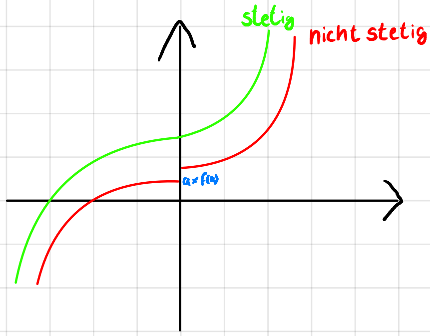
Stetigkeit von Funktionen:

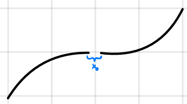
1. Definition Stetigkeit



Eine Funktion ist stetig an einem Punkt a,
wenn bei a ein Grenzwert existiert, und dieser
Funktionswert $f(a)$ übereinstimmt.

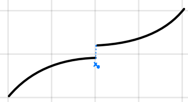
Heißt: Eine stetige Funktion ist nahtlos, die weder
Definitionslücken noch Sprungstellen besitzt.

(Hebbare) Unstetigkeitsstelle



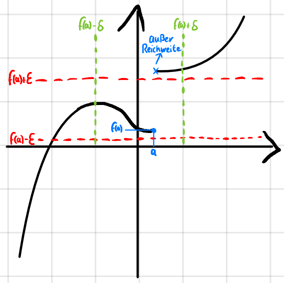
Eine hebbare Unstetigkeitsstelle ist eine Definitionslücke
bei x_0, falls diese eine Nullstelle des Zählers und des Nenners ist.

Sprungstelle



Eine Sprungstelle ist ein Sprung in $f(x_0)$, wodurch
die Funktion nicht mehr nahtlos ist.

2. Das ε-δ-Kriterium



Eine reelle Zahl A ist der Grenzwert einer Funktion,
wenn gilt:

Für jedes $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$:

$|x - a| < \delta \qquad x \in \mathbb{R}$:

$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

$f(x) = mx + b$

Bei $m = 0$ gilt: $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$, deshalb δ beliebig

Bei $m \neq 0$ gilt: $\delta := \frac{\varepsilon}{|a|}$; $|x - a| < \delta$, deshalb $|f(x) - f(a)| = |m \cdot x + b - m \cdot a - b| = |m| \cdot |x - a| < |m| \cdot \delta = \varepsilon$

3. Stetigkeitseigenschaften

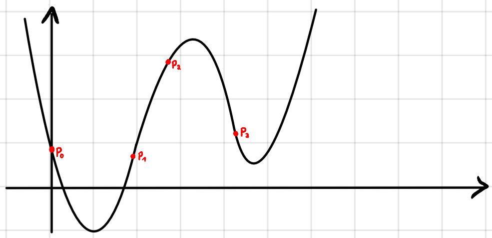
Wir nehmen an: $f(x)$ und $g(x)$ stetig in a, Konstante $K \in \mathbb{R}$

1: $h(x) = f(x) + K \quad \Rightarrow h(x)$ ist stetig in a
2: $h(x) = f(x) \cdot K \quad \Rightarrow h(x)$ ist stetig in a
3: $h(x) = f(x) + g(x) \quad \Rightarrow h(x)$ ist stetig in a
4: $h(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \Rightarrow h(x)$ ist stetig in a
5: $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \Rightarrow h(x)$ ist stetig in a für alle x: $g(x) \neq 0$

4. Newton Interpolationspolinom

$N(x) = r_0 + r_1 \cdot (x-a_0) + r_2 \cdot (x-a_0) \cdot (x-a_1) + \ldots + r_n \cdot (x-a_0) \cdot \ldots \cdot (x-a_{n-1})$; $r_0 = b_0, r_1 = [P_0, P_1], \ldots, r_n [P_0, \ldots, P_n]$

	i	a_i	b_i	$[P_i, P_{i+1}]$ $\frac{b_{i+1}-b_i}{a_{i+1}-a_i}$	$[P_i, P_{i+1}, P_{i+2}]$ $\frac{[P_{i+1},P_{i+2}]-[P_i,P_{i+1}]}{a_{i+2}-a_i}$	$[P_i, P_{i+1}, P_{i+2}, P_{i+3}]$ $\frac{[P_{i+1},P_{i+2},P_{i+3}]-[P_i,P_{i+1},P_{i+2}]}{a_{i+3}-a_i}$
(P_0)	0	-1	5			
				$\frac{-1-5}{2-(-1)} = -2$		
(P_1)	1	2	-1		$\frac{0-(-2)}{3-(-1)} = \frac{1}{2}$	
				$\frac{-1-(-1)}{3-2} = 0$		$\frac{3-(-\frac{1}{2})}{4-(-1)} = \frac{1}{2}$
(P_2)	2	3	-1		$\frac{6-0}{4-2} = 3$	
				$\frac{5-(-1)}{4-3} = 6$		
(P_3)	3	4	5			

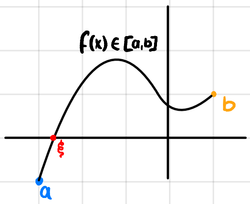


$$N(x) = 5 - 2 \cdot (x+1) + \frac{1}{2} \cdot (x+1) \cdot (x-2) + \frac{1}{2} \cdot (x+1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)$$
$$= 5 - 2x - \cancel{2}^{3} + \frac{1}{2}x^2 - \cancel{\frac{1}{2}x} - \cancel{1}^{2} + \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{2}x + 3$$
$$= 5 - 2x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^3$$

5. Satz von Weierstraß

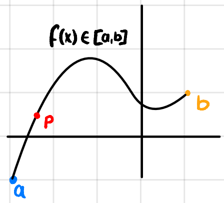
Ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so ist f beschränkt und nimmt ihr Minimum / Maximum an.

6. Zwischenwertsatz



Ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$, so gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = 0$

7. Zwischenwertsatz 2



Ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < f(b)$, und $q \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < q < f(b)$, so gibt es ein $p \in [a,b]$ mit $f(q) = p$

Durch diese Eigenschaft kann man beispielsweise numerisch eine Nullstelle bestimmen:

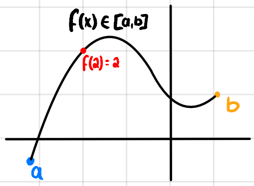
$f: [a,b] \to \mathbb{R}$; $\quad f(a) < 0 < f(b)$

$$m = \frac{b+a}{2} \begin{cases} f(m) > 0 \Rightarrow & [a, m] \\ f(m) < 0 \Rightarrow & [m, b] \end{cases}$$

Dies wird wiederholt, bis $f(m) = 0$

9. Fixpunktsatz

Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f([a,b])\subseteq[a,b]$, so hat f mindestens einen Fixpunkt $p\in[a,b]$ mit $f(p)=p$



10. Fixpunktsatz II

Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f([a,b])\subseteq[a,b]$, gibt es ein $\delta<1$ mit:

$$|f(x)-f(y)| < \delta\cdot|x-y| \quad \text{für alle } x,y\in[a,b] \quad (\text{kontraktion})$$

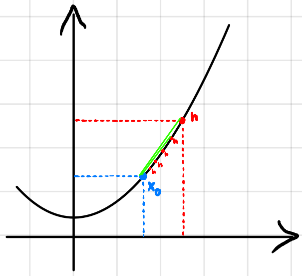
Dadurch gibt es genau einen Fixpunkt im Intervall $[a,b]$.

Differenzierbarkeit:

1. Darstellung Differenzierbarkeit

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in $x_0 \in D$, wenn der Grenzwert m existiert.

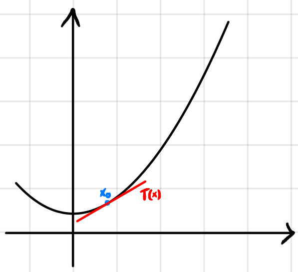
$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$



Falls f in jedem Punkt x_0 differenzierbar ist, gilt f als differenzierbar.

Der Ausdruck kann auch so formuliert werden:

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



Eine Tangente $T(x)$ an f in x_0 heißt „lineare Approximation".

$$T(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

2. Ableitungsregeln

<u>Produktregel:</u> $h(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \Rightarrow \quad h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

<u>Quotientenregel:</u> $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \Rightarrow \quad h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$

<u>Kettenregel:</u> $h(x) = f(g(x)) \quad \Rightarrow \quad h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Jede Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^n$ ist differenzierbar mit $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.

Jede Polynomfunktion $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ist differenzierbar mit $f'(x) = a_n \cdot n \cdot x^{n-1} + a_{n-1} \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} + \ldots + a_1$

Die trigonometrischen Funktionen sind wie folgt differenzierbar:
$\sin(x) \Rightarrow \cos(x) \Rightarrow -\sin(x) \Rightarrow -\cos(x) \Rightarrow \sin(x) \Rightarrow \ldots$

Die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ ist differenzierbar mit $f'(x) = e^x$. Jede Funktion im Exponenten wird abgeleitet $f(x) = e^{\sin(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{\sin(x)} \cdot \cos(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Rechtsseitige Ableitung: } f'_+(x_0) := \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\ \text{Linksseitige Ableitung: } f'_-(x_0) := \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \end{array}\right\} \text{ Falls } f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \text{, ist } f(x_0) \text{ differenzierbar}$$

3. Ableitung der Umkehrfunktion

Eine stetige Funktion $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ die umkehrbar und differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$ ist, lässt sich differenzieren mit:

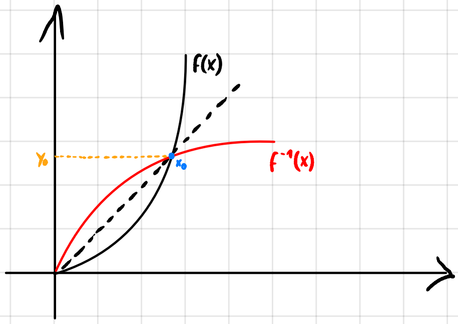
$$y_0 = f(x_0)$$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

$f(x) = x^3;\ f'(x) = 3x^2;\ y = x^3$

$y = x^3 \Rightarrow \sqrt[3]{y} = x$

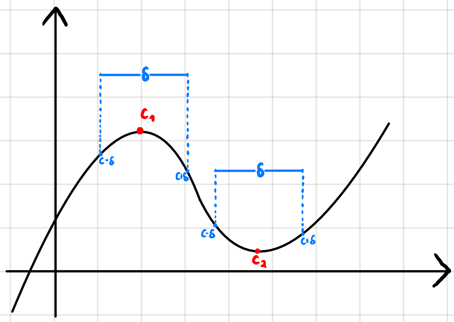
$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3\cdot(\sqrt[3]{y})^2}$



4. Lokale Extrema

Eine Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ hat ein lokales Extremum $c \in [a,b]$, wenn gilt:

1: Minimum: $\delta > 0$; Für alle $x \in]c-\delta, c+\delta[\cap [a,b]$: $f(x) \geq f(c)$
2: Maximum: $\delta > 0$; Für alle $x \in]c-\delta, c+\delta[\cap [a,b]$: $f(x) \leq f(c)$



Hat f ein lokales Extremum, so gilt: $f'(c) = 0$

1: Wenn f' in c einen Vorzeichenwechsel von + nach − hat $\Rightarrow$ lokales Maximum
2: Wenn f' in c einen Vorzeichenwechsel von − nach + hat $\Rightarrow$ lokales Minimum

Ist f zweimal stetig differenzierbar, kann man zeigen:

1: Wenn $f''(c) < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum
2: Wenn $f''(c) > 0$ lokales Minimum

5. Monotonie

Ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so gelten folgende Aussagen:

1: Wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in]a,b[\Rightarrow f(x)$ monoton wachsend in $[a,b]$
2: Wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in]a,b[\Rightarrow f(x)$ streng monoton wachsend in $[a,b]$
3: Wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in]a,b[\Rightarrow f(x)$ monoton fallend in $[a,b]$
4: Wenn $f'(x) < 0$ für alle $x \in]a,b[\Rightarrow f(x)$ streng monoton fallend in $[a,b]$

6. Regel von L'Hospital

Zwei stetig differenzierbare Funktionen $f,g:]a,b[\to \mathbb{R}$ und $c \in]a,b[$ mit $f(c) = g(c) = 0$ lässt sich umformen mit:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

1: „$\frac{0}{0}$" } L'Hospital:
2: „$\frac{\infty}{\infty}$"
3: „$0\cdot\infty$" — Bruch ✓ / sonst
4: „$1^{\infty}/\infty^{0}$" } $a^b = e^{b\cdot\ln(a)}$:
5: „$\infty-\infty$" — Bruch ✓ / Sonst

Beispiele

$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2} \xrightarrow{L.H.} \lim_{x\to 2} \frac{2x+1}{2x-3} = 5$

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\cdot\ln(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} \Rightarrow$ 2

$\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x} \Rightarrow$ 2

$\lim_{x\to 0^+} x^{2x} \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+} e^{2x\cdot(\ln(x))} \Rightarrow$ 3

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x-\ln(x+1)}{x\cdot\ln(x+1)} \Rightarrow$ 1

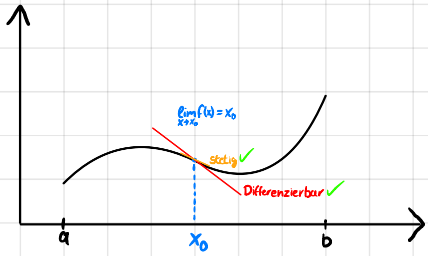
$\sqrt{\ }$: $a-b \Leftrightarrow \frac{a^2-b^2}{a+b} \Rightarrow$ 1

7. Begriffsklärung

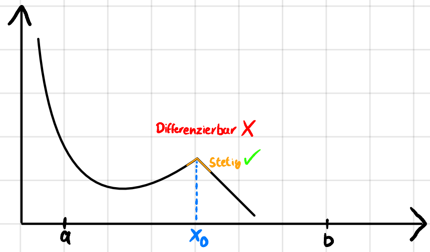
1. Differenzierbar: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ≙ eindeutige Steigung bei x_0

Es existiert eine Steigung bei x_0 ⇒ es gibt einen nächsten Punkt

Eine Funktion kann verbunden sein, jedoch einen Knick besitzen. ⇒ undefinierte Steigung



2. Stetig: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ≙ Grenzwerte sind gleich



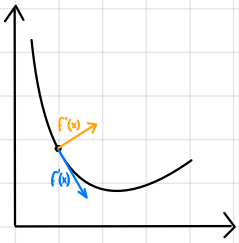
3. Stetig differenzierbar: $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = f'(x_0)$ ≙ Die Ableitung ist stetig

4. 2x stetig differenzierbar: $\lim\limits_{x\to x_0} f''(x) = f''(x_0)$ ≙ Die erste und zweite Ableitung sind stetig.

8. Krümmung

Die Krümmung einer Funktion beschreibt den Verlauf der Steigung. Diese lässt sich berechnen mit:

$$K_f(x) := \frac{f''(x)}{\sqrt{(1+f'(x)^2)^3}} \; / \; f''(x_0)$$

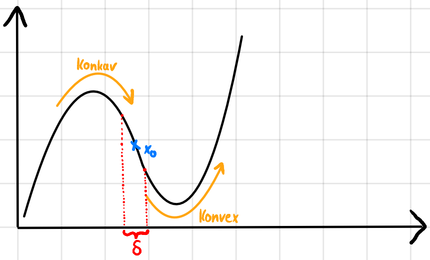


Konvex: $f(x)$ ist linksgekrümmt in x_0 bei $K_f(x) / f''(x_0) > 0$

Konkav: $f(x)$ ist rechtsgekrümmt in x_0 bei $K_f(x) / f''(x_0) < 0$

9. Wendepunkt

Ein Punkt x_0 heißt Wendepunkt, wenn sich die Krümmung von $f(x)$ im Punkt x_0 ändert. Dies kann wie folgt definiert werden:



$\exists \delta > 0$:

$K_f(x) < 0$ für alle $x \in]x_0 - \delta, x_0[$ und $K_f(x) > 0$ für alle $x \in]x_0, x_0 + \delta[$

oder

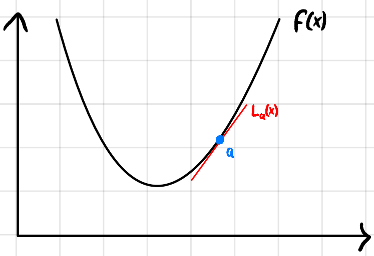
$K_f(x) > 0$ für alle $x \in]x_0 - \delta, x_0[$ und $K_f(x) < 0$ für alle $x \in]x_0, x_0 + \delta[$

Ist $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ 2x stetig differenzierbar und $x_0 \in]a,b[$ ein Wendepunkt, so ist $f''(x_0) = 0$.

Ist $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ 3x stetig differenzierbar, so ist $x_0 \in]a,b[$ ein Wendepunkt, wenn gilt $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$.

10. Lineare Approximation:

Eine hinreichend differenzierbare Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ und ein Punkt $a \in D$ können für eine Tangente genutzt werden:



$$L(x) = L_a(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

Diese sogenannte lineare Approximation ist die beste lineare Annäherung an f im Punkt a.

Gesucht: ein $f(x_0) = 0 \Rightarrow L_{x_0}(x) = 0$

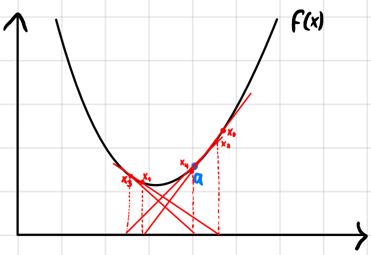
$$L_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{=0 \text{ bei } x_0} = 0$$

$$f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = 0 \Leftrightarrow \quad x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \text{ falls } f'(x_0) \neq 0$$

11. Newtonapproximation

Die Newtonapproximation ist das iterierte anwenden der linearen Approximation. Durch wiederholtes anwenden wird x_n immer genauer.



$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Wenn $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ 2x stetig differenzierbar mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ und $f' \neq 0$ für alle $x \in]a,b[$, so gilt:

1. Es existiert genau eine Nullstelle x^* von $f(x)$ in $]a,b[$ mit $\delta > 0$ und $L < 1$:

$$x \in]x^* - \delta, x^* + \delta[: \qquad L \leq \left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{f'(x)^2} \right|$$

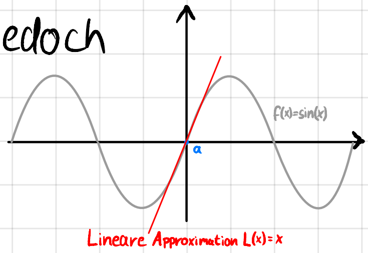
2. Ein beliebiges $x_0 \in]x^* - \delta, x^* + \delta[$ setzen wir induktiv:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad (n \geq 1)$$

$\Rightarrow$ Die Folge $(x_n)_{n \geq 0}$ konvergiert gegen x^*

12. Taylorpolynom

Die Lineare Approximation hat zwar die Steigung der Funktion, jedoch immer die Krümmung 0.

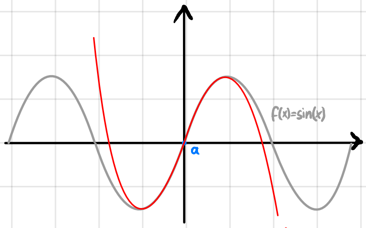


Lineare Approximation $L(x)=x$

Das Taylorpolynom vom Grad n zu f an der Stelle a lautet:

$$T_{f,a,n}(x) = \underbrace{f(a)+f'(a)\cdot(x-a)}_{\text{Lineare Approximation}} + \underbrace{\frac{f''(a)}{2}\cdot(x-a)^2}_{\text{quadratische Approximation}} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n$$

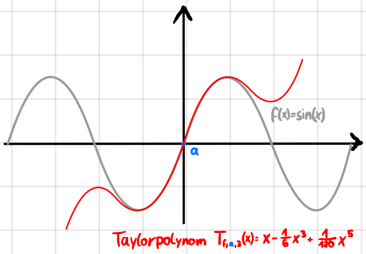
Die Ableitungen von $T_{f,a,n}(x)$ stimmen bis zum Grad n überein.



Taylorpolynom $T_{f,a,3}(x) = x-\frac{1}{6}x^3$

13. Taylorsatz

Das Taylorpolynom nähert sich zwar der Funktion an, besitzt jedoch eine Abweichung abhängig vom Grad. Diese Abweichung $\xi \in [a,x]$ lässt sich mit dem Restglied darstellen.



Taylorpolynom $T_{f,a,5}(x) = x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5$

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x); \quad f(x) \text{ } n+1 \text{ mal stetig differenzierbar}$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}$$

So ist zum Beispiel $f(x)=\sin(x)$, $a=0$, $n=2$:

$$T_{f,0,2}(x) = \sin(0)+\cos(0)\cdot(x-0)+\frac{-\sin(0)}{2}\cdot(x-0)^2+\frac{-\sin(\xi)}{6}$$

$$= 0+1\cdot x-0+\frac{-\sin(\xi)}{6}$$

$$= x+\frac{-\sin(\xi)}{6}$$

Abweichung $\max\left\{\left|\frac{-\sin(\xi)}{6}\right|\right\}$

14. Potenzreihen

Für Koeffizient $p_n \in \mathbb{R}$ und Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n\cdot(x-a)^n$$

Mit einer Zahl $R \geq 0$ (oder $R=\infty$) lässt sich sagen: $R = \lim_{n\to\infty}\frac{|p_n|}{|p_{n+1}|}$ (Konvergenzradius von $P(x)$)

$P(x)$ ist absolut konvergent für alle x mit $|x-a|<R$

$P(x)$ ist nicht absolut konvergent für alle x mit $|x-a|>R$

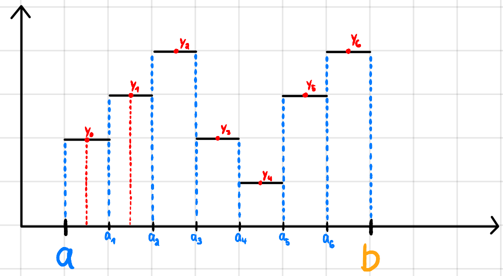
$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot x^n$ besitzt den Konvergenzradius $R=1$

$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^n\cdot x^n$ besitzt den Konvergenzradius $R=0$

$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ besitzt den Konvergenzradius $R=\infty$

Integrale

1. Treppenfunktion

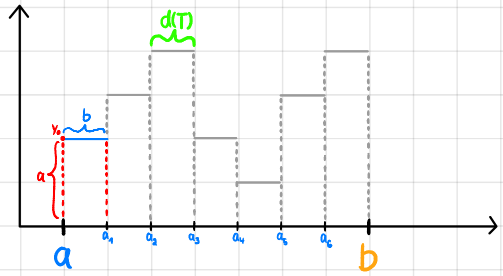


Eine Funktion $T: [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, wenn es eine Unterteilung von $[a,b]$ in:

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n = b$$

So kann man die Funktion näherungsweise als:

$$T(x) = y_i \;/\; T(x) = y_{i-1} \quad \text{für alle } x \text{ mit } a_i < x < a_{i+1}$$



$$A = A(T) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{y_{i-1} \cdot (a_i - a_{i-1})}_{a \cdot b}$$

Das Feinheitsmaß lässt sich berechnet sich durch:

$$d(T) = \max\{|a_1 - a_0|, \dots, |a_n - a_{n-1}|\}$$

2. Treppenapproximation