiranje ključev

Vsi podpisniki morajo sami generirati parametre  $p, q$  in  $g$ . Za prva dva uporabijo algoritem  $Gen(k)$  1. Za izvor naključnosti uporabijo zaporedje  $H_1(2^k), H_1(2^k + 1), \dots$ . Za generiranje elementa  $g$  reda  $q$  uporabijo izvor naključnosti  $H_2(2^k), H_2(2^k + 1), \dots$ .

Ko ima vsak podpisnik  $P_i$  ( $1 \leq i \leq L$ ) na voljo skupne parametre, si izbere svoj zasebni ključ  $s_i \in [0, q - 1]$  in izračuna

$$I_i = g^{s_i} \bmod p.$$

Do tu je postopek enak, kot pri naivni verziji. Da preprečimo napad na generiranje ključev, mora vsak podpisnik na tem mestu izbrati naključen  $r_i \in [0, q - 1]$  in izračunati zavezo

$$X_i = g^{r_i} \bmod p.$$

Potem si podpisniki med seboj izmenjajo vrednosti  $(X_i, I_i)$ . Vsak na tem mestu lahko izračuna

$$e = H_3(X_1 || I_1 || X_2 || I_2 || \dots || X_L || I_L),$$

$$y_i = es_i + r_i,$$

in pošlje  $y_i$  vsem ostalim podpisnikom. Vsak podpisnik je na tem mestu prejel Schnorrove podpise (in s tem dokazuje znanja brez razkritja znanja) zasebnih ključev vse ostalih podpisnikov. Na tem mestu mora torej  $P_i$  preveriti veljavnost vseh podpisov  $(X_j, y_j)$  vseh ostalih podpisnikov  $P_j$  ( $1 \leq j \leq L$ ). To stori s standardnim izračunom za preverjanje Schnorrovega podpisa (3.1):

$$g^{y_j} \stackrel{?}{=} X_j \cdot I_j^e \pmod{p}.$$

Ko podpisnik  $P_i$  ugotovi, da so vsi podpisi veljavni, lahko izračuna Merklovo drevo, ki ima v listih po vrsti razporejene  $I_1, I_2, \dots, I_L$  in za svojo zgoščevalno funkcijo uporablja  $H_4$ . Ko je drevo izračunano,  $P_i$  prebere overjevalno pot  $\text{pot}_i$  svojega ključa  $I_i$  in vrne javni ključ

$$\text{pk}_i = (p, q, g, I_i, \text{pot}_i).$$



### 5.3.3 Podpisovanje

Naj bo  $S = \{P_{id_1}, P_{id_2}, \dots, P_{id_l}\}$  podskupina velikosti  $l$  skupine  $G$ , ki želi večstransko podpisati sporočilo  $m$ . To lahko storijo s tremi krogi komunikacije:

1. Vsak podpisnik  $P_{id_j}$  ( $1 \leq j \leq l$ ) si izbere naključno število  $r_j \in [0, q - 1]$  in izračuna zavezo

$$X_j = g^{r_j} \bmod p.$$

Zavezo  $X_j$  nato pošlje podpisniku  $D$ .

2.  $D$  izračuna skupno zavezo

$$\tilde{X} = (X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_l) \bmod p$$

in jo pošlje vsem podpisnikom  $P_{id_j}$  ( $1 \leq j \leq l$ ).

3. Vsak podpisnik  $P_{id_j}$  ( $1 \leq j \leq l$ ) izračuna

$$\begin{aligned} e &= H_5(\tilde{X} || m || S), \\ y_j &= es_j + r_j \end{aligned}$$

in pošlje  $y_j$  podpisniku  $D$ .

Na tem mestu ima  $D$  vse kar rabi, da dokonča podpis. Najprej izračuna

$$\tilde{y} = (y_1 + y_2 + \dots + y_l) \bmod q$$

in nato vrne končni podpis

$$\sigma = (\tilde{X}, \tilde{y}).$$

### 5.3.4 Preverjanje

Preverjanje je podobno naivni verziji, le da je potrebno dodatno preveriti ustreznost Merklvih korenov. Če torej preverjevalec želi preveriti veljavnost podpisa  $\sigma = (\tilde{X}, \tilde{y})$  sporočila  $m$ , moramo predpostaviti, da lahko dostopa do vseh javnih ključev  $\{pk_{id_1}, pk_{id_2}, \dots, pk_{id_l}\}$  vseh podpisnikov  $S = \{P_{id_1}, P_{id_2}, \dots, P_{id_l}\}$ .

Najprej mora preverjevalec preveriti, da se vseh  $l$  izvodov skupnih parametrov  $p, q$  in  $g$  ujema. Da dokončno potrdi veljavnost in ustreznost javnih ključev, za vsakega podpisnika  $P_{id_j}$  ( $1 \leq j \leq l$ ) s pomočjo  $I_{id_j}$  in  $pot_{id_j}$  izračuna vrednost  $V_{id_j}$  v korenu Merklovega drevesa, kot prikazano v trditvi 5.8. Ko izračuna vse vrednosti  $V_{id_j}$ , mora preveriti, da so vse enake.

Ko se preverjevalec prepriča o veljavnosti ključev, postopa podobno kot pri naivni verziji. Najprej mora izračunati

$$\tilde{I}_S = (I_{id_1} \cdot I_{id_2} \cdot \dots \cdot I_{id_l}) \bmod p.$$

Če si dosledno beleži izračune, lahko preverjevalec ta del preverjanja podpisa opravi le enkrat za vsako skupino podpisnikov  $S$ .

Potem mora preverjevalec izračunati izziv s pomočjo slučajnega oraklja

$$e = H_5(\tilde{X} || m || S)$$

in preveriti, če velja

$$g^{\tilde{y}} \stackrel{?}{\equiv} \tilde{X} \tilde{I}_S^e \pmod{p}. \quad (5.1)$$

Če je torej podpis  $\sigma = (\tilde{X}, \tilde{y})$  veljaven podpis sporočila  $m$ , lahko levo stran enačbe (5.1) zapišemo kot

$$\begin{aligned} g^{\tilde{y}} \pmod{p} &= g^{(y_1+y_2+\dots+y_l) \bmod q} \pmod{p} \\ &\stackrel{3.2}{\equiv} g^{y_1+y_2+\dots+y_l} \pmod{p} \\ &= g^{e s_1+r_1+e s_2+r_2+\dots+e s_l+r_l} \pmod{p} \\ &= g^{r_1+r_2+\dots+r_l} g^{e(s_1+s_2+\dots+s_l)} \pmod{p}, \end{aligned}$$

desno pa po trditvi 3.3

$$\begin{aligned} \tilde{X} \tilde{I}_S^e \pmod{p} &= ((X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_l) \pmod{p}) ((I_{id_1} \cdot I_{id_2} \cdot \dots \cdot I_{id_l}) \pmod{p})^e \pmod{p} \\ &= ((g^{r_1} \pmod{p} \cdot g^{r_2} \pmod{p} \cdot \dots \cdot g^{r_l} \pmod{p}) \pmod{p}) \cdot \\ &\quad \cdot ((g^{s_1} \pmod{p} \cdot g^{s_2} \pmod{p} \cdot \dots \cdot g^{s_l} \pmod{p}) \pmod{p})^e \pmod{p} \\ &\stackrel{3.3}{\equiv} (g^{r_1} \cdot g^{r_2} \cdot \dots \cdot g^{r_l}) \pmod{p} ((g^{s_1} \cdot g^{s_2} \cdot \dots \cdot g^{s_l}) \pmod{p})^e \pmod{p} \\ &\stackrel{3.3}{\equiv} (g^{r_1} \cdot g^{r_2} \cdot \dots \cdot g^{r_l}) (g^{s_1} \cdot g^{s_2} \cdot \dots \cdot g^{s_l})^e \pmod{p} \\ &= g^{r_1+r_2+\dots+r_l} g^{e(s_1+s_2+\dots+s_l)} \pmod{p}. \end{aligned}$$

Ker se leva in desna stran ujemata, enačba (5.1) pravilno preveri pravilnost večstranskega Schnorrovega podpisa.

## 5.4 Varnost večstranskega Schnorrovega podpisa

Dokazati si želimo, da je shema, definirana v zgornjem razdelku 5.3 *varna*, torej ustreza pogoju definicije varnosti 5.3, kjer ima napadalec  $F$  sposobnosti, definirane v 5.2. Varnost torej pomeni, da je preprečeno eksistencialno ponarejanje, zaradi napadalčevega nadzora nad komunikacijskim omrežjem pa si lahko privoščijo napad z izbranimi sporočili. Še več, ker se ukvarjamo z večstranskimi podpisi, si napadalec lahko izbere še podskupino, ki bo sporočilo podpisovala. Napadalec lahko torej na katerikoli točki od katerekoli podskupine zahteva podpis kateregakoli izbranega sporočila.

Zaradi kompleksnosti napadalca, dokaz varnosti poteka tako, da najprej dokažemo ekvivalentnost med šibkejšim napadalcem  $F'$  in prvotnim napadalcem  $F$ , potem pa dokažemo varnost v primeru šibkega napadalca  $F'$ .

### 5.4.1 Šibek napadalec

Za enostavnejšo analizo definiramo **šibkega napadalca** (ali nasprotnika) (angl. *weak adversary*)  $F'$ . Njegov cilj je enak izvornemu napadalcu  $F$ . Želi si torej ponarediti podpis s pomočjo napada z izbranim sporočilom in podskupino. Izbere si lahko podpisnika, in od njega zahteva podpis izbranega sporočila skupaj z izbrano podskupino  $S$ . Napadalca se razlikujeta v tem, da je  $F'$  bistveno šibkejši, oz. ima manj nadzora nad potekom podpisovanja in komunikacijo med podpisniki.

Šibek napadalec nima zmožnosti pokvariti podpisnikov. Vse, kar lahko stori  $F'$  je, da si preden skupina generira svoje ključne, izbere podpisnika  $P_i$ , ki ga bo napadal.

Edina interakcija, ki je potem dovoljena šibkemu napadalcu, je s podpisnikom  $P_i$ . Ko je podpisnik napaden, mora zanj  $F'$  priskrbeti vse vhode za algoritme in vse vhodna sporočila, ki jih prejme. Prav tako lahko vidi vsa poslana sporočila podpisnika. Situacija je torej taka, kot da ostali podpisniki sploh ne obstajajo, pri podpisovanju sodelujeta samo  $P_i$  in  $F'$ . Ko podpisnik  $P_i$  generira svoj ključ,  $F'$  nad njim izvede napad z izbranim sporočilom in podskupino.

Ker mora šibek napadalec za izbranega podpisnika predložiti vse vhode in komunikacijo, lahko vidimo delovanje šibkega napadalca kot delovanje napadalca, ki pokvari vse podpisnike, razen podpisnika  $P_i$ . V obeh primerih bo podpisnik  $P_i$  v podpisu sodeloval le z napadalcem, ki zanj nadzoruje celoten potek podpisovanja. Ta povezava tipov napadalcev je formalno opisana v izreku 5.10. Pred dokazom izreka pa moramo, tako kot za napadalca  $F$ , tudi tu definirati kaj pomeni varnost sheme.

**Definicija 5.9** (Šibka varnost). Naj bo  $k$  varnostni parameter (ki si ga delijo vsi podpisniki). Naj bo  $c > 0$  poljubna konstanta. Naj bo  $F'$  šibek napadalec, ki je omejen s polinomskim časom v parametru  $k$ . Naj bo  $p$  verjetnost, da  $F'$  vrne trojico  $(\sigma, m, S)$ , za katero velja:

- $\sigma$  je veljaven večstranski podpis sporočila  $m$  s strani skupine  $S$ .
- Obstaja nepokvarjen podpisnik  $P$  iz skupine  $S$ , od katerega  $F'$  ni zahteval podpisa sporočila  $m$  s strani skupine  $S$ .

Shemi za večstranske podpise podskupine z odgovornostjo bomo rekli, da je **šibko varna**, če velja

$$p < k^{-c}.$$

Sedej imamo vse potrebno, da dokažemo ekvivalentnost šibke varnosti in varnosti, in s tem ekvivalentnost šibkega napadalca in napadalca.

**Izrek 5.10.** *Naj bo  $Q$  tak polinom, da je pri poljubno izbranem varnostnem parametru  $k$  za velikost  $L$  skupine podpisnikov  $G$  velja*

$$L < Q(k).$$

*Potem je večstranski Schnorrov podpis iz razdelka 5.3 varen natanko tedaj, ko je šibko varen.*

*Dokaz.* Ker se definicija varnosti in šibke varnosti razlikuje le v uporabi napadalca  $F$  ali šibkega napadalca  $F'$ , je potrebno pokazati le, da sta  $F$  in  $F'$  ekvivalentna (ob ustreznih velikost skupine podpisnikov).

( $\Rightarrow$ ): Predpostavimo, da podpis ni šibko varen. Kot smo že prej smo omenili, je delovanje šibkega napadalca  $F'$  enako delovanju napadalca  $F$ , ki pokvari vse podpisnike razen enega. Napadalec  $F$  ima torej vse zmožnosti, ki jih ima napadalec  $F'$  (in še mnogo več). Če podpis ni šibko varen, lahko  $F$  s simulacijo  $F'$ , opisano zgoraj, z nezamisljivo verjetnostjo vrne ponarejen podpis, torej shema tudi ni varna.

( $\Leftarrow$ ): Predpostavimo, da podpis ni varen. Obstaja torej napadalec  $F$ , ki je omejen s polinomskim časom v parametru  $k$  in uspešno izvede napad z izbranim

sporočilom in podskupino. Na tej točki omenimo še, da je za smislen ponaredek podpisa potrebno, da pri podpisovanju sodeluje vsaj en nepokvarjen podpisnik. Sicer je napadalec edini ki podpisuje, zato varnost sheme ni ogrožena. Če pa pri podpisovanju sodeluje iskren podpisnik, in napadalec uspešno ustvari ponaredek, pa to kaže na težave v varnosti.

Konstruirajmo šibkega napadalca  $F'$ , ki deluje tako, da pred začetkom podpisovanja izbere naključnega podpisnika  $P_i$  ( $1 \leq i \leq L$ ) za tarčo svojega napada.  $F'$  se torej za podpisnika  $P_i$  postavi v vlogo vseh ostalih podpisnikov.  $F'$  lahko torej  $F$  simulira delovanje vseh podpisnikov razen  $P_i$ . Če se  $F$  odloči pokvariti kateregakoli podpisnika, ki ni  $P_i$ , mu lahko  $F'$  posreduje potrebne zasebne informacije. Podobno tudi, če si  $F$  izbere podpisnika (razen  $P_i$ ) za tarčo napada z izbarnim sporočilom in podskupino. V primeru, da je tarča napada  $P_i$ ,  $F'$  prejme zahtevek za napad od  $F$  in ga posreduje podpisniku  $P_i$ , ta pa normalno pošlje svoj odgovor napadalcu  $F$ .

Ko  $F$  konča svoj napad, vrne trojico  $(\sigma, m, S)$ . Če je to veljaven ponaredek, jo vrne tudi šibek napadalec  $F'$ . Če ponaredek ni veljaven, če  $P_i$  ni eden izmed podpisnikov v  $S$ , ali pa če je  $P_i$  tekom podpisovanja pokvarjen s strani  $F$ , je šibek napadalec neuspešen pri svojem napadu. Poglejmo si verjetnost, da  $F'$  uspe pri svojem napadu:

$$\begin{aligned}
& \Pr(F' \text{ vrne veljaven ponaredek}) = \\
& = \Pr(F \text{ vrne veljaven ponaredek} \cap P_i \in S \text{ in ni pokvarjen}) \\
& = \sum_{i=1}^L \Pr(F' \text{ izbere } P_i) \cdot \Pr(F \text{ vrne veljaven ponaredek} \cap P_i \in S \text{ in ni pokvarjen}) \\
& = \sum_{i=1}^L \frac{1}{L} \cdot \Pr(P_i \in S \text{ in ni pokvarjen} \mid F \text{ vrne veljaven ponaredek}) \\
& \quad \cdot \Pr(F \text{ vrne veljaven ponaredek}) \\
& \geq \frac{1}{L} \cdot \Pr(F \text{ vrne veljaven ponaredek}),
\end{aligned}$$

kjer smo pri prehodu iz tretje v četrto vrstico uporabili osnovno lastnost verjetnosti, ki pravi

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A \mid B) \cdot \Pr(B),$$

pri prehodu v zadnjo vrstico pa smo upoštevali, da velja

$$\sum_{i=1}^L \Pr(P_i \in S \text{ in ni pokvarjen} \mid F \text{ vrne veljaven ponaredek}) \geq 1. \quad (5.2)$$

Neenačba (5.2) drži, saj mora pri uspešnem ponarejanju sodelovati vsaj en nepokvarjen podpisnik. Če torej  $F$  vrne veljaven ponaredek, bo vsaj ena od verjetnosti v zgornji vsoti enaka 1.

Pri ponarejanju je torej  $F$  uspešen največ  $L$ -krat več kot  $F'$ , kar pomeni, da shema ni šibko varna.  $\square$

#### 5.4.2 Dokaz varnosti

Ker sta napadalec in šibek napadalec ekvivalentna, je dovolj pokazati varnost v primeru šibkega napadalca, shema pa je potem tudi varna po izreku 5.10.

**Izrek 5.11** (Varnost večstranskega Schnorrovega podpisa). *Če drži predpostavka o težavnosti diskretnega logaritma pri ASM 5.5, je večstranski Schnorrov podpis, definiran v razdelku 5.3, varen.*

Želimo torej pokazati, da če obstaja šibek napadalec, ki je omejen s polinomskim časom v parametru  $k$ , potem obstaja nek algoritem  $A$ , ki prav tako teče v polinomskem času, s katerim lahko prekršimo predpostavko o diskretnem logaritmu pri ASM. Bolj specifično, prekršimo lahko predpostavko o težavnosti PDL.  $A$  je torej algoritem, ki za vhod prejme  $p, q, g$  in  $I$ , in vrne  $s \in [0, q - 1]$ , da velja  $g^s \equiv I \pmod{q}$ . Ideja je, da  $A$  simulira podpisovanje za šibkega napadalca, ki vrne ponarejen podpis, iz katerega  $A$  lahko razbere diskretni logaritem, ki ga išče.

Bolj specifično, med svojim delovanjem šibki napadalec opravlja dve vrsti poizvedb. Prva je *zgoščevalna poizvedba*, kjer napadalec pošlje slučajnemu oraklju nek niz, ta pa mu odgovori z njegovo zgostitvijo.  $A$  lahko simulira odgovor na tovrstne poizvedbe z vračanjem naključnih odgovorov.

Druga vrsta poizvedb je *podpisovalna poizvedba*, kjer napadalec podpisniku  $P_i$  (ki ga je izbral na začetku) pošlje sporočilo  $m$  in skupino  $S$ , ta pa mu nazaj pošlje zavezo  $X_i$ . Potem mora napadalec igrati vlogo podpisnika  $D$ , ki agregira informacije. Podpisniku  $P_i$  pošlje skupno zavezo  $\tilde{X}$ , nazaj pa dobi  $y_i$ . Podpisovalne poizvedbe torej potekajo v dveh krogih in predstavljajo izvedbo napada z izbranim sporočilom in podskupino nad podpisnikom  $P_i$ .

Za lažjo konstrukcijo algoritma  $A$ , je smotrno šibkega napadalca  $F'$  še dodatno poenostaviti. Naj  $q_{\text{zgoščevalna}}$  označuje največje število zgoščevalnih poizvedb, ki jih opravi  $F'$ ,  $q_{\text{podpisovalna}}$  pa največje število podpisovalnih. Poenostavljen napadalec  $\mathcal{F}$  deluje popolnoma enako kot  $F'$ , le da pred drugim krogom podpisovalne poizvedbe  $\mathcal{F}$  najprej pošlje zgoščevalno poizvedbo slučajnemu oraklju  $H_5$  z vhodom  $(\tilde{X}, m, S)$ . Podobno, preden  $\mathcal{F}$  vrne ponarejen podpis  $(\tilde{X}, \tilde{y})$  sporočila  $m_F$ , najprej opravi zgoščevalno poizvedbo pri slučajnem oraklju  $H_5$  z vhodom  $(\tilde{X}, m_F, S)$ . Tako  $\mathcal{F}$  vsaki podpisovalni poizvedbi in ponaredku dodeli zgostitev. Ker opravi  $q_{\text{podpisovalna}}$  podpisovalnih poizvedb in  $q_{\text{zgoščevalna}} + q_{\text{podpisovalna}} + 1$  zgoščevalnih in ker  $F'$  po predpostavki teče v polinomskem času, tudi  $\mathcal{F}$  teče v polinomskem času. Dodatno predpostavimo še, da  $\mathcal{F}$  po vsaki zgoščevalni poizvedbi shrani odgovor, zato vsako zgoščevalno poizvedbo za določen vhod opravi le enkrat. Število klicev oraklja  $H_5$  označimo s  $q_H$ .  $A$  bo za delovanje uporabljal napadalce  $\mathcal{F}$ , saj bo tako za vsak potencialni ponaredek in vsak napad prejel predogled rezultata prek zgostitve, ki jo vrne  $H_5$ .

$A$  mora torej znati odgovoriti na vse poizvedbe poenostavljenega napadalca  $\mathcal{F}$ . Na zgoščevalne poizvedbe odgovarja naključno, s pomočjo vnaprej izbranih simuliranih odgovorov  $e_1, e_2, \dots, e_{q_H}$  oraklja  $H_5$ . Odgovor na podpisovalno poizvedbo za podpisnika  $P_i$  na vhodu  $m$  in  $S$  je malce bolj zapleten.  $A$  stori sledeče:

1. Shrani konfiguracijo poenostavljenega napadalca  $\mathcal{F}$ .
2. Si izbere naključen odgovor  $e_j$  ( $1 \leq j \leq q_H$ ) oraklja  $H_5$ , v upanju, da bo to zgostitev, ki bo identificirala to poizvedbo.
3. Si izbere naključen  $y \in [0, q - 1]$ .

#### 4. Izračuna

$$X_i = I_i^{-e_j} g^y \bmod p$$

in pošlje  $X_i$  v odgovor prvega kroga poizvedbe poenostavljenemu napadalcu  $\mathcal{F}$ .

5. Po prejetju  $\tilde{X}$  od  $\mathcal{F}$  preveri, če  $e_j$  ustreza poizvedbi na vhodu  $(\tilde{X}, m, S)$ . Če ja, vrne  $y$ , sicer se vrne na korak 2.

Zgornje je primer splošne metode za analiziranje varnosti v kriptografiji, ki se imenuje **previjanje nazaj** (angl. *rewinding*). Popularna je pri analizi dokazov brez razkritja znanja in pri dokazih varnosti v modelu slučajnega oraklja. Metoda dovoli, da prek naključnih izbir algoritem odgovori na poizvedbo, preden je postavljena, za ceno največ toliko previjanj, kot ima poizvedba odgovorov.

V tem primeru je previjanje nazaj nujno potrebno za simuliranje iskrenega podpisnika  $P_i$ . To je zato, ker je izbira  $\tilde{X}$  s strani  $\mathcal{F}$  tista, ki odloči izziv  $e$ , ki ga  $P_i$  uporabi za izračun  $y_i$ . Algoritem  $A$  pa mora zavezo  $X_i$  poslati v prvem krogu poizvedbe, preden je znano, kaj bo izziv  $e$ . Zato mora uganiti, kater odgovor oraklja  $H_5$  bi bil pravi. Ker je možnih vrednosti  $q_H$ , bo v najslabšem primeru potreboval  $q_H$  previjanj.

Sedaj lahko konstruiramo algoritem  $A$  na podlagi poenostavljenega napadalca  $\mathcal{F}$ .  $A$  torej prejme instanco problema diskretnega logaritma s podatki  $p, q, g$  in  $I$  (kot predstavljeno v definiciji 5.5).  $P_i$  naj označuje podpisnika, ki ga poenostavljen napadalec napada (to je torej edini nepokvarjeni podpisnik). Ker ima  $A$  absoluten nadzor, lahko brez problema nastavi oraklja  $H_1$  in  $H_2$  tako, da so  $p, q$  in  $g$  točno deljeni parametri pri večstranskem Schnorrovem podpisu. Potem lahko izbere  $I_i = I$  in nastavi  $H_3$  tako, da lahko dokaže znanje diskretnem logaritmu  $I_g$  modulo  $g$ .

#### TODO: TO SI LAHKO MALO RAZJASNEMO

. Tu naletimo na podoben problem, kot pri odgovarjanju na druge kroge podpisovalnih poizvedb.  $A$  mora poslati zavezo  $X_i$  preden pozna skupni izziv  $e$ . Problem ponovno rešimo s previjanjem poenostavljenega napadalca  $\mathcal{F}$ . Previti je treba največ tolikokrat, kot je poizvedb, ki jih  $\mathcal{F}$  pošlje  $H_3$  (označimo  $q_{H_3}$ ).

Potem lahko  $A$  požene  $\mathcal{F}$  in odgovarja na njegove poizvedbe kot opisano zgoraj. Ideja dokaza od tu naprej je, da ko  $\mathcal{F}$  vrne ponarejen podpis,  $A$  uporabi previjanje in **lemo o razcepu** 5.12 (angl. *forking lemma*), da pridobi še en ponarejen podpis. Iz teh dveh ponaredkov potem lahko izlušči odgovor na dani problem diskretnega logaritma.

**Izrek 5.12** (Lema o razcepu [6]). Naj bo  $\mathcal{S}$  podpisna shema, ki vrača dvodelne podpise  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ , kjer  $\sigma_2$  temelji na zgostitvi vhodnega sporočila  $m$  in  $\sigma_1$  (npr. pri Schnorrovem podpisu je ta zgostitev izziv  $e = H(X||m)$ ). Naj slučajni orakelj  $H$  vrača zgostitve dolžine  $k$ . Velikost zasebnega ključa naj bo  $n$ , tako da velja  $k \gg \log(n)$ .

Naj bo  $F$  verjetnostni Turingov stroj, omejen s polinomskim časom, ki ima na voljo vse javne podatke pri podpisni shemi  $\mathcal{S}$ . Če lahko  $F$  z nezanemarljivo verjetnostjo vrne par  $(m, \sigma)$ , kjer je  $\sigma$  veljaven podpis sporočila  $m$ , potem lahko z nezanemarljivo verjetnostjo z enakimi vhodnimi podatki (enakim trakom v Turingovem stroju) in uporabo drugega oraklja,  $F$  vrne dva para  $(m, \sigma)$  in  $(m, \sigma')$ , kjer podpisa temeljita na drugačnih zgostitvah.

Pred dokazom leme o razcepu, moramo najprej pokazati enostavnejšo lemo iz verjetnosti.

**Lema 5.13.** *Naj bo  $A \subset X \times Y$  dogodek in  $0 < \epsilon < 1$ . Naj velja  $\Pr(A(x, y)) \geq \epsilon$ . Potem obstaja  $\Omega \subset X$ , tako da*

- $\Pr(x \in \Omega) > \epsilon/2$  in
- če je  $a \in \Omega$ , potem je  $\Pr(A(a, y)) \geq \epsilon/2$ .

*Dokaz.* Definirajmo množico  $\Omega$  kot

$$\Omega = \{x \in X \mid \Pr(A(x, y)) \geq \epsilon/2\}.$$

Neposredno iz definicije množice sledi drugi del izreka. Če je  $a \in \Omega$ , mora zanj veljati  $\Pr(A(a, y)) \geq \epsilon/2$ . Za prvi del leme pa uporabimo izrek o popolni verjetnosti, da  $\Pr(A(x, y))$  razdelimo:

$$\Pr(A(x, y)) = \Pr(x \in \Omega) \cdot \Pr(A(x, y) \mid x \in \Omega) + \Pr(x \notin \Omega) \cdot \Pr(A(x, y) \mid x \notin \Omega)$$

Zaradi definicije množice  $\Omega$  velja  $\Pr(A(x, y) \mid x \in \Omega) \geq \epsilon/2$  in  $\Pr(A(x, y) \mid x \notin \Omega) < \epsilon/2$ . Zapišemo lahko torej

$$\begin{aligned} \epsilon &\leq \Pr(A(x, y)) \\ &\leq \Pr(x \in \Omega) \cdot 1 + (1 - \Pr(x \in \Omega)) \cdot \epsilon/2 \\ &= \epsilon/2 + (1 - \epsilon/2) \cdot (\Pr(x \in \Omega)). \end{aligned}$$

Od tu lahko izrazimo

$$\Pr(x \in \Omega) \geq \frac{\epsilon/2}{1 - \epsilon/2} > \epsilon/2,$$

s čimer smo pokazali še prvi del leme. □

Sedaj imamo vse potrebno, da dokažemo lemo o razcepu.

*Dokaz leme o razcepu 5.12.* Naj bo  $F$  napadalec, ki nima na voljo nobenega sporočila. Denimo, da med svojim napadom napadalec  $F$  slučajnemu oraklju  $H$  pošlje največ polinomske mnogo poizvedb v parametru  $n$  (dolžini zasebnega ključa). Označimo poizvedbe, ki jih  $F$  stori z  $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \dots, \mathcal{Q}_Q$  (brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da so poizvedbe med seboj različne). Odgovore oraklja označimo z  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_Q$ .

Predpostavimo, da lahko za naključno izbran vhodni trak  $\omega$  in naključno izbran orakelj  $H$ ,  $F$  z nezanemarljivo verjetnostjo vrne par  $(m, \sigma)$ , kjer je  $\sigma$  veljaven podpis sporočila  $m$ . Ker so odgovori oraklja izbrani iz naključne funkcije, je verjetnost, da je bila ena izmed poizvedb oraklju prav tista, ki je vsebovala sporočilo in delni podpis, nezanemarljiva. Sicer bi moral  $F$  uganiti odgovor na to poizvedbo za to, da bi lahko ustvaril drugi del podpisa (uganiti bi torej moral naključno vrednost, kar lahko stori z največ zanemarljivo verjetnostjo). Označimo poizvedbo s temi podatki  $\mathcal{Q}_\beta$  ( $1 < \beta < Q$ ). Ker je poizvedb polinomske mnogo v parametru  $n$  in

je verjetnost uspeha nezanemarljiva, mora obstajati polinom  $P(n)$ , za katerega je verjetnost uspeha

$$\Pr_{\omega, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_Q}(F \text{ vrne veljaven ponaredek}) \geq \frac{1}{P(n)},$$

kjer je poizvedba  $\mathcal{Q}_\beta$  res temeljila na sporočilu in delnem podpisu, slučajnost pa izvira iz izbire traku  $\omega$  in orakljevih odgovorov  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_Q$ .

Sedaj lahko za tako  $\beta$  po lemi 5.13 definiramo množico  $\Omega_\beta$ , ki vsebuje tiste naključne trakove  $\omega$ , za katere je verjetnost uspeha po orakljevih odgovorih  $\rho_1, \dots, \rho_Q$  navzdol omejena z  $1/2P(n)$ , če res velja  $\mathcal{Q}_\beta = (m, \sigma_1)$ . To nam da par  $\beta$  in  $\omega$ , ki ga lahko uporabimo, da ponovno prek leme 5.13 definiramo množico  $R_{\beta, \omega}$ , ki vsebuje tiste  $(\rho_1, \dots, \rho_{\beta-1})$ , za katere je verjetnost uspeha po  $(\rho_\beta, \dots, \rho_Q)$  s  $\mathcal{Q}_\beta = (m, \sigma_1)$  večja od  $1/4P(n)$ .

Sedaj imamo določene  $\beta, \omega$  in  $(\rho_1, \dots, \rho_{\beta-1})$ , za katere si lahko izberemo dve množici odgovorov  $(\rho_\beta, \dots, \rho_Q)$  in  $(\rho'_\beta, \dots, \rho'_Q)$ , za kateri  $F$  z nezanemarljivo verjetnostjo vrne dva para  $(m, \sigma)$  in  $(m, \sigma')$ , kjer sta  $\sigma$  in  $\sigma'$  veljavna podpisa sporočila  $m$ , ki temeljita na drugačnih zgostitvah. Tu smo uporabili pogoj  $k \gg \log(n)$ , ki nam zagotavlja, da je vsaj  $n$  različnih  $k$ -bitov dolgih odgovorov oraklja  $H$ .

Torej, z naključno izbiro  $\beta, \omega, (\rho_1, \dots, \rho_{\beta-1}), (\rho_\beta, \dots, \rho_Q)$  in  $(\rho'_\beta, \dots, \rho'_Q)$  lahko z nezanemarljivo verjetnostjo dobimo dva veljavna podpisa  $\sigma$  in  $\sigma'$  sporočila  $m$ , ki temeljita na drugačnih zgostitvah.

## TODO: N VS K, POLINOM P, TOČNO KAKO VMESTIMO QBETA

□

Vrnimo se na dokaz varnosti večstranskega Schnorrovega podpisa. Ostali smo pri algoritmu  $A$ , ki tekom svojega delovanja poganja poenostavljenega napadalca  $\mathcal{F}$ .

Denimo, da  $\mathcal{F}$  vrne ponarejen podpis  $(\tilde{X}_0, \tilde{y}_0)$  sporočila  $m_0$  s strani podskupine  $S_0$ . Še več, ponaredek je nastal na podlagi  $j_0$ -te poizvedbe oraklju  $H_5$  z vhomom  $(\tilde{X}_0, m_0, S_0)$  in odgovorom  $e_{j_0}$ .  $A$  potem ponastavi napadalca  $\mathcal{F}$  nazaj na začetek z enakim trakom. Na njegove poizvedbe odgovarja enako kot prej, le na  $j_0$ -to poizvedbo odgovori z novo naključno vrednostjo  $e'_{j_0}$ .

Označimo število podpisovalnih poizvedb, katerih prvi krog v prvem pogonu napadalec  $\mathcal{F}$  opravi pred  $j_0$ -to zgoščevalno poizvedbo z  $r$ . To pomeni, da nobena od prvih  $r - 1$  podpisovalnih poizvedb ni temeljila na  $j_0$ -ti zgoščevalni, saj mora za legitimen ponaredek  $\mathcal{F}$  dati podpis za sporočilo in skupino, na podlagi katere podpis še ni bil narejen. V drugem pogonu napadalca lahko  $A$  torej vrne shranjene odgovore na prvih  $r - 1$  podpisovalnih poizvedb. Previjanje nazaj je lahko potrebno pri  $r$ -ti podpisovalni poizvedbi, saj se drugi krog lahko zgodi po  $j_0$ -ti podpisovalni poizvedbi. Verjetnost previjanja je  $1 - 1/q_H$ , kjer je  $1/q_H$  verjetnost, da je drugi krog  $r$ -te podpisovalne poizvedbe izveden na podlagi enake zgoščevalne poizvedbe, kot pri prvem pogonu.

Če previjanje pri  $r$ -ti podpisovalni poizvedbi ni potrebno, potem so pogoji pri  $j_0$ -ti zgoščevalni poizvedbi popolnoma enaki, kot pri prvem pogonu (enak trak napadalca in enake zgoščevalne poizvedbe). Od tu lahko zaključimo, da bo tudi  $j_0$ -ta poizvedba imela enak vhod:  $(\tilde{X}_0, m_0, S_0)$ , odgovor pa bo seveda drugačen. Če tudi v tem pogonu napadalec  $\mathcal{F}$  uspešno vrne ponaredek  $(\tilde{X}_1, \tilde{y}_1)$  podpisa na sporočilu



$m_1$  s strani podskupine  $S_1$ , ki temelji na poizvebi  $j_0$ , potem smo lahko prepričani, da velja  $m_1 = m_0$ ,  $S_1 = S_0$  in  $\tilde{X}_1 = \tilde{X}_0$ .

Ključno, enačbi za preverjanje podpisov potem lahko zapišemo kot

$$\begin{aligned} g^{\tilde{y}_0} &\equiv \tilde{X}_0 \tilde{I}_{S_0}^{e_{j_0}} \pmod{p}, \\ g^{\tilde{y}_1} &\equiv \tilde{X}_1 \tilde{I}_{S_1}^{e'_{j_0}} \equiv \tilde{X}_0 \tilde{I}_{S_0}^{e'_{j_0}} \pmod{p}. \end{aligned}$$

Opazimo, da lahko izrazimo  $\tilde{X}_0$  na dva načina, ki ju enačimo:

$$\tilde{X}_0 \equiv g^{\tilde{y}_0} (\tilde{I}_{S_0}^{e_{j_0}})^{-1} \equiv g^{\tilde{y}_1} (\tilde{I}_{S_0}^{e'_{j_0}})^{-1} \pmod{p}.$$

Če premečemo dobljeno enačbo, dobimo

$$\tilde{I}_{S_0}^{-e'_{j_0}} \tilde{I}_{S_0}^{e_{j_0}} \equiv g^{\tilde{y}_0} (g^{\tilde{y}_1})^{-1} \pmod{p},$$

kar nam omogoča izraziti  $\tilde{I}_{S_0}$  kot

$$\tilde{I}_{S_0} \equiv g^{(\tilde{y}_0 - \tilde{y}_1)(e_{j_0} - e'_{j_0})^{-1}} \pmod{p}.$$

To torej pomeni, da  $A$  lahko izračuna diskretni logaritem  $\tilde{I}_{S_0}$  kot  $(\tilde{y}_0 - \tilde{y}_1)(e_{j_0} - e'_{j_0})^{-1}$ . Še vedno pa nismo pri koncu, saj to ni diskretni logaritem, ki nas zanima. Če podpisnike iz  $S_0$  označimo  $S_0 = \{P_{i_1}, \dots, P_{i_l}\}$ , potem je

$$\tilde{I}_{S_0} = \prod_{j=1}^l I_{i_j},$$

kjer je vrednost, katere diskretni logaritem želimo izračunati,  $I_i$ , nujno ena izmed  $I_{i_j}$ , saj mora biti del skupine  $S_0$ .  $A$  mora sedaj pridobiti diskretne logaritme vseh ostalih  $I_{i_j}$  in jih odšteti iz diskretnega logaritma  $\tilde{I}_{S_0}$ . Tu uporabimo dejstvo, da mora  $P_i$  med generiranjem ključev pridobiti dokaze znanja brez razkritja znanja o diskretnih logaritmihih vseh  $I_{i_j}$ , razen za  $i_j = i$ . Ker te dokaze prejme  $P_i$ , jih mora zanj generirati napadalec  $\mathcal{F}$ . Tu lahko ponovno uporabimo lemo o razcepu 5.12, prek katere  $A$  lahko previje napadalca in prejme diskretni logaritem  $s_{i_j}$ , katerega znanje dokazuje  $\mathcal{F}$ . Ker vsi podpisniki za dokaz uporabijo enak izziv  $H_3(X_1, I_1, \dots, X_L, I_L)$ , se mora zgoditi samo en razcep.

Vprašanje, ki ostane, je časovna zahtevnost algoritma  $A$ . Standardne operacije podpisovanja so polinomske v varnostnem parametru  $k$ , zato so polinomske tudi za  $A$ . Prav tako so učinkoviti odgovori na zgoščevalne poizvedbe. Najbolj časovno zahteven del so previjanja, ki jih je lahko  $q_H$  za vsak podpis in generiranje ključev. Časovna zahtevnost  $A$  je torej proporcionalna  $q_H$ , ker pa je  $\mathcal{F}$  omejen s polinomskim časom, je tudi časovna zahtevnost  $A$  polinomska v  $k$ .

Verjetnost uspeha algoritma  $A$  je obratno proporcionalna polinomu v  $q_H$ , torej tudi v  $k$ .  $A$  je torej res polinomski algoritem, ki z nezanemarljivo verjetnostjo vrne odgovor na problem diskretnega algoritma. Ker predpostavljamo, da tak algoritem ne obstaja, je večstranski Schnorrov podpis varen.

**TODO: OPOMBA O PARALELNEM PODPISOVANJU - FORKING**

## LEMMA GA NE DOPUŁČA

**TODO: ČASOVNA ZAHTEVNOST IN VERJETNOST USPEHA: POVEZAVA MED QH IN K (POLINOMSKA?)**

## 6 Varnost večstranskih podpisov v splošnem

Potreba po učinkovitosti je pripeljala avtorje do podpisov, ki potrebujejo le dva kroga. Potem je Drijvers pokazal, da so vse take sheme nevarne.

## 7 MuSig2

Zaradi nedavne popularizacije Schnorrovega podpisa se je zelo veliko dela vložilo v razvoj večstranskega podpisa, ki vrača popolnoma enake podpise, kot navaden Schnorrov podpis in je hkrati preverljiv z navadno Schnorrovo enačbo za preverjanje podpisov (3.1).

Prva izboljšava v primerjav z zgoraj definiranim podpisom je bila odstranitev enega izmed krogov podpisovanja. To predstavlja bistveno izboljšavo pri hitrosti podpisovanja, saj je komunikacija med podpisniki daleč najdražja operacija. Prvih nekaj poskusov se je izkazalo za dokazljivo nevarne (vsaj z uporabo standardnih metod) [5]. Z uporabo vpogledov iz dokaza pa je Jonasu, Ruffingu in Seurinu [8] uspelo narediti podpis, ki lahko enostavno zamenja Schnorrovega, je učinkovit in dokazano varen v modelu slučajnega oraklja.

### 7.1 Konstrukcija

Podpis MuSig2 temelji na enaki naivni shemi, kot večstranski Schnorrov podpis. Večstranski Schnorrov podpis je glavno težavo naivne konstrukcije, torej napad na generiranje ključev, reševal z zahtevo po priložitvi dokaza znanja brez razkritja znanja o privatnih ključih posameznikov. To je pomenilo velike izgube, kar se tiče učinkovitosti podpisovanja in velikosti ključev.

## Literatura

- [1] D. Boneh in V. Shoup, *A graduate course in applied cryptography*, Stanford University, Stanford, 2023.
- [2] C. P. Schnorr, *Efficient identification and signatures for smart cards*, v: Advances in Cryptology — CRYPTO' 89 Proceedings (ur. G. Brassard), Springer New York, New York, NY, 1990, str. 239–252.
- [3] J.-J. Quisquater in dr. *How to explain zero-knowledge protocols to your children*, v: Advances in Cryptology — CRYPTO' 89 Proceedings (ur. G. Brassard), Springer New York, New York, NY, 1990, str. 628–631.
- [4] D. Chaum in E. van Heyst, *Group signatures*, v: Advances in Cryptology — EUROCRYPT '91 (ur. D. W. Davies), Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1991, str. 257–265.
- [5] M. Drijvers in dr. *On the security of two-round multi-signatures*, v: 2019 IEEE Symposium on Security and Privacy (SP), 2019, str. 1084–1101, DOI: 10.1109/SP.2019.00050.
- [6] D. Pointcheval in J. Stern, *Security proofs for signature schemes*, v: Advances in Cryptology — EUROCRYPT '96 (ur. U. Maurer), Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1996, str. 387–398.
- [7] S. Micali, *Computationally sound proofs*, SIAM Journal on Computing **30**(4) (2000) 1253–1298, DOI: 10.1137/S0097539795284959, eprint: <https://doi.org/10.1137/S0097539795284959>, dostopno na <https://doi.org/10.1137/S0097539795284959>.
- [8] J. Nick, T. Ruffing in Y. Seurin, *MuSig2: Simple Two-Round Schnorr Multi-Signatures*, Cryptology ePrint Archive, Paper 2020/1261, 2020, DOI: 10.1007/978-3-030-84242-0\_8, dostopno na <https://eprint.iacr.org/2020/1261>.
- [9] Nikhil, P. Mortensen in Jesse, *Specifying the depth of a binary tree on the side*, [ogled 25.10.2024], dostopno na <https://tex.stackexchange.com/questions/176513/specifying-the-depth-of-a-binary-tree-on-the-side>.
- [10] A. Fiat in A. Shamir, *How to prove yourself: practical solutions to identification and signature problems*, v: Advances in Cryptology — CRYPTO' 86 (ur. A. M. Odlyzko), Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1987, str. 186–194.
- [11] S. Micali, K. Ohta in L. Reyzin, *Accountable-subgroup multisignatures*, v: Proceedings of the 8th ACM conference on Computer and Communications Security (ur. P. Samarati), ACM, Philadelphia, PA, USA, 2001, str. 245–254, DOI: 10.1145/501983.502017, dostopno na <https://doi.org/10.1145/501983.502017>.
- [12] D. R. Stinson in M. B. Paterson, *Cryptography: theory and practice*, Textbooks in Mathematics, CRC Press, 2018.

- [13] M. Tibouchi, *Attacks on schnorr signatures with biased nonces*, v: NTT Secure Platform Laboratories, ECC Workshop, 2017.
- [14] D. Boneh, *Aggregate signatures*, v: Encyclopedia of Cryptography and Security (ur. H. C. A. van Tilborg in S. Jajodia), Springer US, Boston, MA, 2011, str. 27–27, DOI: 10.1007/978-1-4419-5906-5\_139, dostopno na [https://doi.org/10.1007/978-1-4419-5906-5\\_139](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-5906-5_139).
- [15] *United States Declaration of Independence*, [ogled 30.10.2024], dostopno na [https://en.wikipedia.org/wiki/United\\_States\\_Declaration\\_of\\_Independence](https://en.wikipedia.org/wiki/United_States_Declaration_of_Independence).
- [16] *Zero-knowledge proof*, [ogled 9.9.2024], dostopno na [https://en.wikipedia.org/wiki/Zero-knowledge\\_proof](https://en.wikipedia.org/wiki/Zero-knowledge_proof).