Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»
КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Домашняя работа № 1

Вариант 22

Дисциплина	Математическая статистика.
Тема	
Студент	Тимонин А. С.
Группа	ИУ7-62Б
Оценка (баллы)	
Преподаватель	Власов П.А.

Москва, 2020 г.

ЗАДАЧА 1

Известно, что 80% изготовленных заводом электроламп выдерживают гарантийный срок службы. Найти вероятность того, что в партии из 500 электроламп число выдержавших гарантийный срок службы находится в пределах от 380 до 420. Использовать неравенство Чебышева и интегральную теорему Муавраз-Лапласа.

Неравенство Чебышева

Пусть

1. X - случайная величина
2. $\exists MX,\ \exists DX$

Тогда

$$\forall\varepsilon > 0, P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

Решение

- k_n - число успехов серии по схеме Бернулли;
- Вероятность успеха $p = 0.8$;
- $M[X] = np = 500 * 0.8 = 400$;
- $D[X] = npq = 500 * 0.8 * 0.2 = 80$;

$$P\{380 \leq k_n \leq 420\} = P\{-20 \leq X - M[X] \leq 20\} = P\{-20 \leq X - 400 \leq 20\} =$$
$$P\{|X - 400| \leq 20\} \geq 1 - \frac{D[X]}{\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{80}{400} \geq 1 - 0.2 \geq 0.8$$

Ответ: $P\{380 \leq k_n \leq 420\} = 0.8$

Центральная теорема Муавра-Лапласа

Пусть

1. Проводится большое число испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха p;
2. k - число успехов этой серии.

Тогда

$$P\{k_1 \leq k \leq k_2\} = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

где $x_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npq}}$, $i = \overline{1;2}$, $q = 1 - p$

Решение

1. n = 500;

2. Вероятность успеха $p = 0.8$;
3. Вероятность неудачи $q = 0.2$;
4. $k_1 = 380$, $k_2 = 420$;

$$x_1 = \frac{380 - 500 * 0.8}{\sqrt{500 * 0.8 * 0.2}} \approx -2.2361$$

$$x_2 = \frac{420 - 500 * 0.8}{\sqrt{500 * 0.8 * 0.2}} \approx 2.2361$$

$$P\{380 \leq k \leq 420\} = \Phi(2.2361) + \Phi(2.2361) = 2 * \Phi(2.2361) = 2 * 0.4873 = 0.9746$$

Ответ: $P\{380 \leq k \leq 420\} \approx 0.9746$

ЗАДАЧА 2

С использованием метода моментов для случайной выборки $X = (X_1, ..., X_n)$ из генеральной совокупности X найти точечные оценки указанных параметров заданного закона распределения.

Закон распределения

$$f_X(x) = \frac{1}{4^\theta \Gamma(\theta)} x^{\theta-1} e^{\frac{-x}{4}},\ x > 0$$

Решение

1. Закон распределения является гаммой-функцией

$$G_{k,\theta}(x) = x^{k-1}\frac{e^{\frac{-x}{\theta}}}{\Gamma(k)\theta^k} \Rightarrow k = \theta,\ \theta = 4$$

$$G_{\theta,4}(x) = x^{\theta-1}\frac{e^{\frac{-x}{4}}}{\Gamma(\theta)4^\theta}$$

Тогда математическое ожидание и десперсию можно найти по формулам

$$M[G_{k,\theta}] = k\theta$$

$$D[G_{k,\theta}] = k\theta^2$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию

$$M[G_{\theta,4}] = 4 * \theta$$

$$D[G_{\theta,4}] = 16 * \theta$$

2. Приравняем теоретические моменты к их выборочным аналогам

$$4\theta = \overline{X} \Rightarrow \theta = \frac{\overline{X}}{4}$$

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Ответ: $\theta = \frac{\overline{X}}{4}$

ЗАДАЧА 3

С использованием метода максимального правдоподобия для случайно выборки $\vec{X} = (X_1, ..., X_n)$ из генеральной совокупности X найти точечные оценки параметров заданного закона распределения. Вычислить выборочные значения найденных оценок для выборки $\vec{x}_5 = (x_1, ..., x_5)$.

Закон распределения

$$f_X(x) = \frac{\theta^5}{4!} x^4 e^{-\theta x}, x > 0$$

Выборка $\vec{x}_5$

$$(7, 4, 11, 5, 3)$$

Решение

$$L(\vec{X}, \vec{\theta}) = f(X_1, \vec{\theta}) \cdot ... \cdot f(X_n, \vec{\theta}) = \frac{\theta^{5n}}{4! \cdot n} \cdot (X_1 \cdot ... \cdot X_n)^4 \cdot e^{(-X_1 \cdot \theta) + ... + (-X_n \cdot \theta)})$$

$$\ln L = 5n \ln \theta - \ln (4! \cdot n) + 4 \cdot \ln (X_1 \cdot ... \cdot X_n) - \theta \cdot (X_1 + ... + X_n)$$

Воспользуемся необходимым условием экстремума

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{5n}{\theta} - (X_1 + ... + X_n) = 0$$

$$(X_1 + ... + X_n) = \frac{5n}{\theta}$$

$$\theta = \frac{5n}{(X_1 + ... + X_n)}$$

Покажем, что для найденных значений выполняются достаточные условия экстремума

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial^2 \theta} = -\frac{5n}{\theta^2} = -(X_1 + ... + X_n) < 0$$

Подставим выборку $\vec{x}_5$

$$\theta = \frac{5 \cdot 5}{7 + 4 + 11 + 5 + 3} = 0.8(33)$$

Ответ: 0.8(33)

ЗАДАЧА 4

После $n = 8$ измерений давления в баке с горючим получены следующие результаты:

$$3.25,\ 2.82,\ 3.07,\ 3.12,\ 2.93,\ 2.87,\ 3.09,\ 3.17.$$

Считая ошибки измерений подчиненными номральному закону, построить 90%-ные доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратичного отклонения давления в баке.

Решение

Пусть X - случайная величина принимаюащая значения равные давлению в баке с горючим, так как

$$X \sim \mathbb{N}(m, \sigma^2) \text{ по условию } \Rightarrow$$

$$T(\vec{X}, m) = \frac{m - \overline{X}}{S(\vec{X})}\sqrt{n} \sim St(n-1)$$

$$P\{t_{\alpha_1} < T(\vec{X}, m) < t_{1-\alpha_2}\} = \gamma$$

где t_{α_1}, $t_{1-\alpha_2}$ - квантили соотв. уровней распределения Стьюдента с $n - 1 = 7$

$$P\{\overline{X} - \frac{S(\vec{X})t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} < m < \overline{X} + \frac{S(\vec{X})t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}\} = \gamma$$

$$\underline{m}(\vec{X}) = \overline{X} - \frac{S(\vec{X})\frac{t_1+\gamma}{2}}{\sqrt{n}}$$

$$\overline{m}(\vec{X}) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X})\frac{t_1+\gamma}{2}}{\sqrt{n}}$$

а) $\overline{X} = 3.04$

б) $S^2(\overline{X}) = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \approx 0.0229 \Rightarrow S(\vec{X}) = 0.1513$

в) $\dfrac{1+\gamma}{2} = 0.95$

г) $t_{0.95} = 1.895$

д) $\dfrac{S(\vec{X})t_{\frac{1+\gamma}{2}}\sqrt{n}}{=}\dfrac{0.1513 \cdot 1.895}{2.83} \approx 0.1013$

г) $\underline{m}(\vec{X}) = 3.04 - 0.1013 = 2.9387$

$$\overline{m}(\vec{X}) = 3.1413 \Rightarrow m \in (2.9387; 3.1413)$$

Так как $X \sim \mathbb{N}(m, \sigma^2)$ по условию $\Rightarrow$

$$\Rightarrow T(\vec{X}, \sigma^2) = \frac{S^2(\vec{X})}{\sigma^2}(n-1) \sim \chi^2(n-1)$$

$$P\{h_{\alpha_1} < T(\vec{X}, \sigma^2) < h_{1-\alpha_2}\} = \gamma$$

где h_{α_1}, $h_{1-\alpha_2}$ n квантили соответствующих уровней распределения χ^2 с $n-1=7$

$$P\{\frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\frac{1-\gamma}{2}}}\} = \gamma$$

$$\underline{\sigma^2}(\vec{X}) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}}$$

$$\overline{\sigma^2}(\vec{X}) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\frac{1-\gamma}{2}}}$$

а) $S^2(\vec{X}) = 0.0229$

б) $\frac{1+\gamma}{2} = 0.95$

$$\frac{1-\gamma}{2} = 0.05$$

в) $h_{0.95} = 14.07$

$$h_{0.05} = 2.17$$

г) $\underline{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}} = \frac{7 \cdot 0.0229}{14.07} = 0.0114$

$$\overline{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\frac{1-\gamma}{2}}} = \frac{7 \cdot 0.0229}{2.17} = 0.074$$

Ответ: $\sigma^2 \in (0.0114; 0.074)$