



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

**Рубежный контроль №1
по Математической статистике
Билет 49**

Студент: Тимонин Антон Сергеевич

Группа ИУ7-626

Дата 14.05.2020

Общее количество листов 3

Москва.
2020 г.

1. $f_Y(y) = \frac{7\lambda^7}{y^8}, y \geq \lambda,$

$$\hat{\lambda}(\vec{Y}) = \frac{7n-1}{7n} \min_{k=1, n} \{Y_k\}$$

$\vec{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ — сл. выборка из ген. совокуп-ти Y

а) $\hat{\lambda}(\vec{Y})$ — несмещенная?

б) $\hat{\lambda}(\vec{Y})$ — эффективная по Рао-Крамеру?

а) Мат. ожидание минимума $X = \min_{k=1, n} \{Y_k\}$

$$\begin{aligned} F_X(y) &= P\{X \leq y\} = 1 - P\{X > y\} = 1 - P\{Y_1 > y, \dots, Y_n > y\} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{независ.} \\ \text{вещи.} \end{array} \right\} = 1 - \prod_{i=1}^n P\{Y_i > y\} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_{Y_i}(y)) = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{распрег.} \\ \text{одинаково} \end{array} \right\} = 1 - (1 - F_Y(y))^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Далее, найдем } F_Y(y) &= \int_{\lambda}^y \frac{7\lambda^7}{y^8} dy = 7\lambda^7 \left(-\frac{1}{7y^7} \right) \Big|_{\lambda}^y = \\ &= -\lambda^7 \left(\frac{1}{y^7} \right) \Big|_{\lambda}^y = -\lambda^7 \left(\frac{1}{y^7} - \frac{1}{\lambda^7} \right) = \frac{y^7 - \lambda^7}{y^7} = 1 - \frac{\lambda^7}{y^7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Найдем } f_X(y) &= \frac{dF_X(y)}{dy} = n \cdot f_Y(y) \cdot (1 - F_Y(y))^{n-1} = \\ &= n \cdot \frac{7\lambda^7}{y^8} \cdot \left(\frac{\lambda^7}{y^7} \right)^{n-1} = \frac{7n}{y} \left(\frac{\lambda}{y} \right)^{7n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MX &= \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_X(y) dy = \int_{\lambda}^{+\infty} 7n \cdot \left(\frac{\lambda}{y} \right)^{7n} dy = 7n \lambda^{7n} \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{dy}{y^{7n}} = \\ &= 7n \lambda^{7n} \cdot \frac{y^{1-7n}}{1-7n} \Big|_{\lambda}^{+\infty} = -\frac{7n \lambda^{7n} \cdot \lambda^{1-7n}}{1-7n} = \frac{7n \lambda}{7n-1} \end{aligned}$$

$$M \hat{\lambda}(\vec{Y}) = M \left(\frac{7n-1}{7n} \cdot \min_{k=1, n} \{Y_k\} \right) = \frac{7n-1}{7n} \cdot MX = \lambda \Rightarrow$$

\Rightarrow несмещенная

18 Тимошин, А.С.; ИУ7-62Б

Билет 49.

$$18 \quad D\hat{\lambda}(\vec{Y}) = \frac{1}{nI(\lambda)}$$

$$\begin{aligned} M[X^2] &= \int_{\lambda}^{+\infty} y^2 \cdot f_X(y) dy = \int_{\lambda}^{+\infty} 7n y \left(\frac{\lambda}{y}\right)^{7n} dy = \\ &= 7n \lambda^{7n} \int_{\lambda}^{+\infty} y^{1-7n} dy = \left. \frac{7n \lambda^{7n} y^{2-7n}}{2-7n} \right|_{\lambda}^{+\infty} = \\ &= \frac{7n \lambda^2}{7n-2} \end{aligned}$$

$$DX = M[X^2] - MX^2 = \frac{7n \lambda^2}{7n-2} - \left(\frac{7n \lambda}{7n-1}\right)^2$$

$$J(\lambda) = M\left(\frac{\partial \ln f_Y(y; \lambda)}{\partial \lambda}\right)^2$$

$$\ln f_Y(y; \lambda) = \ln\left(\frac{7\lambda^7}{y^8}\right) = \ln 7 + 7 \ln \lambda - 8 \ln y$$

$$\frac{\partial \ln f_Y(y; \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{7}{\lambda}$$

$$M\left[\left(\frac{7}{\lambda}\right)^2\right] = \frac{49}{\lambda^2}$$

$\hat{\lambda}(\vec{Y})$ — неэффективное по Рао-Крамеру

2. Решение

Пусть X -сл. вел., т.к. $X \sim \text{Exp}(\lambda) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow T(\vec{X}, \lambda) = 2\lambda \ln \bar{X} = \chi^2(2n)$$

$$P\left\{\frac{h_1 - \delta}{2} \leq T(\vec{X}, \lambda) \leq \frac{h_1 + \delta}{2}\right\} = \gamma$$

где $\frac{h_1 - \delta}{2}$, $\frac{h_1 + \delta}{2}$ - квантили соотв. уровней распределения χ^2 с $2n=52$

$$\Rightarrow P\left\{\frac{h_1 - \delta}{2} \leq 2\lambda \ln \bar{X} \leq \frac{h_1 + \delta}{2}\right\} = \gamma$$

$$P\left\{\frac{h_1 - \delta}{2n\bar{X}} \leq \lambda \leq \frac{h_1 + \delta}{2n\bar{X}}\right\} = 0.95$$

$$\Delta(\bar{X}) = \frac{h_1 + \delta}{2n\bar{X}}; \quad \Sigma(\bar{X}) = \frac{h_1 - \delta}{2n\bar{X}}$$

$$a) \frac{h_1 - \delta}{2} = h_{0.025} = 33.9681$$

$$\frac{h_1 + \delta}{2} = h_{0.975} = 73.8099$$

$$\Delta(\bar{X}) = \frac{h_1 + \delta}{2n\bar{X}} = \frac{33.9681}{2 \cdot 26 \cdot 15.32} = \frac{33.9681}{796.64} = 0.04264$$

$$\Sigma(\bar{X}) = \frac{h_1 - \delta}{2n\bar{X}} = \frac{73.8099}{2 \cdot 26 \cdot 15.32} = 0.09265$$

$$\lambda \in (0.04264; 0.09265)$$

Ответ: доверительный интервал
уровня 0.95 для $\lambda \in (0.0426; 0.0926)$