UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Miha Brešar

Timotej Vesel

Optimizacija s kolonijami mravelj za Problem trgovskega potnika

Projekt iz OR pri predmetu Finančni praktikum

Kratka predstavitev

Ljubljana, 2019

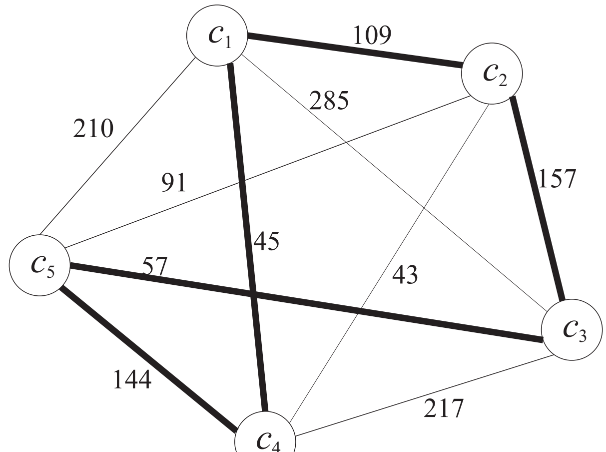
1. Opis problema

Trgovski potniki, poštarji, vozniki dostavnih vozil, kurirji in ljudje podobnih poklicev imajo precej zahtevno delo. Pred delom dobijo seznam krajev oziroma naslovov, ki jih morajo obiskati, ter se vrniti v izhodišče. Pomembno je, da obiščejo vse kraje s seznama in da za obisk porabijo čim manj sredstev, predvsem časa in goriva. Ali povedano drugače, želimo, da je **cena** poti čim manjša. Izkaže se, da je pravilna izbira vrstnega reda obiskanih krajev zelo pomembna, saj lahko s slabo izbiro zelo povečamo stroške poti v primerjavi z najcenejšo.

Matematično lahko predstavimo *problem trgovskega potnika* na naslednji način. Dana je množica mest $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$. Za vsak par mest c_i, c_j poznamo ceno povezave od mesta c_i do mesta c_j, ki jo označimo z $d_{i,j}$. Trgovski potnik mora začeti pot v enem od mest, obiskati vsa preostala mesta s seznama ter se vrniti v izhodišče, tako da bo skupna cena poti čim manjša. Povedano drugače, poiskati želimo takšno zaporedje mest $(c_{\pi_1}, c_{\pi_2}, \ldots, c_{\pi_n})$ iz C, da bo vrednost izraza $d_{\pi_1,\pi_2} + d_{\pi_2,\pi_3} + \ldots + d_{\pi_{n-1},\pi_n} + d_{\pi_n,\pi_1}$ najmanjša. Zaporedju mest, ki minimizira zgornji izraz, bomo rekli tudi *optimalna rešitev.*

Nalogo problema trgovskega potnika zelo naravno predstavimo z grafom, v katerem so mesta vozlišča grafa. Vsako vozlišče grafa povežemo z vsemi drugimi vozlišči, povezavi pa priredimo število, ki je enako ceni poti med mestoma, ki predstavljata krajišče povezave (če povezava med dvema mestoma ne obstaja, jo dodamo in ji priredimo ceno ∞. S tem se optimalna rešitev ne spremeni.)

Kot primer si poglejmo množico mest $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$, cene povezav med njimi pa so $d_{1,2} = d_{2,1} = 109$, $d_{1,3} = d_{3,1} = 285$, $d_{1,4} = d_{4,1} = 45$, $d_{1,5} = d_{5,1} = 210$, $d_{2,3} = d_{3,2} = 157$, $d_{2,4} = d_{4,2} = 43$, $d_{2,5} = d_{5,2} = 91$, $d_{3,4} = d_{4,3} = 217$, $d_{3,5} = d_{5,3} = 57$ in $d_{4,5} = d_{5,4} = 144$. Primer je predstavljen na sliki 2.



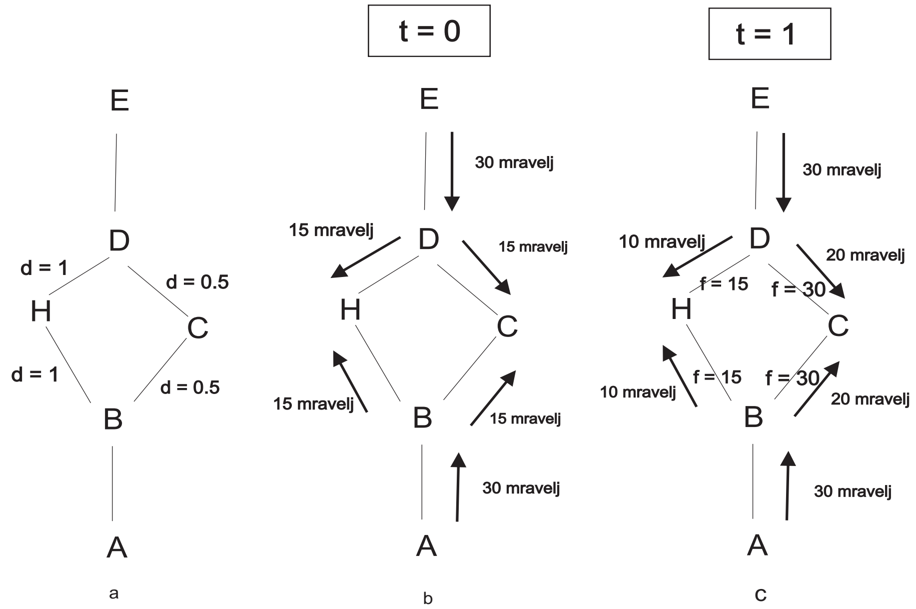
Slika 1. Primer problema trgovskega potnika.

Kot lahko vidimo je ta primer zelo preprost in bi lahko rešitev brez težav (na sliki 1 je označena z odebeljeno črto) poiskali z algoritmom, ki bi poiskal vse permutacije zaporedja c_2, c_3, c_4, c_5 (brez izgube splošnosti lahko začnemo v c_1) in izračunal cene pripadajočih krožnih obhodov.

Ker pa število pemutacij z večanje števila mest izjemno hitro narašča, bi za večje probleme tak algoritem potreboval ogromno časa. Zato bomo čim boljšo rešitev poskušali dobiti z Optimizacijo s kolonijo mravelj.

2. Optimizacija s kolonijami mravelj

Optimizacija s kolonijami mravelj je zasnovana na dejstvu, da so v naravi mravlje sposobne poiskati najkrajšo pot od vira hrane do mravljišča brez uporabe vizualnih informacij. Za medsebojno komunikacijo mravlje uporabljajo feromon, ki ga odlagajo med hojo. Poti, ki so bolj obiskane, imajo zato večjo količino feromona. Vsaka mravlja daje prednost sledenju smerem, ki so bogatejše s feromonom.



Slika 2. Primer mravelj, ki iščejo najkrajčo pot. (a) Začetni graf z dolžinami poti. (b) V času $t = 0$ na povezavah grafa ni sledi feromona, zato mravlje izberejo ali se bodo obrnile levo ali desno z enako verjetnostjo. (c) V času $t = 1$ je na krajših povezavah sled močnejša, zato jih mravlje v povprečju raje izberejo.

Za lažjo predstavo, kako "prava" kolonija mravelj išče najkrajšo pot, si oglejmo naslednji primer. Na sliki 1(a) je A vir hrane, E pa mravljišče. Razdalje med vozliščema grafa so podane v številu časovnih enot, ki so potrebne, da mravlje prehodijo pot med vozliščema. Za pot med vozliščema D in H tako potrebujejo eno časovno enoto, za pot med vozliščema D in C pa polovico časovne enote. Cilj mravelj je, da prinesejo hrano nazaj do mravljišča. Očitno je, da je bolje iti po krajših poteh kot po daljših.

V času $t = 0$ ni na poteh še nobene sledi feromona. Recimo, da je v tem trenutku 30 mravelj na vozlišču B in 30 na vozlišču D. Ker na poteh še ni feromona, mravlje naključno izberejo svojo pot z enako verjetnostjo. Torej bo v povprečju 15 mravelj odšlo iz vozlišča B in D do vozlišča H in 15 mravelj iz vozlišča B in D do vozlišča C (slika 1(b)). V času $t = 1$ pride 30 novih mravelj do vozlišča B iz vozlišča A. Mravlje vidijo, da iz vozlišča B proti mravljišču vodita dve poti. Na poti do vozlišča H je intenzivnost feromona 15, kar je vsota sledi, ki jih je pustilo 15 mravelj, ki so šle po tej poti iz B (v času $t = 0$). Na poti do vozlišča C pa je intenzivnost feromona 30, kar je vsota sledi, ki jih je pustilo 15 mravelj, ki so šle po tej poti do B in 15 mravelj, ki so šle od vozlišča D preko vozlišča C (slika 1(c)). Verjetnost za izbiro poti sedaj ni več enaka, saj bo v povprečju število mravelj, ki bo šlo proti C dvakrat večje od števila mravelj, ki bo šlo proti H (20 proti 10). Enako velja za 30 novih mravelj v vozlišču D, ki so prišle iz vozlišča E. Ta proces se nadaljuje, dokler sčasoma vse mravlje ne izberejo najkrajše poti.

Ker je Problem trgovskega potnika NP-težek, se bomo pri reševanju velikih nalog tega problema morali zadovoljiti s približkom optimalne rešitve, saj je eksaktno reševanje za te primere računsko prezahtevno. V ta namen bomo uporabili že omenjeno metahevristiko kolonije mravelj, ki izračuna približek optimalne rešitve naloge Problema trgovskega potnika v polinomskem času.

3. Načrt za nadaljnje delo

Najina najpomembnejša naloga bo napisati učinkovit program, ki poišče približek rešitve naloge Problema trgovskega potnika s kolonijami mravelj. Delovanje te metode je v veliki meri odvisno od izbire parametrov (kot so število mravelj, začetne količina feromona,...). Pomemben del projekta bo zato študij in analiza različnih kombinacij parametrov za različne naloge Problema trgovskega potnika. Pri tem si bova pomagala predvsem z že rešenimi primeri nalog za Problem trgovskega potnika, saj naju bo zanimal vpliv parametrov na uspešnost reševanja. Na podlagi teh testiranj bova določila optimalne vrednosti teh parametrov in ocenila časovno zahtevnost realiziranega algoritma.