Grenzwert von Folgen:

1. ε-Kriterium:

$(a_n)_{n\geq 1}$ mit Grenzwert g (Mindestindex N, Maximalabstand ε)

$$|a_n - g| < \varepsilon \quad \forall n \geq N, M$$

ε: beliebig kleine positive reelle Zahl

Bsp: $g = 1$

$|a_n - 1| = \left|\frac{n-1}{n} - 1\right| < \varepsilon$

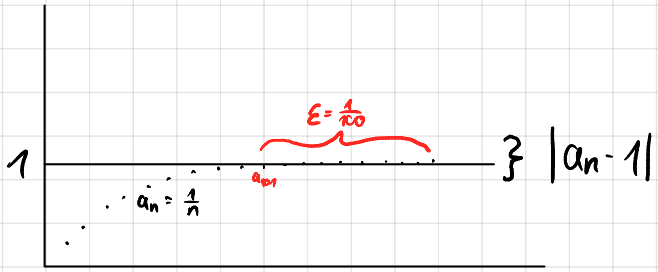
$= \left|\frac{-1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$

$\frac{1}{n} < \frac{1}{100}; \frac{1}{1000}$

$\frac{\cancel{1}}{n} < \frac{\cancel{1}}{1000}$

$a_{1001} < \frac{1}{1000}$

Bsp: $\varepsilon = \frac{1}{100}$, so folgt $n > 100$
d.h. alle Glieder der Folge ab a_{101} haben von 1 einen geringeren Abstand als $\frac{1}{100}$



Bsp: $g = ?$ Annahme $g > 0$: $n \geq N \in \mathbb{N}$ für n^2

$n > g + 1 \Rightarrow n^2 > g + 1$, also

$|a_n - g| = |n^2 - g| > |g + 1 - g| = |1| = 1$

Laut ε-Kriterium: $M \in \mathbb{N}$ mit

$|a_n - g| = |n^2 - g| < \varepsilon$, für $\varepsilon = 1$:

$|a_n - g| < 1$, also gilt für M, N

N: $|n^2 - g| > 1$ für alle $n \geq N$
M: $|n^2 - g| < 1$ für alle $n \geq M$ ↯ divergiert

2. Konvergenzkriterium:

$a_n = \frac{r \cdot n^k}{s \cdot n^l}$; $r \neq 0, s \neq 0$

1: Wenn $k = l$, so ist der GW $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{r}{s}$

2: Wenn $k < l$, so ist der GW $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

3: Wenn $k > l$, so ist a_n divergent

Bsp: $\frac{n+1}{2n+3} \Rightarrow \frac{1}{2}$ ist der Grenzwert

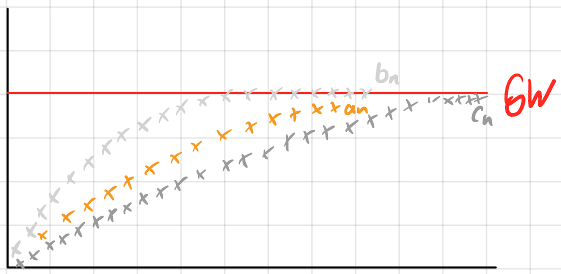
Bsp: $\frac{1}{\sqrt{n}}$ $\Rightarrow k = 0$, $\Rightarrow l = 0{,}5$ $\Rightarrow 0$ ist der Grenzwert

Bsp: $\frac{n}{\sqrt{n}}$ $\Rightarrow k = 1$, $\Rightarrow l = 0{,}5$ $\Rightarrow$ divergiert

3. Sandwichkriterium: $b_n \leq a_n \leq c_n ; n \in \mathbb{N}$, b_n und c_n mit selben GW

Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$ und $b_n \leq a_n \leq c_n$,

so ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$



4. Cauchyfolgen:

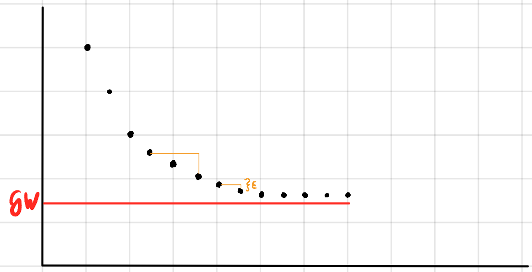
$(a_n)_{n\geq 1}$ ist eine Cauchyfolge, wenn: $\varepsilon > 0 \; \exists N_0 \in \mathbb{N}$ mit: (Mindestindex N, Maximalabstand ε)

$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n,m \geq N_0$ } Abstand zwischen Folgegliedern

Bsp: $(a_n)_{n\geq 0} = \frac{1}{n}$

$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \varepsilon$

$\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \leq \frac{1}{N} - \underbrace{\frac{1}{m}}_{>0 \Rightarrow} < \frac{1}{N} \leq \varepsilon \Rightarrow N \geq \frac{1}{\varepsilon}$



5. Konvergenzeigenschaften:

1: $(a_n)_{n\geq 0}$ $\quad a_n = a_n + K$ $\Rightarrow$ Eine konvergente Folge plus eine beliebige Konstante $K \in \mathbb{R}$ ist weiterhin konvergent.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a + K$

2: $(a_n)_{n\geq 0}$ $\quad a_n = a_n \cdot K$ $\Rightarrow$ Eine konvergente Folge mal eine beliebige Konstante $K \in \mathbb{R}$ ist weiterhin konvergent.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \cdot K$

Nehmen wir an: $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

1: $c_n = a_n + b_n$ $\Rightarrow$ Zwei konvergente Folgen addiert ergeben einen addierten G.W.

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

2: $c_n = a_n - b_n$ $\Rightarrow$ Zwei konvergente Folgen subtrahiert ergeben einen subtrahierten G.W.

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

3: $c_n = a_n : b_n$ $\begin{cases} \text{falls } b_n \neq 0 \Rightarrow \text{ist die Folge konvergent mit } \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{b} \\ \text{falls } b_n = 0 \Rightarrow \text{ist die Folge konvergent mit } 0 \end{cases}$

Konvergenz von Wurzelfolgen: $(a_n)_{n\geq 0}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $b_n = \sqrt{a_n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n \hat{=} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} \hat{=} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a}$

Konvergenz von Reihen:

1. Nullfolgenkriterium:

(Divergenz | Konvergenz | Abschätzung)

Wenn in einer Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{R}}$ nicht gegen 0 konvergiert, so divergiert die Reihe.

2. Minorantenkriterium:

(Divergenz | Konvergenz | Abschätzung)

Wenn für die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ gilt: a_n und $b_n \geq 0$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, dann gilt bei:

$a_n \geq b_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_n\right) =$ divergent

3. Cauchy-Kriterium:

(Divergenz | Konvergenz | Abschätzung)

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, wenn: $\varepsilon > 0 \; \exists N_0 \in \mathbb{N}$ mit:

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{m} a_k\right| = \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon$$

4. Leibnizkriterium:

(Divergenz | Konvergenz | Abschätzung)

Für eine alternierende Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot a_n$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ $\begin{cases} a_n \geq 0 & \text{monoton fallend} \\ a_n \leq 0 & \text{monoton steigend} \end{cases}$

gilt: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot a_n$ konvergiert

Der Grenzwert liegt zwischen $k=n$ und $k=n+1$

5. Majorantenkriterium: absolute

(Divergenz | Konvergenz | Abschätzung)

Wenn für die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ gilt: $b_n \geq 0$ und $\lim_{n\to\infty} \sum b_n =$ konvergent, dann gilt bei:

$|a_n| \leq b_n$ für fast alle $k \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_n\right) =$ absolut konvergent $\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \text{konvergent}; \; \left|\frac{1}{3^k}\right| = \frac{1}{3^k} \leq \frac{1}{2^k} \Rightarrow \text{absolut konvergent}\right)$

6. Quotientenkriterium: absolute

(Divergenz | Konvergenz | Abschätzung)

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n \neq 0$ für $k \in \mathbb{N}$ lässt sich bestimmen durch:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right) = C \begin{cases} <1 & \sum_{k}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \\ >1 & \sum_{k}^{\infty} a_n \text{ divergiert} \\ =1 & \text{keine Aussage} \end{cases}$$

(7. Wurzelkriterium)

8. Teleskopsumme:

Eine Summe $\sum_{n=1}^{n} a_n - a_{n+1} = a_1 - a_{n+1}$ kann in dieser Form auf einen Summand verkürzt werden.

Bsp: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \xRightarrow{T.R.} \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$

9. Harmonische Reihe:

Eine Reihe mit allen Kehrwerten der natürlichen Zahlen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}}_{>\frac{1}{2}} + \ldots$$

$$1 + \frac{1}{2} + > \frac{1}{2} + > \frac{1}{2} + > \frac{1}{2} \Rightarrow \infty$$

10. Geometrische Reihe:

(Divergenz | Konvergenz | Abschätzung)

$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$; q = eine beliebige reelle Zahl

Eine Reihe dieser Form konvergiert bei $|q| < 1$.
Eine Reihe dieser Form divergiert bei $|q| \geq 1$.

Grenzwert: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

wichtig!!!

11. Index-shift

In einer Summe lassen sich Elemente abspalten: $\sum_{n=1}^{5} n^3 = \overbrace{1^3 + \underbrace{2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3}_{1^3 + \sum_{n=2}^{5}}}^{\sum_{n=1}^{4} n^3 + 5^3}$ | $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} + (n+1)^3$

In einer Summe lässt sich auch der Laufparameter umformen: $\sum_{n=1-1}^{3} n+1 = \sum_{n=0}^{3} (n) - (0+1)$

Auch beide Parameter lassen sich ändern: $\sum_{k=1+c}^{n+c} a_{k-c}$

Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$?

Ist die Form bekannt?

- Ja → $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ⇒ geometrisch $\begin{cases} |q| < 1: \text{konvergiert gegen } \frac{q^m}{1-q} \\ |q| \geq 1: \text{divergiert} \end{cases}$
- Ja → $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ ⇒ harmonisch $\begin{cases} s > 1: \text{konvergiert} \\ s \leq 1: \text{divergiert} \end{cases}$
- Ja → $\sum_{n=0}^{\infty} a_n - a_{n+1}$ ⇒ Teleskop $\{$ konvergiert gegen a_0 - B
- Ja → $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ ⇒ alternierend $\{ \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \begin{cases} \text{mon. fallend} \\ \text{mon. steigend} \end{cases}$: konvergiert

Nein

Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$?

- Ja → Minorantenkriterium: $a_n \geq b_n$; $\lim_{n\to\infty} \sum b_n = \text{div.}$: divergiert
- Ja → Cauchy-Kriterium: $\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{m} a_k\right| = \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon$: $\begin{cases} \text{konvergiert} \\ \text{divergiert} \end{cases}$
- Ja → Majorantenkriterium: $|a_n| \leq b_n$; $\lim_{n\to\infty} \sum b_n = \text{kon.}$: konvergiert
- Ja → Quotientenkriterium: $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \begin{cases} < 1: \text{konvergiert} \\ > 1: \text{divergiert} \\ = 1: \text{keine Aussage} \end{cases}$