

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Timotej Vesel

**Mrežna pravila in kvazi-Monte Carlo metode za integracijo
funkcij**

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr./doc. dr. Ime Priimek

Ljubljana, 2019

KAZALO

1. Uvod	4
2. Neki	4
3. Metoda Monte Carlo	4

Mrežna pravila in kvazi-Monte Carlo metode za integracijo funkcij

POVZETEK

V povzetku na kratko opiši vsebinske rezultate dela. Sem ne sodi razlaga organizacije dela – v katerem poglavju/razdelku je kaj, pač pa le opis vsebine.

Angleški naslov dela

ABSTRACT

Prevod zgornjega povzetka v angleščino.

Math. Subj. Class. (2010): navedi vsaj eno klasifikacijsko oznako – dostopne so na www.ams.org/mathscinet/msc/msc2010.html

Ključne besede: navedi nekaj ključnih pojmov, ki nastopajo v delu

Keywords: angleški prevod ključnih besed

1. UVOD

2. NEKI

Naš cilj je izračunati integral poljubne integrabilne funkcije f , ki je definiran na s -dimenzionalni hiperkocki $[0, 1]^s$,

$$I(f) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_s) dx_1 \cdots dx_s = \int_{[0,1]^s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

V praksi takšnega integrala za večino funkcij ne znamo izračunati eksaktno zato želimo izračunati numerični približek. Uporabili bi lahko kakšno deterministično (sestavljeno) integracijsko oziroma kvadraturno pravilo, npr. trapezno pravilo, Simpsonovo pravilo, 3/8 pravilo itd. To bi šlo, če bi bila dimenzija majhna (npr. $s = 4$), pri večjem številu integracijskih spremenljivk pa se srečamo s t.i. *prekletstvom dimenzionalnosti*. Že pri $s = 40$ in samo dveh vozlih v vsaki smeri bi potrebovali 2^{40} , kar je več kot bilijon izračunov vrednosti funkcije. (S povprečnim računalnikom bi to trajalo ??? časa, zato za funkcije z veliko spremenljivkami potrebujemo druge metode.)

3. METODA MONTE CARLO

Metoda Monte Carlo (MC) se uporablja za izračun približka pričakovane vrednosti $\mathbb{E}(X)$ slučajne spremenljivke X . Vzemimo funkcijo $f : (0, 1)^s \rightarrow \mathbb{R}$ in naj bo $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_s) \in (0, 1)^s$ in $\mathbf{U} \sim \mathcal{U}(0, 1)^s$ slučajni vektor (enakomerno porazdeljen na s -razsežni hiperkocki). Potem lahko zapišemo

$$I(f) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(u_1, \dots, u_s) du_1 \cdots du_s = \int_{[0,1]^s} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \mathbb{E}[f(\mathbf{U})]$$

Izrek 3.1 (Krepki zakon velikih števil Kolmogorova). *Naj bodo X_1, X_2, \dots, X_n neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke na skupnem verjetnostnem prostoru, za katerega obstaja pričakovana vrednost $\mathbb{E}(X_i) = \mu$. Tedaj zaporedje vzorčnih povprečij $S_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ skoraj gotovo konvergira k μ .*

KZVŠ nam torej zagotavlja, da bo za večji n S_n boljši približek za matematično upanje in posledično je

$$\mathbb{E}[f(\mathbf{U})] \approx \frac{f(\mathbf{U}_1) + \dots + f(\mathbf{U}_n)}{n}$$

Klasična Monte Carlo Metoda zato $\mathbb{E}[f(\mathbf{U})]$ oziroma $I(f)$ aproksimira z

$$Q_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(\mathbf{U}_i)$$

kjer so $\mathbf{U}_0, \dots, \mathbf{U}_{n-1}$ neodvisni $\mathcal{U}(0, 1)^s$ slučajni vektorji. V implementaciji slučajne vektorje \mathbf{U}_i zamenjamo z vektorji “(psevdo) naključnih števil”. To je zelo preprosta ter široko uporabljena metoda.

Poleg tega opazimo, da je $Q_n(f)$ nepristranska cenilka za $\mathbb{E}[f(\mathbf{U})] = I(f)$, t.j. $\mathbb{E}[Q_n(f)] = \mathbb{E}[f(\mathbf{U})]$:

$$\mathbb{E}[Q_n(f)] = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(\mathbf{U}_i)\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[f(\mathbf{U}_i)] = \mathbb{E}[f(\mathbf{U})].$$

Izračunamo lahko še srednjo kvadratično napako, ki nam pove koliko se približek integrala (cenilka) razlikuje od točne vrednosti integrala:

$$\begin{aligned} SKN[Q_n(f)] &= \mathbb{E}[(Q_n(f) - \mathbb{E}[f(\mathbf{U})])^2] \\ &= \mathbb{E}[(Q_n(f) - \mathbb{E}[Q_n(f)])^2] = \\ &= \text{Var}[Q_n(f)] \\ &= \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(\mathbf{U}_i)\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \text{Var}[f(\mathbf{U}_i)] \\ &= \frac{\text{Var}[f(\mathbf{U})]}{n}, \end{aligned}$$

kjer je $\sigma_f^2 = \text{Var}[f(\mathbf{U})] = \int_{(0,1)^s} f^2(\mathbf{u}) d\mathbf{u} - I^2(f)$. Parameter σ_f^2 nam ponavadi ni eksplicitno poznan, vendar ga lahko statistično ocenimo z vzorčno disperzijo

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (f(\mathbf{U}_i) - Q_n(f))^2.$$

Iz tega sledi, da je koren iz srednje kvadratične napake enak S/\sqrt{n} . Pravimo, da je konvergenca Monte Carlo Metode reda " $1/\sqrt{n}$ ", kar označimo z $\mathcal{O}(1/\sqrt{n})$. Red konvergence je neodvisen od dimenzije problema. Takšen red konvergence v praksi pomeni, da če bi želeli napako prepoloviti, bi za to potrebovali štirikrat več vzorčnih točk (slučajnih spremenljivk).

Izkaže se, da so za probleme nizkih dimenzij deterministična integralska pravila učinkovitejša za gladke funkcije, v višjih dimenzijah pa so Monte Carlo metode veliko hitrejša.

Kljub temu, da so Monte Carlo metode večinoma hitreje od kvadturnih pravil in so zelo široko uporabljene, pa je red konvergence $\mathcal{O}(1/\sqrt{n})$ velikokrat prepočasen za praktično uporabo. Za zmanjšanje variance obstajajo različne tehnike (npr. stratifikacija), vendar v praksi MC metode pogosto ostanejo precej počasne.