# Kako se skupina podpiše?

Tim Kalan

Mentor: doc. dr. Tilen Marc

27. maj 2024

# Zakaj potrebujemo podpise?

- Mislim, da si lahko predstavljate ...
- Avtentikacija, integriteta
- Bančništvo, e-pošta, `ssh`, ...

# Kaj je podpis?

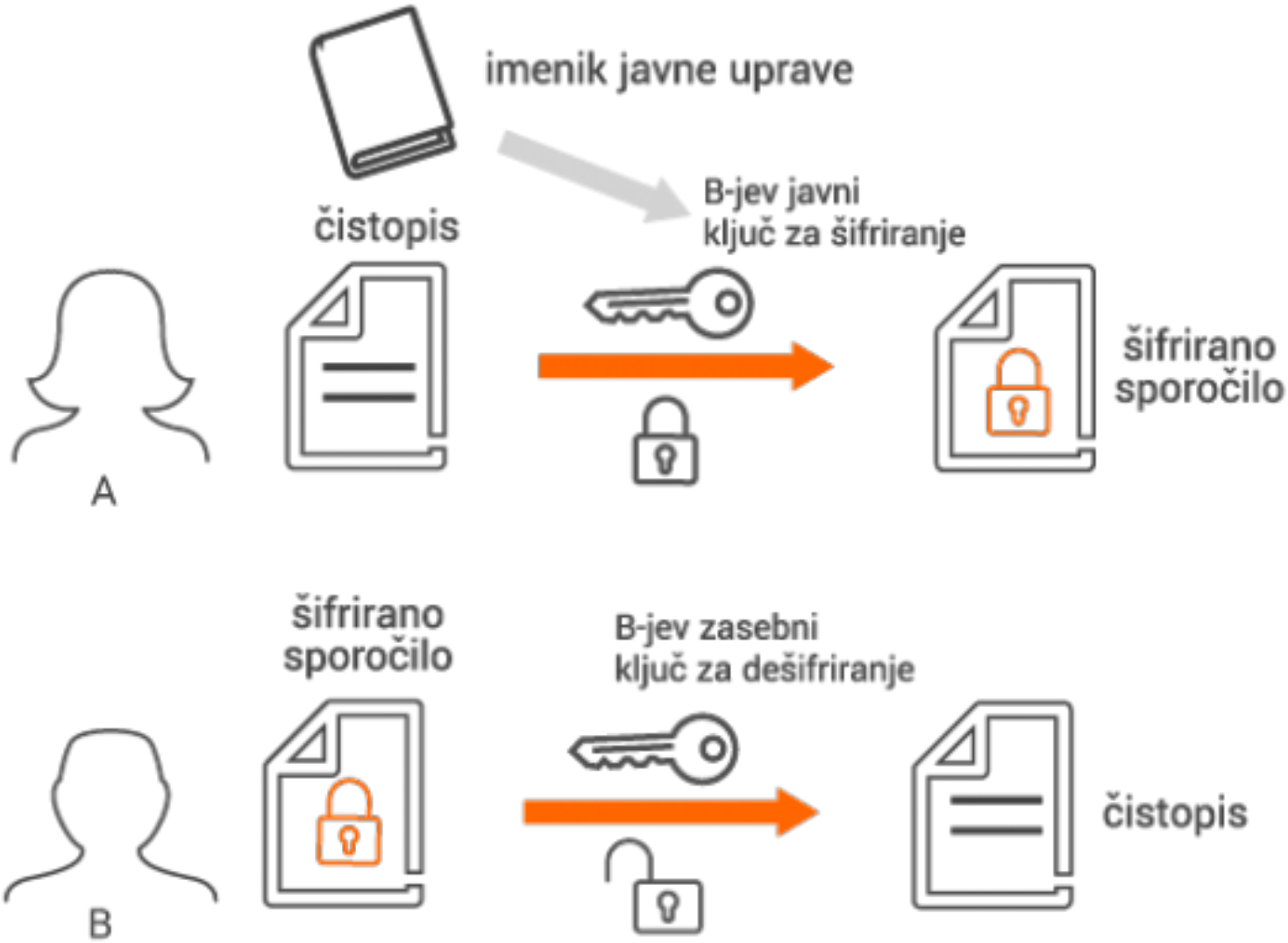
**Ročni podpis**

- Vsakič (približno) enak
- Enostavno ponarediti
- Težko (zares) preveriti

**Digitalni podpis**

- Vsakič unikaten
- Težko ponarediti
- Enostavno preveriti

# Kriptografija javnega ključa 1



# Kriptografija javnega ključa 2

# Zgostitvene funkcije

- Psevdonaključne funkcije
- Enosmerne
- »Enostavno« izračunljive

```
SHA-256(Ljubljana) =
b7f147d8b4a6703a951336654355071f
9752385f85d0860379e99b484aee7a82
SHA-256(Ljubljena) =
995d2d8ffb40e1838219e65dd2c66570
1ba34a90e11f7195a4b791838b6787fe
```

- Naključni oraklji

# Primer digitalnega podpisa: RSA

Odličen primer za spoznavanje osnovnih konceptov:

- Generiranje ključev
- Podpisovanje
- Preverjanje

# RSA

## Generiranje ključev

- Izberemo dve veliki praštevili $p$ in $q$ (kako?)
- Izračunamo $n = pq$ in $\phi(n) = (p-1)(q-1)$
- Izberemo $e$ tako, da je $1 < e < \phi(n)$ in $\gcd(e, \phi(n)) = 1$
- Izračunamo $d$ tako, da je $ed \equiv 1 \pmod{\phi(n)}$

**Javni ključ**: $(n, e)$

**Zasebni ključ**: $d(+p, q)$

# RSA

## Podpisovanje in preverjanje

- Sporočilo $m$ podpišemo tako, da izračunamo $s = m^d \bmod n$
- Podpis je par $(m, s)$

- Preverimo tako, da izračunamo $m' = s^e \bmod n$
- Podpis je pravilen, če je $m' = m$

# RSA

## Primer

- $p = 61, q = 53, n = 61 \cdot 53 = 3233, \phi(n) = 60 \cdot 52 = 3120$
- $e = 17, d = 2753$
- Sporočilo $m = 42$
- Podpis $s = 42^{2753} \bmod 3233 = 2464$
- Preverimo $m' = 2464^{17} \bmod 3233 = 42$

# Kako se skupina podpiše?

**Skupina**:

$$G = P_1, P_2, \ldots, P_L$$
$$S \subseteq G$$

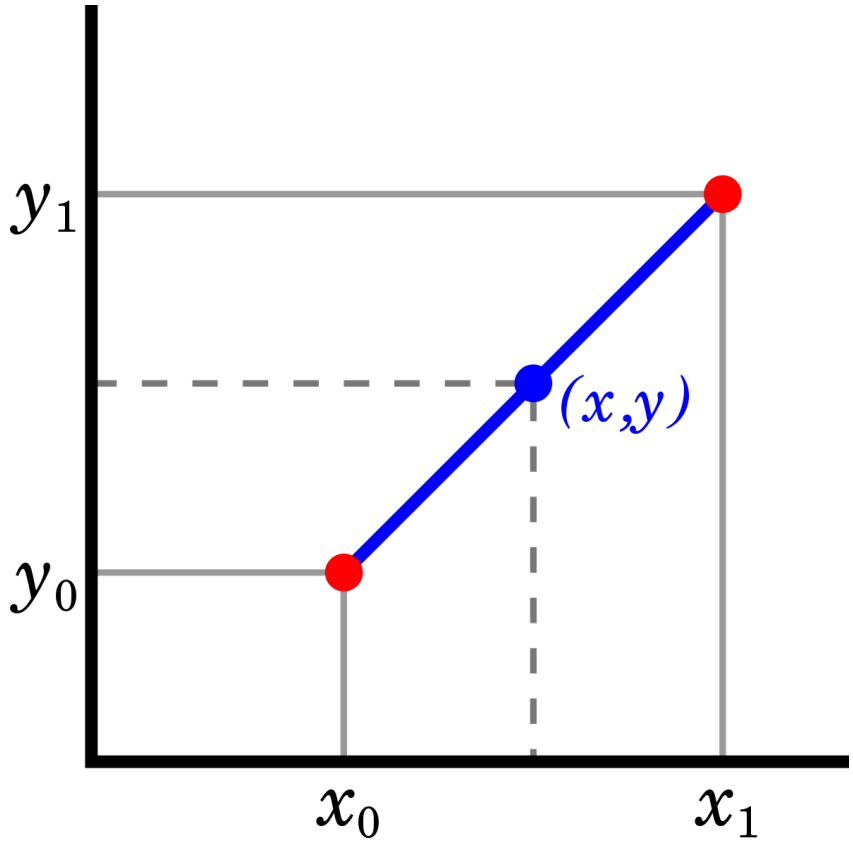
- **Prilagodljivost** (angl. *flexibility*)
- **Odgovornost** (angl. *accountability*)

# Skupinski podpisi (angl. *group signatures*)

- Anonimen podpis v imenu skupine
- Ni prilagodljivosti
- Delna odgovornost (vodja skupine)
- Primer: Upravni odbor, kjer je generalni direktor vodja

# Pragovni podpisi (angl. *threshold signatures*)

- $t$-od-$L$ shema
- Zmerna prilagodljivost
- Ni odgovornosti
- Primer: Sef, ki ga lahko odklene nekaj lastnikov



# Naivni pristop

- Želimo si prilagodljivost in odgovornost
- Vsak član $S$ podpiše $(M, S) \to \sigma_i$
- Kot na papirju
- Primer: Ponudniki cen na omrežju Flare

Težava?

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8, \sigma_9, \sigma_{10}, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{14}, \sigma_{15}, \ldots$

# Skupni podpisi (angl. *multisignatures*)

- Skupina vrne samo en podpis
- Prilagodljivost in odgovornost
- Naivna ideja + učinkovitost
- Primer: Podpisovanje peticij

# Schnorrov podpis

## Generiranje ključev

- $p, q \in \mathbb{P}$, $q \mid p - 1$
- $g \in \mathbb{Z}_p^*$, $g^q \equiv 1 \pmod{p}$, torej $\operatorname{ord}(g) = q$
- $s \in [0, q - 1]$
- $I = g^s \bmod p$

**Javni ključ**: $(p, q, g, I)$ **Zasebni ključ**: $s$

# Schnorrov podpis

## Podpisovanje in preverjanje

- Podpis sporočila $M$ je par $(X, y)$
- $r \in [0, q-1]$
- $X = g^r \bmod p$
- $e = H(X, M)$
- $y = es + r \bmod q$

- Preverimo, če je $(X', y')$ veljaven podpis za $M$
- $e' = H(X', M)$
- $g^{y'} \stackrel{?}{\equiv} X' \cdot I^{e'} \pmod{p}$

# Začetna ideja

## Osnovni pojmi

- Skupina $G = P_1, P_2, \ldots, P_L$
- Podmnožica podpisnikov $S$ je znana vnaprej, poljubna
- Vsi v skupini imajo dostop do naključnega oraklja $H$
- Napadalec:
  - Ima dostop do $H$
  - Kontrolira vse komunikacijske kanale
  - Cilj: ponarediti podpis

# Začetna ideja

## Generiranje ključev

- Vsi v skupini poznajo $p, q$ in $g$
- Vsak podpisnik $P_i$:

$$s_i \in [0, q-1]$$
$$I_i = g^{s_i} \bmod p$$

**Javni ključi**: $(p, q, g, I_i)$ **Zasebni ključi**: $s_i$

# Začetna ideja

## Podpisovanje

$$r_i \in [0, q-1]$$
$$X_i = g^{r_i} \bmod p$$

$$\downarrow$$

$$\tilde{X} = \prod_{P_i \in S} X_i \bmod p$$

$$\downarrow$$

$$e = H(\tilde{X}, M, S)$$
$$y_i = es_i + r_i \bmod q$$

$$\downarrow$$

$$\tilde{y} = \sum_{P_i \in S} y_i \bmod q$$

# Začetna ideja

## Preverjanje

- Preverimo, če je $(\tilde{X}', \tilde{y}')$ veljaven podpis za $M$
- $e' = H(\tilde{X}', M, S)$
- $g^{\tilde{y}'} \stackrel{?}{\equiv} \tilde{X}' \cdot (\prod_{P_i \in S} I_i)^{e'} \pmod{p}$

# Problem 1

## Skupni parametri

- Kako generiramo $p, q, g$?
- Če si pomagamo z orakljem, to pozna tudi napadalec

- **Rešitev**: Del DLP, varna praštevila

# Problem 2

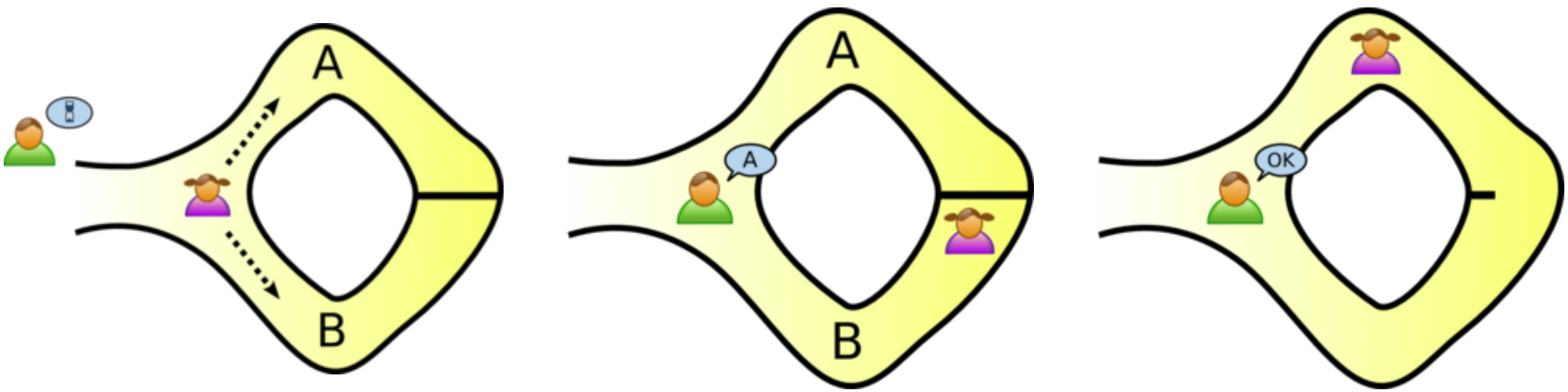
$I_A = g^{s_A} \bmod p$

- Napadalec goljufa pri izračunu $I_A$
- Lahko podpisuje v imenu skupine

- **Rešitev**: Dokaz brez razkritja znanja, potrebno preverjanje vsakega javnega ključa

# Dokazi brez razkritja znanja

- Dokaz, da nekaj vemo, ne da bi razkrili kaj vemo
- Interaktivni protokol



# Fiat-Shamirjeva hevristika

- Pretvorba interaktivnega dokaza v neinteraktivnega
- Interaktivnost zamenja naključni orakelj
- Če oraklji ne obstajajo, hevristika ni varna

# (Ne)interaktivni dokaz

- A: Poznam $x$, da $y \equiv g^x \bmod q$
- A: Naključni $v$, da $t \equiv g^v \bmod q$
- A: Pošlje $t$

- B: Naključni $c$, pošlje A
- A: Izračuna $c = H(g, y, t)$

- A: Pošlje $r = v - cx \bmod \varphi(q)$ B
- B: Preveri $t \stackrel{?}{\equiv} g^r y^c \bmod q$

# Problem 3

## Preverjanje dokazov

- Kdo preverja dokaze brez razkritja znanja?
- **Rešitev**: Dokaz brez razkritja znanja del javnega ključa

# Problem 4

## Velikost $S$

- Število podpisnikov omejeno
- Tehnikalije v dokazu varnosti

- **Rešitev**: Podpis $\sigma_i$ sporočila $H(X_1, I_1, X_2, I_2, \ldots, X_L, I_L)$

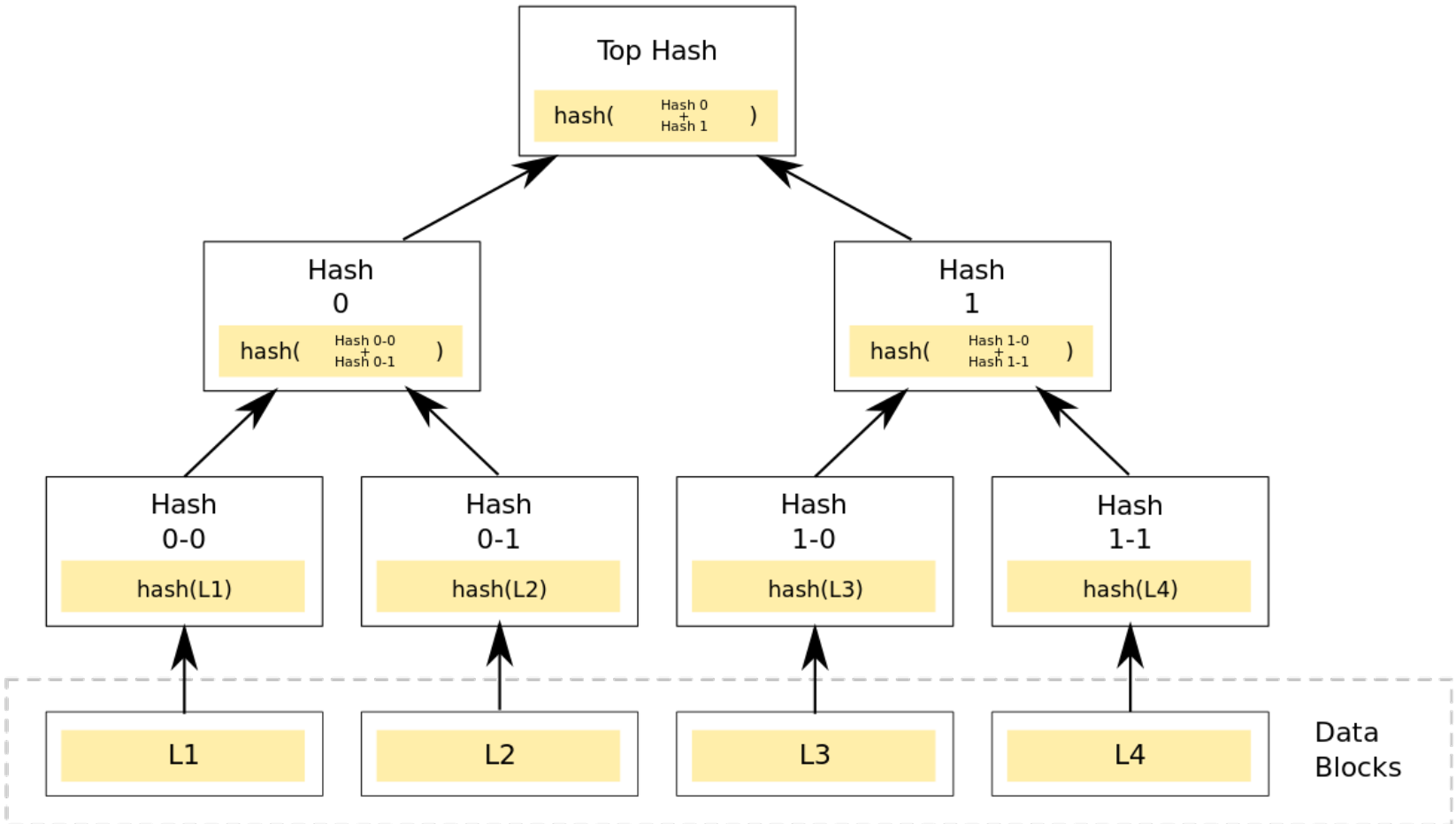
# Problem 5

## Velikost ključa

- V ključ moramo torej dati $\sigma_i$ in $X_1, I_1, X_2, I_2, \ldots X_L, I_L$
- Predolg ključ, proporcionalen velikosti $G$

- **Rešitev**: Merklovo drevo z listi $I_1, I_2, \ldots, I_L$

# Merklova drevesa



# Problem 6

## Sočasno podpisovanje

- Dokaz varnosti uporablja previjanje (angl. *rewinding*)
- **Rešitev**: Ne dovolimo sočasnega podpisovanja

# Končna shema

# Varnost