

# Physikalisches Praktikum

## Kreiselpräzession

Versuch 4

Name:	Timo Janßen
	E-Mail: timo.janssen1@stud.uni-goettingen.de
Mitarbeiter:	Tom Groß
	E-Mail: tom.gross@stud.uni-goettingen.de
Tutorin:	Jantje Freudenthal
Gruppe:	10
Durchgeführt am:	27.05.2013
Protokoll abgegeben:	10.06.2013
Protokoll verbessert:	.....
Testiert:	.....

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Theorie</b>	<b>1</b>
2.1. Trägheitsmoment des physikalischen Pendels . . . . .	1
2.2. Der Kreisel . . . . .	1
2.3. Trägheitsmoment des Kreisels . . . . .	2
2.4. Präzession . . . . .	3
2.5. Nutation . . . . .	4
<b>3. Durchführung</b>	<b>5</b>
3.1. Physikalisches Pendel . . . . .	5
3.2. Präzession . . . . .	6
3.3. Nutation . . . . .	6
<b>4. Auswertung</b>	<b>6</b>
4.1. Physikalisches Pendel . . . . .	7
4.2. Präzession . . . . .	8
4.3. Vergleich der Ergebnisse . . . . .	9
4.4. Nutation . . . . .	9
<b>5. Diskussion</b>	<b>11</b>
<b>A. Messwerte (Original)</b>	<b>13</b>

## 1. Einleitung

In diesem Versuch geht es um die Untersuchung der Rotationen eines Kreisels und den sich daraus ergebenden Eigenschaften. Insbesondere die Präzession soll näher betrachtet werden. Kreisel sind alltägliche Gegenstände, ob als Spielzeug oder auch als Messinstrument (zum Beispiel als Gyroskop). Die Bewegungsgleichungen des Kreisels finden insbesondere in der Astronomie Anwendung, wo sie die Bewegungen der Himmelskörper beschreiben.

## 2. Theorie

### 2.1. Trägheitsmoment des physikalischen Pendels

Bringt man an einem Rad, welches frei an einer Achse gelagert ist, ein zusätzliches Gewicht  $m$  im Abstand  $z$  vom Mittelpunkt an, so bildet der Körper ein physikalisches Pendel. Wird das Pendel der Masse  $m_k$  um kleine Winkel  $\varphi$  ausgelenkt, wirkt näherungsweise die Rückstellkraft

$$F_r = -m_k g \varphi \quad (1)$$

Einsetzen des Drehmomentes  $M = -F_r r_s$  ergibt die Differentialgleichung

$$I \ddot{\varphi} = -r_s m_k g \varphi \quad (2)$$

Die Lösung liefert

$$I = \frac{T^2 r_s m_k g}{4\pi^2} \quad (\text{Nolting [2011]}) \quad (3)$$

Mit der Schwerpunktsverschiebung  $r_s = zm/M$  und der Gesamtmasse  $M = m_k + m$  erhält man schließlich

$$I_r = \frac{T^2 z m g}{4\pi^2} - m z^2. \quad (4)$$

Dabei ist der zweite Term das abgezogene Trägheitsmoment des Zusatzgewichtes.

### 2.2. Der Kreisel

Hält man einen starren Körper an einem Raumpunkt fest, so verbleiben ihm nur noch die drei Rotationsfreiheitsgrade. Einen solchen Körper nennt man Kreisel, wobei man zwischen *symmetrischen* (mindestens zwei Hauptträgheitsmomente sind gleich) und *asymmetrischen* Kreiseln unterscheidet. Wirkt auf einen Körper kein äußeres Drehmoment, so nennt man ihn *kräftefrei*. Ein Kreisel ist beispielsweise kräftefrei, wenn er in seinem Massenschwerpunkt aufgehängt wird, sodass zwar eine Gravitationskraft wirkt, diese jedoch kein Drehmoment ausüben kann. (Demtroeder [2008]) Im Folgenden werden symmetrische Kreisel mit und ohne äußeres Drehmoment betrachtet.

Die Gesetze des Kreisels leiten sich aus der Drehimpulserhaltung

$$\dot{\vec{L}} = I \cdot \dot{\vec{\omega}} = \vec{M} \quad (5)$$

$L$  := Drehimpuls

$I$  := Trägheitsmoment

$\omega$  := Kreisfrequenz

$M$  := Drehmoment

ab. Die Bewegung des Kreisel wird im allgemeinen im raumfesten Bezugssystem beschrieben, wobei gilt

$$\dot{\vec{L}}_{Raum} = \vec{M} = \dot{\vec{L}}_{Körper} + \vec{\omega} \times \vec{L} \quad (\text{Demptroeder [2008]}). \quad (6)$$

Dabei ist  $\omega$  die Geschwindigkeit, mit der der Körper gegen das raumfeste System rotiert. Schreibt man die Komponenten dieser Gleichung aus, erhält man die *Eulerschen Kreiselgleichungen*, welche die Grundlage für die Beschreibung von Kreiselbewegungen bilden.

Zur Beschreibung des kräftefreien symmetrischen Kreisels unterscheidet man drei Achsen (vgl. Abb. 1):

- Die raumfeste Drehimpulsachse
- Die momentane Rotationsachse
- Die körperfeste Figurenachse (meistens Symmetrie- und Hauptträgheitsachse).

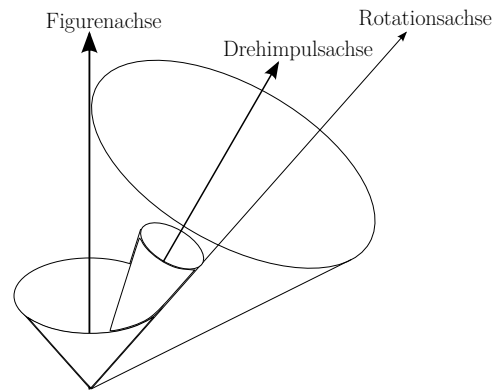


Abbildung 1: Festlegung der drei Kreiselachsen

### 2.3. Trägheitsmoment des Kreisels

Aus der Definition des Trägheitsmomentes

$$I := \int_V r_{\perp}^2 dm \quad (7)$$

folgt für einen Zylinder, der um seine Symmetrieachse rotiert (entspricht dem Trägheitsmoment des Rades entlang der horizontalen Achse)

$$I_{\text{hor}} = \frac{1}{2} M r^2 \quad (\text{Demptroeder [2008]}) \quad (8)$$

mit Radius  $r$  und Masse  $M$ .

Für die Rotation um eine Querachse erhält man

$$I_z = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2 \text{ (Spiegel and Liu [1999])} \quad (9)$$

mit der Zylinderdicke  $h$ . Beim betrachteten Kreisel ist die Drehachse um  $z_R$  vom Schwerpunkt des Rades entfernt und an der gleichen Achse befindet sich ein Ausgleichsgewicht  $m_a$  im Abstand  $z_a$  von der Drehachse (vgl. Abb. 4). Damit erhält man unter Anwendung des Steinerschen Satzes (z. B. Nolting [2011]) für das Trägheitsmoment des Kreisels entlang der vertikalen Achse:

$$I_{\text{ver}} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2 + mz_R^2 + m_az_a^2, \quad (10)$$

wobei der Beitrag des Stabes (vertikale Achse) vernachlässigt wird.

## 2.4. Präzession

Wird auf einen rotierenden Kreisel ein äußeres Drehmoment  $\vec{M}$  ausgeübt, so ändert dies aufgrund  $\vec{M} = \dot{\vec{L}}$  die Richtung des Drehimpulses. Solange das Drehmoment senkrecht wirkt, bleibt der Betrag des Drehimpulses erhalten. Die entstehende Ausweichbewegung zu einer Achse senkrecht zum Drehmoment bezeichnet man als *Präzession* (vgl. Abb. 2, S. 4).

Es soll nun ein kräftefreier symmetrisches Kreisel betrachtet werden, an den ein Zusatzgewicht  $m_z$  angehängt wird. Dieses verlagert den Schwerpunkt des Kreisels und übt durch die Gewichtskraft  $\vec{F}_g = m_z \cdot \vec{g}$  ein Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{r} \times m_z \vec{g} \Rightarrow M = rm_z g \cdot \sin \theta \quad (11)$$

auf die Drehimpulsachse aus. Dabei ist  $\vec{r}$  der Vektor vom Unterstützungspunkt des Kreisels zum Angriffspunkt der Schwerkraft (also der Punkt, an dem das Zusatzgewicht angehängt wird).

In der Zeit  $dt$  dreht sich  $\vec{L}$  um den Winkel  $d\varphi = \frac{dL}{L \sin \theta}$  mit der Präzessionsgeschwindigkeit

$$\omega_P = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L \sin \theta}. \quad (12)$$

Dabei ist  $L \sin \theta$  der Radius der Präzessionsbewegung.

Setzt man  $L = I\omega_R$  und Gleichung (11) in Gleichung (12) ein, fällt die Winkelabhängigkeit heraus und man erhält

$$\omega_P = \frac{m_z g r}{I \omega_K} \quad (13)$$

mit dem Trägheitsmoment  $I$  und der Rotationsgeschwindigkeit  $\omega_R$  des Kreisels. (Demptroeder [2008])

Sind  $\omega_R$  und  $\omega_P$  durch Messung bekannt, so kann der Faktor  $\frac{m_z g r}{I}$  mittels linearer Regression bestimmt werden, um daraus das Trägheitsmoment zu berechnen.

## 2.5. Nutation

Wirkt auf einen rotierenden Kreisel ein Stoß ein, so wird die Figurenachse gegen die Rotationsachse ausgelenkt und vollführt eine sogenannte *Nutationsbewegung* (vgl. Abb. 2) auf einem Kegel um die Drehimpulsachse. Gleichzeitig bewegt sich auch die Rotationsachse auf einem anderen Kegel um die Drehimpulsachse.

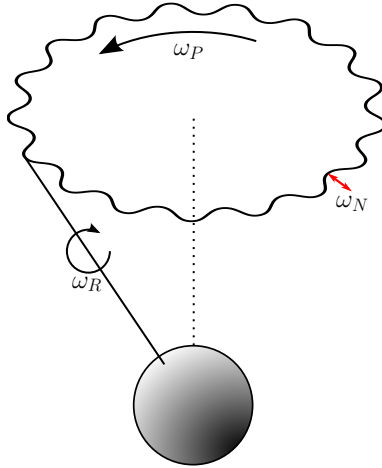


Abbildung 2: Rotation  $\omega_R$ , Präzession  $\omega_P$  und Nutation  $\omega_N$  eines Kreisels

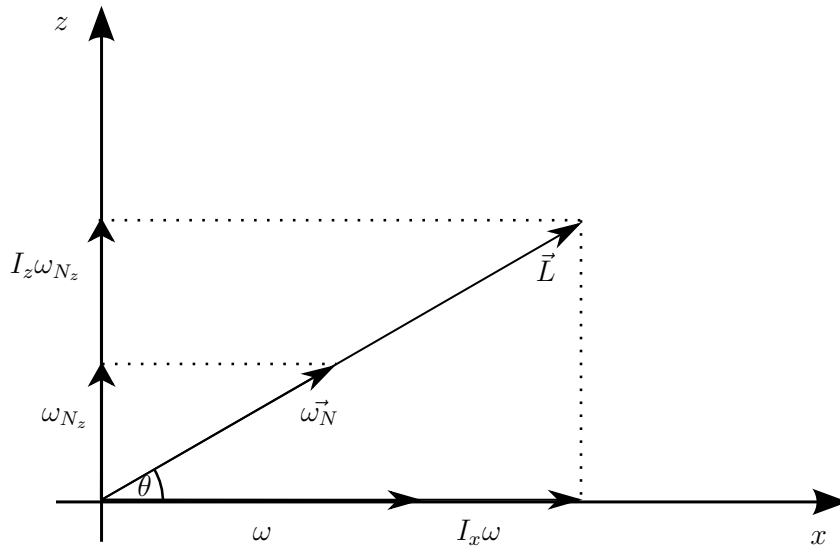


Abbildung 3: Nutation

Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  lässt sich wie in Abbildung 3 in zwei zueinander senkrechte Komponenten aufteilen. Aus der Abbildung leitet man ab:

$$\begin{aligned}\omega_N &= \frac{\omega_{N_z}}{\sin \theta} = \frac{L_z}{I_x} \cdot \frac{1}{\sin \theta} \\ &= \frac{L_x}{I_z} \cdot \frac{1}{\cos \theta} = \frac{I_x}{I_z} \cdot \frac{\omega}{\cos \theta},\end{aligned}\tag{14}$$

was sich für kleine Winkel ( $\cos \theta \approx 1$ ) zu

$$\omega_N \approx \frac{I_x}{I_z} \cdot \omega \quad (15)$$

vereinfacht.

### 3. Durchführung

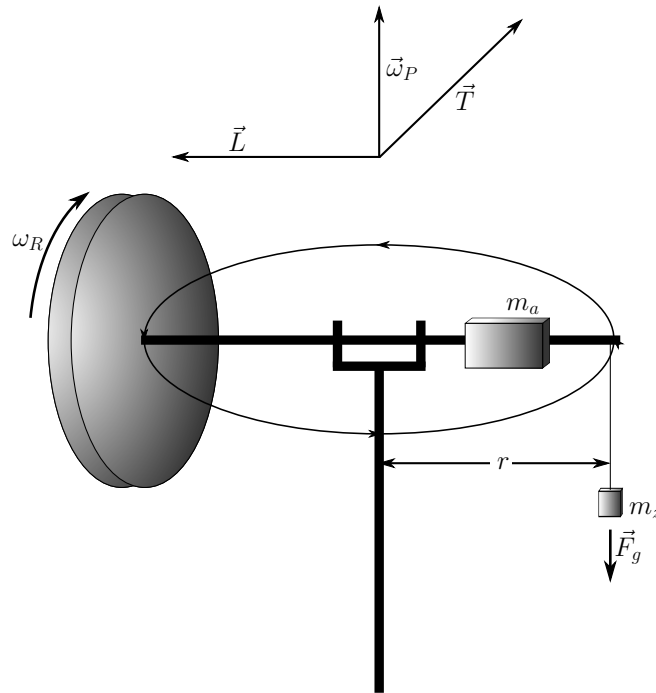


Abbildung 4: Versuchsskizze: Kreisel mit Ausgleichsgewicht  $m_a$  und Zusatzgewicht  $m_z$

Abbildung 4 zeigt schematisch den Versuchsaufbau. Der Kreisel besteht aus einem Rad, welches an einer Achse gelagert ist. Mit dem Ausgleichsgewicht  $m_a$  kann die Achse in die horizontale Gleichgewichtslage gebracht werden (Verschiebung des Schwerpunkts zum Punkt der Aufhängung). Die Achse kann durch eine Halterung fest eingespannt werden. Am Ende der Achse befindet sich eine Kerbe zum Einhängen der Zusatzgewichte  $m_z$ .

#### 3.1. Physikalisches Pendel

Der Kreisel wird an der Achse eingespannt. Am Rad des Kreisels wird ein Zusatzgewicht befestigt, um dieses als physikalisches Pendel auszubilden. Die Schwingungsdauer des Pendels wird über mehrere Perioden wiederholt gemessen. Anschließend wird das Gewicht an der diametral gegenüberliegenden Stelle befestigt und die Messung wiederholt.

### 3.2. Präzession

Die Einspannung wird entfernt und der Kreisel in die horizontale Gleichgewichtslage gebracht, indem das Ausgleichsgewicht  $m_a$  entsprechend verschoben wird. Am Rad wird ein Papierstreifen befestigt, um die Rotationsperiode  $T_R$  mit einer Lichtschranke messen zu können. Mit einer Aufzugsschnur wird das Rad in schnelle Rotation versetzt und die Rotationsperiode mit der Lichtschranke gemessen. Anschließend wird ein Zusatzgewicht  $1,0 \cdot 10^1 \text{ g} \leq m_z \leq 6,0 \cdot 10^1 \text{ g}$  angehängt und der Kreisel vorsichtig in die Präzessionsbewegung eingeführt. Die halbe Präzessionsperiode  $T_P/2$  wird mit einer Stoppuhr gemessen. Nach dem halben Umlauf wird das Zusatzgewicht entfernt und erneut die Rotationsperiode  $T_R$  gemessen. Das Zusatzgewicht wird danach wieder angehängt und wieder die Präzessionsperiode gemessen. Dies wird insgesamt vier Mal wiederholt. Für zwei weitere Gewichte  $m_z$  wird der beschriebene Vorgang wiederholt.

### 3.3. Nutation

Wie im Präzessionsversuch wird der Kreisel in schnelle Rotation versetzt und zunächst die Rotationsperiode  $T_R$  gemessen. Anschließend wird auf die Achse ein Stoß ausgeübt, um den Kreisel in Nutation zu versetzen. Mit der Stoppuhr wird die Nutationsperiode  $T_N$  über mehrere Perioden gemessen. Nachdem die Nutation abgeklungen ist, wird erneut die Rotationsperiode mit der Lichtschranke gemessen und ein weiterer Stoß auf die Achse ausgeübt. Dies wird insgesamt drei Mal wiederholt.

Zusätzlich werden alle Parameter gemessen, die für die Berechnung des Trägheitsmomentes des Kreisels benötigt werden (Längen, Abstände, Massen).

## 4. Auswertung

Die Messung der Parameter des Versuchsaufbaus ergab folgende Werte:

Raddurchmesser $d$	$2,45 \cdot 10^{-1} \text{ m}$
Raddicke $h$	$2,8 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
Radmasse $M$	$1,324 \text{ kg}$
Länge des Stabs (Achse) $L$	$5,01(2) \cdot 10^{-1} \text{ m}$
Durchmesser des Ausgleichsgewichtes $d_a$	$6,00(25) \cdot 10^{-2} \text{ m}$
Dicke des Ausgleichsgewichtes $h_a$	$4,25(25) \cdot 10^{-3} \text{ m}$
Masse des Ausgleichsgewichtes $m_a$	$9,38 \cdot 10^{-1} \text{ kg}$
Abstand Ausgleichsgewicht-Rotationsachse $l_a$	$1,42(1) \cdot 10^{-1} \text{ m}$
Abstand Rotationsachse-Kerbe (für Zusatzgewicht) $r$	$2,705(5) \cdot 10^{-1} \text{ m}$

Tabelle 1: Daten der Versuchsanordnung

Damit berechnet man gemäß Gleichung (8) das Trägheitsmoment des Rades um die horizontale Achse:

$$I_{\text{hor}} = 9,93 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2.$$



Analog kann mit Gleichung (10) das Trägheitsmoment entlang der vertikalen Achse berechnet werden. Dazu muss zunächst der Abstand des Schwerpunkts des Ausgleichsgewichtes zur Drehachse bestimmt werden:

$$z_a = l_a + \frac{h_a}{2}, \quad \sigma_{z_a} = \sqrt{\sigma_{l_a}^2 + \frac{1}{4}\sigma_{h_a}^2}$$

$$\Rightarrow z_a = 1,633(11) \cdot 10^{-1} \text{ m}$$

Außerdem muss der Abstand  $z_R$  des Rades (im Schwerpunkt) von der Drehachse über den Schwerpunktsatz (z. B. Nolting [2011]) berechnet werden, da dieser nicht direkt gemessen wurde. Es gilt:

$$z_R = \frac{m_a}{M} \cdot z_a, \quad \sigma_{z_R} = \frac{m_a}{M} \cdot \sigma_{z_a}$$

$$\Rightarrow z_R = 1,157(8) \cdot 10^{-1} \text{ m}$$

und man erhält für das Trägheitsmoment entlang der vertikalen Achse

$$I_{\text{ver}} = 4,77(5) \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^2$$

mit dem Fehler

$$\sigma_{I_{\text{ver}}} = \sqrt{\sigma_{z_R}^2 4m^2 z_R^2 + \sigma_{z_a}^2 4m_a^2 z_a^2}$$

aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz.

#### 4.1. Physikalisches Pendel

Mit Gleichung (4)

$$I_r = \frac{T^2 z m g}{4\pi^2} - m z^2, \quad \sigma_{I_r} = \sigma_T \cdot \frac{T z m g}{2\pi^2}$$

kann aus den gemessenen Schwingungsdauern jeweils das Trägheitsmoment berechnet werden. Das Zusatzgewicht hat die Masse  $m = 1 \cdot 10^{-1} \text{ kg}$ , für die Gravitationsbeschleunigung wird der Wert  $g = 9,8116 \text{ m s}^{-2}$  (Lindau [2013]) verwendet. Damit berechnet man folgende Werte:

Messung Nr.	Trägheitsmoment $I$
1	$8,4(1) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$
2	$8,4(1) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$
3	$8,6(1) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$
4	$8,6(1) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$
5	$8,5(1) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$
6	$8,6(1) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$
Mittelwert	$8,51(5) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$

Tabelle 2: Aus der Schwingungsdauer des Pendels berechnete Trägheitsmomente

Dabei wurde als Fehler der Schwingungsdauer  $T$  die Standardabweichung  $s_T = 9 \cdot 10^{-3} \text{ s}$  verwendet.

## 4.2. Präzession

Bei der Präzessionsmessung wurden die Rotationsperiode  $T_R$  und die halbe Präzessionsperiode  $T_P/2$  gemessen. Daraus können über

$$\begin{aligned}\omega_R &= \frac{2\pi}{T_R}, & \sigma_{\omega_R} &= \sigma_{T_R} \cdot \frac{2\pi}{T_R^2} \\ \omega_P &= \frac{\pi}{\left(\frac{T_P}{2}\right)}, & \sigma_{\omega_P} &= \sigma_{\frac{T_P}{2}} \cdot \frac{\pi}{\left(\frac{T_P}{2}\right)^2}\end{aligned}$$

die Rotationsfrequenz  $\omega_R$  und die Präzessionsfrequenz  $\omega_P$  berechnet werden. Mit Gleichung (13) kann daraus mittels linearer Regression die Konstante  $\frac{m_z g r}{I}$  bestimmt werden (vgl. Abb. 5). Da  $T_P$  und  $T_R$  nicht gleichzeitig gemessen wurden, wird für  $\omega_R$  als Näherung der Mittelwert der Werte vor und nach der Präzession verwendet:

$$\bar{\omega}_R = \frac{\omega_{R,\text{vor}} + \omega_{R,\text{nach}}}{2}, \quad \sigma_{\bar{\omega}_R} = \frac{\sigma_{\omega_{R,\text{vor}}} + \sigma_{\omega_{R,\text{nach}}}}{2}$$

Aus der Steigung  $x$  der Regressionsgeraden kann schließlich über die Beziehung

$$x = \frac{m g r}{I} \Leftrightarrow I = \frac{m g r}{x}, \quad \sigma_I = \frac{m g}{x} \cdot \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_x^2 \frac{r^2}{x^2}}$$

auf das Trägheitsmoment  $I$  geschlossen werden (vgl. Tabelle 3).

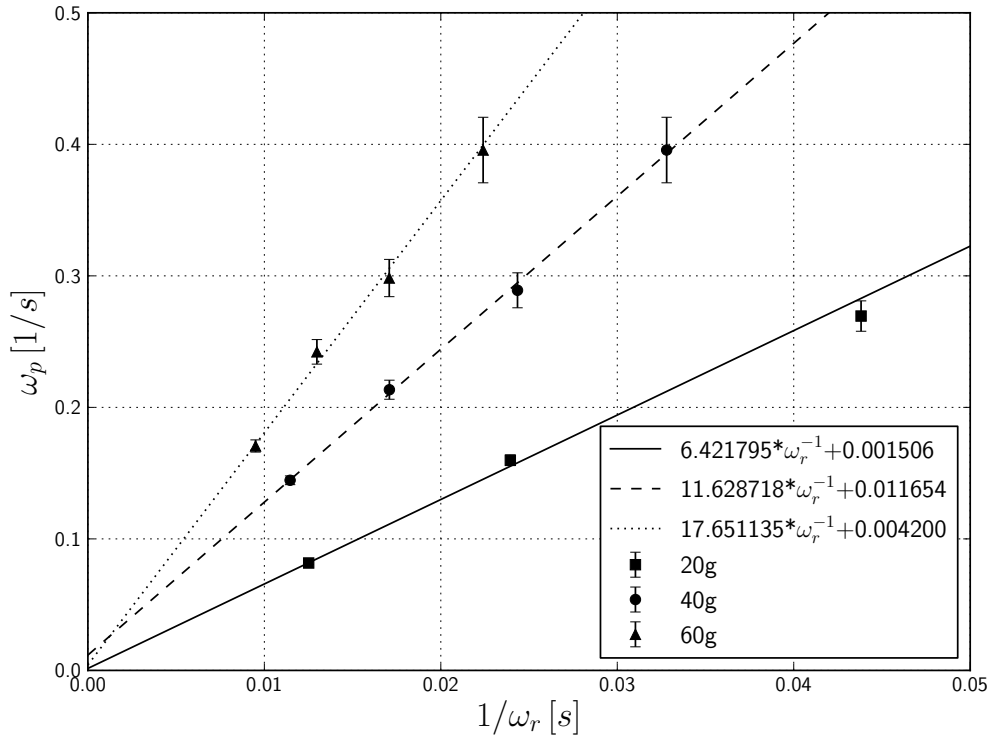


Abbildung 5: Darstellung der Messdaten mit linearer Regression

Zusatzgewicht $m_z$	$\frac{m_z g r}{I}$	Korrelation $r^2$	Trägheitsmoment $I$
20 g	$6,4(3) \text{ s}^{-2}$	0,996	$8,3(4) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$
40 g	$11,6(8) \text{ s}^{-2}$	0,998	$9,1(6) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$
60 g	$17,7(14) \text{ s}^{-2}$	0,992	$9,0(7) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$

Tabelle 3: Ergebnisse der linearen Regression

Der gewichtete Mittelwert beträgt  $\bar{I} = 8,57(27) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$ . Dabei wurde für die Messung der Präzessionsperiode ein Fehler von  $\sigma_{\frac{T_P}{2}} = 5 \cdot 10^{-1} \text{ s}$  angenommen.

### 4.3. Vergleich der Ergebnisse

Tabelle 4 fasst die bisherigen Ergebnisse zusammen:

Methode	$I_{\text{hor}}$
Berechnung aus Versuchsparametern	$9,93 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$
Physikalisches Pendel	$8,51(5) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$
Präzessionsmessung	$8,57(27) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$

Tabelle 4: Zusammenfassung der Ergebnisse für das Trägheitsmoment des Kreisels um die horizontale Achse

Der mit dem Pendel bestimmte Wert liegt im Fehlerintervall der Präzessionsmessung und beide weichen vom ersten Wert um etwa 14% nach unten ab.

### 4.4. Nutation

Aus der Rotationsperiode  $T_R$  und der Nutationsperiode über zehn Schwingungen  $10T_N$  aus der Nutationsmessung erhält man die Frequenzen

$$\begin{aligned}\omega_R &= \frac{2\pi}{T_R}, & \sigma_{\omega_R} &= \sigma_{T_R} \cdot \frac{2\pi}{T_R^2} \\ \omega_N &= \frac{20\pi}{10T_N}, & \sigma_{\omega_N} &= \sigma_{T_N} \cdot \frac{20\pi}{(10T_N)^2}\end{aligned}$$

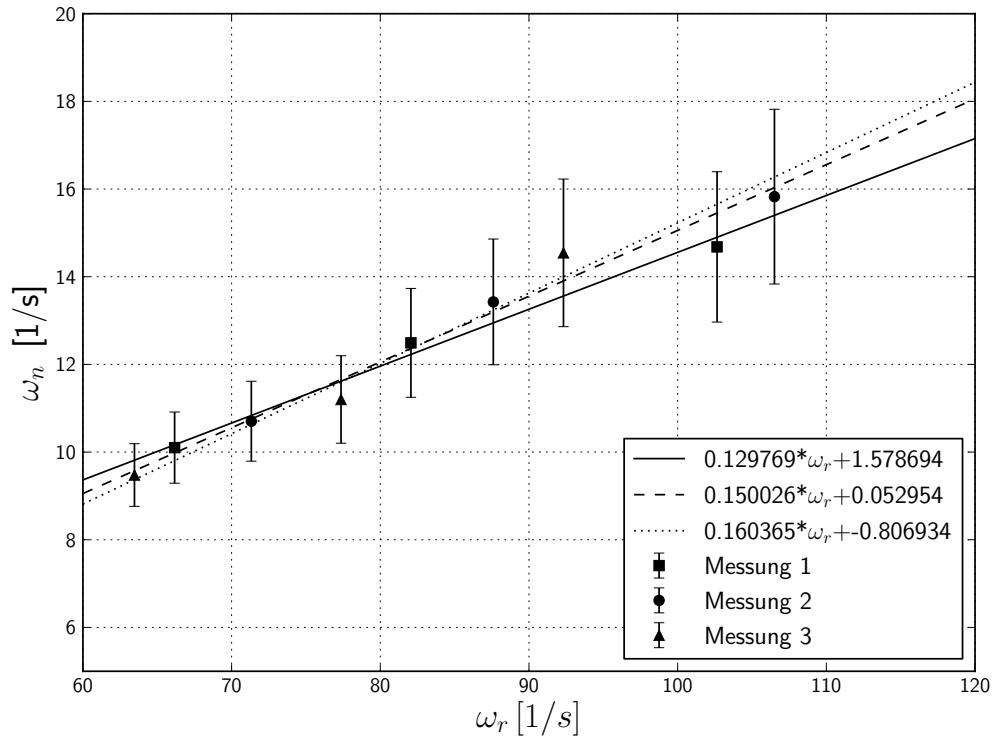


Abbildung 6: Darstellung der Messdaten mit linearer Regression

Trägt man  $\omega_N$  gegen  $\omega_R$  auf, so entspricht die Steigung nach Gleichung (15) dem Verhältnis  $\frac{I_{\text{hor}}}{I_{\text{ver}}}$  (vgl. Abb. 6). Die Ergebnisse sind in Tabelle 5 aufgetragen. Wie bei der Präzession wurde für die Messung der Schwingungsdauer ein Fehler von  $\sigma_{T_N} = 5 \cdot 10^{-1} \text{ s}$  angenommen.

Messung Nr.	$\frac{I_{\text{hor}}}{I_{\text{ver}}}$	Korrelation $r^2$
1	$1,3(5) \cdot 10^{-1}$	0,996
2	$1,5(6) \cdot 10^{-1}$	0,998
3	$1,6(6) \cdot 10^{-1}$	0,992
Mittelwert	$1,5(4) \cdot 10^{-1}$	

Tabelle 5: Ergebnisse der linearen Regression

Der nach dem ersten Teil der Auswertung erwartete Wert ist

$$\frac{I_{\text{hor}}}{I_{\text{ver}}} = 2,081\,761\,0(2) \cdot 10^{-1}.$$

Die Abweichung von diesem Wert beträgt ca. 28%.

## 5. Diskussion

Methode	Trägheitsmoment
Berechnung aus Versuchsparametern	
horizontal	$I_{\text{hor}} = 9,93 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$
vertikal	$I_{\text{ver}} = 4,77(5) \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^2$
	$\frac{I_{\text{hor}}}{I_{\text{ver}}} = 2,081\,761\,0(2) \cdot 10^{-1}$
Physikalisches Pendel	$I_{\text{hor}} = 8,51(5) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$
Präzessionsmessung	$I_{\text{hor}} = 8,57(27) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$
Nutationsmessung	$\frac{I_{\text{hor}}}{I_{\text{ver}}} = 1,5(4) \cdot 10^{-1}$

Tabelle 6: Zusammenfassung der Ergebnisse der Auswertung

Der allein mit den Versuchsparametern berechnete Wert für  $I_{\text{hor}}$  musste ohne Fehlerintervalle berechnet werden, da zu den Angaben am Versuchsaufbau keine Fehler bekannt sind. Trotzdem sollte dies der theoretisch beste Wert sein, da die Fehler im Vergleich zu den anderen Messmethoden eher klein ausfallen sollten und keine Störeinflüsse die Messung verfälscht haben können.

Bei den beiden Werten, die mit dem Pendel und der Präzession gemessen wurden, fällt auf, dass diese zwar gut übereinstimmen, jedoch merklich unter dem erwarteten Wert liegen (vgl. Tab. 6). Auch die Fehlerintervalle der größten Einzelwerte liegen außerhalb dieses Wertes. Ob hier ein systematischer Fehler vorliegt kann nicht mit Sicherheit gesagt werden, da bei der Berechnung mehrere Vereinfachungen vorgenommen wurden:

- *Physikalisches Pendel:* Die verwendete Gleichung gilt nur für kleine Auslenkungswinkel. Zudem wurden die Dämpfung durch Reibung im Lager und die Luftreibung nicht berücksichtigt. Auch wurde das Zusatzgewicht als am Rand des Rades konzentrierte Punktmasse betrachtet, obwohl der Schwerpunkt der Masse tatsächlich weiter außen lag.
- *Präzessionsmessung:* Wie beim Pendel wurde keine Reibung berücksichtigt. Der Beitrag des Stabes zum Trägheitsmoment wurde vernachlässigt. Außerdem ist die Messung der Präzessionsperiode zwangsläufig ungenau, da die gesamte Messung sehr schnell erfolgen muss, um genügend Messpunkte aufzunehmen, bevor das Zusatzgewicht den Boden berührt.

Dies könnte durchaus den nötigen Fehler von etwa 16% rechtfertigen.

Bei der Nutationsmessung liegt der erwartete Wert nur knapp außerhalb des Fehlerintervalls, obwohl das Messverfahren relativ unpräzise wirkt: Die Nutationsperiode muss manuell per Stoppuhr gemessen werden, während die Rotationsfrequenz möglichst groß und der Auslenkungswinkel möglichst klein (um die Kleinwinkelnäherung zu begründen, vgl. Gleichung (15)) sein sollten. Tatsächlich scheint hier relativ gut gemessen worden zu sein, denn auch die lineare Regression zeigt eine gute Korrelation (vgl. Tab. 5).

Insgesamt sind die Ergebnisse im Rahmen der Messgenauigkeit durchaus zu-

friedenstellend, wobei die angegebenen Fehler offensichtlich noch nach oben korrigiert werden sollten.

## Literatur

Wolfgang Demtroeder. *Experimentalphysik 1 - Mechanik und Wärme*. Springer DE, Berlin, 2008. ISBN 354-0-792-953-.

Andreas Lindau. Gravity information system of ptb, June 2013. URL <http://www.ptb.de/cartoweb3/SISproject.php>.

Wolfgang Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik 1 - Klassische Mechanik*. Springer DE, Berlin, 2011. ISBN 364-2-129-48X-.

Murray R. Spiegel and John X. Liu. *Mathematical Handbook of Formulas and Tables* -. McGraw-Hill Education, New York, 2nd edition edition, 1999. ISBN 978-0-071-16765-9.

## A. Messwerte (Original)