Elemente de limbaje formale. Instrumente pentru reprezentare

3 Martie 2020

- Gramaticile formale, in particular gramaticile independente de context, sunt uneltele cele mai utilizate pentru a reprezenta clar structura programelor, sub forma arborilor de derivare.
- Pornind de la gramatici, se pot specifica automate care accepta programe concrete.
- Automatele pot fi mdificate pentru a genera o codificare acceptabila din arborii de derivare.

Outline

Siruri si sisteme de rescriere

- Un limbaj = set de stringuri
- Definirea formala a limbajului = raspuns formal pt "Care stringuri sunt admise de catre Limbaj?"

Siruri si sisteme de rescriere cont

Alfabet (vocabular) V - un set de simboluri
`ex: V=1,2,3,4,5,6,7,8,9,0`

String un string peste alfabetul V = secventa(sir finit) de simboluri din alfabetul V
`ex: 2018`
Stringul vid: ε

$$\varepsilon\chi = \chi\varepsilon = \chi$$

V^* - multimea tuturor stringurilor peste V
$V^+ = V^* \setminus \{\varepsilon\}$

Limbaj L peste V este orice subset al lui V^*

Propozitii - elementele limbajului
Numarul de propozitii dintr-un limbaj poate fi infinit

Exemple:

$$V = \{a, b, c, ...a\}; \quad L = \{cuvintele\ limbii\ engleze\}$$

$$V = \{0, 1\}; \quad L = \{\varepsilon, 01, 010, 0101, 01010, 010101, ...\}$$

Cum putem defini propozitiile unui limbaj? Ne trebuie o reprezentare formala

proces de generare

Derivare

Relatie de derivare $\Rightarrow^+$ binara, tranzitiva pe V^*

$$L = \{\chi | \zeta \Rightarrow^+ \chi,\ \zeta \textit{ un anumit sir din } V^*\}$$

Sistem formal $(V, \Rightarrow^+)$

definire derivare prin enumerare?? – NU

Productii Un sir finit de perechi (σ, τ) de siruri din V^*
Definesc relatia de derivare

Generam un string pornind de la alt string
Inchiderea tranzitiva a relatiei finite descrise de catre productii = relatia de derivare

Derivare cont.

Sistem de rescriere (V, P), V vocabular, P set finit de productii $\sigma \to \tau$, $\sigma, \tau \in V^*$

Derivare directa $\Rightarrow$ Un sir χ este derivabil direct din π: $\pi \Rightarrow \chi$ daca exista sirurile $\sigma, \tau, \mu, \nu \in V^*$ a.i.
$\sigma \to \tau \in P$,
$\pi = \mu\sigma\nu$,
$\chi = \mu\tau\nu$.

Derivare $\Rightarrow^+$ Un sir χ este derivabil din sirul π: $\pi \Rightarrow^+ \chi$ daca exista sirurile $\rho_0, ..., \rho_n \in V^*, n \geq 1$ a.i.
$\pi = \rho_0$, $\chi = \rho_n$,
$\rho_{i-1} \Rightarrow \rho_i, i = \overline{1, n}$.

Secventa $\rho_0, ..., \rho_n$ = derivare de lungime n.
χ reductibil direct la π daca χ derivabil direct din π

Outline

Gramatici

Definitie generativa a unui limbaj: Un cuadruplu (T, N, Z, P) este o gramatica pentru limbajul $L(G)$

$$L(G) = \{\chi \in T^* | Z \Rightarrow^+ \chi\}$$

daca

- T si N disjuncte, formeaza impreuna vocabularul
- $(T \cup N, P)$ este un sistem de rescriere
- $Z \in N$

Doua gramatici sunt echivalente daca $L(G_1) = L(G_2)$

- T - multimea terminalelor
- N - multimea nonterminalelor sau a variabilelor sintactice
- Z - nonterminal anume, simbol de start
- in limbaj - sirurile derivabile din simbolul de start si care constau doar din terminalelor

Gramatica G genereaza limbajul L

Exemplul 1

Fie gramatica $G = (\{0, 1\}, \{S\}, S, P = \{S \to 0S1, S \to \varepsilon\})$
Care dintre stringurile de mai jos $\in L(G)$?

- 01
- 010
- 1
- 01010
- ε
- 0^n1^n

Exemplul 1

Fie gramatica $G = (\{0,1\}, \{S\}, S, P = \{S \to 0S1, S \to \varepsilon\})$
Care dintre stringurile de mai jos $\in L(G)$?

- 01
- 010
- 1
- 01010
- ε
- 0^n1^n

$$S \Rightarrow^* 0^n1^n$$

$$L(G) = \{0^n1^n | n \geq 0\}$$

Exemplul 2

Fie gramatica $G = (T, N, S, P)$ unde

- $T = \{a, b\}$
- $N = \{S, A, B\}$
- cu productiile P
  1. $S \to AB$
  2. $A \to aA$
  3. $A \to \varepsilon$
  4. $B \to bB$
  5. $B \to \varepsilon$

Care stringuri apartin limbajului L(G)?

- ε
- a
- b
- $aaabb$

Exemplul 2

Fie gramatica $G = (T, N, S, P)$ unde

- $T = \{a, b\}$
- $N = \{S, A, B\}$
- cu productiile P
  1. $S \to AB$
  2. $A \to aA$
  3. $A \to \varepsilon$
  4. $B \to bB$
  5. $B \to \varepsilon$

Care stringuri apartin limbajului L(G)?

- ε
- a
- b
- $aaabb$

$$S \Rightarrow^1 AB \Rightarrow^2 aAB \Rightarrow^2 aaAB \Rightarrow^2 aaaAB$$
$$\Rightarrow^3 aaaB \Rightarrow^4 aaabB \Rightarrow^4 aaabbB \Rightarrow^5 aaabb$$

Exemplul 3

Fie gramatica $G = (T, N, S, P)$ unde

- $T = \{a\}$
- $N = \{S, N, Q, R\}$
- cu productiile P
  1. $S \to QNQ$
  2. $QN \to QR$
  3. $RN \to NNR$
  4. $RQ \to NNQ$
  5. $N \to a$
  6. $Q \to \varepsilon$

Expresii aritmetice: Fie sistemul de rescriere (V, P)

unde

- $V = \{+, *, (,), i, E, T, F\}$
- cu productiile P
  1. $E \to T$
  2. $E \to E + T$
  3. $T \to F$
  4. $T \to T * F$
  5. $F \to i$
  6. $F \to (E)$

Derivari cu lungimea lor:

$$E \Rightarrow T \qquad 1$$

$$T \Rightarrow T * F \qquad 1$$

$$T * F \Rightarrow T * i \qquad 1$$

$$E \Rightarrow^* T * i \qquad 3$$

$$TiE \Rightarrow^* iii \qquad 5$$

$$E \Rightarrow i + i * i \qquad 8$$

Expresii aritmetice:

$G_1 = (T, N, E, P)$

- $T = \{+, *, (,), i\}$
- $N = \{E, T, F\}$
- cu productiile P
  1. $E \to T$
  2. $E \to E + T$
  3. $T \to F$
  4. $T \to T * F$
  5. $F \to i$
  6. $F \to (E)$

derivare pt i; dar pt i*i?

Expresii aritmetice: Gramatici echivalente

Doua gramatici sunt echivalente daca $L(G_1) = L(G_2)$

$G_1 = (T, N, E, P)$

- $T = \{+, *, (,), i\}$
- $N = \{E, T, F\}$
- cu productiile P
  1. $E \to T$
  2. $E \to E + T$
  3. $T \to F$
  4. $T \to T * F$
  5. $F \to i$
  6. $F \to (E)$

$G_2 = (T, N, E, P)$

- $T = \{+, *, (,), i\}$
- $N = \{E, E', T, T', F\}$
- cu productiile P
  1. $E \to T$
  2. $E \to Te'$
  3. $E' \to +T$
  4. $E' \to +TE'$
  5. $T \to F$
  6. $T \to FT'$
  7. $T' \to *F$
  8. $T' \to *FT'$
  9. $F \to i$
  10. $F \to (E)$

Outline

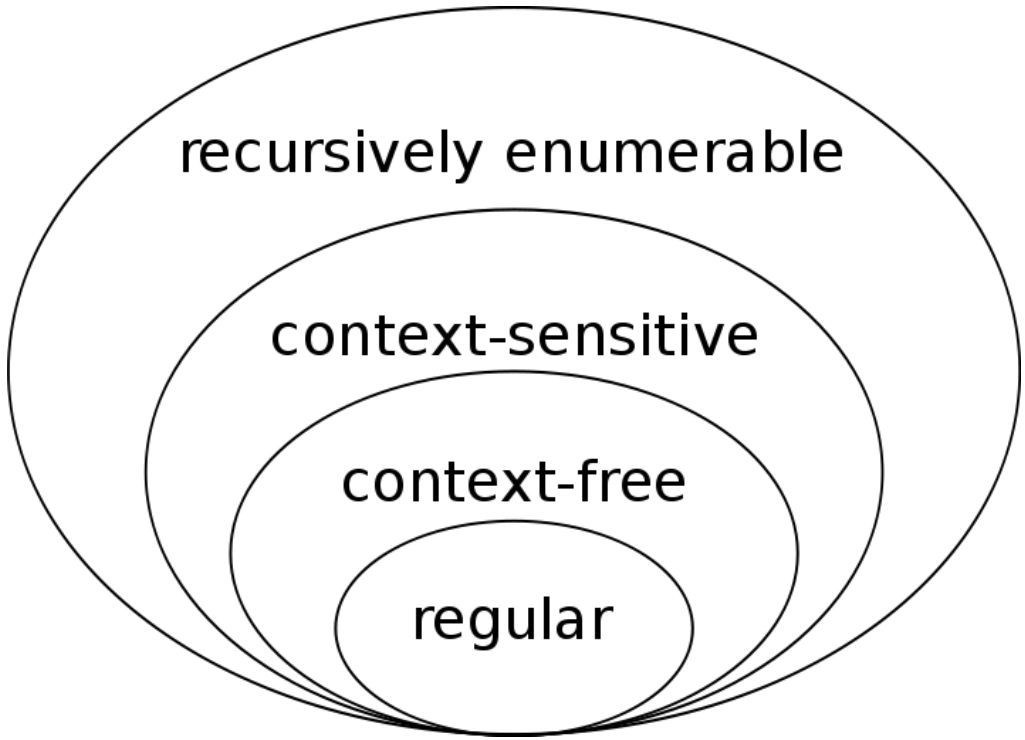
Ierarhia lui Chomsky

Conceptul de Clasificarea gramaticilor - 1950, **Noam Chomsky** - parintele lingvisticii moderne, unul dintre fondatorii stiintelor cognitive
- Modalitate de a descrie complexitatea structurala a unor propozitii particulare din limbajul natural

- Limbajele clasificate in functie de gramatica care le genereaza: constrangeri asupra productiilor gramaticii definesc diferite clase de gramatici/limbaje

Ierarhia lui Chomsky

- Gramatica de tip 0
- Gramatica de tip 1 - dependenta de context
- Gramatica de tip 2 - independenta de context
- Gramatica de tip 3 - regulata



Gramatica de Tip 0

$G = (T, N, Z, P)$

- cele mai generale gramatici
- fiecare productie are forma

$$\sigma \to \tau,\ \sigma \in V^+,\ \tau \in V^*$$

Gramatica din exemplul 3 este de Tip 0 (si nu si de tip 1,2,3)
$RN \to NNR$
$RQ \to NNQ$

Gramatica de Tip 1 - Dependente de context

$G = (T, N, Z, P)$

- fiecare productie are forma

$$\mu X \nu \to \mu \chi \nu, \quad \mu, \nu \in V^*, X \in N, \chi \in V^+$$

Context-sensitive (dependenta de context) - contextul lui X

Gramatica de Tip 1 - Dependente de context

$G = (T, N, Z, P)$

- fiecare productie are forma

$$\mu X \nu \to \mu \chi \nu, \quad \mu, \nu \in V^*, X \in N, \chi \in V^+$$

Context-sensitive (dependenta de context) - contextul lui X

Gramatica de Tip 2 - Independente de context

$G = (T, N, Z, P)$

- fiecare productie are forma

$$X \to \chi, X \in N, \chi \in V^*$$

Gramatica de Tip 2 - Independente de context

$G = (T, N, Z, P)$

- fiecare productie are forma

$$X \to \chi, X \in N, \chi \in V^*$$

- Context-free grammars - suficient de puternice pentru a descrie sintaxa limbajelor de programare
- permit construirea unor algoritmi eficienti de parsare: determina daca un string este sau nu generat din gramatica

gramatica din Exemplul 1 este Context-free grammar.

$S \to 0S1$ DA
$QN \to QR$ si $RN \to NNR$ NU

Gramatica de Tip 3 - Regulate

$G = (T, N, Z, P)$

- fiecare productie are forma

$$X \to t, \quad X \in N, \ t \in T \cup \{\varepsilon\}$$

sau

$$X \to tY, \ X, Y \in N, t \in T$$

Gramatica de Tip 3 - Regulate

$G = (T, N, Z, P)$

- fiecare productie are forma

$$X \to t, \quad X \in N, \ t \in T \cup \{\varepsilon\}$$

sau

$$X \to tY, \ X, Y \in N, t \in T$$

- Regular grammars: de obicei folosite pt a defini structura lexicala a limbajelor de programare

Ierarhia lui Chomsky - rezumat

tip 0	$\sigma \to \tau$	$\sigma \in V^+,\ \tau \in V^*$
dependenta de context	$\mu X \nu \to \mu \chi \nu$	$\mu, \nu \in V^*, X \in N, \chi \in V^+$
independenta de context	$X \to \chi$	$X \in N, \chi \in V^*$
regulata	$X \to t,$ $X \to tY,$	$X \in N,\ t \in T \cup \{\varepsilon\}$ *sau* $X, Y \in N, t \in T$

Ierharhia Chomsky - concluzii

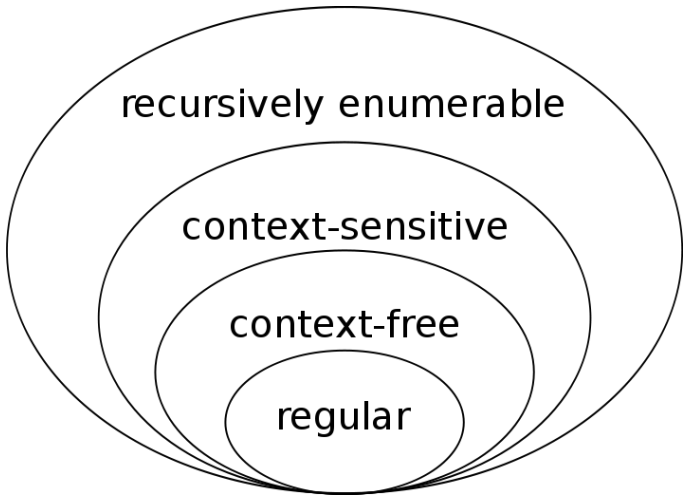
- productia $S \to \varepsilon$ productii ε
  Admise in gramaticile independente de context, regulate - limbajele se pot descrie printr=o gramatica si fara productia ε
- Every Regular Language is Context-Free, every Context-Free Language is Context-Sensitive and every Context-Sensitive Language is a Type 0 Language.
- fiecare simbol din vocabular apare in derivarea cel putin a unei propozitii; (nu exista simboluri inutile)

Ierarhia lui Chomsky - concluzii

- Gramatica de tip 0
- Gramatica de tip 1 - dependenta de context
- Gramatica de tip 2 - independenta de context
- Gramatica de tip 3 - regulata

Pt compilatoare: gramaticile regulate si independente de context

- Simboluri fundamentale ale limbajului (identificatori, constante..): gramatici regulate
- Structura programului: gramatici independente de context



Outline

Derivare si arbori - G1 - expresii aritmetice

P= $(E \to T,\ E \to E+T,\ T \to F,\ T \to T*F,\ F \to i,\ F \to (E))$

Derivari pentru i+i*i

Derivare stanga	Arbitrar	Derivare dreapta
E	E	E
$E+T$	$E+T$	$E+T$
$T+T$	$E+T*F$	$E+T*F$
$F+T$	$T+T*F$	$E+T*i$
$i+T$	$T+F*T$	$E+F*i$
$i+T*F$	$T+F*i$	$E+i*i$
$i+F*F$	$F+F*i$	$T+i*i$
$i+i*F$	$i+F*i$	$F+i*i$
$i+i*i$	$i+i*i$	$i+i*i$

Derivare si arbori - G1 - expresii aritmetice

P= $(E \to T,\ E \to E+T,\ T \to F,\ T \to T*F,\ F \to i,\ F \to (E))$

Derivari pentru i+i*i

Derivare stanga	Arbitrar	Derivare dreapta
E	E	E
$E+T$	$E+T$	$E+T$
$T+T$	$E+T*F$	$E+T*F$
$F+T$	$T+T*F$	$E+T*i$
$i+T$	$T+F*T$	$E+F*i$
$i+T*F$	$T+F*i$	$E+i*i$
$i+F*F$	$F+F*i$	$T+i*i$
$i+i*F$	$i+F*i$	$F+i*i$
$i+i*i$	$i+i*i$	$i+i*i$

La ce se refera Structura conferita de gramatica unui sir?

- ? Secventa pasilor de derivare
- ? Relatia ce arata din ce subsir este derivat un anumit nonterminal

i*i este derivat tot timpul din T

Derivare si arbori - G1 - expresii aritmetice

P= $(E \to T,\ E \to E+T,\ T \to F,\ T \to T*F,\ F \to i,\ F \to (E))$

Derivari pentru i+i*i

Derivare stanga	Arbitrar	Derivare dreapta
E	E	E
$E+T$	$E+T$	$E+T$
$T+T$	$E+T*F$	$E+T*F$
$F+T$	$T+T*F$	$E+T*i$
$i+T$	$T+F*T$	$E+F*i$
$i+T*F$	$T+F*i$	$E+i*i$
$i+F*F$	$F+F*i$	$T+i*i$
$i+i*F$	$i+F*i$	$F+i*i$
$i+i*i$	$i+i*i$	$i+i*i$

La ce se refera Structura conferita de gramatica unui sir?

- NU Secventa pasilor de derivare
- DA Relatia ce arata din ce subsir este derivat un anumit nonterminal

i*i este derivat tot timpul din T

Derivare cont.

- $T \Rightarrow^{+} i * i$ - unitate semantica: operatorul $*$ se aplica operanzilor i
- gramatica - structura semantica relevanta fiecarei propozitii din limbaj
- Daca $E \rightarrow E + T, T \rightarrow T * F$ schimbam in $E \rightarrow E * T, T \rightarrow T + F$
  multimea de siruri va fi aceeasi cu G_1, dar structura propozitiilor va fi alta: adunarile mai prioritare decat inmultirile

Derivari cont.

Fie gramatica $G = (T, N, Z, P)$.

- Sirul $\chi \in V^+$ este o fraza pentru X a lui $\mu\chi\nu$ daca si numai daca

$$Z \Rightarrow^* \mu X \nu \Rightarrow^* \mu\chi\nu$$

unde $\mu, \nu \in V^*, X \in N$

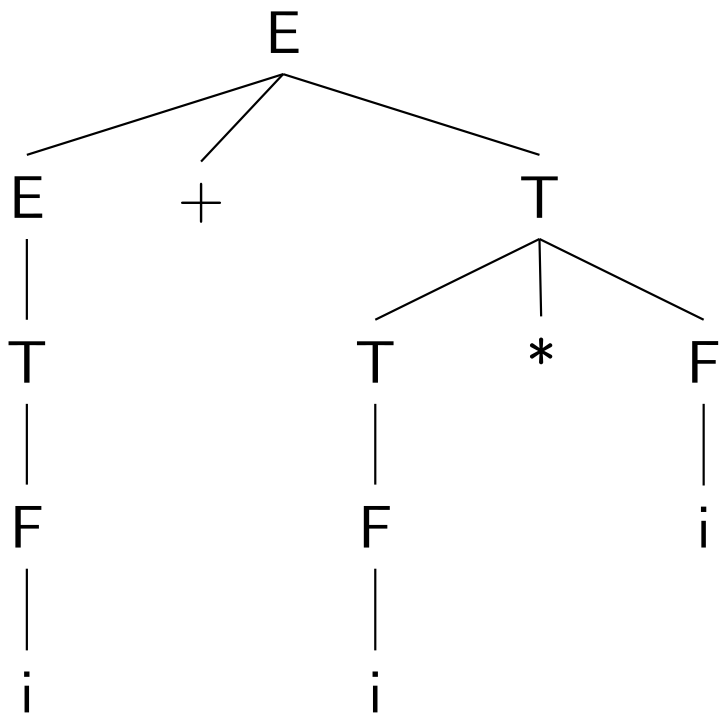
- Sirul $\chi \in V^+$ este o fraza simpla a lui $\mu\chi\nu$ daca si numai daca

$$Z \Rightarrow^* \mu X \nu \Rightarrow \mu\chi\nu$$

Subsirurile derivate din nonterminale singulare se numesc fraze.
Obs: fraza nu consta numai din terminale:
$E \Rightarrow^* E + T \Rightarrow^* E + F * F$. Deci $F * F$ derivat din T

Set de fraze - Arborele de derivare

- Toate cele trei derivari pt gramatica expresiilor aritmetice sunt echivalente: confera acelasi set de fraze.
- Arborele de derivare - reprezentarea intregului set de derivari echivalente; structura frazala



- din arbore de parsare: orice sir din orice derivare a unei propozitii - taietura = nr minim de noduri care intrerup calea de la radacina catre frunze
- exemplu: T, +, T, *, F, E, +, T

Arbori de derivare

- parse tree - metoda de a descrie orice derivare dintr-o gramatica independenta de context (Context-free grammar CFG)
- fiecare nod are un label
- radacina este simbolul de start al gramaticii
- daca un nod n, etichetat cu A are cel putin un descendent, A este in N
- daca nodurile $n_1, n_2, ...n_k$ sunt descendentii unui nod n, cu etichetele $A_1, A_2, ...A_k$ atunci

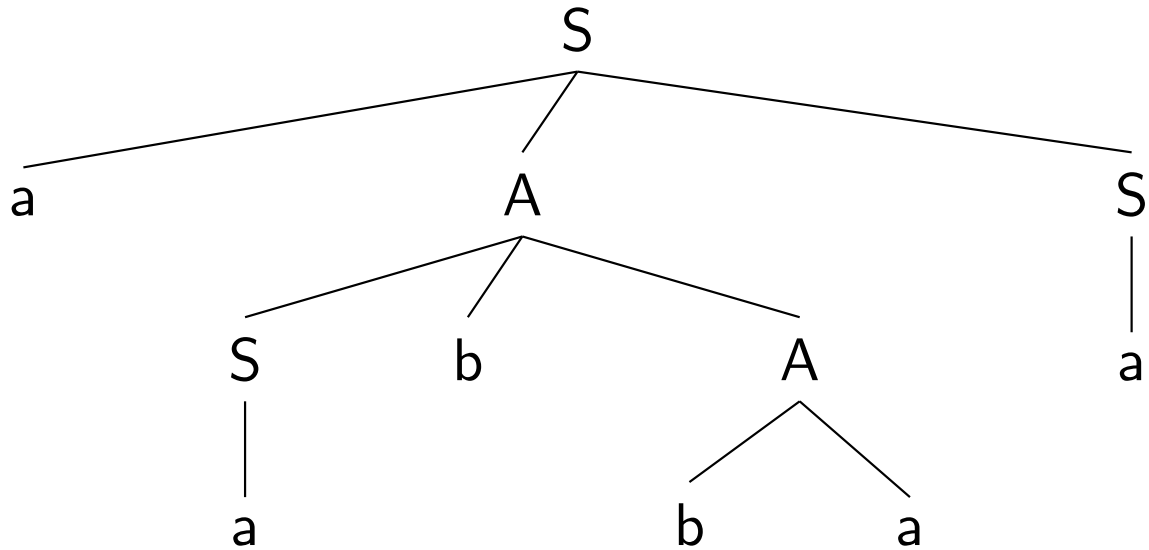
$$A \rightarrow A_1, A_2, ..., A_k$$

este o productie in P

Exemplu

Fie $G = (\{a, b\}, \{S, A\}, S, P)$

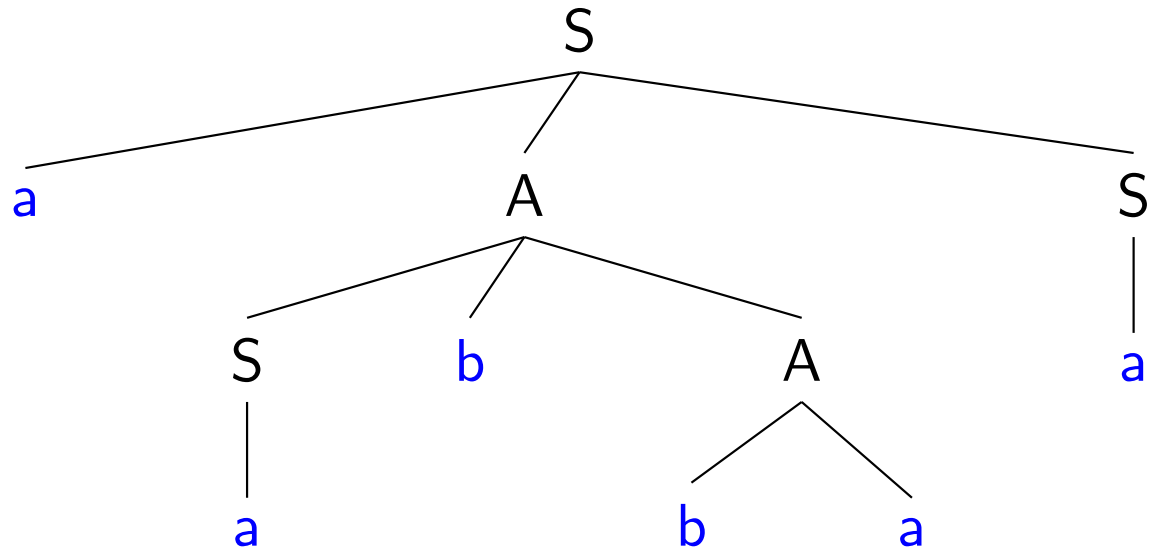
- $S \to aAS$
- $S \to a$
- $A \to SbA$
- $A \to ba$
- $A \to SS$



Exemplu

Fie $G = (\{a, b\}, \{S, A\}, S, P)$

- $S \to aAS$
- $S \to a$
- $A \to SbA$
- $A \to ba$
- $A \to SS$



$$S \Rightarrow^* aabbaa$$

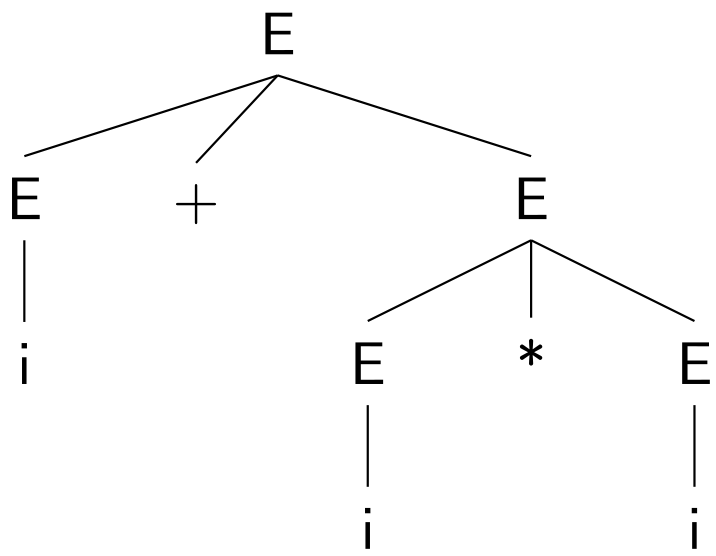
$S \to aAS \to aSbAS \to aabAS \to aabbaS \to aabbaa$

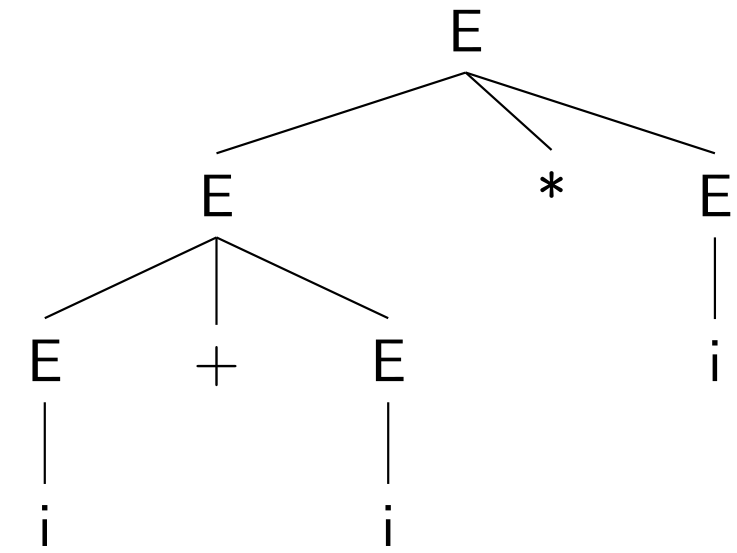
Stanga la dreapta frunzele: propozitie (rezultatul arborelui de derivare)

Ambiguitate

Fie $G_4 = (\{+, *, i\}, \{E\}, E, P)$

- $E \to E + E$
- $E \to E * E$
- $E \to i$





2+3*4??

Ambiguitate

"Look at the dog with one eye"

- O propozitie este ambigua daca derivarile sale pot fi descrise princ el putin doi arbori de derivare disctinti.
- O gramatica este ambigua dava in limbajul generat exista cel putin o propozitie ambigua
- O gramatica este ambigua daca genereaza mai mult de o derivare cea mai din stanga pentru vreo propozitie

Rezumat

Siruri si sisteme de rescriere

Gramatici

Ierarhia lui Chomsky

Arbori de derivare

Exemplu

Fie $G = (\{the, a, reads, walks, kid, robot\},$
$\{S, NounPhrase, Predicate, Article, Noun, Verb\}, S, P)$

- $S \rightarrow NounPhrase\ Predicate$
- $NounPhrase \rightarrow Article\ Noun$
- $Predicate \rightarrow Verb$
- $Article \rightarrow the$
- $Article \rightarrow a$
- $Verb \rightarrow reads$
- $Verb \rightarrow walks$
- $Noun \rightarrow kid$
- $Noun \rightarrow robot$