



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический  
университет имени Н.Э. Баумана»  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

---

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

---

## Домашняя работа № 1

### Вариант 22

Дисциплина	Математическая статистика.
Тема	
Студент	Тимонин А. С.
Группа	ИУ7-62Б
Оценка (баллы)	
Преподаватель	Власов П.А.

Москва, 2020 г.

# ЗАДАЧА 1

Известно, что 80% изготовленных заводом электроламп выдерживают гарантийный срок службы. Найти вероятность того, что в партии из 500 электроламп число выдержавших гарантийный срок службы находится в пределах от 380 до 420. Использовать неравенство Чебышева и интегральную теорему Муавра-Лапласа.

## Неравенство Чебышева

Пусть

1.  $X$  - случайная величина
2.  $\exists MX, \exists DX$

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0, P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

## Решение

- $k_n$  - число успехов серии по схеме Бернулли;
- Вероятность успеха  $p = 0.8$ ;
- $M[X] = np = 500 * 0.8 = 400$ ;
- $D[X] = npq = 500 * 0.8 * 0.2 = 80$ ;

$$P\{380 \leq k_n \leq 420\} = P\{-20 \leq X - M[X] \leq 20\} = P\{-20 \leq X - 400 \leq 20\} = \\ P\{|X - 400| \leq 20\} \geq 1 - \frac{D[X]}{\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{80}{400} \geq 1 - 0.2 \geq 0.8$$

**Ответ:**  $P\{380 \leq k_n \leq 420\} = 0.8$

## Центральная теорема Муавра-Лапласа

Пусть

1. Проводится большое число испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха  $p$ ;
2.  $k$  - число успехов этой серии.

Тогда

$$P\{k_1 \leq k \leq k_2\} = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

где  $x_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npq}}$ ,  $i = \overline{1; 2}$ ,  $q = 1 - p$

## Решение

1.  $n = 500$ ;

2. Вероятность успеха  $p = 0.8$ ;
3. Вероятность неудачи  $q = 0.2$ ;
4.  $k_1 = 380$ ,  $k_2 = 420$ ;

$$x_1 = \frac{380 - 500 * 0.8}{\sqrt{500 * 0.8 * 0.2}} \approx -2.2361$$

$$x_2 = \frac{420 - 500 * 0.8}{\sqrt{500 * 0.8 * 0.2}} \approx 2.2361$$

$$P\{380 \leq k \leq 420\} = \Phi(2.2361) + \Phi(2.2361) = 2 * \Phi(2.2361) = 2 * 0.4873 = 0.9746$$

**Ответ:**  $P\{380 \leq k \leq 420\} \approx 0.9746$

## ЗАДАЧА 2

С использованием метода моментов для случайной выборки  $X = (X_1, \dots, X_n)$  из генеральной совокупности  $X$  найти точечные оценки указанных параметров заданного закона распределения.

### Закон распределения

$$f_X(x) = \frac{1}{4^\theta \Gamma(\theta)} x^{\theta-1} e^{-\frac{x}{4}}, \quad x > 0$$

### Решение

1. Закон распределения является гаммой-функцией

$$G_{k,\theta}(x) = x^{k-1} \frac{e^{-\frac{x}{\theta}}}{\Gamma(k)\theta^k} \Rightarrow k = \theta, \quad \theta = 4$$

$$G_{\theta,4}(x) = x^{\theta-1} \frac{e^{-\frac{x}{4}}}{\Gamma(\theta)4^\theta}$$

Тогда математическое ожидание и дисперсию можно найти по формулам

$$M[G_{k,\theta}] = k\theta$$

$$D[G_{k,\theta}] = k\theta^2$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию

$$M[G_{\theta,4}] = 4 * \theta$$

$$D[G_{\theta,4}] = 16 * \theta$$

2. Приравняем теоретические моменты к их выборочным аналогам

$$4\theta = \bar{X} \Rightarrow \theta = \frac{\bar{X}}{4}$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

**Ответ:**  $\theta = \frac{\bar{X}}{4}$

## ЗАДАЧА 3

С использованием метода максимального правдоподобия для случайно выборки  $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$  из генеральной совокупности  $X$  найти точечные оценки параметров заданного закона распределения. Вычислить выборочные значения найденных оценок для выборки  $\vec{x}_5 = (x_1, \dots, x_5)$ .

### Закон распределения

$$f_X(x) = \frac{\theta^5}{4!} x^4 e^{-\theta x}, x > 0$$

### Выборка $\vec{x}_5$

$$(7, 4, 11, 5, 3)$$

### Решение

$$L(\vec{X}, \vec{\theta}) = f(X_1, \vec{\theta}) \cdot \dots \cdot f(X_n, \vec{\theta}) = \frac{\theta^{5n}}{4! \cdot n} \cdot (X_1 \cdot \dots \cdot X_n)^4 \cdot e^{(-X_1 \cdot \theta) + \dots + (-X_n \cdot \theta)}$$

$$\ln L = 5n \ln \theta - \ln(4! \cdot n) + 4 \cdot \ln(X_1 \cdot \dots \cdot X_n) - \theta \cdot (X_1 + \dots + X_n)$$

Воспользуемся необходимым условием экстремума

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{5n}{\theta} - (X_1 + \dots + X_n) = 0$$

$$(X_1 + \dots + X_n) = \frac{5n}{\theta}$$

$$\theta = \frac{5n}{(X_1 + \dots + X_n)}$$

Покажем, что для найденных значений выполняются достаточные условия экстремума

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial^2 \theta} = -\frac{5n}{\theta^2} = -(X_1 + \dots + X_n) < 0$$

Подставим выборку  $\vec{x}_5$

$$\theta = \frac{5 \cdot 5}{7 + 4 + 11 + 5 + 3} = 0.8(33)$$

**Ответ:** 0.8(33)

## ЗАДАЧА 4

После  $n = 8$  измерений давления в баке с горючим получены следующие результаты:

3.25, 2.82, 3.07, 3.12, 2.93, 2.87, 3.09, 3.17.

Считая ошибки измерений подчиненными нормальному закону, построить 90%-ные доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратичного отклонения давления в баке.

### Решение

Пусть  $X$  - случайная величина принимающая значения равные давлению в баке с горючим, так как

$$X \sim N(m, \sigma^2) \text{ по условию } \Rightarrow$$

$$T(\vec{X}, m) = \frac{m - \bar{X}}{S(\vec{X})} \sqrt{n} \sim St(n-1)$$

$$P\{t_{\alpha_1} < T(\vec{X}, m) < t_{1-\alpha_2}\} = \gamma$$

где  $t_{\alpha_1}, t_{1-\alpha_2}$  - квантили соотв. уровней распределения Стьюдента с  $n-1 = 7$

$$P\left\{\bar{X} - \frac{S(\vec{X})t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} < m < \bar{X} + \frac{S(\vec{X})t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}\right\} = \gamma$$

$$\underline{m}(\vec{X}) = \bar{X} - \frac{S(\vec{X})t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$$

$$\overline{m}(\vec{X}) = \bar{X} + \frac{S(\vec{X})t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$$

$$\text{а) } \bar{X} = 3.04$$

$$\text{б) } S^2(\bar{X}) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \approx 0.0229 \Rightarrow S(\vec{X}) = 0.1513$$

$$\text{в) } \frac{1+\gamma}{2} = 0.95$$

$$\text{г) } t_{0.95} = 1.895$$

$$\text{д) } \frac{S(\vec{X})t_{\frac{1+\alpha}{2}}\sqrt{n}}{=} \frac{0.1513 \cdot 1.895}{2.83} \approx 0.1013$$

$$\text{е) } \underline{m}(\vec{X}) = 3.04 - 0.1013 = 2.9387$$

$$\overline{m}(\vec{X}) = 3.1413 \Rightarrow m \in (2.9387; 3.1413)$$

Так как  $X \sim N(m, \sigma^2)$  по условию  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow T(\vec{X}, \sigma^2) = \frac{S^2(\vec{X})}{\sigma^2}(n-1) \sim \chi^2(n-1)$$

$$P\{h_{\alpha_1} < T(\vec{X}, \sigma^2) < h_{1-\alpha_2}\} = \gamma$$

где  $h_{\alpha_1}$ ,  $h_{1-\alpha_2}$  — квантили соответствующих уровней распределения  $\chi^2$  с  $n-1=7$

$$P\left\{\frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\frac{1-\gamma}{2}}}\right\} = \gamma$$

$$\underline{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}}$$

$$\overline{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\frac{1-\gamma}{2}}}$$

$$\text{а) } S^2(\vec{X}) = 0.0229$$

$$\text{б) } \frac{1+\gamma}{2} = 0.95$$

$$\frac{1-\gamma}{2} = 0.05$$

$$\text{в) } h_{0.95} = 14.07$$

$$h_{0.05} = 2.17$$

$$\text{г) } \underline{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}} = \frac{7 \cdot 0.0229}{14.07} = 0.0114$$

$$\overline{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\frac{1-\gamma}{2}}} = \frac{7 \cdot 0.0229}{2.17} = 0.074$$

**Ответ:**  $\sigma^2 \in (0.0114; 0.074)$