Skupinsko generirani podpisi

Tim Kalan

Mentor: doc. dr. Tilen Marc

27. maj 2024

Kaj je podpis?

Ročni podpis

- Vsakič (približno) enak
- Enostavno ponarediti
- Težko (zares) preveriti

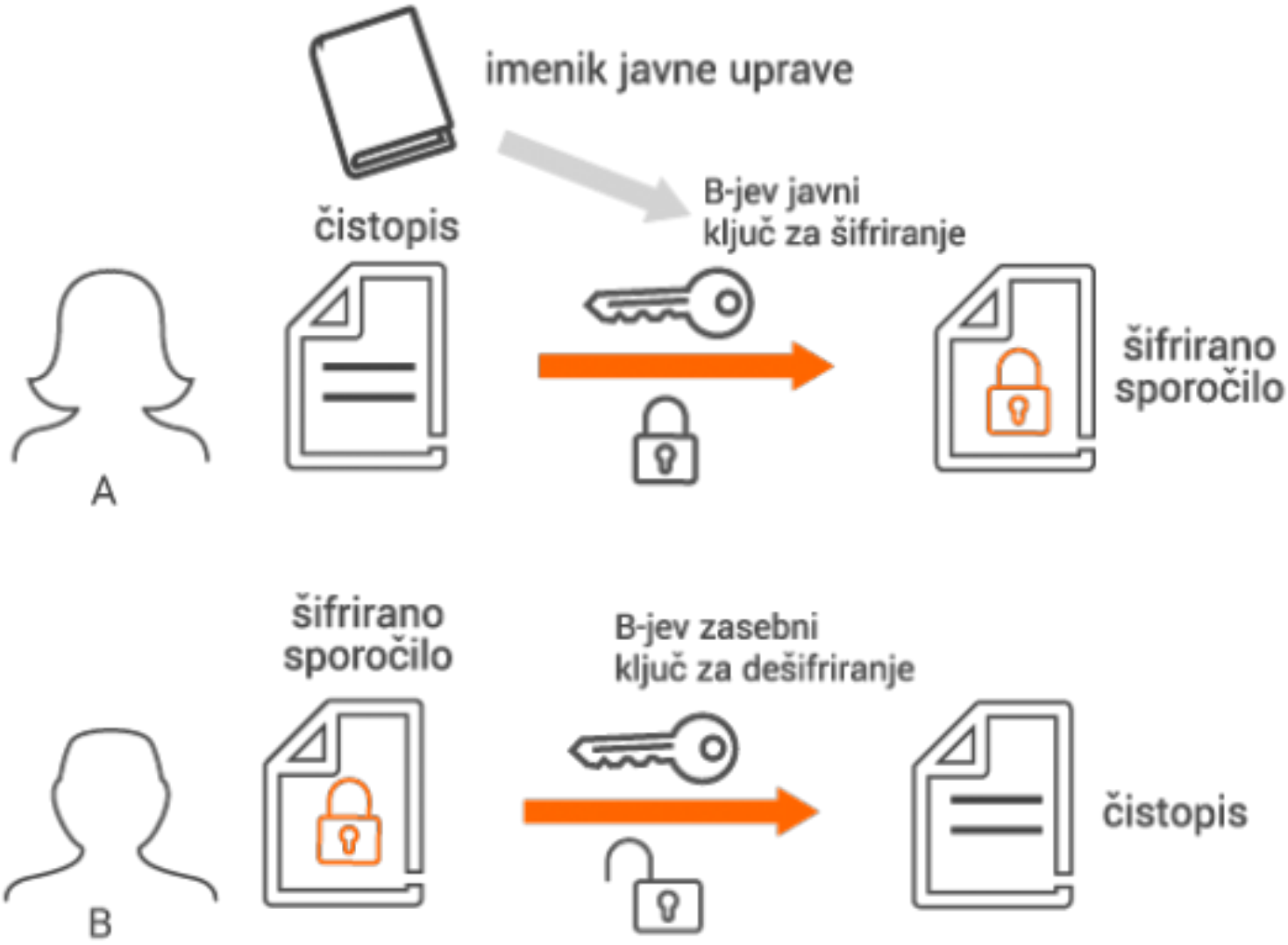
Digitalni podpis

- Vsakič unikaten
- Težko ponarediti
- Enostavno preveriti

Zakaj potrebujemo podpise?

- Avtentikacija
- Integriteta
- Bančništvo, e-pošta, `ssh`, ...

Kriptografija javnega ključa 1



Kriptografija javnega ključa 2

Zgostitvene funkcije

- Psevdonaključne funkcije
- Enosmerne
- »Enostavno« izračunljive

```
SHA-256(Ljubljana) =
b7f147d8b4a6703a951336654355071f
9752385f85d0860379e99b484aee7a82
SHA-256(Ljubljena) =
995d2d8ffb40e1838219e65dd2c66570
1ba34a90e11f7195a4b791838b6787fe
```

- Slučajni oraklji

Modularna aritmetika

- Kongruenca: $a \equiv b \pmod{m} \iff m \mid a - b$
- Grupa $\mathbb{Z}_p^*$
- Red elementa: $\text{ord}(g) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid g^n \equiv 1 \pmod{p}\}$
- Diskretni logaritem: $g^x \equiv h \pmod{p}, x = ?$

$$
\begin{aligned}
2^1 &\equiv 2 \pmod{11} & 2^6 &\equiv 9 \pmod{11} \\
2^2 &\equiv 4 \pmod{11} & 2^7 &\equiv 7 \pmod{11} \\
2^3 &\equiv 8 \pmod{11} & 2^8 &\equiv 3 \pmod{11} \\
2^4 &\equiv 5 \pmod{11} & 2^9 &\equiv 6 \pmod{11} \\
2^5 &\equiv 10 \pmod{11} & 2^{10} &\equiv 1 \pmod{11}
\end{aligned}
$$

Primer digitalnega podpisa: Schnorrov podpis

Odličen primer za spoznavanje osnovnih konceptov:

- Generiranje ključev
- Podpisovanje
- Preverjanje

Schnorrov podpis

Generiranje ključev

- p, q veliki praštevili, $q \mid p - 1$
- $g \in \mathbb{Z}_p^*$, $\text{ord}(g) = q$, torej $g^q \equiv 1 \pmod{p}$
- $s \in [0, q - 1]$
- $I = g^s \bmod p$

Javni ključ: (p, q, g, I) **Zasebni ključ**: s

Schnorrov podpis

Podpisovanje in preverjanje

- Podpis sporočila M je par (X, y)
- $r \in [0, q-1]$
- $X = g^r \bmod p$
- $e = H(X, M)$
- $y = es + r \bmod q$

- Preverimo, če je (X', y') veljaven podpis za M
- $e' = H(X', M)$
- $g^{y'} \stackrel{?}{\equiv} X' \cdot I^{e'} \pmod{p}$
  - $g^{y'} \equiv g^{es+r} \pmod{p}$
  - $X' \cdot I^{e'} \equiv g^r \cdot (g^s)^e \pmod{p}$

Kako se skupina podpiše?

Skupina:

$$G = P_1, P_2, \ldots, P_L$$
$$S \subseteq G$$

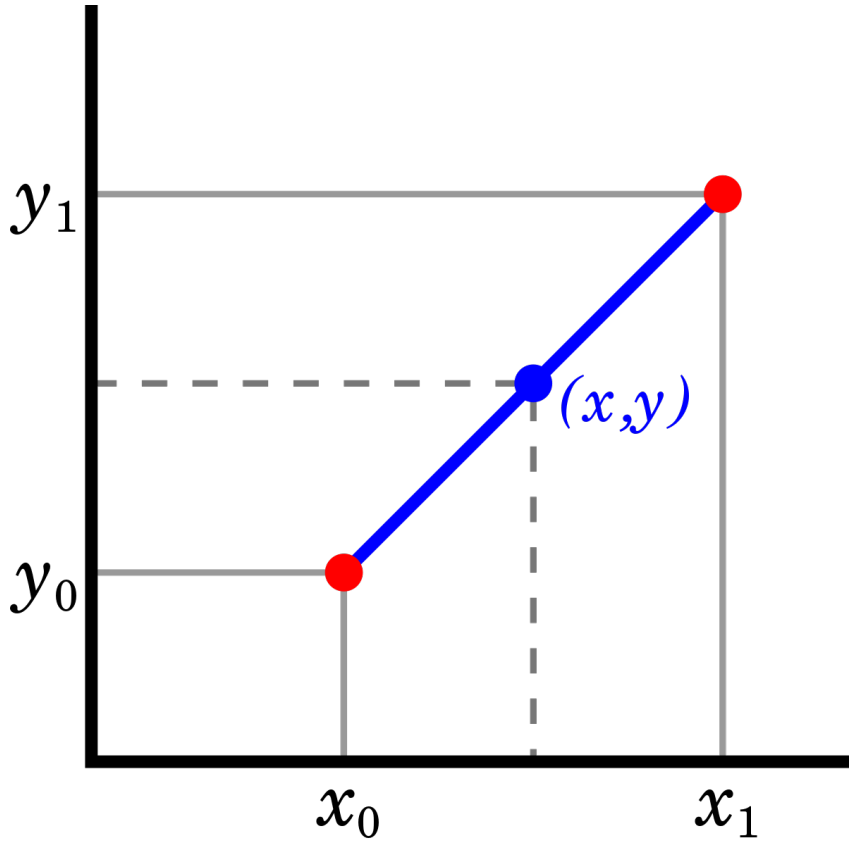
- **Prilagodljivost** (angl. *flexibility*)
- **Odgovornost** (angl. *accountability*)

Skupinski podpisi (angl. *group signatures*)

- Anonimen podpis v imenu skupine
- Ni prilagodljivosti
- Delna odgovornost (vodja skupine)
- Primer: Upravni odbor, kjer je generalni direktor vodja

Pragovni podpisi (angl. *threshold signatures*)

- t-od-L shema
- Zmerna prilagodljivost
- Ni odgovornosti
- Primer: Sef, ki ga lahko odklene nekaj lastnikov



Naivni pristop

- Želimo si prilagodljivost in odgovornost
- Vsak član S podpiše $(M, S) \to \sigma_i$
- Kot na papirju
- Primer: Ponudniki cen na omrežju Flare

Težava?

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8, \sigma_9, \sigma_{10}, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{14}, \sigma_{15}, \ldots$

Večstranski podpisi (angl. *multisignatures*)

- Skupina vrne samo en podpis
- Prilagodljivost in odgovornost
- Naivna ideja + učinkovitost (dolžina, preverjanje)
- Cena: komunikacija, čas podpisovanja, generiranje ključa
- Primer: Podpisovanje peticij

Začetna ideja

Osnovni pojmi

- Skupina $G = P_1, P_2, \ldots, P_L$
- Podmnožica podpisnikov S je znana vnaprej, poljubna
- Vsi v skupini imajo dostop do slučajnega oraklja H
- Napadalec:
  - Ima dostop do H
  - Kontrolira vse komunikacijske kanale
  - Cilj: ponarediti podpis

Začetna ideja

Generiranje ključev

- Vsi v skupini poznajo p, q in g
- Vsak podpisnik P_i:

$$s_i \in [0, q-1]$$
$$I_i = g^{s_i} \bmod p$$

Javni ključi: (p, q, g, I_i) **Zasebni ključi**: s_i

Začetna ideja

Podpisovanje

$$r_i \in [0, q-1]$$
$$X_i = g^{r_i} \bmod p$$

$$\downarrow$$

$$\tilde{X} = \prod_{P_i \in S} X_i \bmod p$$

$$\downarrow$$

$$e = H(\tilde{X}, M, S)$$
$$y_i = e s_i + r_i \bmod q$$

$$\downarrow$$

$$\tilde{y} = \sum_{P_i \in S} y_i \bmod q$$

Začetna ideja

Preverjanje

- Preverimo, če je $(\tilde{X}', \tilde{y}')$ veljaven podpis za M
- $e' = H(\tilde{X}', M, S)$
- $g^{\tilde{y}'} \stackrel{?}{\equiv} \tilde{X}' \cdot (\prod_{P_i \in S} I_i)^{e'} \pmod{p}$

Problem 1

Skupni parametri

- Kako generiramo p, q, g?
- Če si pomagamo z orakljem, to pozna tudi napadalec

- **Rešitev**: Del DLP, varna praštevila

Generiranje skupnih parametrov p, q, g

- Vsem je dostopen orakelj H in varnostni parameter k
- Za naključno generiranje $H^*(2^k), H^*(2^k + 1), H^*(2^k + 2), \ldots$

while True **do**
    $q \leftarrow$ random k-bit string
    $p \leftarrow 2q + 1$
    if p is prime and q is prime **then return** p, q

- Preverjanje praštevil?

Problem 2

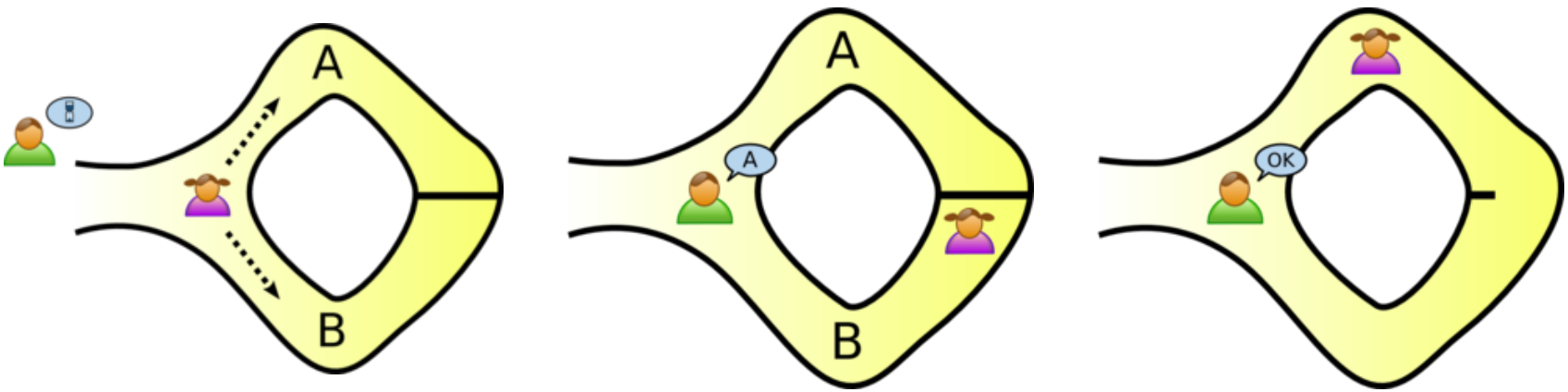
$I_A = g^{s_A} \bmod p$

- Napadalec goljufa pri izračunu javnega ključa I_A
- Lahko podpisuje v imenu skupine

- **Rešitev**: Dokaz brez razkritja znanja, potrebno preverjanje vsakega javnega ključa

Dokazi brez razkritja znanja

- Dokaz, da nekaj vemo, ne da bi razkrili kaj vemo
- Interaktivni protokol



Fiat-Shamirjeva hevristika

- Pretvorba interaktivnega dokaza v neinteraktivnega
- Interaktivnost zamenja slučajni orakelj
- Če oraklji ne obstajajo, hevristika ni varna

(Ne)interaktivni dokaz

- A: Pozna x, da $y \equiv g^x \bmod q$
- A: Naključni v, da $t \equiv g^v \bmod q$
- A: Pošlje t osebi B

- B: Naključni c, pošlje A
- A: Izračuna $c = H(g, y, t)$

- A: Pošlje $r = v - cx \bmod \varphi(q)$ osebi B
- B: Preveri $t \stackrel{?}{\equiv} g^r y^c \bmod q$

Problem 3

Preverjanje dokazov

- Kdo preverja dokaze brez razkritja znanja?
- Kje so sploh dostopni?

- **Rešitev**: Dokaz brez razkritja znanja del javnega ključa (daljši ključi, dražje preverjanje podpisov)

Problem 4

Velikost S

- Število podpisnikov omejeno
- Tehnikalije v dokazu varnosti

- **Rešitev**: Podpis σ_i sporočila $H(X_1, I_1, X_2, I_2, \ldots, X_L, I_L)$

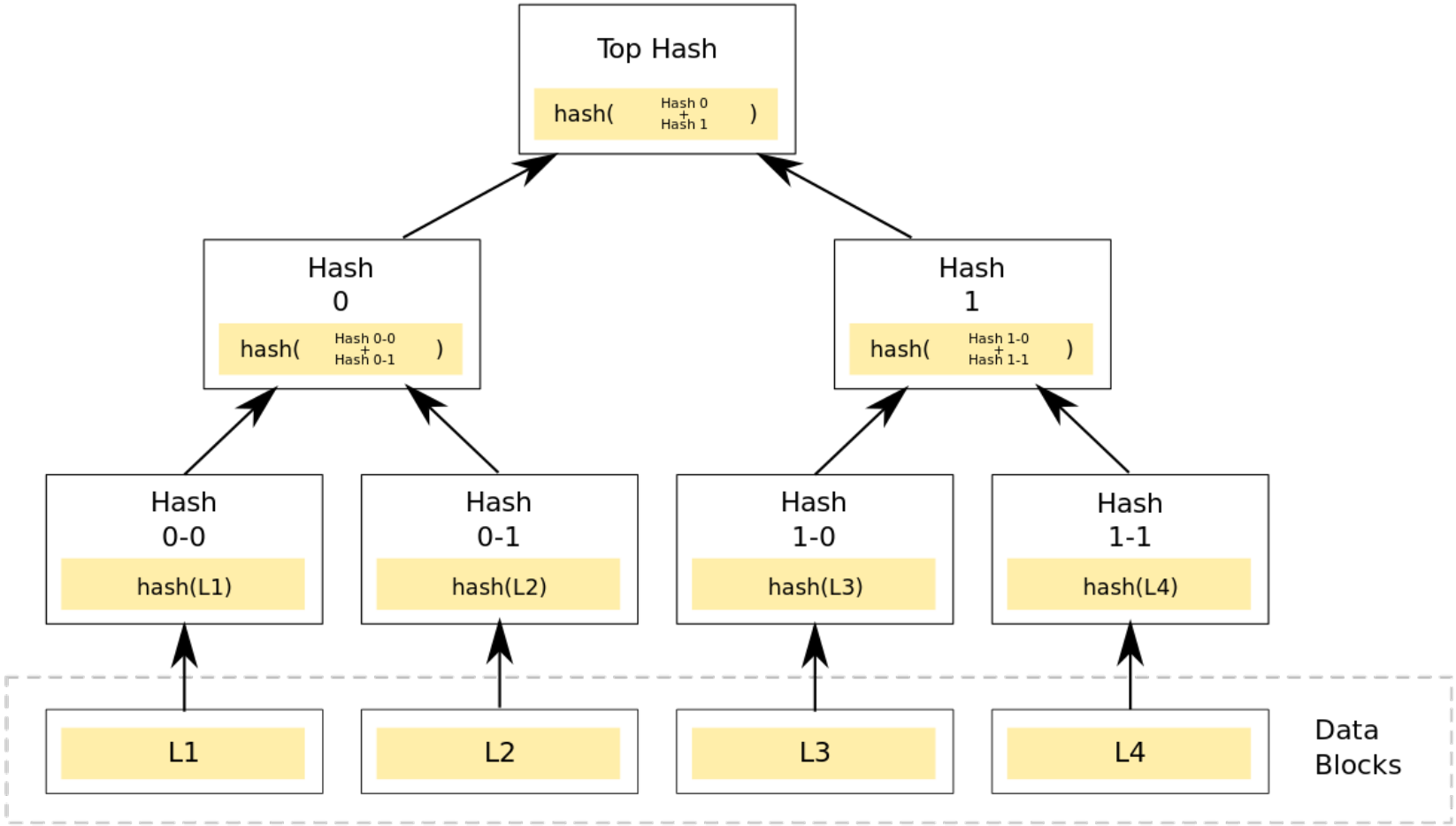
Problem 5

Velikost ključa

- V ključ moramo torej dati σ_i in $X_1, I_1, X_2, I_2, \ldots X_L, I_L$
- Predolg ključ, proporcionalen velikosti G

- **Rešitev**: Merklovo drevo z listi $I_1, I_2, \ldots, I_L$, v ključu samo I_i in avtentikacijska pot

Merklova drevesa



Problem 6

Sočasno podpisovanje

- Dokaz varnosti uporablja previjanje (angl. *rewinding*)
- Previjanje je potovanje nazaj v času

- **Rešitev**: Ne dovolimo sočasnega podpisovanja

Varnost

Za vsako konstanto $c > 0$ in varnostni parameter k, ne obstaja napadalec, ki lahko v času, polinomskem v k, z verjetnostjo več kot k^{-c} vrne trojico (σ, M, S), da:

- σ je podpis sporočila M s strani skupine S,
- Obstaja iskren podpisnik $P \in S$, od katerega napadalec ni zahteval podpisa.