Ebenen

1. *Parameterform*
2. *Spurpunkte*
3. *Normalenform*
4. *Koordinatenform*
5. *Hessesche Normalenform*

1. Parameterform:

Synonyme:

- Ebene im Raum in Parameterform

Anwendung:

- Eine Ebene durch einen Stützvektor $\vec{p}$ und 2 linear Unabhängige Spannvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ beschreiben

Berechnung:

Allgemeine Form: $E: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$

1. Die Spannvektoren in Abhängigkeit von $\vec{p}$ einsetzen:

$$E: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \overrightarrow{pu} + s \cdot \overrightarrow{pv}$$

2. Spurpunkte:

Synonyme:

- Schnittpunkt mit den Koordinatenachsen /-ebenen

Anwendung:

- Veranschaulichung von Ebenen

Berechnung:

Eine Ebene E geht durch die:

- x_1-Achse bei k_1, wenn gilt: $E = \begin{pmatrix} k_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- x_2-Achse bei k_2, wenn gilt: $E = \begin{pmatrix} 0 \\ k_2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- x_3-Achse bei k_3, wenn gilt: $E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_3 \end{pmatrix}$

Also bei $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow S_1(5|0|0)$$

3. Normalenform:

Synonyme:

- Ebene mit Normalvektor aufstellen; Punktberechnung

Anwendung:

- Eine andere Darstellungsweise einer Ebene mittels eines Normalenvektors

Berechnung:

Allgemeine Form: $E: \vec{x} = (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$

1. Den Normalvektor $\vec{n}$ berechnen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} => \vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. In die Gleichung einsetzen:

$$E: \vec{x} = \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

4. Koordinatenform:

Synonyme:

- Punktberechnung

Anwendung:

- Mithilfe eines Normalvektors und einem Punkt eine Ebene im Raum beschreiben

Herleitung:

- Eine Ebene wird mit einem Normalenvektor $\vec{n}$ und dem Skalarprodukt von den Vektoren $\vec{n}$ und $\vec{p}$ beschrieben

Berechnung:

Allgemeine Form: $E: \vec{x} = n_1 x_1 + \ n_2 x_2 + \ n_3 x_3 = \ \ \vec{n} * \ \vec{p}$

1. Durch Kreuzprodukt $\vec{n}$ berechnen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} => \ \vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Den Normalenvektor $\vec{n}$ einsetzen und $\vec{n} \cdot \ \vec{p}$ berechnen:

$E: \vec{x} = -2x_1 + \ x_2 = \ \ \vec{n} * \ \vec{p}$

5. Hessesche Normalenform:

Synonyme:

- Abstandsberechnung Punkt zu Ebene

Anwendung:

- Durch diese Form lässt sich sofort die Lage eines Punktes zur Ebene berechnen

Berechnung:

1. Ebene in Koordinatenform umstellen

2. Normalenvektor $\vec{n}$ ablesen

3. Ebenengleichung umstellen:

$E: \vec{x} = -2x_1 + \ x_2 = \ \ 25 \ | - 25$

$E: \vec{x} = -2x_1 + \ x_2 - 25 = 0$

3. In die Hessesche Normalenform einsetzen:

$$d = \ \left| \frac{E}{|\vec{n}|} \right|$$

$$d = \left| \frac{-2x_1 + \ x_2 - 25}{\left| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} \right|$$