11.2. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши о средних значениях

ТЕОРЕМА 2 (теорема Ролля[1]**).** *Пусть функция f:*
1) *непрерывна на отрезке* $[a, b]$;
2) *имеет в каждой точке интервала* (a, b) *конечную или определенного знака бесконечную производную;*
3) *принимает равные значения на концах отрезка, т. е.* $f(a) = f(b)$.

Тогда существует хотя бы одна такая точка ξ, $a < \xi < b$, *что* $f'(\xi) = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля состоит в том, что на графике функции, удовлетворяющей условиям теоремы Ролля, имеется по крайней мере одна точка, в которой касательная горизонтальна (рис. 51).

Доказательство. Если для любой точки x интервала (a, b) выполняется равенство $f(x) = f(a) = f(b)$, то функция f является постоянной на этом интервале и поэтому для любой точки $\xi \in (a, b)$ выполняется условие $f'(\xi) = 0$.

Пусть существует точка $x_0 \in (a, b)$, для которой $f(x_0) \neq \neq f(a)$, например, $f(x_0) > f(a)$. Согласно теореме Вейерштрасса о достижимости непрерывной на отрезке функцией своих наибольшего и наименьшего значений (см. теорему 1 в п. 6.1), существует такая точка $\xi \in [a, b]$, в которой функция f принимает наибольшее значение. Тогда

$$f(\xi) \geqslant f(x_0) > f(a) = f(b).$$

Поэтому $\xi \neq a$ и $\xi \neq b$, т. е. точка ξ принадлежит интервалу (a, b) и функция f принимает в ней наибольшее значение. Следовательно, согласно теореме Ферма (см. теорему 1 в п. 11.1) выполняется равенство $f'(\xi) = 0$. □

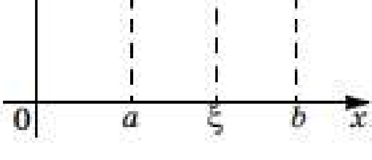

Рис. 51

Заметим, что все предпосылки теоремы Ролля существенны. Чтобы в этом убедиться, достаточно привести примеры функций, для которых выполнялись бы два из трех условий теоремы, третье же не выполнялось бы и у которых не существует точки ξ

[1] М. Ролль (1652—1719) — французский математик.