Physikalisches Praktikum

Das Trägheitsmoment

Versuch 3

Praktikanten:	Timo Janßen E-Mail: timo.janssen1@stud.uni-goettingen.de Gottfried Schnabel E-Mail: g.schnabel@stud.uni-goettingen.de
Tutorin:	Jantje Freudenthal
Gruppe:	10
Durchgeführt am:	13.05.2013
Protokoll abgegeben:	27.05.2013
Protokoll verbessert:	....

Testiert: ....

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Bei der Untersuchung von klassischen Rotationsbewegungen spielt insbesondere das Trägheitsmoment eine große Rolle. Dieses gibt den Widerstand eines starren Körpers gegenüber Änderungen der Rotation um die Drehachse an und ist das Analogon zur Masse bei Translationsbewegungen. In diesem Versuch soll das Trägheitsmoment mehrerer Körper mit unterschiedlichen Messmethoden bestimmt werden.

2 Theorie

2.1 Drehimpuls und Drehmoment

Betrachten wir einen starren Körper als Sytem von Massenpunkten mit Ortsvektoren $\vec{r}_i$ und den Einzelimpulsen $\vec{p}_i$. Dann ist der **Drehimpuls** $\vec{L}$ definiert als

$$\vec{L} := \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i. \tag{1}$$

Die zeitliche Ableitung des Drehimpulses bezeichnet man als **Drehmoment**:

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M} \tag{2}$$

2.2 Trägheitsmoment

Ein Massenelement Δm_i eines mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Körpers habe den Abstand $r_{i\perp} = |\vec{r}_i|$ von der Drehachse. Seine Geschwindigkeit $\vec{v}_i \perp \vec{r}_i$ ist

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i. \tag{3}$$

Die kinetische Energie eines solchen Elementes ist

$$E_{kin}\left(\Delta m_i\right) = \frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\Delta m_i r_{i\perp}^2 \omega^2 \tag{4}$$

und die Rotationsenergie des Körpers ergibt sich durch Aufsummieren aller kinetischen Energien:

$$\begin{aligned} E_{rot} &= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta m_i \to 0}} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i r_{i\perp}^2 \omega^2 \right) \\ &= \frac{1}{2}\omega^2 \int r_\perp^2 \,\mathrm{d}m \end{aligned} \tag{5}$$

Das darin auftauchende Integral definiert man als **Trägheitsmoment**:

$$\Theta := \int_V r_\perp^2 \,\mathrm{d}m = \int_V r_\perp^2 \rho \,\mathrm{d}V \tag{6}$$

Dieses ist von der Rotationsachse abhängig, wobei es für jeden Körper drei **Hauptträgheitsmomente** $\Theta_A, \Theta_B, \Theta_C$ entlang der Hauptachsen gibt, aus denen sich für jede beliebige Achse das Trägheitsmoment berechnen lässt.
Für die Drehimpulse entlang der Hauptachsen gilt

$$L_A = \Theta_A \omega_A;\ L_B = \Theta_B \omega_B;\ L_C = \Theta_C \omega_C. \tag{7}$$

2.3 Satz von Steiner

Kennt man das Trägheitsmoment einer durch den Schwerpunkt verlaufenden Achse A, so lässt sich daraus leicht das Trägheitsmoment einer parallelen Achse B berechnen. Dabei gilt der **Steinersche Satz**:

$$I_B = I_A + a^2 M \tag{8}$$

$$a := \text{Abstand A-B}$$

$$M := \text{Gesamtmasse}$$

2.4 Bestimmung der Trägheitsmomente aus Drehschwingungen

Steht eine der Hauptträgheitsachsen (hier exemplarisch C) senkrecht auf der Rotationsachse, so gilt

$$\Theta\omega^2 = \vec{L} \cdot \vec{\omega} = \Theta_A \omega_A^2 + \Theta_B \omega_B^2 \tag{9}$$

Setzt man $\omega_A = \omega \cos\alpha$, $\omega_B = \omega \cos\beta$ in Gleichung 9 ein, erhält man die Ellipsengleichung

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta}{b^2} = 1 \tag{10}$$

mit $\Theta_A = \frac{1}{a^2}$, $\Theta_B = \frac{1}{b^2}$, $\xi = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\Theta}}$, $\eta = \frac{\cos\beta}{\sqrt{\Theta}}$. Kennt man also die Haupt- und Nebenachse der Ellipse, kann man daraus die Hauptträgheitsmomente berechnen.

2.5 Bestimmung des Trägheitsmomentes aus dem Drehmoment

Zur Bestimmung des Trägheitsmomentes kann ein Körper mit der zu untersuchenden Achse an einer Feder befestigt und die Schwingungsdauer der zugehörigen Drehschwingung gemessen werden. Bei Auslenkung um den Winkel φ übt eine Spiralfeder das rücktreibende Drehmoment

$$M = -D\varphi \tag{11}$$

aus. D bezeichnet man als **Winkelrichtgröße** (oder Direktionsmoment). Gleichzeitig gilt

$$M = \Theta\ddot{\varphi}. \tag{12}$$

Gleichsetzen von 11 und 12 ergibt eine Differentialgleichung, deren Lösung eine Beziehung zwischen Trägheitsmoment, Winkelrichtgröße und Schwingungsdauer liefert:

$$\Theta = D \cdot \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \tag{13}$$

2.6 Bestimmung des Trägheitsmomentes aus der Winkelbeschleunigung

An einem Rad sei ein Schwungrad befestigt, welches durch eine herabfallende Masse m beschleunigt wird. Auf das Schwungrad wird dabei die Kraft $F = mg - ma'$ ausgeübt. Dadurch wirkt das Drehmoment

$$T = mgr - ma'r \tag{14}$$

und man erhält für das Trägheitsmoment

$$\Theta = \frac{mgrR - ma'rR}{a}. \tag{15}$$

Mit der Beziehung $\frac{a}{R} = \frac{a'}{r}$ ergibt sich

$$\Theta = \frac{mgrR}{a} - mr^2 \tag{16}$$

2.7 Trägheitsmoment des Physikalischen Pendels

Wird das Pendel um kleine Winkel φ ausgelenkt, wirkt näherungsweise die Rückstellkraft

$$F_r = -m_k g \varphi \tag{17}$$

Einsetzen des Drehmomentes $M = -F_r r_s$ ergibt die Differentialgleichung

$$\Theta \ddot{\varphi} = -r_s m_k g \varphi \tag{18}$$

Die Lösung liefert

$$\Theta = \frac{T^2 r_s m_k g}{4\pi^2} \tag{19}$$

Betrachten wir ein schwerpunktgelagertes Rad der Masse $m_r = m_k - m$ mit der Punktmasse m im Abstand z vom Mittelpunkt. Dann erhält man für das Trägheitsmoment des Rades

$$\Theta_r = \frac{T^2 z m g}{4\pi^2} - m z^2. \tag{20}$$

3 Durchführung

3.1 Versuchsteil A

Im ersten Versuchsteil werden Größen der Drehschwingung gemessen, um daraus das Trägheitsmoment verschiedener Körper zu berechnen.

3.1.1 Messung der Körpereigenschaften

Zunächst werden Eigenschaften der Körper gemessen, die für die Auswertung benötigt werden. Tabelle 1 gibt Aufschluss, was für welchen Körper gemessen wird.

Körper	**zu messende Größen**
Kugel	Radius, Masse
Zylinder	Radius, Masse
Scheibe	Radius, Masse
Hohlzylinder	innerer Radius, äußerer Radius, Masse
Hantel	Abstand der Hantelkörper, Masse
Würfel	Kantenlänge, Masse
Stab	Länge, Abstand der Drehachse vom Schwerpunkt, Masse

Tabelle 1: Gemessene Größen der verschiedenen Körper

3.1.2 Vermessung der Drehschwingungen

Für diesen Versuchsteil wird eine Spiralfeder mit einer Haltevorrichtung für die Versuchskörper verwendet. Zunächst soll die Winkelrichtgröße der Vorrichtung bestimmt werden. Dazu wird der Halter so eingespannt, dass die Achse horizontal liegt und der Winkelausschlag in Abhängigkeit des angreifenden Drehmomentes gemessen. Die Drehmomente (jeweils nach links und rechts) werden durch angehängte Gewichte erzeugt. Anschließend wird der Halter vertikal eingespannt und die Schwingungsdauer für jeden Körper (bei einigen Körpern für verschiedene Achsen) gemessen.
Außerdem wird ein Tischchen-förmiger Körper (Platte mit zwei diagonal gegenüberliegenden Beinen) untersucht. Das Trägheitsmoment dieses Körpers kann durch Drehung an der Symmetrieachse verändert werden. Die Schwingungsdauer wird für in 15°-Schritten verdrehte Rotationsachsen gemessen.

3.2 Versuchsteil B

Der zweite Versuchsteil beschäftigt sich mit einem Speichenrad, welches sowohl frei rotierend, als auch als physikalisches Pendel ausgebildet werden kann.

3.2.1 Messung der Winkelbeschleunigung

Mit einem Faden werden verschiedene Massen (0,1 kg, 0,2 kg, 0,5 kg, 1 kg) so am Rad befestigt, dass diese beim Herabfallen ein Drehmoment verursachen. Mit einem Markengeber (Frequenz 10 Hz) werden Zeitmarken der Bewegung aufgezeichnet, um daraus die Winkelbeschleunigung zu bestimmen. Um daraus das Trägheitsmoment berechnen zu können werden der Radius der Felge und der Radius des Zusatzrades, an dem der Faden befestigt ist, gemessen.

3.2.2 Physikalisches Pendel

An einer Speiche des Rades wird ein zusätzliches Gewicht befestigt, sodass die Anordnung ein physikalisches Pendel darstellt. Für kleine Amplituden wird die Schwingungsdauer gemessen. Anschließend wird das Gewicht an der gegenüberliegenden Speiche befestigt und die Messung wiederholt. Für die Auswertung müssen außerdem die Masse des Zusatzgewichtes und der Abstand des Gewichtes von der Drehachse bestimmt werden.

4 Auswertung

Körper	Trägheitsmoment
Kugel	$48{,}2080(10221) \cdot 10^{-4}\,\mathrm{N\,m}$
Zylinder	$301{,}1600(24577) \cdot 10^{-6}\,\mathrm{N\,m}$
Scheibe	$270{,}3400(10625) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{N\,m}$
Hohlzylinder	$870{,}5300(39556) \cdot 10^{-6}\,\mathrm{N\,m}$
Hantel	
Würfel	$563{,}7900(22068) \cdot 10^{-6}\,\mathrm{N\,m}$
Stab (mittig)	$993{,}7500(23082) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{N\,m}$
Stab (versetzt)	$3975{,}0000(92328) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{N\,m}$

5 Diskussion