

Stetigkeit von Funktionen:

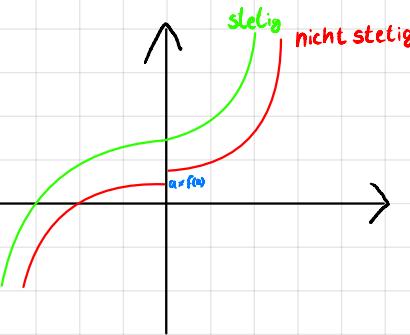
1. Definition Stetigkeit

Eine Funktion ist stetig an einem Punkt a , wenn bei a ein Grenzwert existiert, und dieser Funktionswert $f(a)$ übereinstimmt.

Heißt: Eine stetige Funktion ist nahtlos, die weder Definitionslücken noch Sprungstellen besitzt.

(Hebbare) Unstetigkeitsstelle

Eine hebbare Unstetigkeitsstelle ist eine Definitionslücke bei x_0 , falls diese eine Nullstelle des Zählers und des Nenners ist.



Sprungstelle

Eine Sprungstelle ist ein Sprung in $f(x_0)$, wodurch die Funktion nicht mehr nahtlos ist.

2. Das ϵ - δ -Kriterium

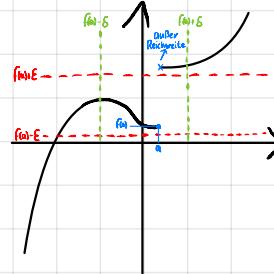
Eine reelle Zahl A ist der Grenzwert einer Funktion, wenn gilt:

Für jedes $\epsilon > 0$ und $\delta > 0$:

$$|x - a| < \delta \quad x \in \mathbb{R}:$$

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

$$f(x) = mx + b$$



Bei $m=0$ gilt: $|f(x) - f(a)| = 0 < \epsilon$, deshalb δ beliebig

Bei $m \neq 0$ gilt: $\delta := \frac{\epsilon}{|m|}$; $|x - a| < \delta$, deshalb $|f(x) - f(a)| = |m \cdot x + b - m \cdot a - b| = |m| \cdot |x - a| < |m| \cdot \delta = \epsilon$

3. Stetigkeitseigenschaften

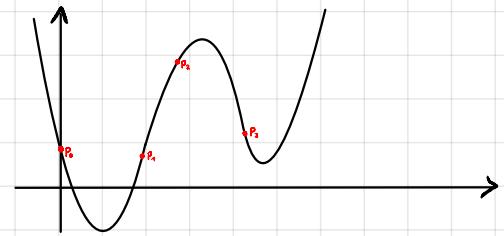
Wir nehmen an: $f(x)$ und $g(x)$ stetig in a , Konstante $K \in \mathbb{R}$

- 1: $h(x) = f(x) + K \Rightarrow h(x)$ ist stetig in a
- 2: $h(x) = f(x) \cdot K \Rightarrow h(x)$ ist stetig in a
- 3: $h(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow h(x)$ ist stetig in a
- 4: $h(x) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow h(x)$ ist stetig in a
- 5: $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ $\Rightarrow h(x)$ ist stetig in a für alle $x: g(x) \neq 0$

4. Newton Interpolationspolynom

$$N(x) = r_0 + r_1 \cdot (x-a_0) + r_2 \cdot (x-a_0) \cdot (x-a_1) + \dots + r_n \cdot (x-a_0) \cdot \dots \cdot (x-a_{n-1}); \quad r_0 = b_0, r_1 = [P_0, P_1], \dots, r_n = [P_0, \dots, P_n]$$

i	a _i	b _i	[P _i , P _{i+1}]	[P _i , P _{i+1} , P _{i+2}]	[P _i , P _{i+1} , P _{i+2} , P _{i+3}]
(P ₀)	0	-1	5	$\frac{b_{i+1} - b_i}{a_{i+1} - a_i}$ $\frac{-1 - 5}{2 - (-1)} = -2$	
(P ₁)	1	2	-1	$\frac{[P_i, P_{i+1}] - [P_i, P_{i+2}]}{a_{i+2} - a_i}$ $\frac{0 - (-2)}{3 - (-1)} = \frac{4}{2}$	
(P ₂)	2	3	-1	$\frac{[P_i, P_{i+1}, P_{i+2}] - [P_i, P_{i+2}, P_{i+3}]}{a_{i+3} - a_i}$ $\frac{-1 - 0}{4 - (-1)} = 3$	
(P ₃)	3	4	5		$\frac{3 - (-3)}{4 - (-1)} = \frac{6}{3} = 2$



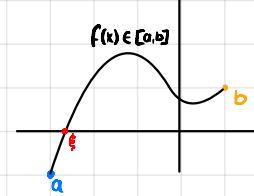
$$\begin{aligned} N(x) &= 5 - 2 \cdot (x+1) + \frac{1}{2} \cdot (x+1) \cdot (x-2) + \frac{1}{2} \cdot (x+1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \\ &= 5 - 2x - 2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{2}x + 3 \\ &= 5 - 2x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^3 \end{aligned}$$

5. Satz von Weierstraß

Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so ist f beschränkt und nimmt ihr Minimum / Maximum an.

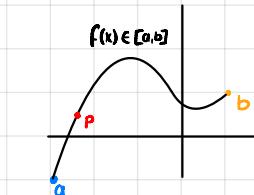
6. Zwischenwertsatz

Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$, so gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = 0$



7. Zwischenwertsatz 2

Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < f(b)$, und $q \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < q < f(b)$, so gibt es ein $p \in [a, b]$ mit $f(p) = p$



Durch diese Eigenschaft kann man beispielsweise numerisch eine Nullstelle bestimmen:

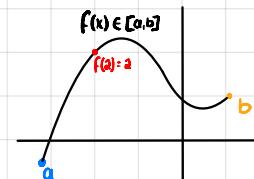
$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(a) < 0 < f(b)$$

$$m = \frac{a+b}{2} \quad \begin{cases} f(m) > 0 \Rightarrow [a, m] \\ f(m) < 0 \Rightarrow [m, b] \end{cases}$$

Dies wird wiederholt, bis $f(m) = 0$

9. Fixpunktsatz

Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f([a, b]) \subseteq [a, b]$,
so hat f mindestens einen Fixpunkt $p \in [a, b]$ mit $f(p) = p$



10. Fixpunktsatz II

Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f([a, b]) \subseteq [a, b]$,
gibt es ein $\delta < 1$ mit:

$$|f(x) - f(y)| < \delta \cdot |x - y| \quad \text{für alle } x, y \in [a, b] \quad (\text{kontraktion})$$

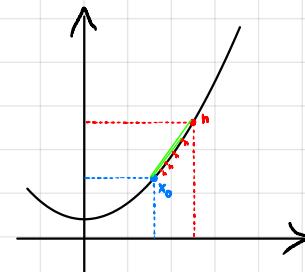
Dadurch gibt es genau einen Fixpunkt im Intervall $[a, b]$.

Differenzierbarkeit:

1. Darstellung Differenzierbarkeit

Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in $x_0 \in D$, wenn der Grenzwert m existiert.

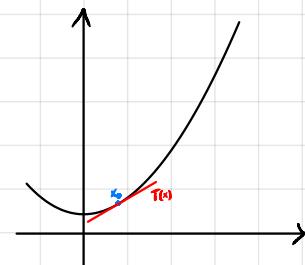
$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$



Falls f in jedem Punkt x_0 differenzierbar ist, gilt f als differenzierbar.

Der Ausdruck kann auch so formuliert werden:

$$m = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



Eine Tangente $T(x)$ an f in x_0 heißt „lineare Approximation“.

$$T(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

2. Ableitungsregeln

Produktregel: $h(x) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Quotientenregel: $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$

Kettenregel: $h(x) = f(g(x)) \Rightarrow h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Jede Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^n$ ist differenzierbar mit $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.

Jede Polynomfunktion $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ist differenzierbar mit $f'(x) = a_n \cdot n \cdot x^{n-1} + a_{n-1} \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} + \dots + a_1$

Die trigonometrischen Funktionen sind wie folgt differenzierbar:
 $\sin(x) \Rightarrow \cos(x) \Rightarrow -\sin(x) \Rightarrow -\cos(x) \Rightarrow \sin(x) \Rightarrow \dots$

Die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ ist differenzierbar mit $f'(x) = e^x$. Jede Funktion im Exponenten wird abgeleitet $f(x) = e^{\sin(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{\sin(x)} \cdot \cos(x)$.

Rechtsseitige Ableitung: $f'_+(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

Linksseitige Ableitung: $f'_-(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

} Falls $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$, ist $f(x_0)$ differenzierbar

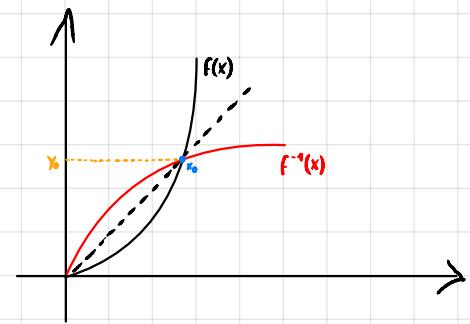
3. Ableitung der Umkehrfunktion

Eine stetige Funktion $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ die umkehrbar und differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$ ist, lässt sich differenzieren mit:

$$y_0 = f(x_0)$$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(F'(x_0))}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3; f'(x) = 3x^2; y = x^3 \\ y &= x^3 \Rightarrow \sqrt[3]{y} = x \\ (f^{-1})'(y) &= \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3\cdot(\sqrt[3]{y})^2} \end{aligned}$$

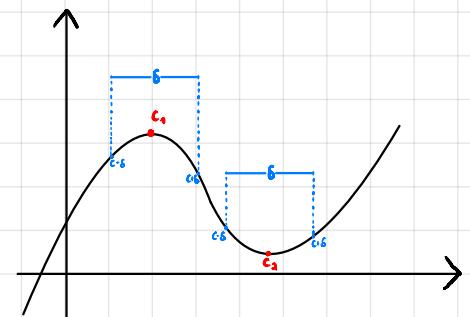


4. Lokale Extrema

Eine Funktion $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ hat ein lokales Extremum $c \in [a,b]$, wenn gilt:

1: Minimum: $\delta > 0$; Für alle $x \in]c-\delta, c+\delta[\cap [a,b]$: $f(x) \geq f(c)$

2: Maximum: $\delta > 0$; Für alle $x \in]c-\delta, c+\delta[\cap [a,b]$: $f(x) \leq f(c)$



Hat f ein lokales Extremum, so gilt: $f'(c) = 0$

1: Wenn f' in c einen Vorzeichenwechsel von + nach - hat

2: Wenn f' in c einen Vorzeichenwechsel von - nach + hat

\Rightarrow lokales Maximum

\Rightarrow lokales Minimum

Ist f zweimal stetig differenzierbar, kann man zeigen:

1: Wenn $f''(c) < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum

2: Wenn $f''(c) > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum

5. Monotonie

Ist $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so gelten folgende Aussagen:

1: Wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$ $\Rightarrow f(x)$ monoton wachsend in $[a,b]$

2: Wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$ $\Rightarrow f(x)$ streng monoton wachsend in $[a,b]$

3: Wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in [a,b]$ $\Rightarrow f(x)$ monoton fallend in $[a,b]$

4: Wenn $f'(x) < 0$ für alle $x \in [a,b]$ $\Rightarrow f(x)$ streng monoton fallend in $[a,b]$

6. Regel von L'Hospital

Zwei stetig differenzierbare Funktionen $f, g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $c \in [a,b]$ mit $f(c) = g(c) = 0$ lässt sich umformen mit:

$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$	<u>Beispiele</u>
$\left. \begin{array}{l} 1: \frac{\infty}{\infty} \\ 2: \frac{\infty}{\infty} \\ 3: 0 \cdot \infty \\ 4: \frac{1}{\infty} \\ 5: \dots \end{array} \right\}$ L'Hospital:	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2} \stackrel{\text{L'H}}{\rightarrow} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+1}{2x-3} = 5$
	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} \Rightarrow \textcircled{2}$
	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x} \Rightarrow \textcircled{2}$
	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{2x} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{2x \cdot \ln(x)} \Rightarrow \textcircled{3}$
	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(x+1)}{x \cdot \ln(x+1)} \Rightarrow \textcircled{1}$

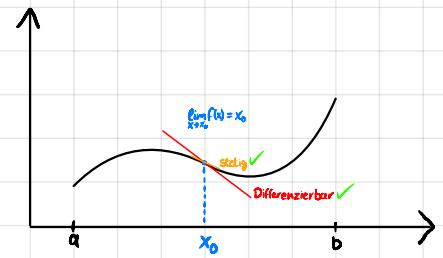
$$\text{F: } a-b \Leftrightarrow \frac{a^b - b^a}{a+b} \Rightarrow \textcircled{1}$$

7. Begriffsklärung

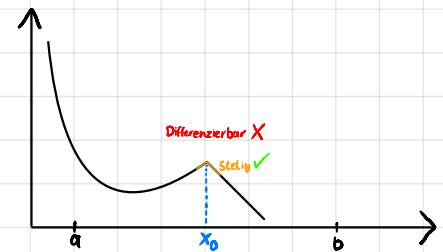
1. Differenzierbar: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \hat{=} \text{eindeutige Steigung bei } x_0$

Es existiert eine Steigung bei x_0
⇒ es gibt einen nächsten Punkt

Eine Funktion kann verbunden sein, jedoch einen Knick besitzen.
⇒ undefinierte Steigung



2. Stetig: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \hat{=} \text{Grenzwerte sind gleich}$



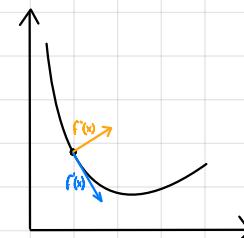
3. Stetig differenzierbar: $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0) \hat{=} \text{Die Ableitung ist stetig}$

4. 2x stetig differenzierbar: $\lim_{x \rightarrow x_0} f''(x) = f''(x_0) \hat{=} \text{Die erste und zweite Ableitung sind stetig.}$

8. Krümmung

Die Krümmung einer Funktion beschreibt den Verlauf der Steigung. Diese lässt sich berechnen mit:

$$K_f(x) := \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} / f''(x)$$

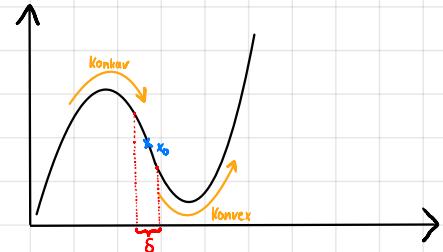


Konvex: $f(x)$ ist linksgekrümmt in x_0 bei $K_f(x)/f''(x_0) > 0$

Konkav: $f(x)$ ist rechtsgekrümmt in x_0 bei $K_f(x)/f''(x_0) < 0$

9. Wendepunkt

Ein Punkt x_0 heißt Wendepunkt, wenn sich die Krümmung von $f(x)$ im Punkt x_0 ändert. Dies kann wie folgt definiert werden:



$\exists \delta > 0:$

$K_f(x) < 0$ für alle $x \in [x_0 - \delta, x_0]$ und $K_f(x) > 0$ für alle $x \in [x_0, x_0 + \delta]$

Oder

$K_f(x) > 0$ für alle $x \in [x_0 - \delta, x_0]$ und $K_f(x) < 0$ für alle $x \in [x_0, x_0 + \delta]$

Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 2x stetig differenzierbar und $x_0 \in]a, b[$ ein Wendepunkt, so ist $f''(x_0) = 0$.

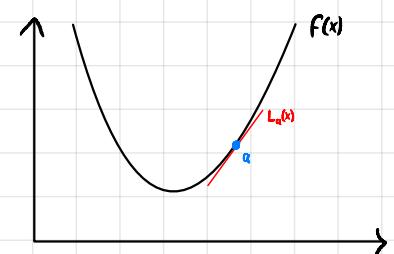
Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 3x stetig differenzierbar, so ist $x_0 \in]a, b[$ ein Wendepunkt, wenn gilt $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$.

10. Lineare Approximation:

Eine hinreichend differenzierbare Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ und ein Punkt $a \in D$ können für eine Tangente genutzt werden:

$$L(x) = L_a(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

Diese sogenannte Lineare Approximation ist die beste lineare Annäherung an f im Punkt a .



Gesucht: ein $f(x_0) = 0 \Rightarrow L_{x_0}(x) = 0$

$$L_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = 0$$

$= 0$ bei x_0

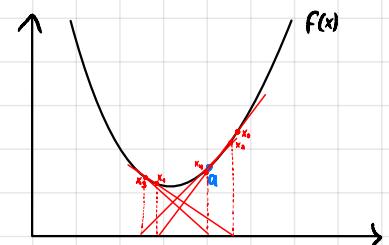
$$f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \text{ falls } f'(x_0) \neq 0$$

11. Newtonapproximation

Die Newtonapproximation ist das iterierte anwenden der linearen Approximation. Durch wiederholtes anwenden wird x_n immer genauer.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



Wenn $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ 2x stetig differenzierbar mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ und $f' \neq 0$ für alle $x \in]a,b[$, so gilt:

1. Es existiert genau eine Nullstelle x^* von $f(x)$ in $]a,b[$ mit $\delta > 0$ und $L < 1$:

$$x \in]x^* - \delta, x^* + \delta[: \quad |L| \leq \left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{f'(x)^2} \right|$$

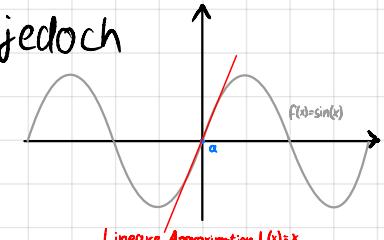
2. Ein beliebiges $x_0 \in]x^* - \delta, x^* + \delta[$ setzen wir induktiv:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad (n \geq 1)$$

\Rightarrow Die Folge $(x_n)_{n \geq 0}$ konvergiert gegen x^*

12. Taylorpolynom

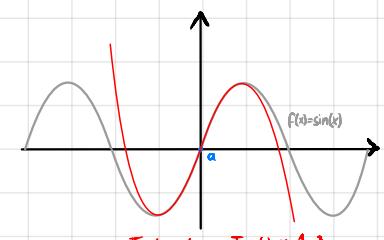
Die Lineare Approximation hat zwar die Steigung der Funktion, jedoch immer die Krümmung 0.



Das Taylorpolynom vom Grad n zu f an der Stelle a lautet:

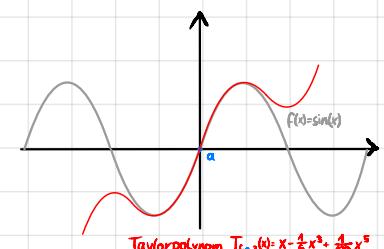
$$T_{f,a,n}(x) = \underbrace{f(a) + f'(a) \cdot (x-a)}_{\text{Lineare Approximation}} + \underbrace{\frac{f''(a)}{2} \cdot (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n}_{\text{quadratische Approximation}}$$

Die Ableitungen von $T_{f,a,n}(x)$ stimmen bis zum Grad n überein.



13. Taylorsatz

Das Taylorpolynom nähert sich zwar der Funktion an, besitzt jedoch eine Abweichung abhängig vom Grad. Diese Abweichung $\xi \in [a,x]$ lässt sich mit dem Restglied darstellen.



$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x); f(x) \text{ } n+1 \text{ mal stetig differenzierbar}$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)(\xi)}}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$$

So ist zum Beispiel $f(x) = \sin(x)$, $a=0$, $n=2$:

$$\begin{aligned} T_{f,0,2}(x) &= \sin(0) + \cos(0) \cdot (x-0) + \frac{-\sin(0)}{2} \cdot (x-0)^2 + \frac{-\sin(\xi)}{6} \\ &= 0 + 1 \cdot x - 0 + \frac{-\sin(\xi)}{6} \\ &= x + \frac{-\sin(\xi)}{6} \end{aligned}$$

$$\text{Abweichung } \max \left\{ \left| \frac{-\sin(\xi)}{6} \right| \right\}$$

14. Potenzreihen

Für Koeffizient $p_n \in \mathbb{R}$ und Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot (x-a)^n$$

Mit einer Zahl $R \geq 0$ (oder $R=\infty$) lässt sich sagen: $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p_n|}{|p_{n+1}|}$ (Konvergenzradius von $P(x)$)

$P(x)$ ist absolut konvergent für alle x mit $|x-a| < R$

$P(x)$ ist nicht absolut konvergent für alle x mit $|x-a| > R$

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^n \text{ besitzt den Konvergenzradius } R=1$$

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^n \cdot x^n \text{ besitzt den Konvergenzradius } R=0$$

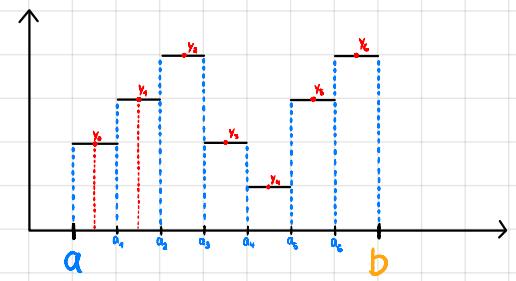
$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^n} \text{ besitzt den Konvergenzradius } R=\infty$$

Integrale

1. Treppenfunktion

Eine Funktion $T: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, wenn es eine Unterteilung von $[a, b]$ in:

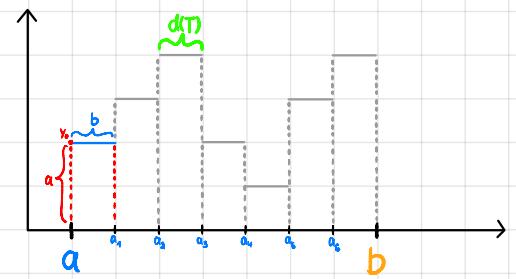
$$a = a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n = b$$



So kann man die Funktion näherungsweise als:

$$T(x) = y_i / T(x) = y_{i-1} \text{ für alle } x \text{ mit } a_i < x < a_{i+1}$$

$$A = A(T) = \sum_{i=1}^n y_{i-1} \cdot (a_i - a_{i-1})$$



Das Feinheitsmaß lässt sich berechnet sich durch:

$$d(T) = \max \{|a_1 - a_0|, \dots, |a_n - a_{n-1}| \}$$

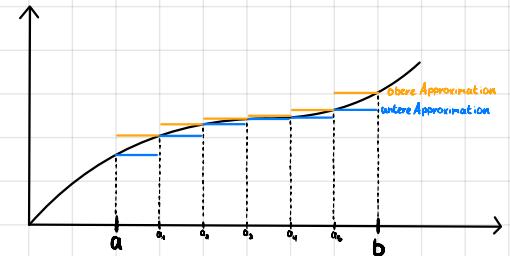
2. Treppenapproximation

Berechnet das Integral mittels einer Treppenfkt:

$$a_k = z.B. \text{ bei } [0; 1] \text{ str. mon. } \Rightarrow \frac{n}{k}$$

$$A(O) = \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \cdot (a_{k+1} - a_k)$$

$$A(U) = \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \cdot (a_{k+1} - a_k)$$



3. Aufleitungsregeln

$$f(x) = x^n \Rightarrow F(x) = (n+1)^{-1} \cdot x^{n+1} \quad (\frac{1}{n+1} \cdot x^n)$$

$$f(x) = a \cdot x^n \Rightarrow F(x) = a \cdot (n+1)^{-1} \cdot x^{n+1} \quad (a \cdot \frac{1}{n+1} \cdot x^n)$$

$$f(x) = a \cdot x^n + b \cdot x^m \Rightarrow F(x) = a \cdot (n+1)^{-1} \cdot x^{n+1} + b \cdot (m+1)^{-1} \cdot x^{m+1}$$

$f(x)$	$F(x)$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1} \cdot \sqrt[n]{x^{n+1}}$
$\frac{1}{\sqrt[n]{x}}$	$\frac{n}{n-1} \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\arcsin(x)$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\arccos(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$

Substitution: Für $f(x) \Rightarrow F(x)$ gilt $G(x) = F(u(x))$ ist eine Stammfunktion von: $g(x) = f(u(x)) \cdot u'(x)$

$$\int_a^b f(u(t)) \cdot u'(t) dt = \int_a^b f(x) dx$$

$$\text{Bsp: } \int \frac{1}{x+1} dx \quad u(t) = t+1; \quad u'(t) = 1$$

$$\int \frac{1}{x+1} dx \Rightarrow \int \frac{1}{t} dt$$

$$= \ln(t) + C \Rightarrow \ln(x+1) + C$$

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2}} dx \quad u(t) = 1+t^3; \quad u'(t) = 3t^2$$

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2}} dx \Rightarrow \int \frac{x}{t^2} dt$$

$$= \frac{x}{t^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} dx = \int \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} dx \Rightarrow -x^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{1+t^3}}$$

$$4. \text{ Partielle Integration} \quad h(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow h'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$\begin{aligned} [h(x)]_a^b &= \int_a^b (u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)) dx \\ &= \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx + \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx \\ \Leftrightarrow \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx &= [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx \end{aligned}$$

Bsp: $\int x \cdot e^x dx$

$u(x) = x$	$u'(x) = 1$
$v(x) = e^x$	$v'(x) = e^x$

$$= [x \cdot e^x] - \int 1 \cdot e^x dx = x \cdot e^x - e^x = e^x \cdot (x - 1)$$

5. Partialbruchzerlegung Für $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ gilt:

1. Falls $p(x) = a_1 \cdot x + a_0$ und $q(x) = (x+\alpha) \cdot (x+\beta)$; $\alpha \neq \beta$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}$$

2. Falls $p(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ und $q(x) = (x^2+\alpha) \cdot (x^2+\beta)$; $\alpha \neq \beta$ und $\alpha, \beta > 0$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A \cdot x + B}{x^2 + \alpha} + \frac{C \cdot x + D}{x^2 + \beta}$$

6. Logarithmische Integration:

Für eine stetig differenzierbare Funktion $f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$ gilt:

$$F(x) = \ln(g(x))$$

Bsp: $\int \frac{1}{x \cdot \ln(x)} dx \Rightarrow \ln(\ln(x))$

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx \Rightarrow \ln(\sin(x))$$

7. Quadratische Integration:

Für eine stetig differenzierbare Funktion $f(x) = g'(x) \cdot g(x)$ gilt:

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot g(x)^2$$

Bsp: $\int \sin(x) \cdot \cos(x) dx \Rightarrow \frac{1}{2} \sin^2(x)$