Poročilo o projektu

Matematično modeliranje, težji projekt

Tim Kmecl, 2022

Uvod

Problem Buffonove igle je predstavil Buffon leta 1777 v dodatku k *Histoire Naturelle*. Obravnaval je ravnino, na kateri so vzporedne ekvidistantne premice z medsebojno razdaljo d. Pri problemu je treba izračunati verjetnost, da igla dolžine l ($l < d$), ki jo naključno vržemo na ravnino, pade tako, da seka katero od črt. *(Nelson, 1998, p. 39)* Rezultat, ki ga je podal Buffon, je

$$P = \frac{2l}{\pi d}$$

Problem lahko razširimo še na igle, kjer je $l \geq d$. V primeru enakosti dobimo

$$P = \frac{2}{\pi},$$

pri neenakosti pa

$$P = \frac{2\left(l - \sqrt{l^2 + d^2}\right) + d(\pi - 2\arcsin\left(\frac{d}{l}\right))}{\pi d}.$$

(Xu & Shi, 2009)

Pri svojem projektu sem moral namesto metanja igle obravnavati metanje kovanca s polmerom r in enakostraničnega trikotnika s stranico a. Napisati sem moral program, ki to modelira, ter verjetnosti še izračunati analitično in nato rezultate primerjati.

Problem kovanca

Kovanec bom obravnaval kot krog z radijem r. Naj bo d razdalja med vzporednimi črtami, privzemimo, da so črte vzporedne z x-osjo in da ena leži na x-osi. Ker je kovanec rotacijsko simetričen, je za razliko od Buffonove igle tu edina relevantna slučajna spremenljivka y-koordinata središča kovanca, naj bo to y. Podobno kot tam bomo dobili enako verjetnost, če se omejimo le na primere kjer je y med 0 in d.

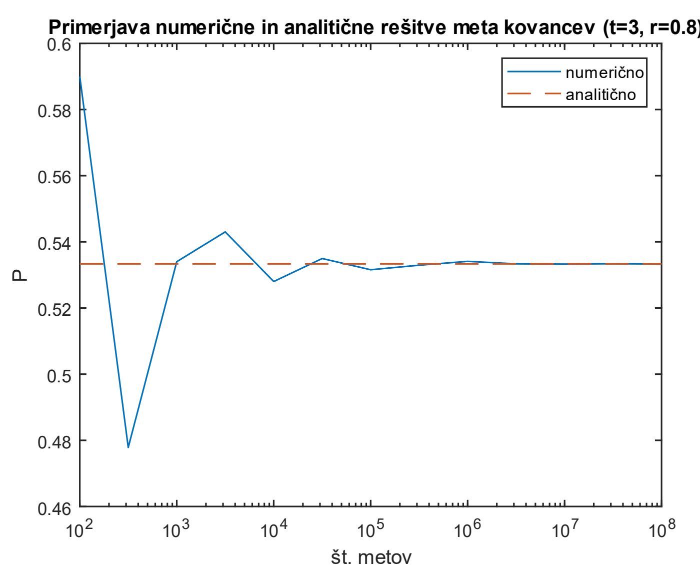
Kovanec bo sekal črto, če bo njegova zgornja točka višje kot d ali njegova spodnja točka nižje od 0, torej če bo veljalo $y + r > d$ ali $y - r < 0$ oziroma $y \in (0, r) \cup (d - r, d)$.

Če velja $r \leq \frac{d}{2}$, je skupna dolžina obeh intervalov $2r$, y pa je enakomerno porazdeljen na intervalu dolžine d, torej bo verjetnost, da kovanec seka katero od črt, enaka

$$P = \frac{2r}{d}$$

Če pa velja $r > \frac{d}{2}$, bo premer kovanca večji, kot je razmik med sosednjima črtama, zato bo takrat verjetnost enaka 1.

Napisal sem program, ki simulira met kovanca. N-krat naključno izbere $y \in (0, d)$, nato pa preveri, ali seka zgornjo ali spodnjo črto, prešteje, koliko je takšnih primerov ter to deli s številom poskusov in tako dobi numerični približek za verjetnost. Na desnem grafu je primerjava teh približkov v odvisnosti od števila simuliranih metov.



Problem trikotnika

Naj bo ΔABC enakostranični trikotnik z dolžino stranice a. Njegova višina je $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, oddaljenost oglišč od središča (oz. polmer očrtane krožnice) pa $r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Za računanje verjetnosti bosta relavantna tako y-koordinata središča $y \in [0, d)$ kot tudi kot $\varphi \in [0, 2\pi)$. Obe slučajni spremenljivki sta na teh intervalih porazdeljeni enakomerno zvezno in sta med seboj neodvisni. Naj bo φ enak 0 takrat, ko je stranica AB navpična in na levo od središča trikotnika, in naj povečanje kota pomeni rotacijo v smeri urinega kazalca.

Trdim, da je problem ekvivalenten podobnemu problemu, pri katerem je φ enakomerno porazdeljen na $[0, \frac{\pi}{6})$. Naj bo $p(\varphi)$ verjetnost, da trikotnik seka katero od črt pri kotu φ. Zaradi simetrije trikotnika čez navpičnico pri $\varphi = \frac{\pi}{6}$ velja $p(\varphi) = p(\frac{\pi}{6} - \varphi)$. Problem je torej ekvivalenten, kot če bi bil φ z intervala $[0, \frac{\pi}{3})$. Ker je enakostranični trikotnik trojno rotacijsko simetričen, bo to dalje ekvivalentno primeru $\varphi \in [0, \frac{\pi}{3}) \cup [\frac{2\pi}{3}, \pi) \cup [\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$, saj velja $p(\varphi) = p(\varphi + \frac{2\pi}{3}) = p(\varphi + \frac{4\pi}{3})$. Zaradi simetrije celotnega problema čez vodoravnico, ki leži na sredini med zgornjo in spodnjo črto, velja še $p(\varphi) = p(\pi - \varphi)$. Problem je torej ekvivalenten problemu $\varphi \in [0, 2\pi)$, kar pa je prvotni problem. V nadaljevanju bom obravnaval ta omejeni problem, saj mora biti končna verjetnost enaka.

Naj bo y_{A} y-koordinata oglišča A, ki je za kote s tega intervala najvišje, y_{B} pa oglišča B, ki je najnižje. Trikotnik bo sekal katero od črt natanko tedaj, ko bo $y_{\mathrm{A}} > d$ ali $y_{\mathrm{B}} < 0$. Če z $\mathrm{b_A}$ in $\mathrm{b_B}$ označim navpično razdaljo med ogliščema A in B in središčem trikotnika, bo skupna dolžina obeh intervalov, na katerih mora ležati y, da trikotnik seka črto, enaka njuni vsoti, to pa je pravzaprav navpična razdalja med A in B oz. velikost pravokotne projekcije stranice AB na navpičnico, ki znaša $a * cos(\varphi)$.

Ker je y porazdeljen enakomerno na intervalu dolžine d, velja $p(\varphi) = \frac{a*cos(\varphi)}{d}$. To drži, če je pravokotna projekcija manjša kot d, sicer je $p(\varphi) = 1$, saj je v tem primeru navpična razdalja med A in B večja od razdalje med črtami in zato bo trikotnik vedno sekal vsaj eno črto.

Problem lahko razdelimo na tri podprimere, glede na razmerje med pravokotno projekcijo AB in d (in posledično med a in d) – ali je pravokotna projekcija vedno večja od d, ali je vedno manjša, ali pa je večja samo za nekatere kote.

a) $a > \frac{2\sqrt{3}}{3}d$

To velja natanko tedaj, ko je pravokotna projekcija AB večja od d za vse kote $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right)$. Da to drži mora namreč veljati

$$a * cos\left(\frac{\pi}{6}\right) > d$$

kar pa velja natanko tedaj, ko velja zgornja neenakost. V tem primeru je verjetnost, da trikotnik seka črto, enaka

$$\mathrm{P} = 1$$

b) $a < d$

To velja natanko tedaj, ko pravokotna projekcija ni večja od d za noben $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right)$. P dobimo z integriranjem $p(\varphi)$ na $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, pri čemer pa je treba upoštevati še, da je gostota porazdelitve φ, ki je enakomerno porazdeljena, konstanto enaka $\frac{6}{\pi}$.

$$P = \frac{6}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{a * cos(\varphi)}{d} d\varphi = \frac{6a}{\pi d}\int_0^{\frac{\pi}{6}} cos(\varphi)\, d\varphi = \frac{6a}{\pi d} sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3a}{\pi d}$$

c) sicer ($d < a < \frac{2\sqrt{3}}{3} d$)

Kot sledi iz prejšnjih dveh točk, bo v tem primeru do nekega $\rho \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right)$ za $\varphi \leq \rho$ veljalo $p(\varphi) = 1$, za $\varphi > \rho$ pa $p(\varphi) = \frac{a * cos(\varphi)}{d}$. ρ bo tisti kot, pri katerem je pravokotna projekcija AB natanko enaka razmiku med črtami d, torej

$$a * cos(\rho) = d$$

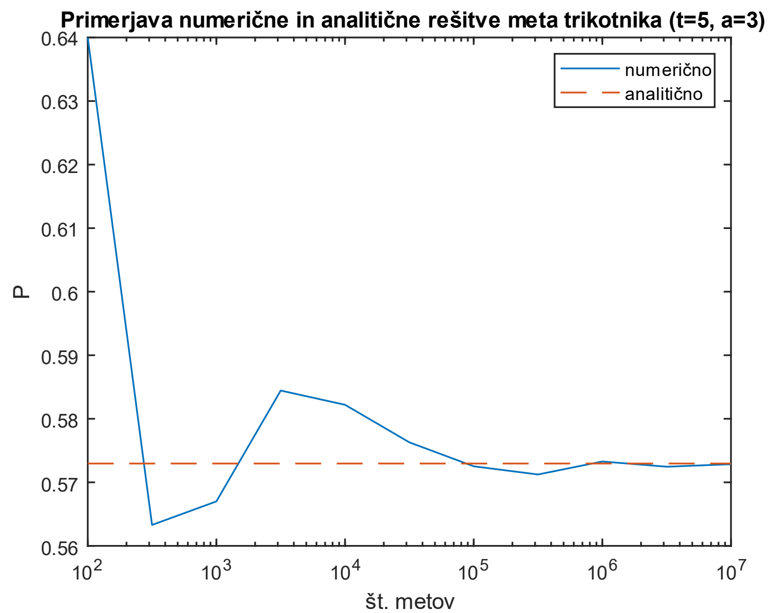
$$\rho = arccos\left(\frac{d}{a}\right)$$

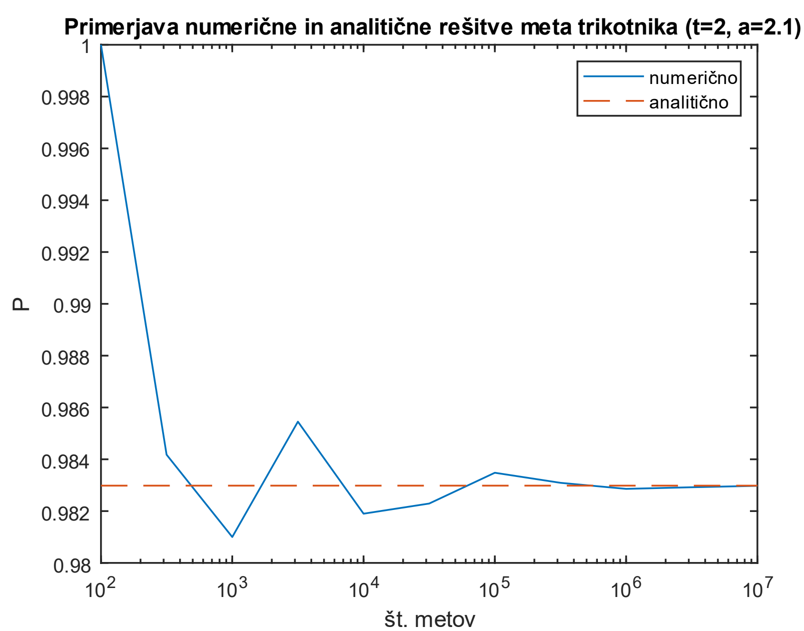
Končno verjetnost tudi tu dobim z integriranjem $p(\varphi)$, le da integral razdelim na dva dela glede na definicijo funkcije.

$$P = \frac{6}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}} p(\varphi)\, d\varphi = \frac{6}{\pi}\left(\rho + \int_\rho^{\frac{\pi}{6}} \frac{a * cos(\varphi)}{d} d\varphi\right) = \frac{6a}{\pi d}\left(\frac{1}{2} - sin(\rho) + \frac{d}{a}\rho\right) =$$

$$= \frac{6a}{\pi d}\left(\frac{1}{2} - \sqrt{1 - \frac{d^2}{a^2}} + \frac{d}{a} arccos\left(\frac{d}{a}\right)\right) = \frac{6}{\pi}\left(\frac{a}{2d} - \sqrt{\frac{a^2}{d^2} - 1} + arccos\left(\frac{d}{a}\right)\right)$$

Napisal sem še program, ki verjetnost izračuna numerično s simulacijo meta trikotnika. Naključno izbere $y \in [0, d)$ in kot $\varphi \in [0, 2\pi)$, izračuna y-koordinate vseh oglišč, nato pa preveri, če je katero od oglišč višje od d ali nižje od 0 – v tem primeru trikotnik seka črto. Take prešteje in število deli s številom vseh in tako oceni verjetnost. Na spodnjih grafih je primerjava analitične rešitve z numeričnimi približki v odvisnosti od števila simuliranih metov, za podprimera *b)* in *c)*.





Literatura

Nelson, D. (1998). *The Penguin Dictionary of Mathematics: Second edition.* London: Penguin Group.

Xu, Y., & Shi, Y. (2009). Note on Buffon's Problem. *Applied Mathematical Sciences, Vol. 3, 2009, no. 24*, 1189 - 1192. Pridobljeno 15. 8 2021 iz https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.559.3225&rep=rep1&type=pdf