Analiza descendenta. Gramatici LL(k)

Analiza descendenta. Gramatici LL(k)

Letia& Chifu 4.2

Analiza descendenta. Predictive parser - reluare curs anterior

Fie $G = (T, N, P, Z)$ o CFG si automatul stiva
$A = (T, \{q\}, R, q, \{q\}, V, Z)$ cu $V = T \cup N$ si R:
(alfabet, stari, productii, stare initiala, stari finale, alfabet stiva, continut initial stiva)

$$\{tqt \to q | t \in T\} \cup$$
$$\{Xq \to x_n....x_1 q | X \to x_1 x_2 ... x_n \in P, n \geq 0, X \in N, X_i \in V\}$$

Automatul accepta un sir din L(G) prin

- construirea unei derivari cea mai din stanga a acelui sir si
- compararea simbolurilor generate (de la stanga la dreapta) cu simbolurile care apar in sir.

Gramatica LL(3)

Fie $G_1 = (T, N, E, P)$

- $T = \{a, b, c\}$, $N = \{Z, X, Y\}$
- cu productiile P
  - (1) $Z \rightarrow X$
  - (2,3) $X \rightarrow Y | bYa$
  - (4,5) $Y \rightarrow c | ca$

Automatul $(\{a, b, c\}, \{q\}, R, q, \{q\}, \{a, b, c, X, Y, Z\}, Z)$:

- $aqa \rightarrow q$
- $bqb \rightarrow q$
- $cqc \rightarrow q$
- $Zq \rightarrow Xq$
- $Xq \rightarrow Yq$
- $Xq \rightarrow aYbq$
- $Yq \rightarrow cq$
- $Yq \rightarrow acq$

bcaa?

No backtracking

Analiza descendenta sau predictiva - traseaza derivarea de la simbolul de start la propozitie, prezicand simbolurile care trebuie sa fie prezente.

- stiva precizeaza sirul din V^* utilizat pentru derivarea restului sirului de la intrare
- automat stiva determinist: pentru gramatici $LL(k)$

reamintire

- $k : \omega$ primele $min(k, |\omega| + 1)$ simboluri din $\omega\#$

$$k : \omega = \begin{cases} \omega\#, & daca\ |\omega| < k \\ \alpha, & daca\ \omega = \alpha\gamma\ si\ |\alpha| = k \end{cases}$$

- $FIRST_k(\omega)$ setul tuturor capetelor $k : \omega$ terminale ale sirurilor derivabile din ω

$$FIRST_k(\omega) = \{\tau | \exists \nu \in T^*\ a.i.\ \omega \Rightarrow^* \nu, \tau = k : \nu\}$$

- $EFF_k(\omega)$ ($\varepsilon - free\ first$, primul fara ε) - toate sirurile din $FIRST_k(\omega)$ pentru care nu s-a aplicat nicio productie ε in ultimul pas din derivarea cea mai din dreapta

$$EFF_k(\omega) = \{\tau \in FIRST_k(\omega) | \nexists A \in N, \nu \in T^*\ a.i.\ \omega \Rightarrow^R A\tau\nu \Rightarrow \tau\nu\}$$

- $FOLLOW(\omega)$ captele k care ar putea urma lui ω; $FOLLOW_k(Z) = \{\#\}$

$$FOLLOW_k(\omega) = \{\tau | \exists \nu \in V^*\ a.i.\ Z \Rightarrow^* \mu\omega\nu, \tau \in FIRST_k(\nu)\}$$

Exemplu de valori FIRST, FOLLOW pt $k = 1$

- $T = \{id, *, +, (,)\}$, $N = \{E, E', T, T', F\}$
- cu productiile P
  - $Z \to E$
  - $E \to TE'$
  - $E' \to +TE' | \varepsilon$
  - $T \to FT'$
  - $T' \to *FT' | \varepsilon$
  - $F \to (E) | id$

simbol	$FIRST_1(X)$	$FOLLOW_1(X)$
E	$\{(, id\}$	$\{), \#\}$
E'	$\{+, \varepsilon\}$	$\{), \#\}$
T	$\{(, id\}$	$\{+, \#,)\}$
T'	$\{*, \varepsilon\}$	$\{+, \#,)\}$
F	$\{(, id\}$	$\{*, +, \#,)\}$

Exemplu

$$E \Rightarrow TE' \Rightarrow FT'E' \Rightarrow (E)T'E' \Rightarrow^{+} (id) * FT'E' \Rightarrow$$

$$(id) * F * T' + TE' \Rightarrow (id) * id * id + id$$

Gramatici $LL(k)$

O gramatica independenta de context $G = (T, N, P, Z)$ este $LL(k)$ pentru un $k \geq 0$ daca pentru derivari arbitrare

$$Z \Rightarrow^L \mu X \chi \Rightarrow \mu \nu \chi \Rightarrow^* \mu \gamma$$

$$Z \Rightarrow^L \mu X \chi \Rightarrow \mu \omega \chi \Rightarrow^* \mu \gamma'$$

$$\textit{unde } \mu, \gamma, \gamma' \in T^*, \nu, \chi, \omega \in V^*, X \in N$$

avem urmatoarea proprietate: $k : \gamma = k : \gamma'$ implica $\nu = \omega$

Curs 7: Gramatica $LL(k)$

Pentru orice gramatica G de tip $LL(k)$ exista un automat stiva determinist A astfel incat $L(A) = L(G)$.

Automatul citeste fiecare propozitie a limbajului L(G)

- de la stanga la dreapta (Left to right)
- trasand o derivare cea mai din stanga (Left)
- si fara sa examineze mai mult de k simboluri de intrare la fiecare pas.

Definitie *situatie*

Situatie = O stare a automatului stiva specificata de un triplet (p, j, Ω):

- p - productia

$$X_p \rightarrow x_{p,1} \ldots x_{p,n_p}$$

- j, unde $0 \leq j \leq n_p$ - numarul de simboluri
  - din partea dreapta a productiei cu numarul p
  - deja analizate
- Ω - multimea capetelor k care ar putea urma sirului derivat din X_p

Situatie

$$[X_p \to \mu.\nu; \Omega]$$

$$\mu = x_{p,1} \dots x_{p,j}, \nu = x_{p,j+1} \dots x_{p,n_p},$$

$$|\mu| = j, |\nu| = n_p - j$$

Punctul nu face parte din vocabular. Marcheaza pozitia curenta a analizei in partea dreapta a productiei
ex: $q_7 = [X \to b.Ya; \#]$

Algoritmul LL(k)

Fie $G = (T, N, P, Z)$. Pt automatul stiva se determina Q si tranzitiile R:

1. $Q = \{q_0\}$ si $R = \emptyset$ cu $q_0 = [Z \rightarrow .S, \{\#\}]$
   Obs: $FOLLOW_k(Z) = \{\#\}$. q_0 starea initiala si a stivei. Automatul se opreste daca aceasta stare se intalneste din nou, stiva este vida, simbolul de intrare urmator este $\#$.

Algoritmul LL(k)

Fie $G = (T, N, P, Z)$. Pt automatul stiva se determina Q si tranzitiile R:

1. $Q = \{q_0\}$ si $R = \emptyset$ cu $q_0 = [Z \to .S, \{\#\}]$
   Obs: $FOLLOW_k(Z) = \{\#\}$. q_0 starea initiala si a stivei. Automatul se opreste daca aceasta stare se intalneste din nou, stiva este vida, simbolul de intrare urmator este $\#$.
2. fie $q = [X \to \mu.\nu; \Omega]$ un element al lui Q care inca nu a fost tratat

Algoritmul LL(k)

Fie $G = (T, N, P, Z)$. Pt automatul stiva se determina Q si tranzitiile R:

1. $Q = \{q_0\}$ si $R = \emptyset$ cu $q_0 = [Z \to .S, \{\#\}]$
   Obs: $FOLLOW_k(Z) = \{\#\}$. q_0 starea initiala si a stivei. Automatul se opreste daca aceasta stare se intalneste din nou, stiva este vida, simbolul de intrare urmator este $\#$.
2. fie $q = [X \to \mu.\nu; \Omega]$ un element al lui Q care inca nu a fost tratat
3. Daca $\nu = \varepsilon$ atunci se include $q\varepsilon \to \varepsilon$ in R.

Algoritmul LL(k)

Fie $G = (T, N, P, Z)$. Pt automatul stiva se determina Q si tranzitiile R:

1. $Q = \{q_0\}$ si $R = \emptyset$ cu $q_0 = [Z \to .S, \{\#\}]$
   Obs: $FOLLOW_k(Z) = \{\#\}$. q_0 starea initiala si a stivei. Automatul se opreste daca aceasta stare se intalneste din nou, stiva este vida, simbolul de intrare urmator este $\#$.
2. fie $q = [X \to \mu.\nu; \Omega]$ un element al lui Q care inca nu a fost tratat
3. Daca $\nu = \varepsilon$ atunci se include $q\varepsilon \to \varepsilon$ in R.
4. Daca $\nu = t\gamma$, $t \in T$ si $\gamma \in V^*$, fie $q' = [X \to \mu t.\gamma; \Omega]$.
   Adauga q' in Q si $qt \to q'$ in R.

Algoritmul LL(k)

Fie $G = (T, N, P, Z)$. Pt automatul stiva se determina Q si tranzitiile R:

1. $Q = \{q_0\}$ si $R = \emptyset$ cu $q_0 = [Z \to .S, \{\#\}]$
   Obs: $FOLLOW_k(Z) = \{\#\}$. q_0 starea initiala si a stivei. Automatul se opreste daca aceasta stare se intalneste din nou, stiva este vida, simbolul de intrare urmator este $\#$.
2. fie $q = [X \to \mu.\nu; \Omega]$ un element al lui Q care inca nu a fost tratat
3. Daca $\nu = \varepsilon$ atunci se include $q\varepsilon \to \varepsilon$ in R.
4. Daca $\nu = t\gamma$, $t \in T$ si $\gamma \in V^*$, fie $q' = [X \to \mu t.\gamma; \Omega]$. Adauga q' in Q si $qt \to q'$ in R.
5. Daca $\nu = Y\gamma$, $Y \in N$ si $\gamma \in V^*$,
   - fie $q' = [X \to \mu Y.\gamma; \Omega]$
   - si $H = \{[Y \to .\beta_i; FIRST_k(\gamma\Omega)] | Y \to \beta_i \in P\}$.
   - actualizeaza $Q = Q \cup \{q'\} \cup H$
   - si $R = R \cup \{q\tau_i \to q' h_i \tau_i | h_i \in H, \tau_i \in FIRST_k(\beta_i\gamma\Omega)\}$
6. daca toate starile din q au fost analizate, stop. Altfel continua cu 2.

Construirea automatului se termina datorita numarului finit de situatii.

Automatul rezultat este determinist daca si numai daca G este o gramatica $LL(k)$.

Exemplu de construire

- $Z \to S$
- $S \to 0S$
- $S \to 1$

k=1

		stari noi	tranzitii noi
			$q_0 = [Z \to .S; \{\#\}]$
q_0	5	$q' = [Z \to S.; \#] = q_1$ $H = \{[S \to .0S; \#] = q_2,$ $[S \to .1; \#] = q_3\}$	$q_0\tau? \to q_1 h?\tau?$ $q_0 0 \to q_1 q_2 0$ $q_0 1 \to q_1 q_3 1$
q_1	3	-	$q_1\varepsilon \to \varepsilon$
q_2	4	$q' = [S \to 0.S; \#] = q_4$	$q_2 0 \to q_4$
q_3	4	$q' = [S \to 1.; \#] = q_5$	$q_3 1 \to q_5$
q_4	5	$q' = [S \to 0S.; \#] = q_6$ H = la fel cu analiza pt q_0	? $q_4 0 \to q_6 q_2 0$ $q_4 1 \to q_6 q_3 1$
q_5	3	-	$q_5\varepsilon \to \varepsilon$
q_6	3	-	$q_6\varepsilon \to \varepsilon$

derivare

Care e derivarea pt 001#?

$$q_0 q_0 001\# \Rightarrow ?$$

Incercare cu $k = 1$; $Z \to S$, $S \to 0S1$, $S \to 01$

		stari noi	No	tranzitii noi
		$q_0 = [Z \to .S; \{\#\}]$		
q_0	5	$q' = [Z \to S.; \#] = q_1$		$q_0\tau? \to q_1 h?\tau?$
		$H = \{[S \to .0S1; \#] = q_2,$		$\tau \in FIRST_1(0S1\#)$;
			1	$q_0 0 \to q_1 q_2 0$
		$[S \to .01; \#] = q_3\}$		$\tau \in FIRST_1(01\#)$;
			2	$q_0 0 \to q_1 q_3 0$
q_1	3	-	3	$q_1 \varepsilon \to \varepsilon$
q_2	4	$q' = [S \to 0.S1; \#] = q_4$	4	$q_2 0 \to q_4$
q_3	4	$q' = [S \to 0.1; \#] = q_5$	5	$q_3 0 \to q_5$
q_4	5	$q' = [S \to 0S.1; \#] = q_6$		
		$H = \{[S \to .0S1; FIRST_1(1\#)]$		$\tau \in FIRST_1(0S11\#)$;
		$= q_7,$	6	$q_4 0 \to q_6 q_7 0$
		$[S \to .01; FIRST_1(1\#)] = q_8\}$		$\tau \in FIRST_1(011\#)$;
			7	$q_4 0 \to q_6 q_8 0$
q_5	4	$[S \to 01.; \#] = q_9$	8	$q_5 1 \to q_9$
q_6	4	$[S \to 0S1.; \#] = q_{10}$	9	$q_6 1 \to q_{10}$
	...			
q_9	3		10	$q_9 \varepsilon \to \varepsilon$
	....			

k=1 : automat nedeterminist: $q_0 0 \rightarrow q_1 q_2 0$ si $q_0 0 \rightarrow q_1 q_3 0$
Derivare 01: cu un lookahead de 1 nu stim care productie sa o aplicam

$$q_0 q_0 01\# \overset{1}{\Rightarrow} q_0 q_1 q_2 01\# \overset{4}{\Rightarrow} q_0 q_1 q_4 1\# \quad \textit{deadend}$$

$$q_0 q_0 01\# \overset{2}{\Rightarrow} q_0 q_1 q_3 01\# \overset{5}{\Rightarrow} q_0 q_1 q_5 1\# \overset{8}{\Rightarrow} q_0 q_1 q_9 \# \overset{10}{\Rightarrow} q_0 q_1 \varepsilon \# \Rightarrow q_0 \#$$

Incercare cu $k = 2$; $Z \to S$, $S \to 0S1$, $S \to 01$

		stari noi	No	tranzitii noi
		$q_0 = [Z \to .S; \{\#\}]$		
q_0	5	$q' = [Z \to S.; \#] = q_1$		$q_0\tau? \to q_1 h?\tau?$
		$H = \{[S \to .0S1; \#] = q_2,$		$\tau \in FIRST_2(0S1\#)$;
			1	$q_0 00 \to q_1 q_2 00$
		$[S \to .01; \#] = q_3\}$		$\tau \in FIRST_2(01\#)$;
			2	$q_0 01 \to q_1 q_3 01$
q_1	3	-	3	$q_1 \varepsilon \to \varepsilon$
q_2	4	$q' = [S \to 0.S1; \#] = q_4$	4	$q_2 0 \to q_4$
q_3	4	$q' = [S \to 0.1; \#] = q_5$	5	$q_3 0 \to q_5$
q_4	5	$q' = [S \to 0S.1; \#] = q_6$		
		$H = \{[S \to .0S1; FIRST_2(1\#)]$		$\tau \in FIRST_2(0S11\#)$;
		$= q_7,$	6	$q_4 00 \to q_6 q_7 00$
		$[S \to .01; FIRST_2(1\#)] = q_8\}$		$\tau \in FIRST_2(011\#)$;
			7	$q_4 01 \to q_6 q_8 01$
q_5	4	$[S \to 01.; \#] = q_9$	8	$q_5 1 \to q_9$
q_6	4	$[S \to 0S1.; \#] = q_{10}$	9	$q_6 1 \to q_{10}$
q_7	4	$[S \to 0.S1; 1\#] = q_{11}$	10	$q_7 0 \to q_{11}$
q_8	4	$[S \to 0.1; 1\#] = q_{12}$	11	$q_8 0 \to q_{12}$
q_9	3		10	$q_9 \varepsilon \to \varepsilon$
q_{10}	3		10	$q_{10} \varepsilon \to \varepsilon$
q_{11}	5	$q' = [S \to 0S.1; \{1\#\}] = q_{13}$		
		$H = \{[S \to .0S1; FIRST_2(11\#)]$		$\tau \in FIRST_2(0S111\#)$;
		$= q_{14},$	6	$q_{11} 00 \to q_{13} q_{14} 00$
		$[S \to .01; FIRST_2(11\#)] = q_{15}\}$		$\tau \in FIRST_2(0111\#)$;
			7	$q_{11} 01 \to q_{13} q_{15} 01$

Derivare $Z \Rightarrow 0011$

Stiva	Stare	Intrare	Derivarea cea mai din stanga
q_0	q_0	0011#	Z
$q_0 q_1$	q_2	0011#	S
$q_0 q_1$	q_4	011#	0S1
$q_0 q_1 q_6$	q_8	011#	0011
$q_0 q_1 q_6$	q_{12}	11#	
....			

Gramatica $LL(3)$

- $Z \to X$
- $X \to Y | bYa$
- $Y \to c | ca$

		stari noi		tranzitii noi
		$q_0 = [Z \to .X; \#]$		
q_0	5	$q' = [Z \to X.; \#] = q_1$		$\tau \in FIRST_3(Y\#) = \{c\#, ca$
		$H = \{[X \to .Y; \#] = q_2,$	1	$q_0 c\# \to q_1 q_2 c\#$
			2	$q_0 ca\# \to q_1 q_2 ca\#$
		$[X \to .bYa; \#] = q_3\}$		$\tau \in FIRST_3(bYa) = \{bca\}$
			3	$q_0 bca \to q_1 q_3 bca$
q_2	5	$q' = [X \to Y.; \#] = q_4$		$\tau \in FIRST_3(c\#) = \{c\#\}$
		$H = \{[Y \to .c; \#] = q_5,$	4	$q_2 c\# \to q_4 q_5 c\#$
		$Y \to .ca; \#] = q_6\}$	5	$q_2 ca\# \to q_4 q_6 ca\#$
		.....		

Gramatica $LL(3)$

- $Z \to X$
- $X \to Y | bYa$
- $Y \to c | ca$

$$
\begin{aligned}
q_0 &= [Z \to \bullet X; \#] & q_9 &= [Y \to c \bullet a; \#] \\
q_1 &= [Z \to X \bullet; \#] & q_{10} &= [X \to bY \bullet a; \#] \\
q_2 &= [X \to \bullet Y; \#] & q_{11} &= [Y \to \bullet c; a\#] \\
q_3 &= [X \to \bullet bYa; \#] & q_{12} &= [Y \to \bullet ca; a\#] \\
q_4 &= [X \to Y \bullet; \#] & q_{13} &= [Y \to ca \bullet; \#] \\
q_5 &= [Y \to \bullet c; \#] & q_{14} &= [X \to bYa \bullet; \#] \\
q_6 &= [Y \to \bullet ca; \#] & q_{15} &= [Y \to c \bullet; a\#] \\
q_7 &= [X \to b \bullet Ya; \#] & q_{16} &= [Y \to c \bullet a; a\#] \\
q_8 &= [Y \to c \bullet; \#] & q_{17} &= [Y \to ca \bullet; a\#]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{llll}
q_0 & = [Z \to \bullet X; \#] & q_9 & = [Y \to c \bullet a; \#] \\
q_1 & = [Z \to X \bullet; \#] & q_{10} & = [X \to bY \bullet a; \#] \\
q_2 & = [X \to \bullet Y; \#] & q_{11} & = [Y \to \bullet c; a\#] \\
q_3 & = [X \to \bullet bYa; \#] & q_{12} & = [Y \to \bullet ca; a\#] \\
q_4 & = [X \to Y \bullet; \#] & q_{13} & = [Y \to ca \bullet; \#] \\
q_5 & = [Y \to \bullet c; \#] & q_{14} & = [X \to bYa \bullet; \#] \\
q_6 & = [Y \to \bullet ca; \#] & q_{15} & = [Y \to c \bullet; a\#] \\
q_7 & = [X \to b \bullet Ya; \#] & q_{16} & = [Y \to c \bullet a; a\#] \\
q_8 & = [Y \to c \bullet; \#] & q_{17} & = [Y \to ca \bullet; a\#]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
R = \{ & q_0 c\# \to q_1 q_2 c\#, & q_7 ca\# \to q_{10} q_{11} ca\# \\
& q_0 ca\# \to q_1 q_2 ca\#, & q_7 caa \to q_{10} q_{12} caa, \\
& q_0 bca \to q_1 q_3 bca, & q_8 \to \epsilon, \\
& q_1 \to \epsilon, & q_9 a \to q_{13}, \\
& q_2 c\# \to q_4 q_5 c\#, & q_{10} a \to q_{14}, \\
& q_2 ca\# \to q_4 q_6 ca\#, & q_{11} c \to q_{15}, \\
& q_3 b \to q_7, & q_{12} c \to q_{16},\ q_{13} \to \epsilon, \\
& q_4 \to \epsilon, & q_{14} \to \epsilon, \\
& q_5 c \to q_8, & q_{15} \to \epsilon, \\
& q_6 c \to q_9, & q_{16} a \to q_{17},\ q_{17} \to \epsilon \ \}
\end{array}
$$

aceeasi gramatica dar cu $k = 2$

$$q_7 ca \to q_{10} q_{11} ca$$

$$q_7 ca \to q_{10} q_{12} ca$$

Cu $k = 3$

$$q_7 ca\# \to q_{10} q_{11} ca\#$$

$$q_7 caa \to q_{10} q_{12} caa$$

unde pt $k = 3$

- $q_7 = [X \to b.Ya; \#]$
- $q_{10} = [X \to bY.a; \#]$
- $q_{11} = [Y \to .c; a\#]$
- $q_{12} = [Y \to .ca; a\#]$

Derivare $Z \Rightarrow X \Rightarrow bYa \Rightarrow bcaa$

Stiva	Stare	Intrare	Derivarea cea mai din stanga
q_0	q_0	$bcaa\#$	Z
$q_0 q_1$	q_3	$bcaa\#$	X
$q_0 q_1$	q_7	$caa\#$	bYa
$q_0 q_1 q_{10}$	q_{12}	$caa\#$	bcaa
$q_0 q_1 q_{10}$	q_{16}	$aa\#$	
$q_0 q_1 q_{10}$	q_{17}	$a\#$	
$q_0 q_1$	q_{10}	$a\#$	
$q_0 q_1$	q_{14}	$\#$	
q_0	q_1	$\#$	
	q_0	$\#$	

- La tranzitiile de stivuire sunt examinate simbolurile dinainte (lookaheads symbols).
- Aceste tranzitii corespund intrarii intr-o productie noua

- Citirea simbolurilor terminale si decizia de terminare a productiei printr-o tranzitie de destivuire se realizaeaza fara inspectarea simbolurilor dinainte

Teorema

4.2.2, 4.2.3 Teorema. O gramatica LL(k) nu poate avea simbol nonterminal recursiv stanga.

Daca $X \Rightarrow X\omega, \omega \neq \varepsilon$ - X nonterminal recursiv stanga

- $E \rightarrow E + T | T$
- $T \rightarrow T * F | F$
- $F \rightarrow (E) | id$

are doua productii cu recursivitate stanga

Teorema

Teorema. Pentru orice gramatica CFG $G = (T, N, P, Z)$ cu simboluri nonterminale recursive stanga exista o gramatica echivalenta $G' = (T, N', P', Z)$ fara nonterminale recursive stanga.

Idee

$X \rightarrow X\alpha|\beta$ devine $\begin{cases} X \rightarrow \beta X' \\ X' \rightarrow \alpha X'|\varepsilon \end{cases}$

- $E \rightarrow E + T|T$
- $T \rightarrow T * F|F$
- $F \rightarrow (E)|id$

- $E \rightarrow TE'$
- $E' \rightarrow +TE'|\varepsilon$
- $T \rightarrow FT'$
- $T' \rightarrow *FT'|\varepsilon$
- $F \rightarrow (E)|id$

Dar...

- $S \to Aa|b$
- $A \to Ac|Sd|\varepsilon$

$$S \Rightarrow Aa \Rightarrow Sda$$

ne trebuie un algoritm care sa elimine toate nonterminalele cu recursivitate stanga

- Consideram ca $N = \{X_1, X_2, ...X_n\}$ - simbolurile nonterminale sunt numerotate consecutiv.
- Daca putem alege indicii a.i. indicii sa respecte $i < j$ pentru toate productiile $X_i \to X_j\omega$ atunci G nu are recursivitate stanga.
- Daca o astfel de numerotare nu este posibila pentru G, atunci se genereaza G'.

Exemple:

- $S \to Aa|b$
- $A \to Ac|Sd|\varepsilon$
- Daca S e 1, A e 2, prima productie respecta $i < j$ dar nu si a doua
- $E \to E + T$ nu respecta $i < j$

Algoritm de eliminare recursivitate stanga

1. Fie $N' = N, P' = P$. Se executa pasii 2,3 pentru $i = 1, ...n$
2. Pentru $j = 1, ...i - 1$
   $X_i \to X_j\omega \in P'$ se inlocuiesc cu $\{X_i \to \chi_j\omega | X_j \to \chi_j \in P'\}$.
   In consecinta, $X_i \Rightarrow^+ X_j\gamma$ implica $i \leq j$.
3. Se inlocuiesc $X_i \to X_i\omega \in P'$ cu $\{Y_i \to \omega Y_i\} \cup \{Y_i \to \varepsilon\}$
   adaugand un nou simbol Y_i la N'.
   $+$ se inlocuiesc $X_i \to \chi, \chi \neq X_i\gamma$ cu $X_i \to \chi Y_i$.
   Simbolurile noi se numeroteaza cu n+1, n+2,..

- $E \to E + T|T$
- $T \to T * F|F$
- $F \to (E)|id$

presupunem ordinea $E(1) < T(2) < F(3)$

i	pasul2	pasul 3	variabila noua
1	nu se executa	$E \to E + T\|T$ devin $E' \to +TE'\|\varepsilon$ si $E \to TE'$;	$E'(4)$
2	$j = 1$ $T \to E\omega$ nu exista	$T \to T * F\|F$ devin $T' \to *FT'\|\varepsilon$ $T \to FT'$	$T'(5)$
3	$j = 1, 2$ $F \to E\omega$ sau $F \to T\omega$ nu exista	$F \to F\omega$ nu exista	
4,5	nu se modifica nimic		

Rezultat:

- $E \to E + T|T$
- $T \to T * F|F$
- $F \to (E)|id$

- $E \to TE'$
- $E' \to +TE'|\varepsilon$
- $T \to FT'$
- $T' \to *FT'|\varepsilon$
- $F \to (E)|id$

- $S \to Aa|b$
- $A \to Ac|Sd|\varepsilon$

...pasul 2 al algoritmului: Pentru $j = 1, ...i - 1$ $X_i \to X_j\omega \in P'$ se inlocuiesc cu $\{X_i \to \chi_j\omega | X_j \to \chi_j \in P'\}$.

Daca $S(1) < A(2)$

- $i = 1$ nimic
- $i = 2$ la pasul 2 $A \to Sd$ se inlocuieste cu $\{A \to Aad|bd\}$

- $S \to Aa|b$
- $A \to Ac|Sd|\varepsilon$

...pasul 3 al algoritmului: Se inlocuiesc $X_i \to X_i\omega \in P'$ cu $\{Y_i \to \omega Y_i\} \cup \{Y_i \to \varepsilon\}$ adaugand un nou simbol Y_i la N'.
+ se inlocuiesc $X_i \to \chi, \chi \neq X_i\gamma$ cu $X_i \to \chi Y_i$.

Daca $S(1) < A(2)$

- $i = 1$ nimic
- $i = 2$ la pasul 2 $A \to Sd$ se inlocuieste cu $\{A \to Aad|bd\}$
- $i = 2$ la pasul 3 $A \to Ac|Aad|bd|\varepsilon$ se inlocuieste cu $A' \to cA', A' \to adA', A' \to \varepsilon$ si $A \to bdA', A \to A'$

Teorema. Daca sirul ω din $X_i \to X_i\omega$ nu incepe cu $X_j, j \leq i$ atunci $X_i \to X_i\omega$ se poate inlocui cu $\{Y_i \to \omega, Y_i \to \omega Y_i\}$ si $X_i \to \chi$ cu $\{X_i \to \chi, X_i \to \chi Y_i\}$ la pasul 3.

pasul 3 anterior ...se inlocuiesc $X_i \to X_i\omega \in P'$ cu $\{Y_i \to \omega Y_i\} \cup \{Y_i \to \varepsilon\}$ adaugand un nou simbol Y_i la N'.
$+$ se inlocuiesc $X_i \to \chi, \chi \neq X_i\gamma$ cu $X_i \to \chi Y_i$.

Se evita introducerea productiilor ε.

- $E \to E + T | T$
- $T \to T * F | F$
- $F \to (E) | id$

Cu productii ε

- $E \to TE'$
- $E' \to +TE' | \varepsilon$
- $T \to FT'$
- $T' \to *FT' | \varepsilon$
- $F \to (E) | id$

Fara productii ε

- $E \to TE' | T$
- $E' \to +T | +TE'$
- $T \to FT' | F$
- $T' \to *F | *FT'$
- $F \to (E) | id$

Observatii

- Recursivitatea stanga precum $E \to T|E + T$ - utilizata pentru a reflecta asociativitatea stanga a operatorilor.
- Aceeasi proprietate avem si in $E \to TE', E' \to +TE', E' \to \varepsilon$
- Insa asociativitate dreapta $E \to T, E \to T + E$.

Factorizare stanga

Productiile ε se pot elimina intotdeauna dintr-o gramatica LL(k), dar aceasta poate mari valoare lui k.
4.2.3

Teorema

TEOREMA. Pentru orice gramatica LL(k) cu productii ε exista o gramatica LL(k+1) fara productii ε care genereaza limbajul $L(G) - \varepsilon$.

Prin introducerea productiilor ε se poate reduce k.

Teorema

TEOREMA. Pentru orice gramatica LL(k+1), $k > 0$ fara productii ε exista o gramatica LL(k) echivalenta cu productii ε.

Factorizare stanga

$$Fie\ P = \{ \quad \begin{array}{l} Z \rightarrow X \\ X \rightarrow Yc|Yd \\ Y \rightarrow a|bY\} \end{array}$$

Productiile $X \rightarrow Yc$ si $X \rightarrow Yd$ nu pot fi distinse chiar prin examinarea oricarui numar fix de simboluri din sirul de intrare deoarece din Y se poate deriva un sir de lungime si mai mare.

Solutie: evitarea problemei prin amanarea deciziei. Ambele incep cu Y, nu trebuie facauta distinctie intre ele decat dupa ce Y a fost recunoscut.

Factorizare stanga

$$
\begin{aligned}
Fie\ P = \{ \quad & Z \rightarrow X \\
& X \rightarrow Yc|Yd \\
& Y \rightarrow a|bY\}
\end{aligned}
$$

devine

$$
\begin{aligned}
Fie\ P = \{ \quad & Z \rightarrow X \\
& X \rightarrow YX' \\
& X' \rightarrow c|d \\
& Y \rightarrow a|bY\}
\end{aligned}
$$

Se poate examina un singur caracter inainte pt a face diferente intre cele doua variante c sau d .

Factorizare stanga

$$
\begin{aligned}
\textit{Fie } P = \{ \quad & Z \to X \\
& X \to \textit{if } E \textit{ then } S | \textit{if } E \textit{ then } S \textit{ else } S | a \\
& E \to b \}
\end{aligned}
$$

devine

$$
\begin{aligned}
\textit{Fie } P = \{ \quad & Z \to X \\
& X \to \textit{if } E \textit{ then } S\ S' | a \\
& S' \to \textit{else } S | \varepsilon \\
& E \to b \}
\end{aligned}
$$

Kahoot

- Pentru $G = (\{id, (,), +\}, \{E, E', T\}, E, P)$ si P:
- $E \rightarrow TE'$
- $E' \rightarrow +TE'|\varepsilon$
- $T \rightarrow (E)|id$

O gramatica G este LL(k) daca exista un automat stiva determinist A cu L(A)=L(G) care

1. citeste inputul de la stanga la dreapta
2. citeste inputul de la dreapta la stanga
3. traseaza derivarea cea mai din dreapta
4. traseaza derivarea cea mai din stanga
5. examineaza mai mult de k simboluri de intrare la fiecare pas
6. nu examineaza mai mult de k simboluri de intrare la fiecare pas

Situatia $[S \to 0.S1; \#]$ exprima o stare a automatului stiva in care:

1. Din productia $S \to 0S1$ s-a analizat deja 0S, se asteapta un sir derivat din 1, urmat de $\#$
2. Din productia $S \to 0S1$ s-a analizat deja 0, se asteapta un sir derivat din S1, urmat de $\#$
3. Din productia $S \to 0S1$ se asteapta un 0, urmat de un sir derivat din S1, urmat de $\#$
4. Din productia $S \to 0S1$ s-a analizat deja 0, se asteapta un sir derivat din S, urmat de $1\#$

- $Z \to X$
- $X \to Y|bYa$
- $Y \to c|ca$

		stari noi	tranzitii noi
		$q_0 = [Z \to .X; \#]$	
q_0	5	$q' = ?$	

- $Z \rightarrow X$
- $X \rightarrow Y|bYa$
- $Y \rightarrow c|ca$

		stari noi	tranzitii noi
		$q_0 = [Z \rightarrow .X; \#]$	
q_0	5	$q' = [Z \rightarrow X.; \#] = q_1]$	

- $Z \to X$
- $X \to Y|bYa$
- $Y \to c|ca$

		stari noi	tranzitii noi
		$q_0 = [Z \to .X; \#]$	
q_0	5	$q' = [Z \to X.; \#] = q_1$	
		$H = \{[X \to .Y; \#] = q_2,$	$q_0\tau_2 \to q_1 q_2 \tau_2$
		$[X \to .bYa; \#] = q_3\}$	$q_0\tau_3 \to q_1 q_3 \tau_3$

- $Z \to X$
- $X \to Y|bYa$
- $Y \to c|ca$

		stari noi	tranzitii noi
		$q_0 = [Z \to .X; \#]$	
q_0	5	$q' = [Z \to X.; \#] = q_1$ $H = \{[X \to .Y; \#] = q_2,$ $[X \to .bYa; \#] = q_3\}$	$\tau_2 \in FIRST_3(Y\#) = \{c\#, ca\#\}$ $q_0\tau_2 \to q_1 q_2 \tau_2$ $q_0\tau_3 \to q_1 q_3 \tau_3$ $\tau_3 \in FIRST_3(bYa) = \{bca\}$