Hochschule Mannheim
Fakultät für Elektrotechnik

Aufgabe 1:

a) $y' + 2xy = 0$

Berechnen Sie die allgemeine Lösung der obigen DGL.
Geben Sie die spezielle Lösung für $y(0) = 3$ an und **skizzieren** Sie die Lösung für $-1 \leq x \leq 1$.

b) $(1 - x^2)y' = 4y$

Berechnen Sie die spezielle Lösung der DGL mit $y(0) = 1$.
Hinweis: Mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung lässt sich das auftretende Integral lösen.
Sollte der Rechenweg, der zur Lösung des Integrals geführt hat, nicht erkennbar sein, werden Punkte abgezogen

Aufgabe 2:

a) **Berechnen** Sie die allgemeine Lösung der folgenden DGL durch Variation der Konstanten:

$$y'x - 2y = x^3 \cos(4x)$$

b) **Berechnen** Sie die allgemeine Lösung folgender DGL mit Hilfe einer geeigneten Substitution:

$$y' = 2\frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x}$$

.

Aufgabe 3 :

a) **Berechnen** Sie die allgemeine Lösung der folgenden DGL :

$$y''+2y'-3y-x=0$$

b) Lösen Sie die DGL

$$xy''+y=x^3+6x^2+2x$$

mit den Anfangsbedingungen $y(0)=0$ und $y'(0)=2$ mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes.

Berechnen Sie die Potenzreihe bis zur Ordnung x^3.

Überprüfen Sie, ob das oben berechnete Polynom die DGL löst.

Aufgabe 4:

Im R^3 sei die kanonische Basis: Basis A: $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben, sowie eine lineare Abbildung,

die durch die Matrix $M = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ definiert ist.

a) **Berechnen** Sie die Determinante der Matrix M..
Ist die Abbildung volumenerhaltend?

b) **Bestimmen** Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix M. **Normieren** Sie die Eigenvektoren auf die Länge 1 (Rechnen Sie eventuelle Wurzeln hierbei nicht aus!).
Hinweis: Sehen Sie sich das charakteristische Polynom **bevor** Sie es ausmultiplizieren genau an. Vielleicht erkennen Sie sofort eine Nullstelle.

c) Die auf die Länge 1 normierten Eigenvektoren aus Aufgabe c) bilden eine neue Basis B des R^3.

Hinweis: Falls Sie Aufgabe b) nicht lösen konnten, verwenden Sie folgendes Basissystem:

Basis B: $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Geben Sie die Transformationsmatrix T an, welche die Koordinaten, die ein Vektor v bezüglich der Basis A besitzt, umrechnet in seine Koordinaten bezüglich der Basis B.
Hinweis: Die Rechnung lässt sich abkürzen, wenn Sie zunächst T^{-1} aufstellen und dann überprüfen ob T^{-1} orthogonal ist

d) **Berechnen** Sie das Matrizenprodukt $A = T \cdot M \cdot T^{-1}$.

Hochschule Mannheim
Fakultät für Elektrotechnik

Lösungen:

1a) $y(x) = C \cdot e^{-x^2}$ $\quad y(x) = 3e^{-x^2}$

1b) $y(x) = \frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}$

2a) $y(x) = x^2 \cdot \frac{1}{4} sin 4x + cx^2$

2b) $y(x) = -\frac{x}{ln x^2 + C}$

3a) $y(x) = Ae^x + Be^{-3x} - \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}$

3b) $y(x) = 2x + x^3$

4a) $det(M) = 12$ - nicht Volumen erhaltend

4b) $\lambda_1 = 1 \quad EV_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 2 \quad EV_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\lambda_3 = 6 \quad EV_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

4c) $T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Transponiert: $T^{-1'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$ Es gilt: $T^{-1} \cdot T^{-1'} = E$

$$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

4d) $TMT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$