

Integralrechnung

1. *Stammfunktion*
2. *Integralrechnung*
3. *Integral zwischen 2 Funktionen*
4. *Uneigentliches Integral*

1. Stammfunktion:

Synonyme:

- Integration, (Aufleiten)

Anwendung:

- Berechnung der Fläche unterhalb einer Funktion.

Herleitung:

- Eine normale Funktion f wird in eine Stammfunktion F integriert. Man kann es teilweise als rücklaufende Ableitung nennen.

Berechnung:

Integrationsregeln:

- $f(x) = x^n \rightarrow F(x) = (n + 1)^{-1} \cdot x^n$
 - $\int x^3 \rightarrow \frac{1}{4}x^4 + C$
 - $\int x^4 \rightarrow \frac{1}{5}x^5 + C$
- $f(x) = a \cdot x^n \rightarrow F(x) = a \cdot (n + 1)^{-1} \cdot x^n$
 - $\int 4x \rightarrow 4 \cdot \frac{1}{2}x^2 + C \rightarrow \frac{1}{5}x^5 + C$
 - $\int 4x^2 \rightarrow 4 \cdot \frac{1}{3}x^3 + C \rightarrow \frac{4}{3}x^5 + C$
- $f(x) = ax^n + bx^m \rightarrow F(x) = a \cdot (n + 1)^{-1} \cdot x^n + b \cdot (m + 1)^{-1} \cdot x^m$
 - $\int x^3 + x^4 \rightarrow \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + C$
 - $\int 3x^2 + 4x^3 \rightarrow x^3 + x^4 + C$

2. Integralrechnung:

Synonyme:

- Integrationsrechnung, Fläche unter Funktion

Anwendung:

- Die Fläche unterhalb einer Funktion bis zur x-Achse berechnen.

Herleitung:

- Mit Hilfe der Stammfunktion kann man das Integral mit 2 Grenzen bilden: $\int_a^b f(x) dx = [f_b(x) - f_a(x)]_a^b$

Berechnung:

1. Stammfunktion bilden:

$$f(x) = x^3 - 4x \Rightarrow F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$$

2. Integral aufstellen:

$$\int_1^3 x^3 - 4x dx = [F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2]_1^3$$

3. Grenzen einsetzen und ausrechnen:

$$\left[\frac{1}{4} \cdot 3^4 - 2 \cdot 3^2 \right] - \left[\frac{1}{4} \cdot 1^4 - 2 \cdot 1^2 \right] = [2,25] - [-1,75] = 4$$

3. Integral zwischen 2 Funktionen:

Synonyme:

- Zwischenintegral

Anwendung:

- Fläche zwischen zwei Funktionen ermitteln

Herleitung:

- Um die Fläche zwischen den zwei Funktionen zu berechnen, muss man die Schnittpunkte bestimmen und die Flächen voneinander abziehen.

$$\int_a^b f_U(x) dx - \int_a^b f_O(x) dx = [f_O(x) - f_U(x)]_a^b$$
$$[f_O(b) - f_O(a) - f_U(b) - f_U(a)]$$

Berechnung:

$$f(x) = x + 2; g(x) = x^2 + x + 1$$

1. Schnittpunkte bestimmen

$$x + 2 = x^2 + x + 1$$

$$x = \pm\sqrt{1}$$

2. Integrieren (auch nur mit f(x)-g(x))

$$\left| \int_{s1}^{s2} [f(x) - g(x)] dx \right|$$

$$\left| \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_{-1}^1 \right| = \frac{4}{3}$$

4. Uneigentliches Integral:

Synonyme:

- Unbegrenzte Flächen, Uneigentliche Integration

Anwendung:

- Untersuchung von unbegrenzten Flächen mit einer variablen und einer festen Grenze.

Herleitung:

- Um die Fläche annähernd zu berechnen, wird neben der festen Grenze a auch eine variable Grenze z in die Integration gesetzt.

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \int_a^z f(x) dx = \lim_{z \rightarrow \infty} [F(z) - F(a)]_a^z$$

Berechnung:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \int_1^z \frac{1}{x^3} dx = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} z^2 - \left(-\frac{1}{2} \cdot 1^{-2} \right) \right]$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2}$$