МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.Ломоносова
механико-математический факультет

Лабораторный практикум по теме: "Численное решение дифференциальных уравнений".

Работа
студента 4-го курса 409-ой группы
кафедры теории вероятностей
Мударисов Тимура Маратовича

Москва, 2020 г.

Содержание

1 Уравнение вида $-u_{xx} + b(x)u(x) = f(x)$

Постановка задачи : имеется дифференциальное уравнение вида $-u_{xx}+b(x)u(x) = f(x)$, где $x \in [0,1]$, $b(x) \geq 0$, $u(0) = u(1) = 0$. Хотим построить функцию удовлетворяющую решению данной задачи.
Для этого разобьем задачу на два случая:

1 случай. Считаем, что $b(x) \equiv b > 0$. Для решения задачи в данном случае используется следующая идея:
Метод. Введем равномерную сетку на данном отрезке:

$$\bar{D}_h = \{x_i = ih, i = 0 \ldots N; Nh = 1\}$$

Рассмотрим разностную схему вида: $-\dfrac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2} + bu_k = f_k$, что тоже самое что $A\bar{u} = \bar{f}$, где матрица A вида

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} + b & -\frac{1}{h^2} & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + b & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & \dots & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + b \end{pmatrix}$$

То есть у нас есть трехдиагональная матрица, собственные значения и собственные функции которой мы знаем: $\lambda^{(n)} = \dfrac{4}{h^2} \sin\left(\dfrac{\pi h n}{2}\right), \phi^{(n)} = \sqrt{2}\sin(\pi n x)$.

Т.к. $u(0) = u(1) = 0$, то данную функцию можно приблизить $\widetilde{u} = \sum_n c_n \phi^{(n)}$, тогда действуя оператором на вектор $A\widetilde{u} = \sum_n c_n(\lambda^{(n)} + b)\phi^{(n)} = f$ (здесь я использовал следующую простую идею, о том, что спектр линеен при сдвигах $0 = \det(A - \lambda E) = \det((A + bE) - (\lambda + b)E))$.

"Спроецируем"задачу на сетку. Т.е. рассмотрим значения функции в $\bar{D}_h$ и рассмотрим действие оператора $A_h \widetilde{u}_h = \bar{f}_h$. В пространстве $\mathbb{R}^N$ можно ввести скалярное произведение $(\phi^{(n)}, \phi^{(m)}) = \sum_i h\phi^{(n)}(x_i)\phi^{(m)}(x_i)$.

Тогда для поиска коэффициентов (в силу ортонормированности собственных функций) имеем: $c_i = \dfrac{(\bar{f}, \phi^{(i)})}{\lambda^{(i)} + b}$. Таким образом имея данные коэффициенты мы можем восстановить приближение функций по дискретному набору.

Теория.

Th. Для разностной схемы вида $-\frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{h^2} + bu_k = f_i; u_0 = u_N = 0$ собственные функции равны $\phi_i^{(n)} = \sqrt{2}\sin(\pi i h n)$, собственные значения $\lambda^{(n)} = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\pi n h}{2}\right)$

Док-во Смотри *N.B.*

Th. Разностная схема вида $-\frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{h^2} + b(x_k)u_k = f_k$ аппроксимирует дифференциальную задачу на решении с порядком 2.

Док-во Рассмотрим равномерную сетку и положим $u_k = u(x_k)$. Покажем, что $-\frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{h^2} = u_{xx}(x_k) + O(h^2)$. Заметим, что $u(x_k \pm h) = u(x_k) \pm hu'(x_k) + \dfrac{h^2u''(x_k)}{2!} \pm \dfrac{h^3u^{(3)}(x_i)}{3!} + \dfrac{u^{(4)}(\xi_\pm)}{4!}$. Подставляя данное представление в аппроксимацию второй производной имеем, что локальный порядок равен $O(h^2)$, т.е. в каждой x_i решение задачи совпадает с решением разностной схемы с точностью до $O(h^2)$. Мы же хотим показать, что $\|L_h(u)_h - (Lu)_h\|_h \leq Ch^2$.
В самом деле: $\sum h(\bar{u}_i - \bar{u}(x_i)) \leq \sum h \cdot C_i h^4 \leq C_{max}h^5N = C_{max}h^4$, а значит, что $\|L_h(u)_h - (Lu)_h\|_h \leq Ch^2$ (т.к. сама норма это квадратный корень от того, что мы посчитали). Следовательно порядок аппроксимации равен двум.

Th. Разностная схема устойчива в норме $L_{2,h}$.

Док-во. Рассмотрим $-\dfrac{u_{k+1}^i - 2u_k^i + u_{k-1}^i}{h^2} + b_k u_k^i = f_k^i$. Имеем следующее:
$f_k^2 - f_k^1 = -\dfrac{(u_{k+1}^2 - u_{k+1}^1) - 2(u_k^2 - u_k^1) + (u_{k-1}^2 - u_{k-1}^1)}{h^2} + b_k(u_k^2 - u_k^1)$. Заметим, что норма $\|f^2 - f^1\| = C\|u^2 - u^1\|$ (т.к. все слагаемые в сумме соответствуещей дроби $\frac{\cdots}{h^2}$ сократятся). А значит, что δ и ϵ из определения устойчивости - линейно зависимы, для класса линейных задач этого достаточно, чтобы показать устойчивость.

Так как схема линейная, устойчивая и аппроксимирует данную задачу с порядком 2, то решение разностной задачи сходится к решению дифференциальной с порядком не ниже второго. (Th.Филиппова).

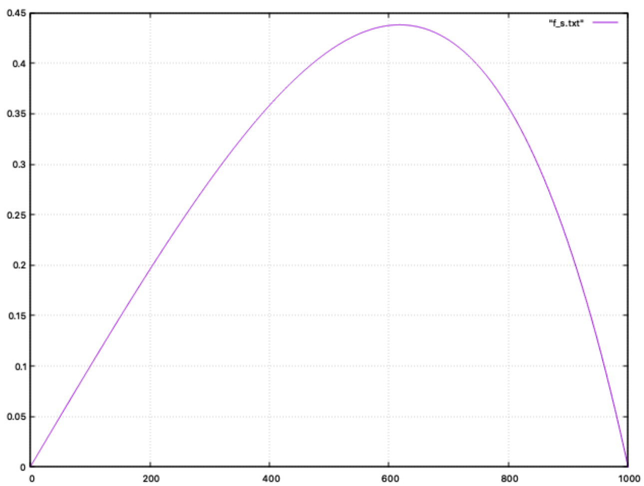
Погрешность. Для проверки точности решения можно взять задачу с известным решением, далее рассмотреть ее на сетке и вычислить

$$\|A\widetilde{u} - u\|_h = \left(\int (u - \widetilde{u})^2\right)^{1/2} = \left(\sum h(u(x_i) - \widetilde{u}_i)^2\right)^{1/2}$$

N.B. В приложении есть программа-проверка корректности данной системы функций, собственных значений и скалярного произведения.

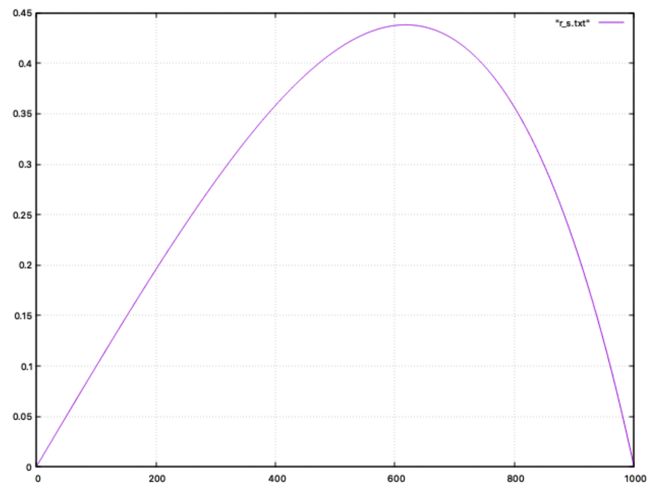
Результаты программы:

Результаты представлены для функции $u(x) = x(1-x)\exp(x)$. Как видно из графиков, представленных ниже, отличия минимальны. Данные графики были выполнены при $b = 1, N = 1000$.



а)

Рис. 1: По оси x номера точек



б)

Рис. 2: По оси x номера точек

Рис. 3

Посмотрим как ведет себя погрешность $\frac{\|Lu - L_h u_h\|}{h^2}$:

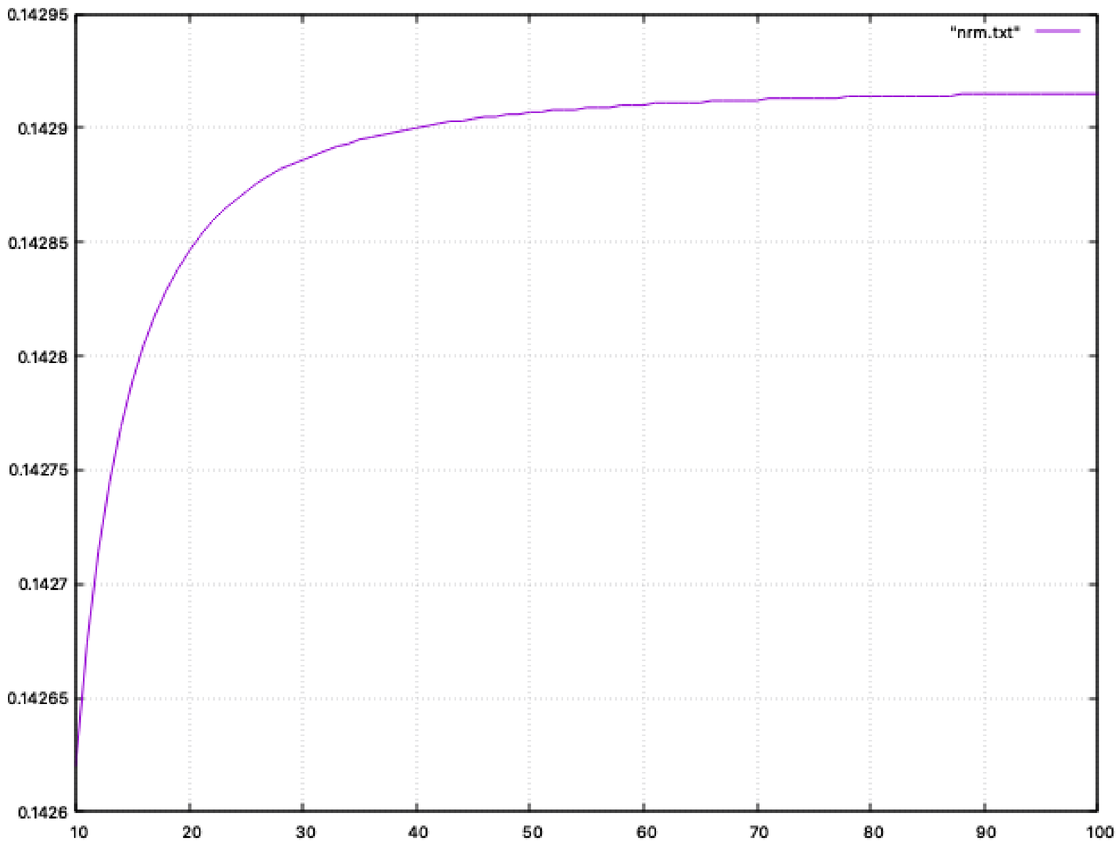


Рис. 4: Константа в погрешности

Данный график показывает, что константа в погрешности примерно равна 0.14, что и показывает второй порядок схемы.

2 случай. Считаем, что $b(x) \geq 0$. Для решения задачи в данном случае используется следующая идея:
Метод. Опять же рассматриваем сетку и разностную схему вида

$$\bar{D}_h = \{x_i = ih, i = 0 \dots N; Nh = 1\}$$

Снова рассмотрим дискретизацию нашей задачи, т.е. $f_k = f(x_k), x_k = kh$. Опять же будем приближать нашу функцию $u(x_k)$, заданную на $\bar{D}_h$ с помощью разностной схемы

$$-\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2} + b_k u_k = f_k,$$

где $u_0 = u_N = 0$

В данном случае идея со сдвигом собственных значений не работает, т.к. $b(x)$ зависит от x. Воспользуемся методом правой прогонки для поиска u_k. Для этого представим данную задачу в виде действия линейного оператора на вектор $u = (0, u_1 \dots u_{N-1}, 0)^{\mathrm{T}}$. Алгоритм приведен ниже (теория подтверждающая корректность описана в разделе *Теория*):
Введем три массива a, b, c размерности $N - 1$, которые соответствуют диагоналям матрицы оператора.

$$\begin{cases} b[i] = a[i] = h^{-2} & \text{i = 1 \dots N - 3} \\ c[i] = 2h^{-2} + b(x_{i+1}) & \text{i = 0 \dots N - 2} \\ a[0] = b[N-2] = 0 \\ a[N-2] = b[0] = h^{-2} \end{cases}.$$

Порядок индексов такой, потому что два значения($u_0 = u_N = 0$) у нас заняты.

Введем еще два массива α, β. Тех же размерностей, что и предыдущие массивы. Теперь проведем следующую процедуру:

$\alpha[0] = \alpha[1] = \frac{b[0]}{c[0]}, \beta[0] = \beta[1] = \frac{f_1}{c[0]}$ и далее $\alpha[i+1] = \frac{b[i]}{c[i] - a[i]\alpha[i]}, \beta[i+1] = \frac{f_{i+1} + a[i]\beta[i]}{c[i] - a[i]\alpha[i]}$.

Теперь $u_{N-1} = \frac{f_{N-1} + a[N-2]\beta[N-2]}{c[N-2] - a[N-2]\alpha[N-2]}$ и $u[i] = \alpha[i+1]u[i+1] + \beta[i+1]$.

Тем самым мы построим приближения функции на равномерной сетке.

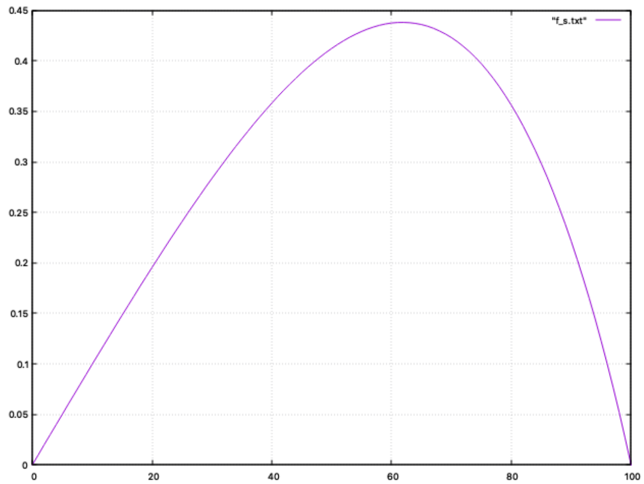
Теория. В данном разделе я решил не объяснять вывод формул из прогонки, а лишь показать корректность и устойчивость ее использования в данном случае.

Th. Представим нашу задачу в виде $A_h u_h = f_h$, где A_h - трехдиагональная матрица. Тогда выполнены условия теоремы корректности и устойчивости метода прогонки(*стр.256*).

Док-во Мы хотим показать, что $|c_i| \geq |a_i| + |b_i|$, $|c_0| \geq |b_0|$, $|c_N| \geq |a_N|$ и хотя бы одно из них строгое. Вспомним как выглядят наши $c_i, a_i, b_i : c_i = \frac{2}{h^2} + \tilde{b}(x_i)$,$a_i = b_i = \frac{1}{h^2}$. Т.к. $b_i > 0$, то мы сразу получаем требуемое. А значит $c_i - a_i \alpha_i \neq 0$ (корректность) и $|\alpha_i| \leq 1$ (устойчивость).

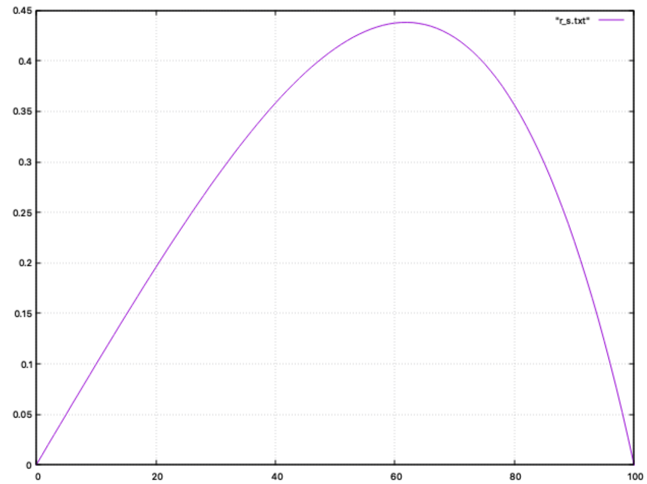
Большая часть применяемых теорем было представлено ранее. Данная теорема относится только прогонке.

Погрешность. Я рассматривал задачу с готовым решением $u(x) = x(1 - x)\exp(x)$, $b(x) = \exp(x)$(все данные можно легко поправлять в коде программы). Как видно из графиков, представленных ниже, отличий почти нет. Данные графики были выполнены при $N = 100$.



а)

Рис. 5: Построенное решение.



б)

Рис. 6: Настоящее решение.

Рис. 7

Посмотрим как ведет себя погрешность $\frac{\|Lu - L_h u_h\|}{h^2}$:

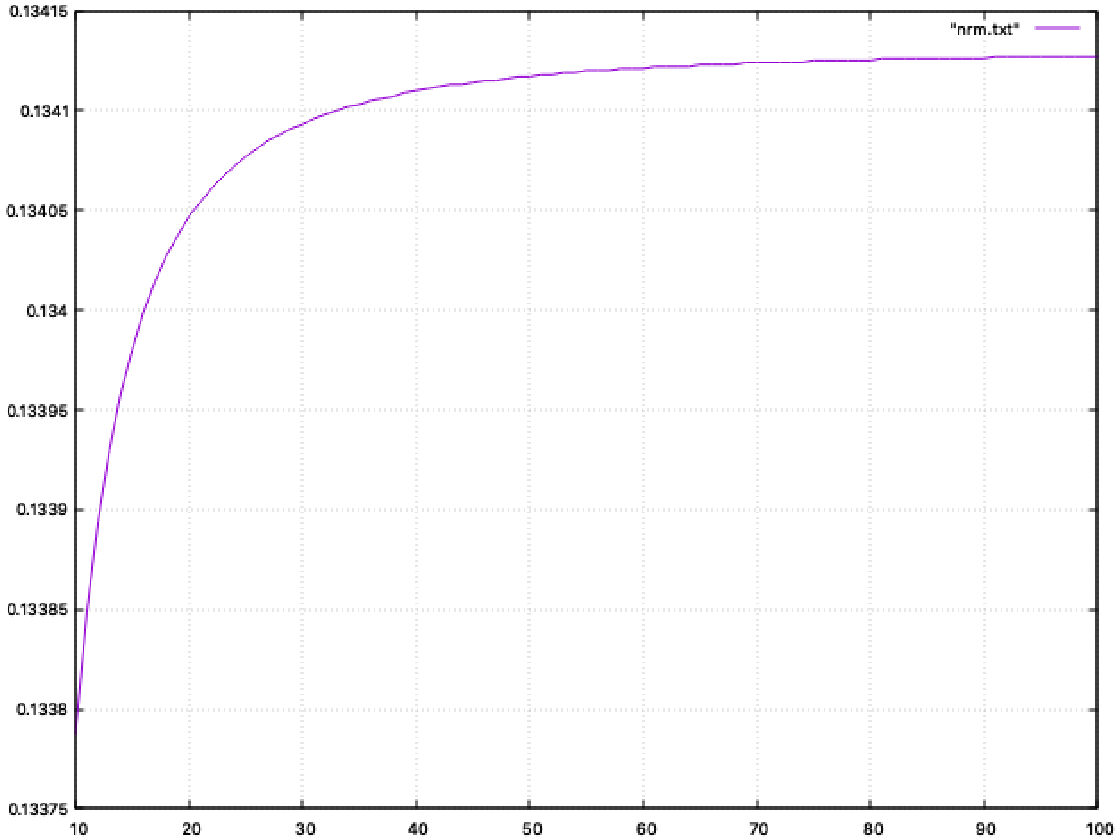


Рис. 8: Константа в погрешности

Данный график показывает, что константа в погрешности примерно равна 0.13, что и показывает второй порядок схемы. Как видно, константы в двух разных методах отличаются, видно сказывается подсчет экспонент при методе правой-прогонки.

2 Уравнение в частных производных.

Рассматриается задача: $-u_{xx} + u_t + b(x)u = f(t,x)$, где $u(0,t) = u(1,t) = 0$ и $u(x,0) = u^0(x)$
Для решения данной задачи я применял разностную схему вида на равномерном разбиении $D_{h,\tau} = \{(ih, j\tau); Nh = 1; TMh = 1\}$:

$$-\frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} + \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} + b_i u_i^{j+1} = f_i^{j+1}$$

Линейными преобразованиями свел ее к виду:

$$-\frac{\tau}{h^2}u_{i+1}^{j+1} + \left(1 + \tau b_i + \frac{2\tau}{h^2}\right)u_i^{j+1} - \frac{\tau}{h^2}u_i^{j+1} = f_i^{j+1}\tau + u_i^j$$

Данную схему уже можно рассматривать как систему линейных уравнений. Несложно увидеть, что здесь работает метод прогонки (его корректность и устойчивость видна из диагонального преобладания). Начальные данные позволяют нам начать эту прогонку и получить ответ.

Здесь представлены полученные мною вычисления $N = 100, M = 100, T = 1$, для $u(x,t) = \exp(t)x(1-x)$ и $b(x) = \exp(x)$. Из первых двух картинок сложно что-то увидеть, но третья картинка показывает, что уже на сетке 10×10 вычисления почти похожи на настоящий результат!

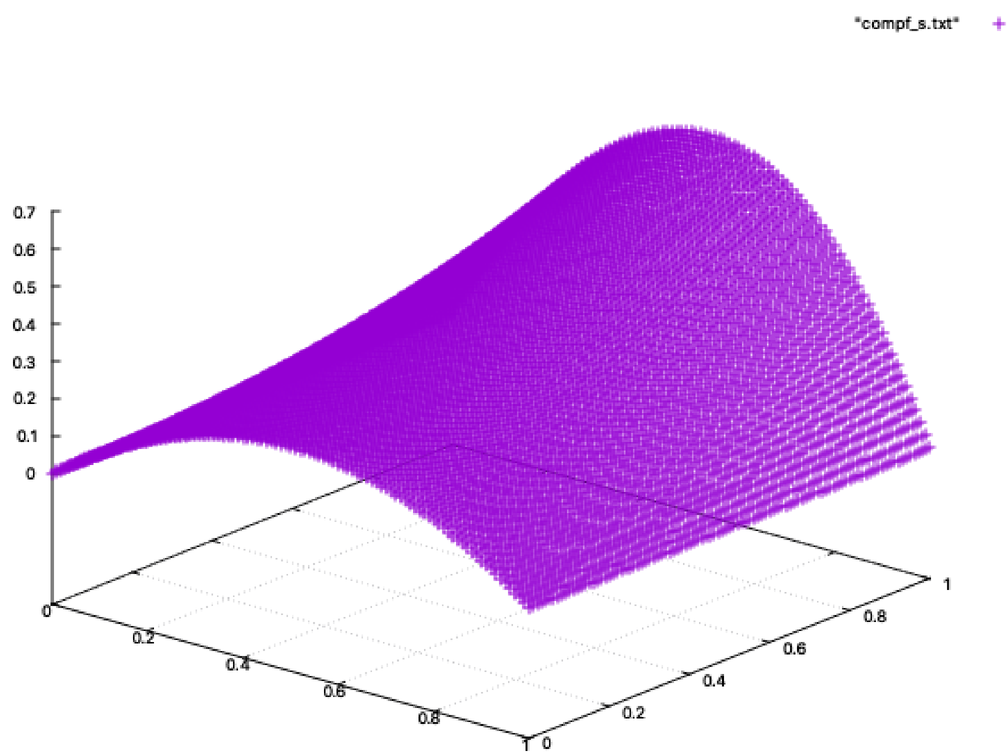


Рис. 9: Посчитанное

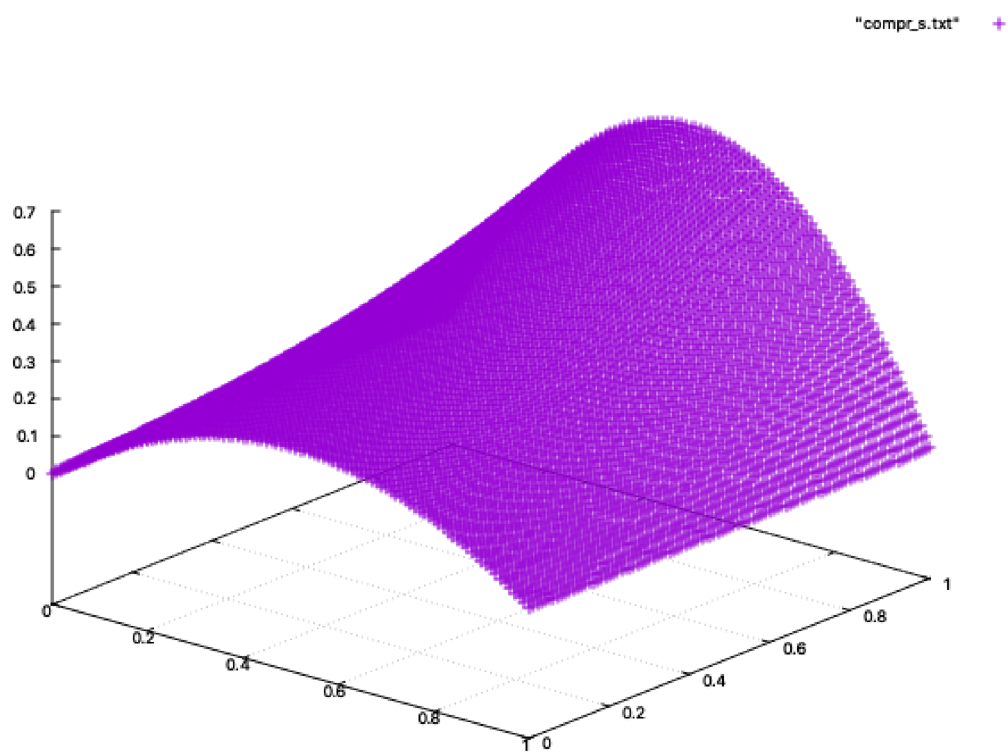


Рис. 10: Реальное

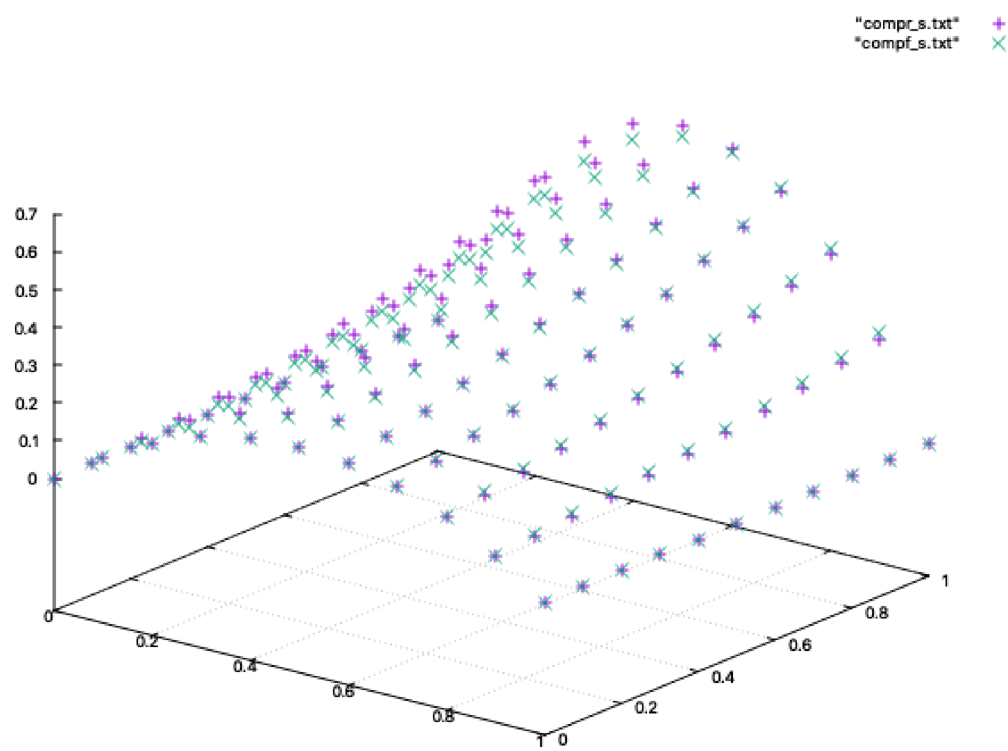


Рис. 11: Сравнение на малой сетке