Logik, Mengen und Zahlen

1. Aussagenlogik

Aussagen sind feststellende Sätze, die entweder „wahr" oder „falsch" sind.
Diese lassen sich mit Junktoren kombinieren

2. Junktoren

Negation ($\neg A$)

Die Verneinung einer Aussage.

A	$\neg A$
w	f
f	w

Konjunktion ($A \wedge B$)

Und-Verknüpfung 2er Aussagen.
(And $\hat{=} \wedge$)

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Disjunktion ($A \vee B$)

Oder-Verknüpfung 2er Aussagen.
(Oder $\hat{=}$ Oben Offen)

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Ausschließende Disjunktion ($A \oplus B$)

Ausschließende Oder-Verknüpfung 2er Aussagen.

A	B	$A \oplus B$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Implikation ($A \Rightarrow B$)

Wenn-Dann-Verknüpfung 2er Aussagen.

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

(Wenn A falsch ist, wird B nicht geprüft)

Äquivalenz ($A \Leftrightarrow B$)

Ist gleich-Verknüpfung 2er Aussagen.

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Nand ($A \uparrow B$)

Umgedrehte Konjunktion.

A	B	$A \uparrow B$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	w

3. Quantoren

Existenzaussage ($\exists$)

$\exists$, heißt: Es existiert (mindestens 1)...

$\exists x: A(x)$, bedeutet: Es existiert (mindestens ein) x, für das $A(x)$ wahr ist.

Allaussage ($\forall$)

$\forall$, heißt: Für alle ... gilt, ...

$\forall x: A(x)$, bedeutet: Für alle x gilt $A(x)$

1.4 Mengen

Die Reihenfolge in einer Menge spielt keine Rolle. Jedes Element ist einzigartig.

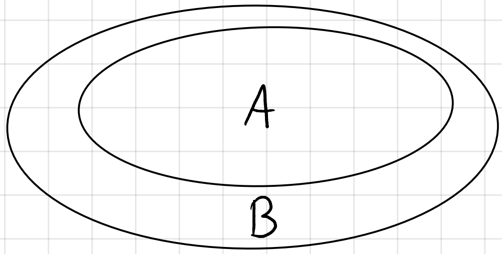
$M = \{1,2,3,3,4,5\} = \{1,2,5,4,3\}$

$x \in M$: x ist Element von M
$x \notin M$: x ist kein Element von M
$\emptyset$: Leere Menge

Mengen werden größtenteils durch Eigenschaften definiert:

$$\left.\begin{aligned} M &= \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 5\} \\ M &= \{x \in \mathbb{N} \mid (x \geq 5) \land (x < 4)\} = \emptyset \\ M &= \{x \in \mathbb{N} \mid x \bmod 2 = 0\} \\ M &= \{2x \mid x \in \mathbb{N}\} \\ M &= \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} : x = 2y\} \end{aligned}\right\} \text{Bsp.}$$

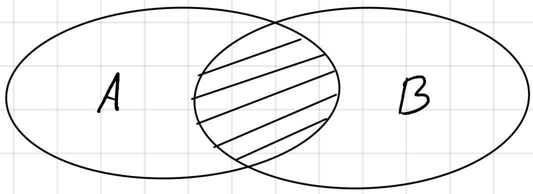
$A \subseteq B$ oder $B \supseteq A$: A ist eine Teilmenge von B
wenn:
- $\forall x \in A : x \in B$: Alle Elemente von A, Elemente von B sind.
- $\neg \forall x \in B : x \in A$: Nicht alle Elemente von B, Elemente von A sind.



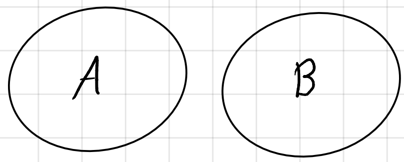
oder: $A \subsetneq B \Leftrightarrow (\forall x \in A : x \in B) \land (\exists x \in B : x \notin A)$

Mengenoperationen

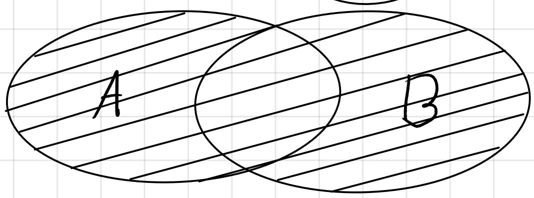
- Der Durchschnitt $A \cap B$ (alle Schnittelemente)



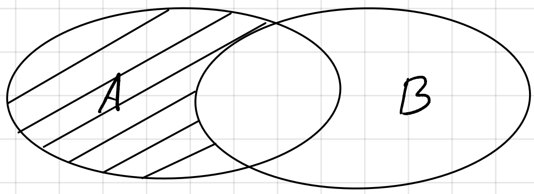
- Der Disjunkt $A \cap B = \emptyset$ (keine Schnittelemente)



- Die Vereinigung $A \cup B$ (alle Elemente)



- Die Differenz $A \setminus B$ (alle A Elemente ohne B)



$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x \mid x \in A \land x \in B\} \\ A \cup B &= \{x \mid x \in A \lor x \in B\} \\ A \setminus B &= \{x \mid x \in A \land x \notin B\} \end{aligned}$$

Kommunativgesetze:
$$M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$$
$$M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$$

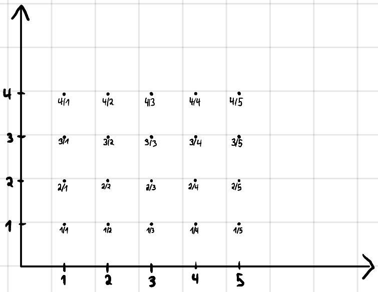
Assoziativgesetze:
$$M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cup M_2) \cup M_3$$
$$M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cap M_2) \cap M_3$$

Distributivgesetze:
$$M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cup M_3) \cup (M_1 \cup M_3)$$
$$M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cap M_3) \cap (M_1 \cap M_3)$$

5. Das kartesische Produkt

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$

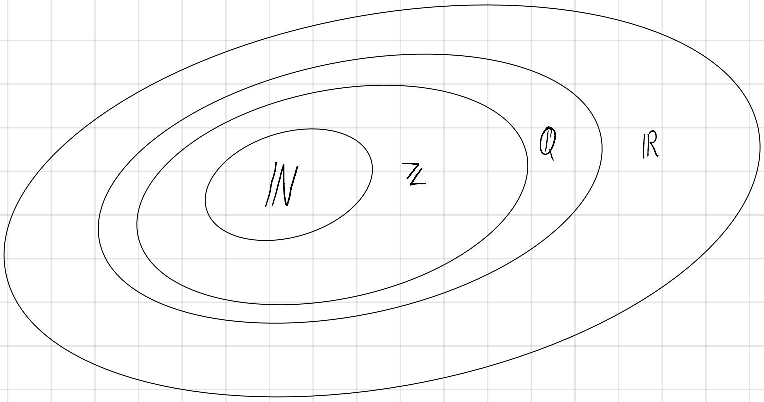
Analog definiert: $A^n = \{A \times \ldots \times A\}$
$= \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_n \in A\}$



Bsp: Ebene $\mathbb{R}^2$; Raum $\mathbb{R}^3$

6. Vertraute Zahlen

- Natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,\ldots\}$
- Ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$
- Rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$
- Reelle Zahlen $\mathbb{R} = \{$z.B. $-3{,}4;\ \sqrt{2};\ \pi\}$



7. Komplexe Zahlen

Schwerere Gleichungen erfordern komplexere Zahlen:

$x - 2 = 5 \mathrel{\hat=} \mathbb{N} = 7$
$x + 7 = 2 \mathrel{\hat=} \mathbb{Z} = -5$
$2x = 5 \mathrel{\hat=} \mathbb{Q} = 2{,}5$
$x^2 = 2 \mathrel{\hat=} \mathbb{R} = 1{,}414\ldots$
$x^2 = -1 \mathrel{\hat=}$ Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

$a + ib \quad \mid a, b \in \mathbb{R}$

Realteil
Imaginärzahl ($i^2 = -1$)
Imaginärteil

Addition: $c_1 + c_2 \mathrel{\hat=}$

$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2)$	$(3 + i \cdot 1) + ((-1) + i \cdot 2)$
$a_1 + a_2 + ib_1 + ib_2$	$3 + (-1) + i \cdot 1 + i \cdot 2$
$(a_1 + a_2) + i \cdot (b_1 + b_2)$	$2 + i \cdot 3$

Subtraktion: $c_1 - c_2 \mathrel{\hat=}$

$(a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2)$	$(3 + i \cdot 1) - ((-1) + i \cdot 2)$
$a_1 - a_2 + ib_1 - ib_2$	$3 - (-1) + i \cdot 1 - i \cdot 2$
$(a_1 - a_2) + i \cdot (b_1 - b_2)$	$4 + -i$

Multiplikation: $c_1 \cdot c_2 \mathrel{\hat=}$

$i \cdot i = -1$

$(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2)$	$(3 + i \cdot 1) \cdot ((-1) + i \cdot 2)$
$(a_1 \cdot a_2) + (a_1 \cdot ib_2) + (ib_1 \cdot a_2) + (ib_1 \cdot ib_2)$	$(3 \cdot (-1)) + (3 \cdot i \cdot 2) + (i \cdot 1 \cdot (-1)) + (i \cdot 1 \cdot i \cdot 2)$
$(a_1 \cdot a_2) + (a_1 \cdot ib_2) + (ib_1 \cdot a_2) - (b_1 \cdot b_2)$	$(3 \cdot (-1) - 1 \cdot 2) + i \cdot (3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1))$
$(a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + i \cdot (a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2)$	$-5 + i \cdot 5$

8. Intervalle

Abgeschlossenes Intervall $[a,b]$ = $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a, x \leq b\}$

Offenes Intervall (a,b) = $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a, x < b\}$ / $]a,b[$

Halboffenes Intervall $(a,b]$ = $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a, x \leq b\}$ / $[a,b)$ = $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a, x < b\}$

9. Euklidscher Algorithmus

Der EEA berechnet den größten gemeinsamen Teiler.

Bsp. $a = 64, b = 75$

$$75 = 64 + 11$$
$$64 = 5 \cdot 11 + 9$$
$$11 = 9 + 2$$
$$9 = 4 \cdot 2 + 1$$
$$2 = 2 \cdot 1 + 0$$

$$\begin{aligned}
1 &= 9 - 4 \cdot 2 \\
&= (64 - 5 \cdot 11) - 4 \cdot (11 - 9) \\
&= 64 - 5 \cdot (75 - 64) - 4 \cdot ((75-64) - (64 - 5 \cdot 11)) \\
&= 6 \cdot 64 - 5 \cdot 75 - 4 \cdot (75 - 64 - 64 + 5 \cdot 11) \\
&= 6 \cdot 64 - 5 \cdot 75 - 4 \cdot 75 + 8 \cdot 64 - 20 \cdot 11 \\
&= 6 \cdot 64 - 5 \cdot 75 - 4 \cdot 75 + 8 \cdot 64 - 20 \cdot (75 - 64) \\
&= 14 \cdot 64 + 20 \cdot 64 - 29 \cdot 75
\end{aligned}$$

10. Definition Gruppe

$G(M, 0, +)$

- Die Existenz eines neutralen Elementes 0: $\forall a \in \mathbb{R}: 0 + a = a$
  (Eine Zahl ohne Auswirkung auf das Ergebnis: $9 + 0 = 9$)
- Die Existenz von inversen Elementen: $\forall a \in M \exists -a \in M: -a + a = 0 = a + (-a)$
  (Eine Zahl, bei welcher das neutrale Element als Ergebnis kommt)
- Abgeschlossenheit: $\forall a, b \in M: a + b \in M$
  (Eine Rechnung beliebiger Zahlen hat als Ergebnis einen Wert der Menge)
- Assoziativität: $\forall a, b, c \in M: a + (b + c) \hat{=} (a + b) + c$
  (Die Reihenfolge der Ausführung gleicher Operationen ist egal)

(- Kommutativität: $\forall a, b \in M: a + b = b + a$ (auch abelsch genannt)
  (Die Reihenfolge der Werte bei der Ausführung der Operation ist egal))