

# Gramatici regulate. Automate finite

10.03.2020

# Outline

## Introducere in automate

- Definitie formală - automat determinist

- Definitie formală - automat nedeterminist

## Gramatici regulate si automate finite

- Definitie automat ca sistem de rescriere + Limbaj automat

- Pentru orice gramatică regulată există un automat finit cu același limbaj

- Pentru orice gramatică regulată există un automat finit determinist cu același limbaj

- Diagrama de stare - definire formală

- Pentru fiecare automat finit există o gramatică regulată cu același limbaj

- Automat finit determinist - automat finit nedeterminist - limbaje regulate

# Introducere in automate.

- ▶ Letia & Chifu 2.2: 2.2.1
- ▶ capitolul 1.1: Finite automata, FORMAL DEFINITION OF A FINITE AUTOMATON , EXAMPLES OF FINITE AUTOMATA(FA), FORMAL DEFINITION OF COMPUTATION “Introduction to the Theory of computation” 3rd edition, Michael Sipser
- ▶ Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation sections 2.1, 2.2, Ullman

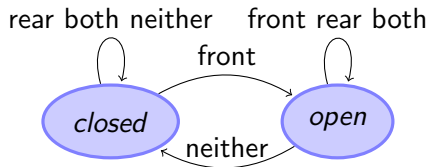
# Automate finite

- ▶ modele pentru calculatoare cu extrem de putina memorie
- ▶ colectie finita de **stari** cu **reguli de tranzitie** care determina trecerea dintr-o stare in alta
- ▶ aplicatii initiale - sequential switching circuits = starea = valoarea bitilor interni
- ▶ azi: mai multe aplicatii software pot fi modelate ca FA

Reprezentarea FA - State diagram:

- ▶ noduri
- ▶ arce - indica tranzitia starilor
- ▶ etichete (labels) pe arce care definesc ce cauzeaza tranzitia

## Exemplu: Controller pentru usi automate



	neither	front	rear	both
closed	closed	open	closed	closed
open	closed	open	open	open

start:closed

- ▶ secventa: front, rear, neither, front, both, neither, rear, neither
- ▶ stari: closed, open, open, closed, open, open, closed, closed, closed

computer cu doar un bit de memorie (vezi Sipser)

FA - Good models for computers with an extremely limited amount of memory

## Exemplu: Recunoasterea cuvintelor care se termina in “.ing”

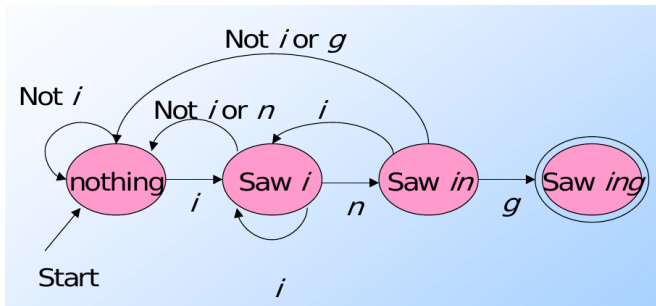
```
2: /* i seen */
   c = getNextInput();
   if (c=='n') goto 3;
   else if (c=='i') goto 2;
   else goto 1;
3:  /* "in" seen */
...

```

ingest, reading

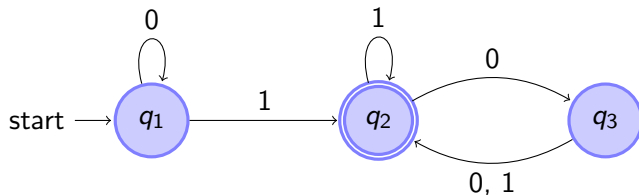
# Automat $\rightarrow$ Cod

1. citești următorul input
2. decide starea următoare
3. sari la începutul codului pentru acea stare



de fapt: expresii regulate `.*ing`

## Exemplu: Automat - Diagrama de stare

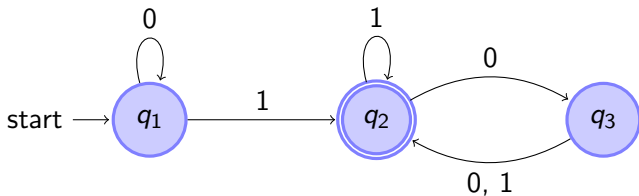


- ▶ 3 stari; start state, accept state
- ▶ transitions

Automatul primește un input string și produce *accept* sau *reject*.  
fie 1101:

1. Start in  $q_1$
2. Citeste 1 și urmează tranziția  $q_1$  to  $q_2$
3. Citeste 1 și urmează tranziția  $q_2$  to  $q_2$
4. Citeste 0 și urmează tranziția  $q_2$  to  $q_3$
5. Citeste 1 și urmează tranziția  $q_3$  to  $q_2$
6. *accept* deoarece se afla în starea accept  $q_2$  la sfârșitul input-ului



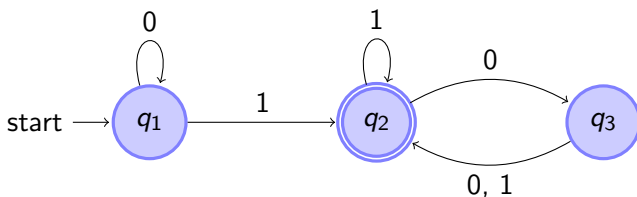


- ▶ Accepta 1, 01, 11, 0101010101?
- ▶ Dar 100, 0100, 110000, 0101000000?
- ▶ dar 0, 10, 101000?

care sunt toate stringurile pe care automatul le accepta?

Setul tuturor sirurilor recunoscute de an automat  $A$ :  $L(A)$

$L(A) = ?$



- ▶ Accepta 1, 01, 11, 0101010101? DA
- ▶ Dar 100, 0100, 110000, 0101000000? Da
- ▶ dar 0, 10, 101000? le respinge

care sunt toate stringurile pe care automatul le accepta?

Setul tuturor sirurilor recunoscute de an automat  $A$ :  $L(A)$

$L(A) = \{w | w \text{ contine cel putin un } 1 \text{ si se termina cu un numar par de } 0\text{-uri dupa ultimul } 1\}$

# Table of Contents

## Introducere in automate

Definitie formală - automat determinist

Definitie formală - automat nedeterminist

## Gramatici regulate si automate finite

Definitie automat ca sistem de rescriere + Limbaj automat

Pentru orice gramatica regulata exista un automat finit cu același limbaj

Pentru orice gramatica regulata exista un automat finit determinist cu același limbaj

Diagrama de stare - definire formală

Pentru fiecare automat finit exista o gramatica regulata cu același limbaj

Automat finit determinist - automat finit nedeterminist - limbaje regulate

# Automat finit determinist - *formal* definition

$$(\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$$

- ▶ un alfabet de intrare  $\Sigma$ - set de simboluri
- ▶ un set finit de stari  $Q$
- ▶ o functie de tranzitie  $\delta$
- ▶ o stare de start  $q_0$
- ▶ un set de stari finale  $F \subseteq Q$  (final state, accepting states)

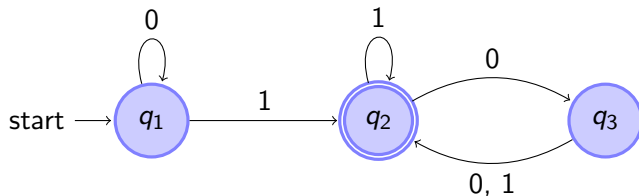
**Functia** de tranzitie  $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ :  $\delta(q, a)$  starea in care automatul DFA trece cand este in starea  $q$  si primeste ca input  $a$ .

Setul tuturor sirurilor recunoscute de un automat  $A$  este limbajul  
 $L(A) = \{w | A \text{ accepta } w\}$

## Descrierea formală a automatului exemplu

$$D_1 = (\{0, 1\}, \{q_1, q_2, q_3\}, \delta, q_1, \{q_2\})$$

$\delta$	0	1
$\rightarrow q_1$	$q_1$	$q_2$
$* q_2$	$q_3$	$q_2$
$q_3$	$q_2$	$q_2$



Acceptare 011 ?  $\exists \delta(q_1, 0)$ :

$$\delta(q_1, 0) = q_1; \delta(q_1, 1) = q_2; \delta(q_2, 1) = q_2 \in F$$

s-a gasit secventa de stari:  $q_1, q_1, q_2$

# Definitie formală a calculului

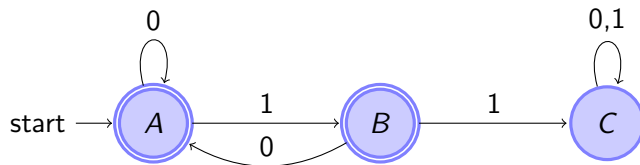
Fie  $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$  și  $w = w_1 w_2 \dots w_n$ ,  $w_i \in \Sigma$ . Automatul recunoaște  $w$  dacă există o secvență  $r_0, r_1, \dots, r_n \in Q$  :

# Definitie formală a calculului

Fie  $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$  și  $w = w_1 w_2 \dots w_n$ ,  $w_i \in \Sigma$ . Automatul recunoaște  $w$  dacă există o secvență  $r_0, r_1, \dots, r_n \in Q$  :

- ▶  $r_0 = q_0$
- ▶  $\delta(r_i, w_{i+1}) = r_{i+1}$  pt  $i = 0, \dots, n-1$
- ▶  $r_n \in F$

## Exemplu:



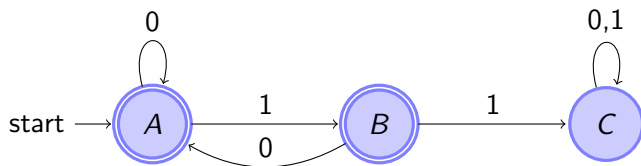
Extended  $\hat{\delta}$

$$\begin{aligned}\hat{\delta}(A, 011) &= \delta(\delta(\delta(A, 0), 1), 1) = \\ &= \delta(\delta(A, 1), 1) = \delta(B, 1) = C\end{aligned}$$

Ce accepta?



## Exemplu:

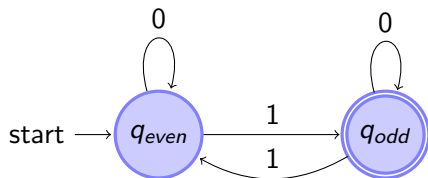


Extended  $\hat{\delta}$

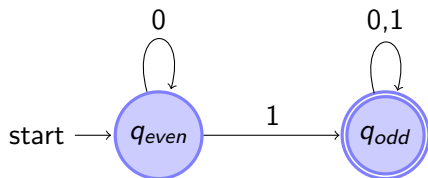
$$\begin{aligned}\hat{\delta}(A, 011) &= \delta(\delta(\delta(A, 0), 1), 1) = \\ &\delta(\delta(A, 1), 1) = \delta(B, 1) = C\end{aligned}$$

Ce accepta? Accepta toate stringurile care nu includ doua simboluri consecutive 1

## Exemple

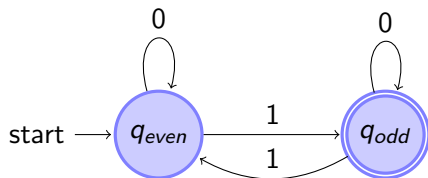


Ce accepta?

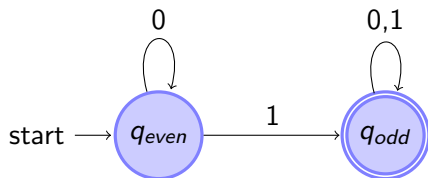


Ce accepta?

## Exemple



Ce accepta? Accepta toate stringurile care includ numar par de 1



Ce accepta? Accepta toate stringurile care contin cel putin un 1

# Table of Contents

## Introducere in automate

Definitie formală - automat determinist

Definitie formală - automat nedeterminist

## Gramatici regulate si automate finite

Definitie automat ca sistem de rescriere + Limbaj automat

Pentru orice gramatica regulata exista un automat finit cu acelasi limbaj

Pentru orice gramatica regulata exista un automat finit determinist cu acelasi limbaj

Diagrama de stare - definire formală

Pentru fiecare automat finit exista o gramatica regulata cu acelasi limbaj

Automat finit determinist - automat finit nedeterminist - limbaje regulate

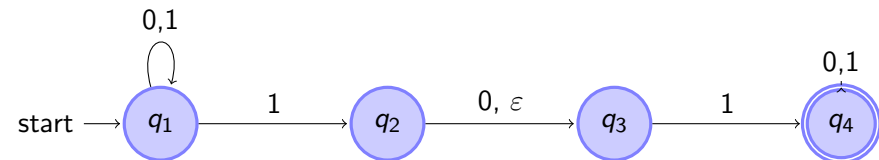
# Automat finit nedeterminist - *formal* definition

$$(\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$$

- ▶ un alfabet de intrare  $\Sigma$ - set de simboluri
- ▶ un set finit de stari  $Q$
- ▶ o functie de tranzitie  $\delta$
- ▶ o stare de start  $q_0$
- ▶ un set de stari finale  $F \subseteq Q$  (final state, accepting states)

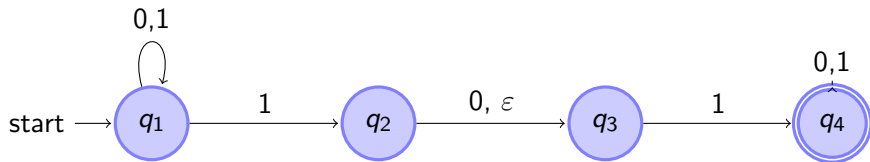
**Functia de tranzitie**  $\delta : Q \times \Sigma_\epsilon \rightarrow P(Q)$ :  $\delta(q, a)$  starea/**starile** in care automatul NFA poate trece cand este in starea  $q$  si primeste ca input  $a$ .

## Exemplu - automat nedeterminist

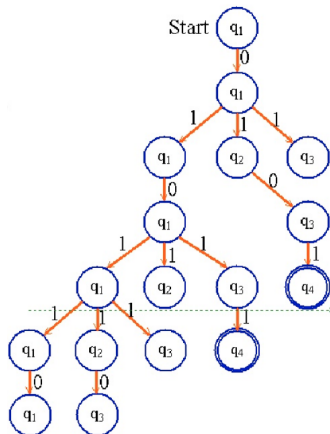


Input: 010110

## Exemplu - automat nedeterminist



Input: 010110 Calcul nedeterminist: accept/reject



# Table of Contents

## Introducere in automate

Definitie formala - automat determinist

Definitie formala - automat nedeterminist

## Gramatici regulate si automate finite

**Definitie automat ca sistem de rescriere + Limbaj automat**

Pentru orice gramatica regulata exista un automat finit cu acelasi limbaj

Pentru orice gramatica regulata exista un automat finit determinist cu acelasi limbaj

Diagrama de stare - definire formala

Pentru fiecare automat finit exista o gramatica regulata cu acelasi limbaj

Automat finit determinist - automat finit nedeterminist - limbaje regulate



# Outline

## Introducere in automate

Definitie formală - automat determinist

Definitie formală - automat nedeterminist

## Gramatici regulate si automate finite

Definitie automat ca sistem de rescriere + Limbaj automat

Pentru orice gramatica regulata exista un automat finit cu acelasi limbaj

Pentru orice gramatica regulata exista un automat finit determinist cu acelasi limbaj

Diagrama de stare - definire formală

Pentru fiecare automat finit exista o gramatica regulata cu acelasi limbaj

Automat finit determinist - automat finit nedeterminist - limbaje regulate

# Automat finit - definitie formală ca sistem de rescriere

Automat finit (finite automaton, finite state acceptor):

$$A = (T, Q, R, q_0, F)$$

- ▶  $Q$  set nevid - setul starilor interne
- ▶  $(T \cup Q, R)$  sistem de rescriere;  $T \cap Q = \emptyset$
- ▶  $q_0 \in Q$  - starea initiala
- ▶  $F \subseteq Q$  - stari finale
- ▶ fiecare element din  $R$  are forma  $qt \rightarrow q'$ ,  $q, q' \in Q, t \in T$

# Definitie formală *Automat finit*

- ▶ automatul  $A$  accepta/recunoaste setul de stringuri

$$L(A) = \{\tau \in T^* \mid q_0\tau \Rightarrow^* q, q \in F\}$$

- ▶ Doua automate  $A$  și  $A'$  sunt **echivalente** dacă și numai dacă  $L(A) = L(A')$

## Interpretare

- ▶ mașina care citește la intrare un input string; citește simbol cu simbol și își schimbă starea internă
- ▶ automatul se află în starea  $q$  când sirul curent din derivare este  $q\tau$
- ▶ automatul face o tranziție din  $q$  în  $q'$  dacă  $\tau = t\chi$  și  $?? \in R$   
 $q\tau = qt\chi \Rightarrow ???$
- ▶ fiecare tranziție șterge un simbol din stringul de intrare

# Definitie formală *Automat finit*

- ▶ automatul  $A$  accepta/recunoaste setul de stringuri

$$L(A) = \{\tau \in T^* \mid q_0\tau \Rightarrow^* q, q \in F\}$$

- ▶ Doua automate  $A$  și  $A'$  sunt **echivalente** dacă și numai dacă  $L(A) = L(A')$

## Interpretare

- ▶ mașina care citește la intrare un input string; citește simbol cu simbol și își schimbă starea internă
- ▶ automatul se află în starea  $q$  când sirul curent din derivare este  $q\tau$
- ▶ automatul face o tranziție din  $q$  în  $q'$  dacă  $\tau = t\chi$  și  $qt \rightarrow q' \in R$   $q\tau = qt\chi \Rightarrow q'\chi$
- ▶ fiecare tranziție șterge un simbol din stringul de intrare

# Exemplu automat vazut ca sistem de rescriere

$$A = (T = \{0, 1\}, Q = \{q_0, q_1\}, R, q_0, F = \{q_1\})$$

$$R = \left\{ \begin{array}{l} q_0 1 \rightarrow q_1 \\ q_0 0 \rightarrow q_0 \\ q_1 1 \rightarrow q_0 \\ q_1 0 \rightarrow q_1 \end{array} \right\}$$

Intrebare: 1001 apartine limbajului automatului? Dar 10?

?Exista derivarea

$$q_0 1001 \Rightarrow^* q_1$$

# Table of Contents

## Introducere in automate

Definitie formala - automat determinist

Definitie formala - automat nedeterminist

## Gramatici regulate si automate finite

Definitie automat ca sistem de rescriere + Limbaj automat

**Pentru orice gramatica regulata exista un automat finit cu  
acelasi limbaj**

Pentru orice gramatica regulata exista un automat finit  
determinist cu acelasi limbaj

Diagrama de stare - definire formala

Pentru fiecare automat finit exista o gramatica regulata cu  
acelasi limbaj

Automat finit determinist - automat finit nedeterminist -  
limbaje regulate

# Teorema

- Pentru fiecare gramatica regulata  $G$  exista un automat finit  $A$  a.i.  $L(A) = L(G)$ .

Reamintire: gramatica regulata (din ierarhia lui Chomsky)  
 $G = (T, N, Z, P)$

- fiecare productie are forma

$$X \rightarrow t, \quad X \in N, \quad t \in T \cup \{\varepsilon\}$$

sau

$$X \rightarrow tY, \quad X, Y \in N, \quad t \in T$$

# Construirea AF pentru gramatica regulata G

- **Algoritm** Construirea automatului  $A = (T, N \cup \{f\}, R, Z, F)$ ,  $f \notin N$  pentru gramatica  $G = (T, N, Z, P)$ .
  1. daca  $X \rightarrow t \in P$ ,  $X \in N, t \in T$ , atunci  $Xt \rightarrow f \in R$
  2. daca  $X \rightarrow tY \in P$ ,  $X, Y \in N, t \in T$ , atunci  $Xt \rightarrow Y \in R$
  3.  $F = \{f\} \cup \{X | X \rightarrow \varepsilon \in P\}$



## Exemplu: Gramatica pentru constante reale - gramatica regulata

Fie gramatica  $G_3$

- ▶  $T = \{n, ., +, -, E\}$
- ▶  $N = \{C, F, I, X, S, U\}$
- ▶  $P = \{$

$C \rightarrow n, C \rightarrow nF, C \rightarrow .I,$

$F \rightarrow .I, F \rightarrow ES,$

$I \rightarrow n, I \rightarrow nX,$

$X \rightarrow ES,$

$S \rightarrow n, S \rightarrow +U, S \rightarrow -U,$

$U \rightarrow n\}$

Exemple de derivare:

- ▶  $C \Rightarrow n$
- ▶  $C \Rightarrow .I \Rightarrow .n$
- ▶  $C \Rightarrow nF \Rightarrow n.I \Rightarrow n.nX \Rightarrow n.nES \Rightarrow n.nE + U \Rightarrow n.nE + n$

## FA pentru $G_3$

### Gramatica regulata

- ▶  $T = \{n, ., +, -, E\}$
- ▶  $N = \{C, F, I, X, S, U\}$
- ▶  $P = \{$   
 $C \rightarrow n, C \rightarrow nF, C \rightarrow .I,$   
 $F \rightarrow .I, F \rightarrow ES,$   
 $I \rightarrow n, I \rightarrow nX,$   
 $X \rightarrow ES,$   
 $S \rightarrow n, S \rightarrow +U, S \rightarrow -U,$   
 $U \rightarrow n\}$

### Automat finit

- ▶  $T = \{n, ., +, -, E\}$
- ▶  $Q = \{C, F, I, X, S, U, q\}$
- ▶  $P = \{$   
 $Cn \rightarrow q, Cn \rightarrow F, C. \rightarrow I,$   
 $F. \rightarrow I, FE \rightarrow S,$   
 $In \rightarrow q, In \rightarrow X,$   
 $XE \rightarrow S,$   
 $Sn \rightarrow q, S+ \rightarrow U, S- \rightarrow U,$   
 $Un \rightarrow q\}$
- ▶  $q_0 = C$
- ▶  $F = \{q\}$

# Derivare $n.n$

Gramatica

$$C \Rightarrow nF \Rightarrow n.l \Rightarrow n.n$$

Automat

$$Cn.n \Rightarrow F.n \Rightarrow ln \Rightarrow q$$

Pentru orice  $Z\tau\chi \Rightarrow^* X\chi \Rightarrow^* q$ ,  $\tau, \chi \in T^*$ ,  $X \in N$ ,  $\tau\chi \in L(A)$ ,  
 $q \in F$ ,

starea  $X$  specifica nonterminalul din  $G$  care ar fi trebuit utilizat  
pentru derivarea lui  $\chi$

# Derivare $n.n$

Gramatica

$$C \Rightarrow nF \Rightarrow n.l \Rightarrow \textcolor{red}{n.n}$$

Automat

$$\textcolor{red}{C}n.n \Rightarrow F.n \Rightarrow ln \Rightarrow q$$

Pentru orice  $Z\tau\chi \Rightarrow^* X\chi \Rightarrow^* q$ ,  $\tau, \chi \in T^*$ ,  $X \in N$ ,  $\tau\chi \in L(A)$ ,  
 $q \in F$ ,

starea  $X$  specifica nonterminalul din  $G$  care ar fi trebuit utilizat  
pentru derivarea lui  $\chi$

# Derivare $n.n$

Gramatica

$$C \Rightarrow nF \Rightarrow n.l \Rightarrow n.n$$

Automat

$$Cn.n \Rightarrow F.n \Rightarrow ln \Rightarrow q$$

Pentru orice  $Z\tau\chi \Rightarrow^* X\chi \Rightarrow^* q$ ,  $\tau, \chi \in T^*$ ,  $X \in N$ ,  $\tau\chi \in L(A)$ ,  
 $q \in F$ ,

starea  $X$  specifica nonterminalul din  $G$  care ar fi trebuit utilizat  
pentru derivarea lui  $\chi$

# Proprietati ale automatului

Pentru orice  $Z\tau\chi \Rightarrow^* X\chi \Rightarrow^* q$ ,  $\tau, \chi \in T^*$ ,  $X \in N$ ,  $\tau\chi \in L(A)$ ,  
 $q \in F$ ,

starea  $X$  specifica nonterminalul din  $G$  care ar fi trebuit utilizat  
pentru derivarea lui  $\chi$

Demonstratie prin inductie

- ▶ daca  $\tau\chi \in L(G)$ . afirmatia este adevarata pentru  $Z$  stare initiala
- ▶ proprietatea ramana adevarata pana la starea finala  $q$ , care nu genereaza alte simboluri

Fiecare propozitie din  $L(G)$  apartine lui  $L(A)$  si invers

# Evitarea backtrackingului

- ▶ in exemplu: Automatul generat este **nedeterminist**: stare / cu inputul *n* sunt mai multe tranzitii posibile
- ▶ la implementare: backtracking necesar in cazul unei decizii incorecte
- ▶ motive pentru evitarea backtrackingului:
  - ▶ timpul necesar analizei unui string cu backtracking poate creste exponential cu lungimea stringului (spre deosebire de cazul DFA - unde e liniar cu lungimea stringului)
  - ▶ daca automatul nu accepta stringul, stringul va fi recunoscut drept incorect. Pinpointingul (tratarea erorilor) devine dificil cu backtracking
  - ▶ deoarece in compilator, tranzitiilor de stare le sunt asociate anumite actiuni, la revenire ar trebui anularea acelor actiuni

# Table of Contents

## Introducere in automate

Definitie formala - automat determinist

Definitie formala - automat nedeterminist

## Gramatici regulate si automate finite

Definitie automat ca sistem de rescriere + Limbaj automat

Pentru orice gramatica regulata exista un automat finit cu  
acelasi limbaj

**Pentru orice gramatica regulata exista un automat finit  
determinist cu acelasi limbaj**

Diagrama de stare - definire formala

Pentru fiecare automat finit exista o gramatica regulata cu  
acelasi limbaj

Automat finit determinist - automat finit nedeterminist -  
limbaje regulate



# Automat finit determinist

Un automat este determinist daca fiecare derivare poate fi continuata prin cel mult o mutare.

→ Determinist daca Partile stanga ale tuturor productiilor sunt distincte

Backtrackingul poate fi intotdeauna evitat cand se recunosc stringuri pentru limbaje regulate

# Automat finit determinist (deterministic finite automaton)

Pentru orice gramatica regulata  $G$ , exista un automat finit **determinist**  $A$  (DFA) a.i.  $L(A) = L(G)$

# Algoritm construire DFA

Idee: construim un automat pentru gramatica  $G = (T, N, Z, P)$  a.i. in timpul acceptarii unei propozitii din  $L(G)$ , starea la fiecare pas sa mentioneze elementul  $N$  utilizat pentru a deriva restul stringului.

**Daca**  $X \rightarrow tU$  si  $X \rightarrow tV \in P$ ,

**atunci** cand  $t$  este urmatorul simbol, restul stringului poate fi derivat atat din  $U$  cat si din  $V$

**dar** pentru a avea DFA,  $R$  trebuie sa contina o singura productie  $Xt \rightarrow q'$

**deci** starea  $q'$  trebuie sa contina un set de nonterminale - acelea care puteau fi utilizate pentru derivarea restului sirului

# Algoritm construire DFA pt $G=(T,N,Z,P)$

$A = (T, Q, R, q_0, F)$ , *ostare reprezinta*  $N_q \subseteq N \cup \{f\}, f \notin N$

1. initial  $Q = \{q_0\}$  si  $R = \emptyset, N_{q_0} = \{Z\}$
2. pentru  $q \in Q$  netratat se efectueaza pasii 3-5 pentru fiecare  $t \in T$
3. fie  $next(q, t) = \{U | \exists X \in N_q \text{ a.i. } X \rightarrow tU \in P\}$
4. daca exista un  $X \in N_q$  a.i.  $X \rightarrow t \in P$ , atunci adauga  $f$  la  $next(q, t)$  daca nu era deja adaugat;  
daca exista  $X \in N_q$  a.i.  $X \rightarrow \varepsilon \in P$  atunci adauga  $f$  la  $N_q$
5. daca  $next(q, t) \neq \emptyset$ , atunci fie  $q'$  starea ce reprezinta  $N_{q'} = next(q, t)$ . Adauga  $q'$  la  $Q$  si  $qt \rightarrow q'$  in  $R$
6. daca toate starile din  $Q$  au fost considerate, atunci  $F = \{q | f \in N_q\}$  si terminat; altfel continua cu pasul 2

# Exemplu DFA pentru gramatica regulata

Fie gramatica  $G_3$

- ▶  $T = \{n, ., +, -, E\}$
- ▶  $N = \{C, F, I, X, S, U\}$
- ▶  $P = \{$

$C \rightarrow n, C \rightarrow nF, C \rightarrow .I,$

$F \rightarrow .I, F \rightarrow ES,$

$I \rightarrow n, I \rightarrow nX,$

$X \rightarrow ES,$

$S \rightarrow n, S \rightarrow +U, S \rightarrow -U,$

$U \rightarrow n\}$

	$n$	$.$	$+$	$-$	$E$	$N$
$q_0$						$\{C\}$
...						

$next(q_0, n) = \{F, f\}...$

# DFA

	$n$	$.$	$+$	$-$	$E$	N
$q_0$	$q_1$	$q_2$				$\{C\}$
$q_1$		$q_2$			$q_3$	$\{f, F\}$
$q_2$	$q_4$					$\{I\}$
$q_3$	$q_5$		$q_6$	$q_6$		$\{S\}$
$q_4$					$q_3$	$\{f, X\}$
$q_5$						$\{f\}$
$q_6$	$q_5$					$\{U\}$

- ▶  $T = \{n, ., +, -, E\}$ ,  $F = \{q_1, q_4, q_5\}$
- ▶  $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}$
- ▶  $P =$

$$q_0 n \rightarrow q_1, q_0 . \rightarrow q_2,$$

$$q_1 . \rightarrow q_2, q_1 E \rightarrow q_3,$$

$$q_2 n \rightarrow q_4$$

$$q_3 n \rightarrow q_5, q_3 + \rightarrow q_6, q_3 - \rightarrow q_6,$$

$$q_4 E \rightarrow q_3$$

$$q_6 n \rightarrow q_5\}$$

# DFA

	$n$	$.$	$+$	$-$	$E$	N
$q_0$	$q_1$	$q_2$				$\{C\}$
$q_1$		$q_2$			$q_3$	$\{f, F\}$
$q_2$	$q_4$					$\{I\}$
$q_3$	$q_5$		$q_6$	$q_6$		$\{S\}$
$q_4$					$q_3$	$\{f, X\}$
$q_5$						$\{f\}$
$q_6$	$q_5$					$\{U\}$

- ▶  $T = \{n, ., +, -, E\}$ ,  $F = \{q_1, q_4, q_5\}$
- ▶  $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}$
- ▶  $P =$

$$q_0 n \rightarrow q_1, q_0 . \rightarrow q_2,$$

$$q_1 . \rightarrow q_2, q_1 E \rightarrow q_3,$$

$$q_2 n \rightarrow q_4$$

$$q_3 n \rightarrow q_5, q_3 + \rightarrow q_6, q_3 - \rightarrow q_6,$$

$$q_4 E \rightarrow q_3$$

$$q_6 n \rightarrow q_5\}$$

# Diagrama de stare

Fie  $T = \{n, ., +, -, E\}$ ,  $F = \{q_1, q_4, q_5\}$

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}$

$P = \{q_0 n \rightarrow q_1, q_0 . \rightarrow q_2,$

$q_1 . \rightarrow q_2, q_1 E \rightarrow q_3,$

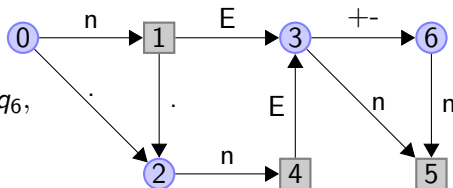
$q_2 n \rightarrow q_4$

$q_3 n \rightarrow q_5, q_3 + \rightarrow q_6, q_3 - \rightarrow q_6,$

$q_4 E \rightarrow q_3$

$q_6 n \rightarrow q_5\}$

Diagrama de stare



cale care incepe in  $q_0$  si se termina intr-o stare finala  $\in L(A)$

n	.n	n.n
nEn	nE+n	nE-n
.nEn	.nE+n	.nE-n
n.nEn	n.nE+n	n.nE-n



## Comparatie DFA FA pentru gramatica regulata

- ▶  $T = \{n, ., +, -, E\}$ ,  
 $F = \{q_1, q_4, q_5\}$
- ▶  $Q =$   
 $\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}$
- ▶  $P = \{$

$q_0 n \rightarrow q_1, q_0 . \rightarrow q_2,$

$q_1 . \rightarrow q_2, q_1 E \rightarrow q_3,$

$q_2 n \rightarrow q_4$

$q_3 n \rightarrow q_5, q_3 + \rightarrow q_6, q_3 - \rightarrow q_6,$

$q_4 E \rightarrow q_3$

$q_6 n \rightarrow q_5\}$

- ▶  $T = \{n, ., +, -, E\}, F =$   
 $\{q\}$

- ▶  $Q = \{C, F, I, X, S, U, q\}$

- ▶  $P = \{$

$Cn \rightarrow q, Cn \rightarrow F, C. \rightarrow I,$

$F. \rightarrow I, FE \rightarrow S,$

$In \rightarrow q, In \rightarrow X,$

$XE \rightarrow S,$

$Sn \rightarrow q, S+ \rightarrow U, S- \rightarrow U,$

$Un \rightarrow q\}$

q	$N_q$	q	$N_q$
0	C	1	f, F
2	I	3	S
4	f, X	5	f

# Table of Contents

## Introducere in automate

Definitie formală - automat determinist

Definitie formală - automat nedeterminist

## Gramatici regulate si automate finite

Definitie automat ca sistem de rescriere + Limbaj automat

Pentru orice gramatică regulată există un automat finit cu același limbaj

Pentru orice gramatică regulată există un automat finit determinist cu același limbaj

**Diagrama de stare - definire formală**

Pentru fiecare automat finit există o gramatică regulată cu același limbaj

Automat finit determinist - automat finit nedeterminist - limbaje regulate

# Diagrama de stare

Fie  $A = (T, Q, R, q_0, F)$  un automat finit,

- ▶  $D = \{(q, q') | \exists t, qt \rightarrow q' \in R\}$ ,
- ▶  $f : (q, q') \rightarrow \{t | qt \rightarrow q' \in R\}$  o mapare de la  $D$  la  $P(T)$

Graful directionat  $(Q, D)$  cu etichetele muchiilor  $f((q, q'))$  este diagrama de stare a automatului  $A$

# Table of Contents

## Introducere in automate

Definitie formala - automat determinist

Definitie formala - automat nedeterminist

## Gramatici regulate si automate finite

Definitie automat ca sistem de rescriere + Limbaj automat

Pentru orice gramatica regulata exista un automat finit cu  
acelasi limbaj

Pentru orice gramatica regulata exista un automat finit  
determinist cu acelasi limbaj

Diagrama de stare - definire formala

**Pentru fiecare automat finit exista o gramatica regulata cu  
acelasi limbaj**

Automat finit determinist - automat finit nedeterminist -  
limbaje regulate

# Teorema

Pentru fiecare automat finit  $A$  exista o gramatica regulata  $G$  a.i.  
 $L(A) = L(G)$

Din automatul  $A = (T, Q, R, q_0, F)$  construim gramatica  
 $G = (T, Q, q_0, P)$ :

$$P = \{q \rightarrow tq' | qt \rightarrow q' \in R\} \cup \{q \rightarrow \varepsilon | q \in F\}$$

# Gramatici pentru automat

$$F = \{q_1, q_4, q_5\} \quad P = \{ \begin{array}{l} q_0 n \rightarrow q_1, q_0 \cdot \rightarrow q_2, \\ q_1 \cdot \rightarrow q_2, q_1 E \rightarrow q_3, \\ q_2 n \rightarrow q_4 \\ q_3 n \rightarrow q_5, q_3 + \rightarrow q_6, q_3 - \rightarrow q_6, \\ q_4 E \rightarrow q_3 \\ q_6 n \rightarrow q_5 \end{array} \}$$

Productii gramatica

$$\begin{array}{l} q_0 \rightarrow nq_1|.q_2, \\ q_1 \rightarrow .q_2|Eq_3|\varepsilon, \\ q_2 \rightarrow nq_4 \\ q_3 \rightarrow nq_5|+q_6|-q_6, \\ q_4 \rightarrow Eq_3|\varepsilon \\ q_5 \rightarrow \varepsilon \\ q_6 \rightarrow nq_5\} \end{array}$$

Productii gramatica fara productii  $\varepsilon$

$$\begin{array}{l} q_0 \rightarrow n|nq_1|.q_2, \\ q_1 \rightarrow .q_2|Eq_3, \\ q_2 \rightarrow n|nq_4 \\ q_3 \rightarrow n|+q_6|-q_6, \\ q_4 \rightarrow Eq_3 \\ q_6 \rightarrow n\} \end{array}$$

# Gramatici pentru automat

$$F = \{q_1, q_4, q_5\} \quad P = \{ \begin{array}{l} q_0 n \rightarrow q_1, q_0 \cdot \rightarrow q_2, \\ q_1 \cdot \rightarrow q_2, q_1 E \rightarrow q_3, \\ q_2 n \rightarrow q_4 \\ q_3 n \rightarrow q_5, q_3 + \rightarrow q_6, q_3 - \rightarrow q_6, \\ q_4 E \rightarrow q_3 \\ q_6 n \rightarrow q_5 \end{array} \}$$

## Productii gramatica

$$\begin{array}{l} q_0 \rightarrow nq_1|.q_2, \\ q_1 \rightarrow .q_2|Eq_3|\epsilon, \\ q_2 \rightarrow nq_4 \\ q_3 \rightarrow nq_5|+q_6|-q_6, \\ q_4 \rightarrow Eq_3|\epsilon \\ q_5 \rightarrow \epsilon \\ q_6 \rightarrow nq_5 \end{array}$$

## Productii gramatica fara productii $\epsilon$

$$\begin{array}{l} q_0 \rightarrow n|nq_1|.q_2, \\ q_1 \rightarrow .q_2|Eq_3, \\ q_2 \rightarrow n|nq_4 \\ q_3 \rightarrow n|+q_6|-q_6, \\ q_4 \rightarrow Eq_3 \\ q_6 \rightarrow n \end{array}$$

- ▶ Pentru orice gramatica regulata  $G$ , exista un automat finit  $A$   
a.i.  $L(A) = L(G)$
- ▶ Pentru fiecare automat finit  $A$  exista o gramatica regulata  $G$   
a.i.  $L(A) = L(G)$

Gramaticile regulate si automatele finite sunt echivalente



# Table of Contents

## Introducere in automate

Definitie formala - automat determinist

Definitie formala - automat nedeterminist

## Gramatici regulate si automate finite

Definitie automat ca sistem de rescriere + Limbaj automat

Pentru orice gramatica regulata exista un automat finit cu acelaasi limbaj

Pentru orice gramatica regulata exista un automat finit determinist cu acelaasi limbaj

Diagrama de stare - definire formala

Pentru fiecare automat finit exista o gramatica regulata cu acelaasi limbaj

**Automat finit determinist - automat finit nedeterminist - limbaje regulate**

# DFA vs NFA

Ambele automate, deterministe si nedeterministe, sunt capabile sa recunoasca toate limbajele regulate:

$$L(NFA) = L(DFA)$$

Diferenta principala: spatiu vs timp:

- ▶ DFA sunt mai rapide decat NFA
- ▶ DFA sunt exponential mai mari decat NFA

FA sunt folosite ca mdoele pentru:

- ▶ software for designing digital circuits
- ▶ lexical analyzer of a compiler
- ▶ software for verifying finite state systems, such as communication protocols: exemplul cu planeta

# Rezumat

## Introducere in automate

Definitie formala - automat determinist

Definitie formala - automat nedeterminist

## Gramatici regulate si automate finite

Definitie automat ca sistem de rescriere + Limbaj automat

Pentru orice gramatica regulata exista un automat finit cu acelasi limbaj

Pentru orice gramatica regulata exista un automat finit determinist cu acelasi limbaj

Diagrama de stare - definire formala

Pentru fiecare automat finit exista o gramatica regulata cu acelasi limbaj

Automat finit determinist - automat finit nedeterminist - limbaje regulate

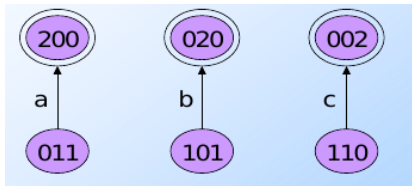
## Extended Example - ullman slides - Optional - un exemplu interesant modelat cu automate

- ▶ On a distant planet, there are three species, a, b, and c. Any two different species can mate. If they do:
  1. The participants die.
  2. Two children of the third species are born.
- ▶ The planet fails if at some point all individuals are of the same species. Then, no more breeding can take place.
- ▶ State = sequence of three integers the numbers of individuals of species a, b, and c.

- ▶ In a given state, must the planet eventually fail?
- ▶ In a given state, is it possible for the planet to fail, if the wrong breeding choices are made?

$a$  — *event* - individuals of species  $b$  and  $c$  breed and are replaced by two  $a$ 's

idee: state =  $\#a\#b\#c$

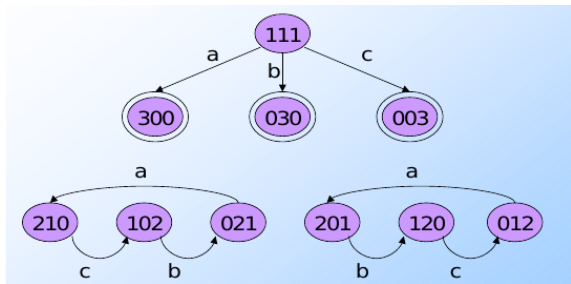


Toate starile sunt **must-fail**

- ▶ In a given state, must the planet eventually fail?
- ▶ In a given state, is it possible for the planet to fail, if the wrong breeding choices are made?

*a* – event - individuals of species *b* and *c* breed and are replaced by two *a*'s

idee: state = #a#b#c

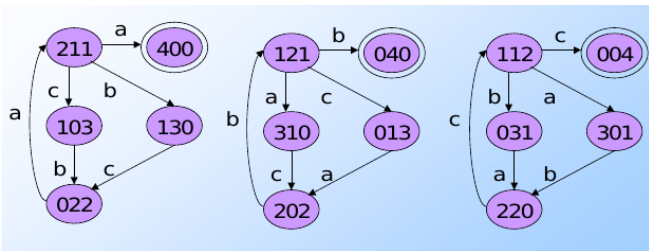


4 stari sunt **must-fail**, celelalte sunt **can't fail**

- ▶ In a given state, must the planet eventually fail?
- ▶ In a given state, is it possible for the planet to fail, if the wrong breeding choices are made?

*a* – event - individuals of species *b* and *c* breed and are replaced by two *a*'s

idee: state = #*a*#*b*#*c*



**must fail**

dar, si **might fail**



- ▶ In a given state, must the planet eventually fail?
- ▶ In a given state, is it possible for the planet to fail, if the wrong breeding choices are made?

$a$  – event - individuals of species  $b$  and  $c$  breed and are replaced by two  $a$ 's

idee: state =  $\#a\#b\#c$

