Kurvendiskussion I

1. *Sekantensteigung*
2. *Potenzgesetze*
3. *Funktionsgraphen (Ansicht)*
4. *Ableitungsregeln*
5. *Nullstellen*
6. *Extrema*
7. *Wendepunkte*
8. *Symmetrie*

1. Sekantensteigung:

Synonyme:

- (durchschnittliche) Änderungsrate; mittlere Änderungsrate; durchschnittliche Steigung

Anwendung:

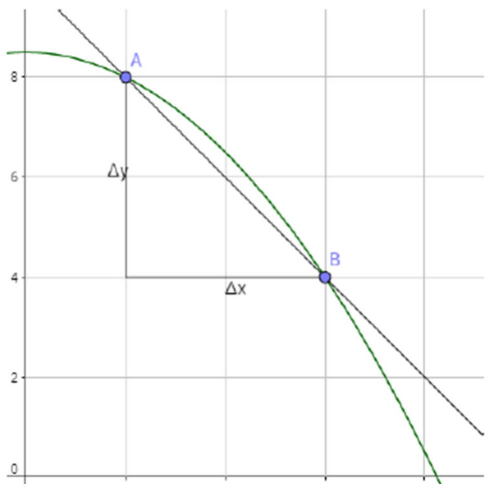
- Gibt die durchschnittliche Steigung zwischen zwei Punkten auf einer Funktion an

Herleitung:

- Gerade durch 2 Punkte, welche mit dem Steigungsdreieck berechnet werden

Berechnung:

$$m = \frac{f_1(x_1) - f_2(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



2. Potenzgesetze:

Synonyme:

- Potenzregeln

Anwendung:

- Potenzen/Wurzeln umformen und vereinfachen

Herleitung:

Berechnung:

1. $a^n * a^m = a^{n+m}$
2. $a^n / a^m = a^{n-m}$
3. $a^n * b^n = (a * b)^n$
4. $a^n / b^n = (a/b)^n$
5. $(a^n)^m = a^{n*m}$
6. $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$
7. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
8. Sonderfälle:
    a. $a^{1/2} = \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$
    b. $a^1 = a$
    c. $a^0 = 1$
    d. $\frac{1}{a} = a^{-1}$

3. Funktionsgraphen (Ansicht):

Synonyme:

- Graphen; Funktionen

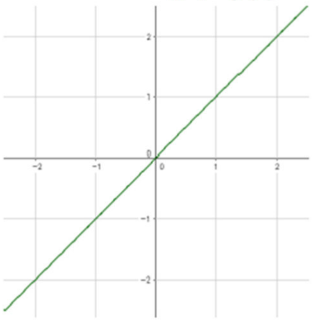
Anwendung:

- Bestimmte Funktionen erkennen und beschreiben

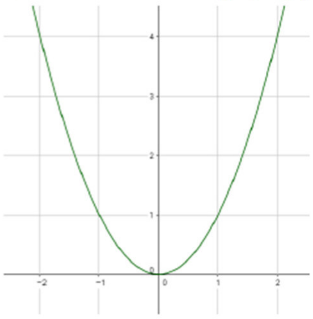
Herleitung:

Berechnung:

- Linearer Funktionsgraph: $f(x) = x$

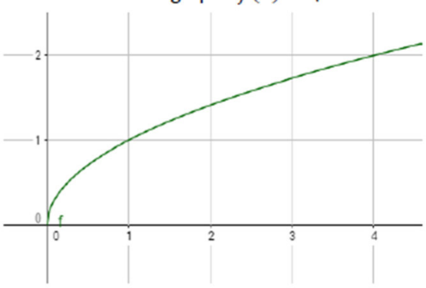


Quadratischer Funktionsgraph: $f(x) = x^2$

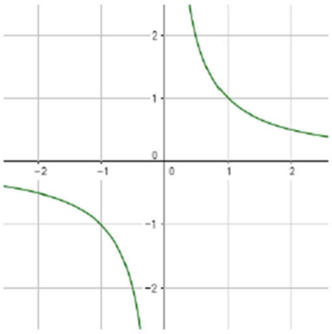


- Kubischer Funktionsgraph: $f(x) = x^3$

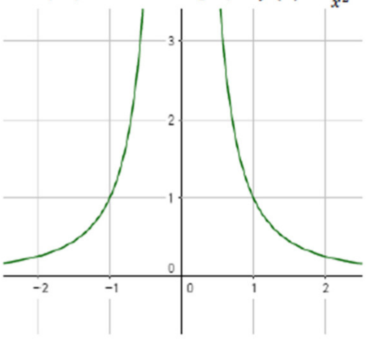
Wurzelfunktionsgraph: $f(x) = \sqrt{x}$



- Asymptotischer Funktionsgraph: $f(x) = \frac{1}{x}$



Asymptotischer Fktgraph: $f(x) = \frac{1}{x^2}$



4. Ableitungsregeln:

Synonyme:

- Ableitung; Steigungsfunktion

Anwendung:

- Bestimmte Funktionen erkennen und beschreiben

Herleitung:

Berechnung:

- $f(x) = C \rightarrow f'(x) = 0$
  - $f(x) = 2 \rightarrow f'(x) = 0$

- $f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$
  - $f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$

- $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
  - $f(x) = x^5 \rightarrow f'(x) = 5 \cdot x^{5-1}$

- $f(x) = C \cdot g(x) \rightarrow f'(x) = C \cdot g'(x)$
  - $f(x) = -4 \cdot x^5 \rightarrow f'(x) = -4 \cdot (5 \cdot x^{5-1})$

- $f(x) = g(x) \pm h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$
  - $f(x) = 4x^5 \pm x^4 \rightarrow f'(x) = 20x^4 \pm 4x^3$

- $f(x) = g(x) \cdot h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$
  - $f(x) = x^3 \cdot x^5 \rightarrow f'(x) = 3x^2 \cdot x^5 + x^3 \cdot 5x^4$

- $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$
  - $f(x) = \frac{x^3}{x^5} \rightarrow f'(x) = \frac{3x^2 \cdot x^5 + x^3 \cdot 5x^4}{[x^5]^2}$

- $f(x) = g(h(x)) \rightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$
  - $f(x) = (x^4 + 5)^2 \rightarrow f'(x) = 2(x^4 + 5) \cdot 4x^3$

5. Nullstellen:

Synonyme:

- Nullpunkte, x-Achsenabschnitt

Anwendung:

- Bestimmung der Berührung der x-Achse durch den Graphen für z.B. Extrema(1.5) und Wendepunkte(1.6)

Herleitung:

- Eine Funktion f berührt die x-Achse, wenn $f(x)$=0 gilt
- also setzt man die Funktion gleich 0 und löst diese nach x auf

Berechnung:

- $f(x)$=0
- Bei quadratischen Funktionen ($f(x) = x^2 + px + q$) kann man die pq-Formel anwenden:
  - $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right) - q}$
- Eine ganzrationale Funktion n-ten Grades kann maximal n Nullpunkte haben

6. Extrema:

Synonyme:

- Extrempunkte, Extremen, Hochpunkt, Tiefpunkt, Sattelpunkt, (Lokales) Maximum, (Lokales Minimum), Höchster / Größter / Tiefster / Niedrigster Punkt

Anwendung:

- Ermittlung von Extrema eines Funktionsgraphen

Herleitung:

- Die Tangentensteigung an einem Extrempunkt beträgt immer 0, daher muss die Ableitung $f'(x)$=0 gelten
- Der Wert der zweiten Ableitung (positiv, negativ oder 0) ist charakteristisch für die jeweilige Art der Extrema

Berechnung:

1. Erste Ableitung berechnen ($f'(x)$)
2. Nullstellen der ersten Ableitung berechnen ($f'(x)$=0)
3. Zweite Ableitung berechnen ($f''(x)$)
4. Nullstellen der ersten Ableitung in die zweite Ableitung einsetzen:
   - $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ => Hochpunkt
   - $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ => Tiefpunkt
   - $f' + f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 1$ => Sattelpunkt
5. y-Koordinaten der Hochpunkte/Tiefpunkte berechnen

7. Wendepunkte:

Synonyme:

- Wendestellen

Anwendung:

- Ermittlung von Wendepunkten eines Funktionsgraphen

Herleitung:

- Jeder Wendepunkt hat einen Extrempunkt in der ersten Ableitung f', also eine Nullstelle in der zweiten Ableitung f''
- Der Wert der dritten Ableitung gibt an, ob die Wendestelle von links nach rechts, oder von rechts nach links geht

Berechnung:

1. Zweite Ableitung berechnen ($f''(x)$)
2. Nullstellen der zweiten Ableitung berechnen ($f''(x)$=0)
3. Dritte Ableitung berechnen ($f'''(x)$)
4. (Die berechneten x-Werte (2.) in die dritte Ableitung einsetzen)

   - $f'''(x) \neq 0$ => Wendepunkt
5. Die berechneten x-Werte in die Funktion f(x) einsetzen, um die y-Koordinaten der Wendepunkte zu berechnen

8. Symmetrie:

Synonyme:

- Spiegelung an der Achse; Spiegelung am Punkt; Punktsymmetrisch; Achsensymmetrisch

Anwendung:

- Symmetrische Ähnlichkeiten einer Funktion finden

Berechnung:

- Achsensymmetrisch zur y-Achse:
  - $f(-x) = f(x)$
  - Alle ganzrationalen Funktionen mit ausschließlich geraden Exponenten
- Punktsymmetrisch zum Ursprung:
  - $f(-x) = -f(x)$
  - Alle ganzrationalen Funktionen mit ausschließlich ungeraden Exponenten
- Keine Symmetrie:
  - Alle ganzrationalen Funktionen mit geraden und ungeraden Exponenten