Stichprobe und Population

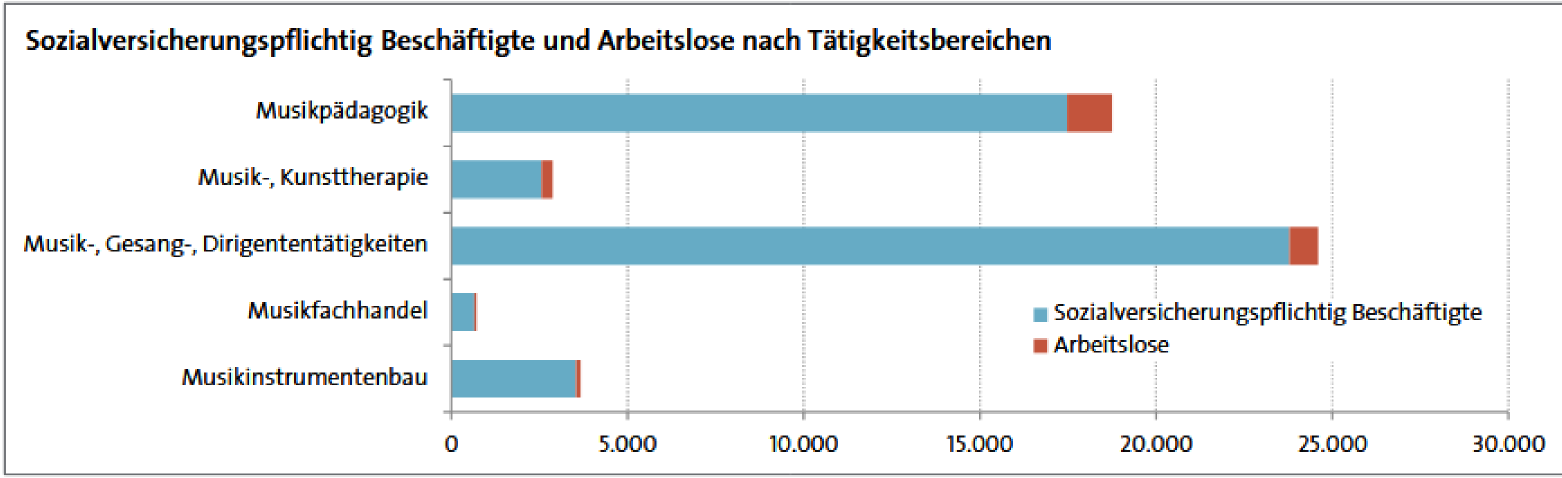
Stichprobenerhebung, Vollerhebung, Population

Vgl. Bortz & Döring 2006, S. 394ff., Mendl 2011, S. 131ff.

- Population (oder Grundgesamtheit):
  Gesamtmenge aller N Beobachtungseinheiten, über die eine Aussage getroffen werden soll

- Vollerhebung:
  Alle Objekte einer Population werden untersucht

» Sozialversicherungspflichtig Beschäftigte und Arbeitslose in Musikberufen 2016



Beispiel: Ergebnisse einer Vollerhebung

Basierend auf der Beschäftigungsstatistik 2016 der Bundesagentur für Arbeit

Quelle: Deutsches Musikinformationszentrum 2017

- Vollerhebungen sind allerdings oftmas nicht möglich, da
  - Population unendlich groß ist
  - Population nur teilweise bekannt ist
  - Art der Untersuchungen der Population diese beeinträchtigen oder zerstören würde
  - Untersuchungen der gesamten Population zu aufwändig wären

Stichprobe, Vollerhebung, Population

- Stichprobenerhebung:
  Ein Ausschnitt / eine Teilmenge der Population wird untersucht
- Beschreibung der n untersuchten Objekte durch **Stichprobenparameter**, wie die bereits bekannten
  - Lageparameter oder Maße der zentralen Tendenz:
    Modus, Median, Arithmetisches Mittel, …
  - Streuungsparameter oder Maße für die Dispersion:
    Spannweite, IQR, empirische Varianz u. Standardabweichung, …

$$\frac{1}{\boldsymbol{n}} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

Stichprobe und Population

- Populationen werden statistisch durch **Populationsparameter** beschrieben, deren Ausprägung durch statistische Stichprobenkennwerte → ***geschätzt*** werden

- Stichproben werden nicht nur für die Schätzung von Populationsparameter, sondern auch für **hypothesenüberprüfende Untersuchungen** benötigt

- Voraussetzung: die Stichprobe ist **repräsentativ**, d.h. sie muss in ihrer Zusammensetzung der Population stark ähneln

- "Repräsentative Stichproben sind Voraussetzungen dafür, dass die Prinzipien der Stichprobentheorie sinnvoll angewenet bzw. Vollerhebungen durch Stichprobenuntersuchungen ersetzt werden können." (Bortz & Döring 2006, S. 395)

Repräsentativität

- Was bedeutet: die Stichprobe ist repräsentativ?
  Was unterscheidet eine repräsentative von einer nicht-repräsentativen Stichprobe?

→ Gleiche oder vergleichbare Merkmale / Merkmalsausprägungen in Stichprobe und Population!
  - Bei der Stichprobenziehung u.a. zu beachten:
    - mit welchen anderen Merkmalen könnten die zu untersuchenden Merkmale kovariieren?

- Achtung:
  Der Stichprobenumfang sagt nichts darüber aus, ob die Stichprobe repräsentativ ist!
  - Beispiel: demoskopische Studie der Literary Digest 1936
    - vgl. Bortz & Döring 2006, S. 398

Repräsentativität (Negativbeispiel)

- Präsidentschaftswahlprognose der Zeitschrift Literary Digest 1936 (Franklin Roosevelt (Demokraten), Alfred London (Rep.):
  - Franklin Roosevelt deutlich unterlegen mit 43% der Stimmen
- Stichprobenziehung:
  - Fragebogen verteilt an 10.000.000 AmerikanerInnen
  - Ermittlung der Adressen über: Telefonbuch und Mitgliedskarten von Clubs und Vereinen
  - Rücklaufquote: 24%, d.h. 2.400.000 Fragebogen
    → größte Stichprobe der Geschi
    der Meinungs

Fehlerquellen:
Auswahlwahrscheinlichkeit für Angehörige der Mittel- u. Oberschicht unverhältnismäßig groß (oversampling), bzw. undersampling niedrigerer Einkommensklassen

Nonresonse (Ausfallrate) ist allgemein bei höheren Einkommensklassen niedriger

→ **verzerrte Auswahl der Stichprobe**

Wahlergebnis:
Franklin Roosevelt mit 62% der Stimmen deutlich wiedergewählt

Fehler wird durch großen Stichprobenumfang nicht behoben: er wiederholt sich entsprechend oft

Stichprobenarten

- Merkmalsspezifische / Spezifische Stichprobe:
  - Stichprobe entspricht bzgl. einiger relevanter Merkmale der Population
- Globale Stichprobe
  - Zusammensetzung der Stichprobe entspricht (nahezu) allen Merkmalen der Populationszusammensetzung

Stichprobenarten

- **Probabilistische Stichproben**
  Auswahlwahrscheinlichkeit ist für alle Elemente der Population gleich bzw. bekannt
  - einfache Zufallsstichprobe (random sample)
    - *alle* Untersuchungsobjekte sind identifizierbar
      (→ vollständige Liste der Population)
    - Stichprobenziehung: *alle* Untersuchungsobjekte haben die gleiche Auswahlwahrscheinlichkeit

    - Beispielpopulation: Pflegekräfte im Krankenhaus (Deutschland)
      - vollständige Liste aller Pflegekräfte liegt vor
      - Zufallsziehung der Stichprobe aus der Gesamtpopulation

Stichprobenarten

- **Probabilistische Stichproben**
  Auswahlwahrscheinlichkeit ist für alle Elemente der Population gleich bzw. bekannt
  - einfache Zufallsstichprobe (random sample)
  - geschichtete Stichprobe (stratified sample)
    - Bildung von merkmalsspezifischen Schichten, d.h. kleineren Gruppierungen der Grundgesamtheit
    - Ziehungsanteile sind bekannt
      → entsprechend bekannter Merkmalsanteile der Population
      Zufallsziehung innerhalb der Schichten
    - Beispielpopulation: Pflegekräfte im Krankenhaus (Deutschland)
      - Merkmalsanteile biol. Geschlecht: 86% weiblich, 14% männlich
        - gem. Statistisches Bundesamt 2012
      - Zufallsziehung innerhalb beider Geschlechtergruppen (weibl. u. männl. Pflegepersonal deutschlandweit) mit den Ziehungsanteilen 86% weiblich, 14% männlich
    - es können auch mehrere Schichten kombiniert werden, soweit Populationsanteile bekannt sind, z.B. Merkmale: Geschlecht, Altersgruppe, Rechts-Linkshänder, höchster erreichter Schulabschluss, …

Stichprobenarten

- **Probabilistische Stichproben**
  Auswahlwahrscheinlichkeit ist für alle Elemente der Population gleich bzw. bekannt
  - einfache Zufallsstichprobe (random sample)
  - geschichtete Stichprobe (stratified sample)
  - Klumpenstichprobe (cluster sample)
    - Wenn sich Population aus Teilpolulationen oder natürlichen Gruppen zusammensetzt
      → vollständige Liste der Cluster liegt vor
    - Zufallsziehung eines Clusters, der dann vollständig erhoben wird

    - Beispiel: Pflegekräfte im Krankenhaus (Deutschland)
      - vollständige Liste aller Kankenhäuser in Deutschland liegt vor
      - Zufallsziehung eines Krankenhauses, innerhalb dessen das Pflegepersonal vollständig erhoben wird

Stichprobenarten

- **<u>Nicht-</u>probabilistische Stichproben: Auswahlwahrscheinlichkeit unbekannt!**
  - Quotenstichprobe
    - Auswahl z.B. 100 “Musiker”, 100 “Nichtmusiker”, davon insgesamt mindestens 15 Linkshänder, …
    - Ziehung solange, bis die Quote erreicht wird

Stichprobenarten

- **<u>Nicht-</u>probabilistische Stichproben: Auswahlwahrscheinlichkeit unbekannt!**
  - Quotenstichtprobe
  - Ad-hoc-Stichprobe
    - Zur Verfügung stehende Personen werden ausgewählt, wie
      - Familienmitglieder
      - KommilitonInnen
      - auf dem Albertus-Magnus-Platz befindliche Menschen in einem bestimmten Zeitraum

Stichprobenarten

- **Nicht-probabilistische Stichproben: Auswahlwahrscheinlichkeit unbekannt!**
  - Quotenstichtprobe
  - Ad-hoc-Stichprobe
  - Theoretische Stichprobe
    - in qualitativer Forschung der grounded theory, Vorgehen (grob):
      - zunächst Basisinterviews
      - dann theoriegeleitet Suche nach weiteren Befragten

Stichprobenarten

- **Nicht-probabilistische Stichproben: Auswahlwahrscheinlichkeit unbekannt!**

- Gefahr einer verzerrten Auswahl der Stichprobe, d.h. ggf. entspricht die Verteilung der Merkmale / Merkmalsausprägungen der Stichprobe nicht der der intendierten, zu untersuchenden Population
  - Gefahr einer nicht-repräsentativen Stichprobe
  - Rückschlüsse von statistischen Stichprobenkennwerten auf die Parameter der definierten Population sind ggf. nur eingeschränkt oder nicht möglich

Stichprobenarten

Eine weitere Unterscheidung:

Abhängigkeit und Unabhängigkeit von mehreren Stichproben

- **Unabhängige Stichproben**
  Die durch Ziehung in die Stichprobe A aufgenommenen Objekte haben <u>keinen Einfluss</u> auf die Ziehung der Objekte in anderen Stichproben
- **Abhängige Stichproben**
  Die durch Ziehung in die Stichprobe A aufgenommenen Objekte haben <u>Einfluss</u> auf die Ziehung der Objekte in anderen Stichproben
  - z.B. bei Messwiederholungen
    (indentische Stichprobe bei Messwiederholung)
  - z.B. bei parallelisierten Stichproben
    (Entsprechung von Merkmalen / Merkmalsausprägungen zwischen mehreren Stichproben, wie z.B. bei einer von den Merkmalsausprägungen der Testgruppe abhängig erstellten Kontrollgruppe)

Schätzung: Populationsparameter

- Populationsparameter werden (außer im Falle einer Vollerhebung) ***<u>geschätzt</u>***
  → auf Basis der statistischen Stichprobenkennerwerte
- Schätzung: mit einer ***<u>Wahrscheinlichkeit</u>*** der Ausprägung innerhalb der definierten Population

- Wir verlassen den Bereich der deskriptiven Statistik (Beschreibung der statistischen Stichprobenkennwerte) und begeben uns nun in den Bereich der **schließenden Statistik (Inferenzstatistik)**

  deren Aufgaben Meindl 2011:132 definiert als
  - **Schätzung unbekannter Parameter der Grundgesamtheit**
  - **Prüfung von Hypothesen über diese Parameter**

Grundüberlegungen und Begriffe der Wahrscheinlichkeit

(Bortz + Döring 2006, Meindl 2011, Gonick & Smith 2005)

Grundüberlegungen und Begriffe der Wahrscheinlichkeit

(Bortz + Döring 2006, Meindl 2011, Gonick & Smith 2005)

- **Zufallsexperiment**
  - "Vorgang, dessen Ergebnis in einer Weise vom Zufall abhängt, dass man vor dem Experiment nicht weiß, zu welchen der möglichen Ergebnisse das Experiment führen wird"
  - "läuft unter definierten, gleichbleibenden Bedingungen ab, die eine beliebige Wiederholung gleichartiger Experimente gestatten"

  (Bortz + Döring 2006:403)

- **Elementarereignisse (elementary outcomes)**: potenziell beobachtbare Merkmalsausprägungen eines Zufallsexperiments: e_i
- **Merkmalsraum (sample space)** (Meindl: Ergebnisraum): Menge aller Elementarereignisse $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$

Grundüberlegungen und Begriffe der Wahrscheinlichkeit
(Bortz + Döring 2006, Meindl 2011, Gonick & Smith 2005)

- **Zufallsvariable**
  - Schreibweise: Großbuchstaben

- Jedem Elementarereignis e wird nach einer eindeutigen Regel eine reelle Zahl x(e) zugeordnet
- ihre Zuordnungsvorschrift: **Zufallsvariable X**
  - Beispiel Würfel: $X(e=1) = 1$; $X(e=2) = 2$
  - Beispiel biol. Geschlecht: X(e=männl.) = 1 ; X(e=weibl.) = 2

- **Wahrscheinlichkeit**, dass Zufallsvariable X den Wert x annimmt: $P(X(e_i=x)=x)$ bzw. $\mathbf{P(X=x)}$

Grundüberlegungen und Begriffe der Wahrscheinlichkeit

(Bortz + Döring 2006, Meindl 2011, Gonick & Smith 2005)

- **Erste Regeln (Axiome nach Kolmogorov),** nach Meindl 2011,
  - **Positivitätsaxiom**: $0 \leq P(E) \leq 1$ für jedes Ereignis E
  - **Normierungsaxiom**: $P(\Omega) = 1$
  - **Additionsregel**: $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) \vee P(E_2)$
    $= P(E_1) + P(E_2)$,

wenn die zwei Ereignisse E_1 und E_2
sich einander ausschließen (Sonderfall)

  - **Unmögliches Ereignis** E_u : $P(Eu) = 0$
  - **Gegenereignis**: $P(E_x) + P(\neg E_x) = 1$
  - **Monotoniegesetz**: $E_1 \subseteq E_2 \rightarrow P(E_1) \leq P(E_2)$

Grundüberlegungen und Begriffe der Wahrscheinlichkeit

(Bortz + Döring 2006, Meindl 2011, Gonick & Smith 2005)

- **Diskrete Zufallsvariable**:
  endlich viele oder abzählbar unendlich viele Werte

Beispiel: Zufallsexperiment mit einem Würfel

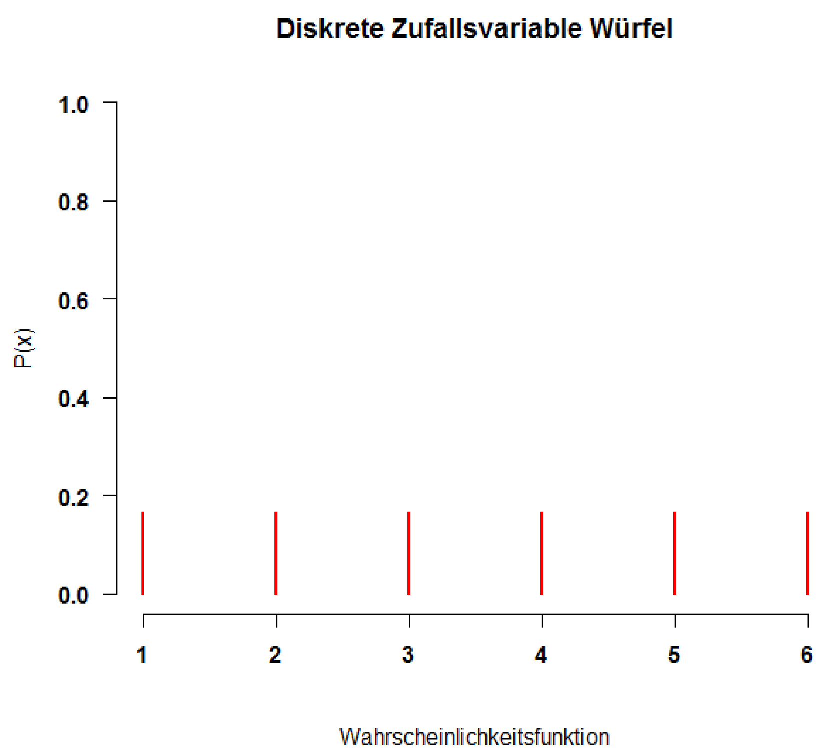
- Elementarereignisse: ⚀ ⚁ ⚂ ⚃ ⚄ ⚅
- Merkmalsraum Ω = { ⚀ ⚁ ⚂ ⚃ ⚄ ⚅ }
- Zufallsvariablen: X(e_1= ⚀) = 1, …, X(e_6 = ⚅) = 6

- Wahrscheinlichkeit: P(X=1)= $^1/_6$, … , P(X=6) = $^1/_6$

Grundüberlegungen und Begriffe der Wahrscheinlichkeit

(Bortz + Döring 2006, Meindl 2011, Gonick & Smith 2005)

- **Wahrscheinlichkeitsfunktion**
  Alle möglichen Werte einer diskreten Zufallsvariable zusammen mit ihren zugeordneten Wahrscheinlichkeiten

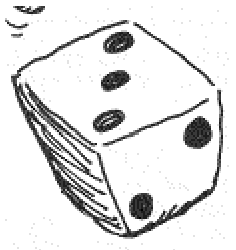


Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten ist 1

Grundüberlegungen und Begriffe der Wahrscheinlichkeit

(Bortz + Döring 2006, Meindl 2011, Gonick & Smith 2005)

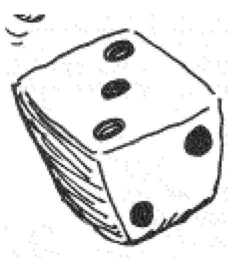
- **Simulation des Zufallsexperiments in R!**



Grundüberlegungen und Begriffe der Wahrscheinlichkeit

(Bortz + Döring 2006, Meindl 2011, Gonick & Smith 2005)

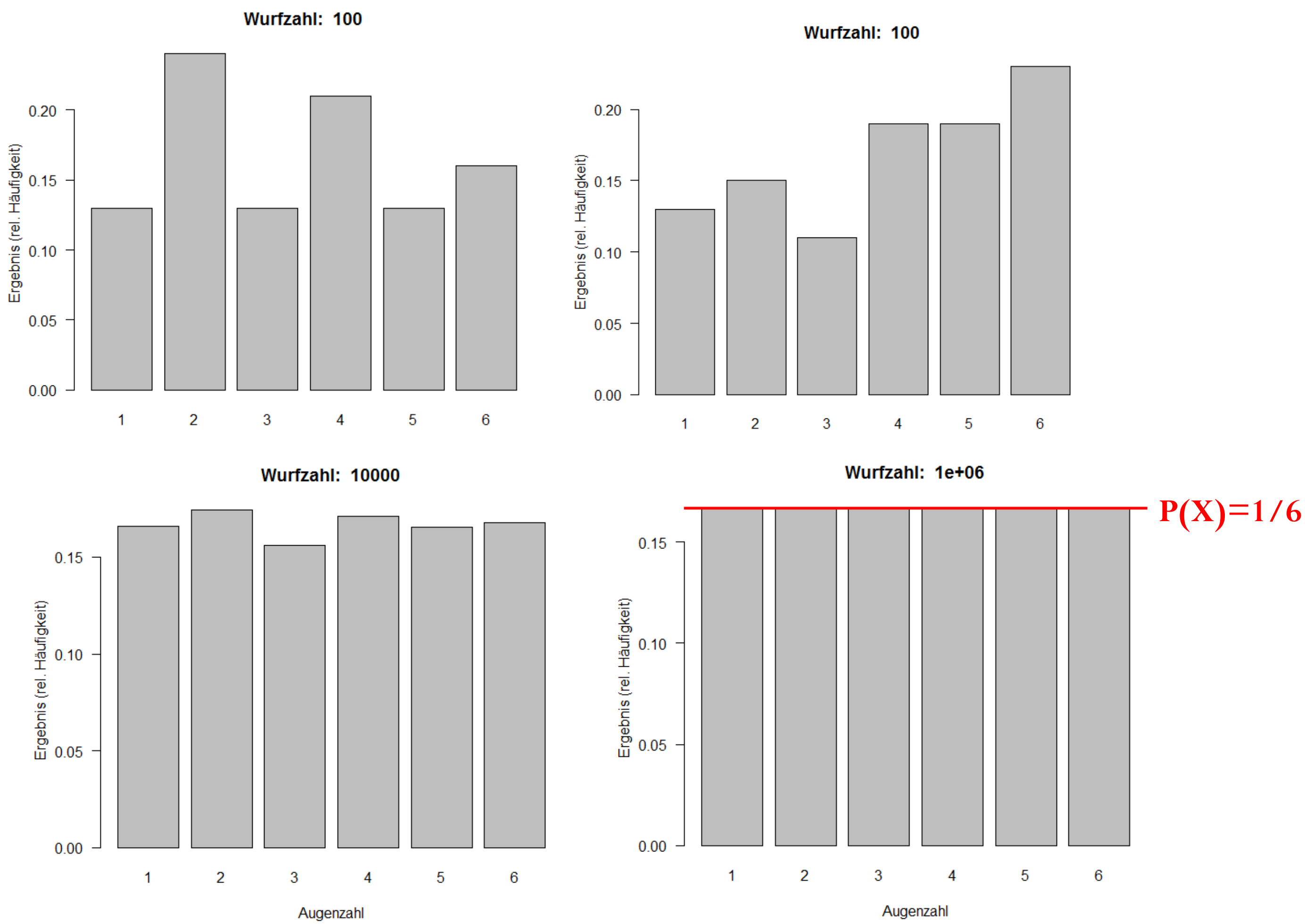
- Simulation eines Zufallsexperiments in R
  - Funktion **sample()** mit den Argumenten
    - **x** – Merkmalsraum, Menge der Elementarereignisse,
      hier: x = c(1,2,3,4,5,6) oder x=1:6 oder x=seq(1,6,1)
    - **size** – gibt die Häufigkeit der Ereignisse eines Zufallsexperiments an
      hier z.B.: size = 100 bei 100 Würfen
    - **replace** – Zurücklegen ja oder nein?
      hier: replace =TRUE , wird bspw. eine 5 gewürfelt, so kann
      die 5 auch im nächsten Würf gewürfelt werden können
    - **prob** – Wahrscheinlichkeit P(X=x)
      hier: keine Angabe (default ist prob=NULL): die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable den Wert x annimmt, ist bei 6 Elementarereignissen automatisch 1/6.
      Bei einer Simulation mit einem *gezinkten* Würfel mit P(X=6) = 0,5 wäre anzugeben:
      prob = c(0.1,0.1,0.1,0.1,0.1,0.5)

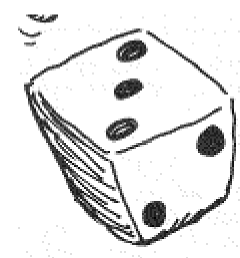


Grundüberlegungen und Begriffe der Wahrscheinlichkeit

(Bortz + Döring 2006, Meindl 2011, Gonick & Smith 2005)

- **Simulation des Zufallsexperiments in R!**

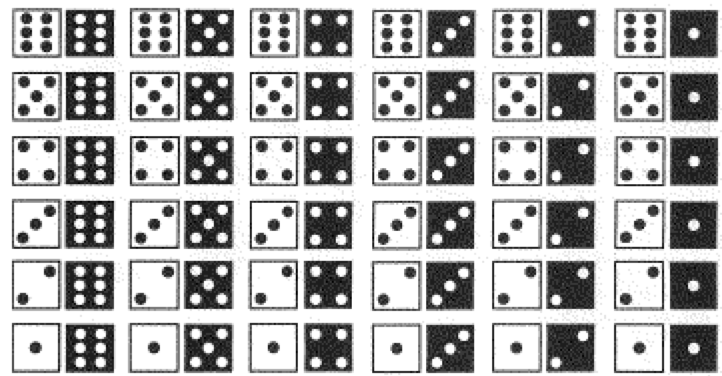
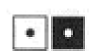
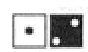




Grundüberlegungen und Begriffe der Wahrscheinlichkeit

(Bortz + Döring 2006, Meindl 2011, Gonick & Smith 2005)

Zufallsexperimente mit Würfel

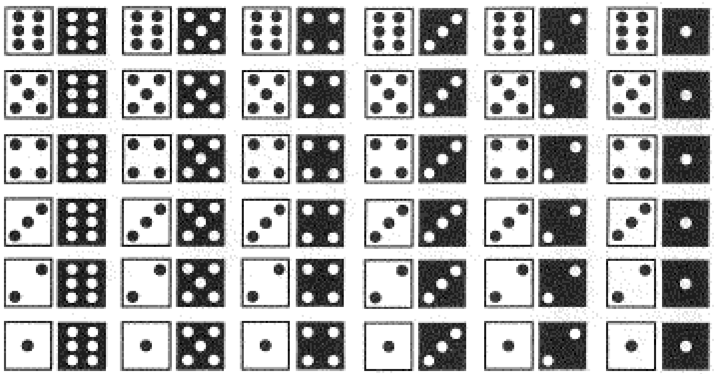
- Zufallsexperiment mit zwei Würfeln
  - Merkmalsraum $\Omega = \{$  $\}$
    - Menge der 36 Elementarereigbisse
  - Zufallsvariable $X(e_1 =$  $) = 2$
    Zufallsvariable $X(e_2 =$  $) = 3, \ldots$
    Zufallsvariable $X(e_7 =$  $) = 3, \ldots$

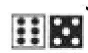
Grundüberlegungen und Begriffe der Wahrscheinlichkeit

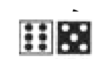
(Bortz + Döring 2006, Meindl 2011, Gonick & Smith 2005)

Zufallsexperimente mit Würfel

- Zufallsexperiment mit zwei Würfeln
  - $P(X = 12) = {}^{1}/_{36}$

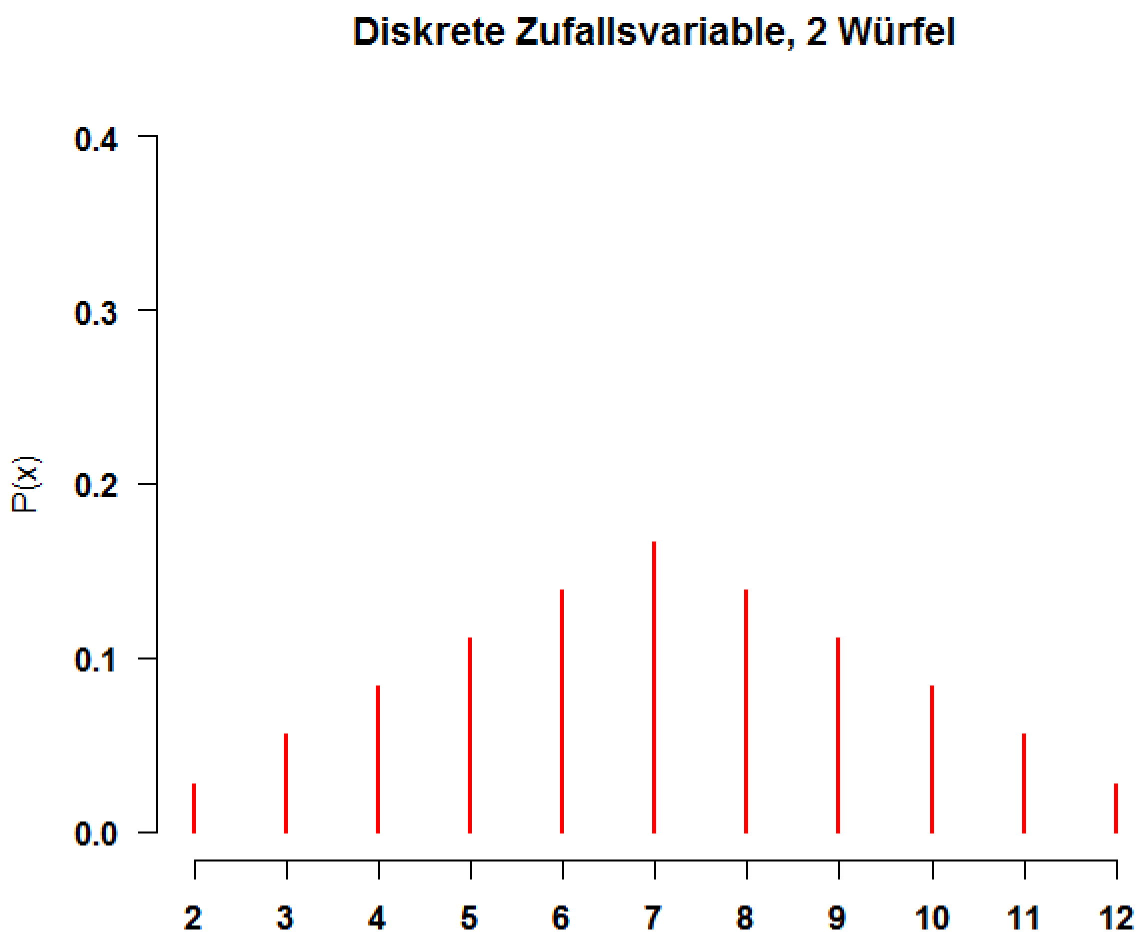
{  }

  - $P(X = 11)$
    $= P(X(e =$  $) = 11) \cup P(X(e =$  $) = 11) =$
    $${}^{1}/_{36} + {}^{1}/_{36} = {}^{2}/_{36}$$

→ Additionsgesetz, $P(X(e =$  $) = 11)$ und $P(X(e =$  $=11)$ schließen einander aus

Grundüberlegungen und Begriffe der Wahrscheinlichkeit

(Bortz + Döring 2006, Meindl 2011, Gonick & Smith 2005)

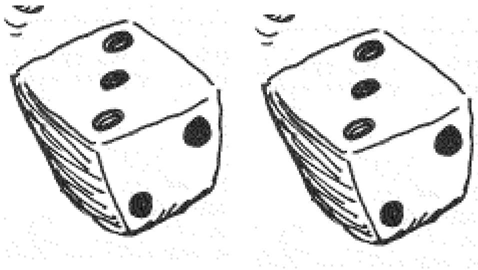


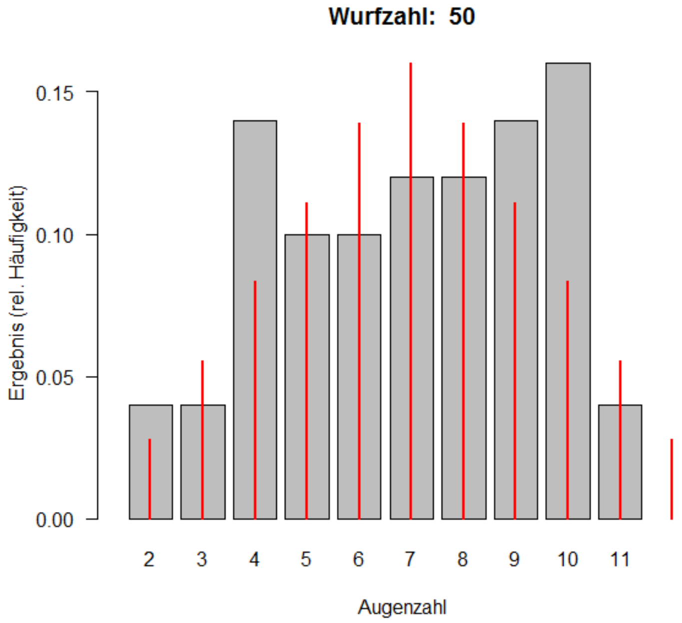
Wahrscheinlichkeitsfunktion

Grundüberlegungen und Begriffe der Wahrscheinlichkeit

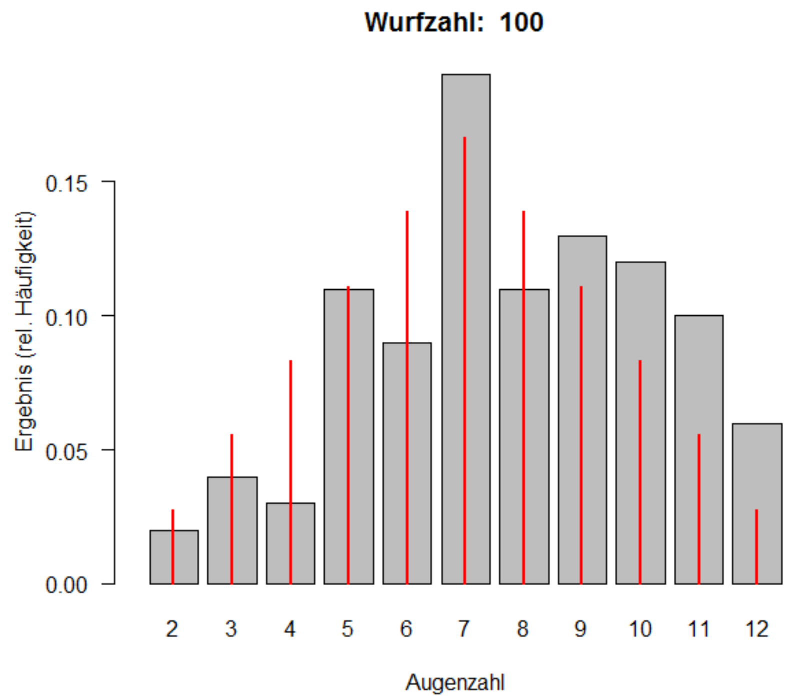
(Bortz + Döring 2006, Meindl 2011, Gonick & Smith 2005)

- **Simulation des Zufallsexperiments in R!**

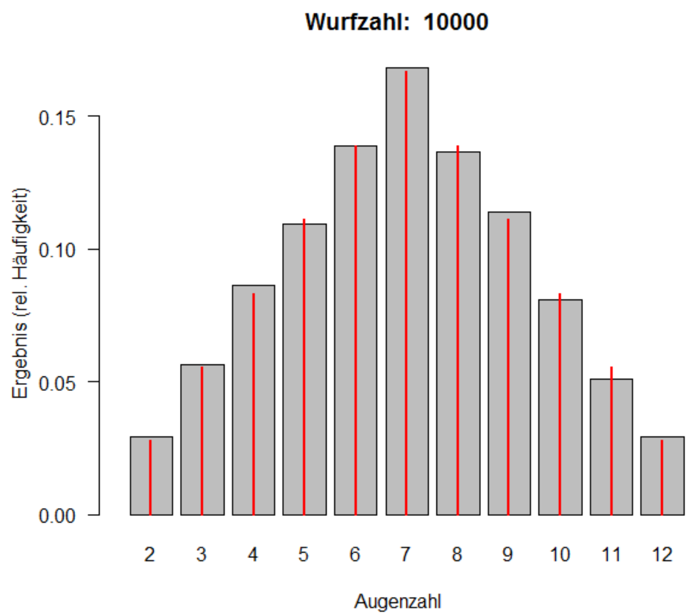




Wurfzahl: 50
Ergebnis (rel. Häufigkeit)
0.00
0.05
0.10
0.15
2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
Augenzahl



Wurfzahl: 100
Ergebnis (rel. Häufigkeit)
0.00
0.05
0.10
0.15
2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
Augenzahl

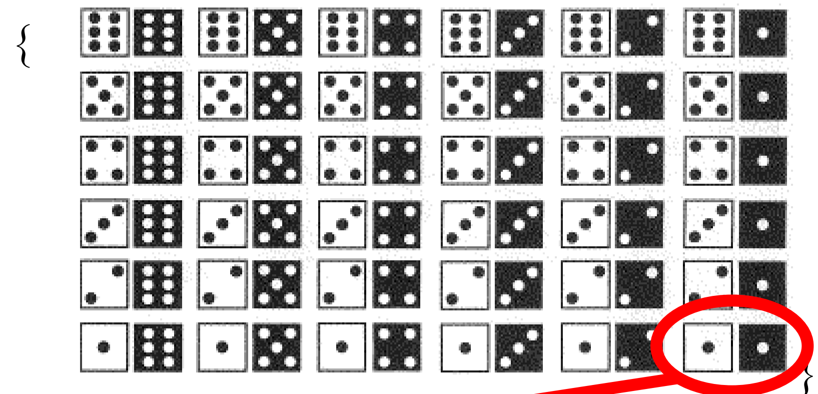


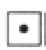
Wurfzahl: 10000
Ergebnis (rel. Häufigkeit)
0.00
0.05
0.10
0.15
2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
Augenzahl

Grundüberlegungen und Begriffe der Wahrscheinlichkeit

(Bortz + Döring 2006, Meindl 2011, Gonick & Smith 2005)

- Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass
  - mit 2 Würfeln mindestens eine 1 gewürfelt wird?



- P(X(e= )=1)=P(A)=6/36 = 1/6
- P(X(e= )=1)=P(B)=6/36 = 1/6
- P(A) + P(B) = 12/36 (?)

Vorsicht: Ereignisse E und F schließen sich nicht einander aus!

Additionsregel

- P(A) ∨ P(B) =P(A) + P(B) – P(A ∧ B)
  - hier: 6/36 + 6/36 – 1/36 = 11/36

Grundüberlegungen und Begriffe der Wahrscheinlichkeit

(Bortz + Döring 2006, Meindl 2011, Gonick & Smith 2005)

Bedingte Wahrscheinlichkeit

(konditionale Wahrscheinlichkeit)

- Die Wahrscheinlichkeit, dass die summierte Augenzahl zweier Würfel bei jeweils einem Wurf pro Würfel 3 beträgt, ist ja 2/36.
  - Nennen wir dies die Wahrscheinlichkeit P(A)
- Jetzt sei bereits eine 1 gewürfelt worden durch den weißen Würfel (Ereignis B)

  → Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit P(A | B)

  Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A unter der Bedingung B

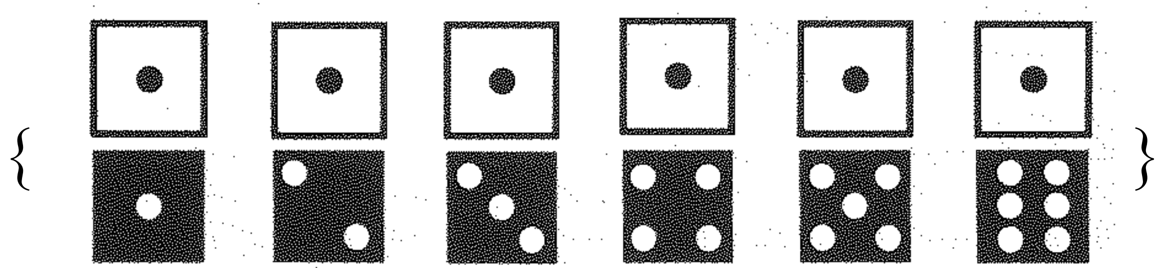
Grundüberlegungen und Begriffe der Wahrscheinlichkeit

(Bortz + Döring 2006, Meindl 2011, Gonick & Smith 2005)

Bedingte Wahrscheinlichkeit

(konditionale Wahrscheinlichkeit)

- Der Merkmalsraum ist eingeschränkt, in diesem Fall:



$$\mathbf{P(A\,|\,B) = 1/6}$$

Grundüberlegungen und Begriffe der Wahrscheinlichkeit

(Bortz + Döring 2006, Meindl 2011, Gonick & Smith 2005)

Bedingte Wahrscheinlichkeit

(konditionale Wahrscheinlichkeit)

- Regel:

$$\mathbf{P(A \mid B) = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)}}$$

- Daraus ableiten lässt sich die **Multiplikationsregel**:

$$\mathbf{P(A \wedge B) = P(A \mid B)\,P(B)} \qquad \mathbf{P(A \wedge B) = P(B \mid A)\,P(A)}$$

- $\mathbf{P(A \wedge B) = P(A)P(B)}$, **wenn sich Ereignisse A und B gegenseitig ausschließen**

Grundüberlegungen und Begriffe der Wahrscheinlichkeit

(Bortz + Döring 2006, Meindl 2011, Gonick & Smith 2005)

- **Bayes Theorem** (vgl. Gonick & Smith 2005)
  - Beispiel S.46: the case of false positives
  - **Beispiel**
    - Eine Krankheit, die 1 von 1000 Personen befällt
    - Diagnostisches Testverfahren wurde entwickelt
    - Sensitivität: wenn eine Person erkrankt ist, ist das Testergebnis zu 99% positiv
    - Falsche Positive: wenn eine Person nicht erkrankt ist, wird das Testergebnis dennoch in 2% der Fälle positiv sein
  - Person wird positiv getestet: mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie erkrankt?

Ereignisse

A: Patient hat die Krankheit

B: Patient wird positiv getestet

$P(A) = 0{,}001$

$P(B|A) = 0{,}99$

$P(B|\neg A) = 0{,}02$

$\rightarrow P(A|B)$?

Grundüberlegungen und Begriffe der Wahrscheinlichkeit

(Bortz + Döring 2006, Meindl 2011, Gonick & Smith 2005)

	A	**¬A**	**Summe**
B	$\mathbf{P(A \land B)}$	$\mathbf{P(\neg A \land B)}$	
¬B	$\mathbf{P(A \land \neg B)}$	$\mathbf{P(\neg A \land \neg B)}$	
Summe			

$P(A) = 0{,}001$

$P(B \mid A) = 0{,}99$

$P(B \mid \neg A) = 0{,}02$

Grundüberlegungen und Begriffe der Wahrscheinlichkeit

(Bortz + Döring 2006, Meindl 2011, Gonick & Smith 2005)

	A	¬A	Summe
B	**$P(A \wedge B)$**	**$P(\neg A \wedge B)$**	**$P(B)$**
¬B	**$P(A \wedge \neg B)$**	**$P(\neg A \wedge \neg B)$**	**$P(\neg B)$**
Summe	**$P(A)$**	**$P(\neg A)$**	**1**

$P(A \wedge B)$

$P(A) = 0{,}001$

$P(B \mid A) = 0{,}99$

$P(B \mid \neg A) = 0{,}02$

Grundüberlegungen und Begriffe der Wahrscheinlichkeit

(Bortz + Döring 2006, Meindl 2011, Gonick & Smith 2005)

	A	¬A	Summe
B	$P(A \wedge B)$	$P(\neg A \wedge B)$	$P(B)$
¬B	$P(A \wedge \neg B)$	$P(\neg A \wedge \neg B)$	$P(\neg B)$
Summe	$P(A)$	$P(\neg A)$	1

$$P(A \wedge B) = P(B \mid A)P(A)$$
$$P(A \wedge B) = P(B \mid A)P(A) = 0{,}99 \cdot 0{,}001 = 0{,}00099$$

$$P(A) = 0{,}001$$
$$P(B \mid A) = 0{,}99$$
$$P(B \mid \neg A) = 0{,}02$$

Grundüberlegungen und Begriffe der Wahrscheinlichkeit

(Bortz + Döring 2006, Meindl 2011, Gonick & Smith 2005)

	A	¬A	Summe
B	0,00099	$P(\neg A \wedge B)$	$P(B)$
¬B	$P(A \wedge \neg B)$	$P(\neg A \wedge \neg B)$	$P(\neg B)$
Summe	$P(A)$	$P(\neg A)$	1

$P(\neg A)$

$P(A) = 0{,}001$

$P(B \mid A) = 0{,}99$

$P(B \mid \neg A) = 0{,}02$

Grundüberlegungen und Begriffe der Wahrscheinlichkeit

(Bortz + Döring 2006, Meindl 2011, Gonick & Smith 2005)

	A	¬A	Summe
B	0,00099	$P(\neg A \wedge B)$	$P(B)$
¬B	$P(A \wedge \neg B)$	$P(\neg A \wedge \neg B)$	$P(\neg B)$
Summe	0,001	$P(\neg A)$	1

$P(\neg A)$

$P(\neg A) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}001 = 0{,}999$

$P(A) = 0{,}001$

$P(B \mid A) = 0{,}99$

$P(B \mid \neg A) = 0{,}02$

Grundüberlegungen und Begriffe der Wahrscheinlichkeit

(Bortz + Döring 2006, Meindl 2011, Gonick & Smith 2005)

	A	¬A	Summe
B	0,00099	$P(\neg A \wedge B)$	$P(B)$
¬B	$P(A \wedge \neg B)$	$P(\neg A \wedge \neg B)$	$P(\neg B)$
Summe	0,001	0,999	1

$P(A) = 0{,}001$

$P(B \mid A) = 0{,}99$

$P(B \mid \neg A) = 0{,}02$

$P(\neg A \wedge B)$

$$P(\neg A \wedge B) = P(B \mid \neg A)\, P(\neg A) = 0{,}02 \cdot 0{,}999$$
$$= 0{,}01998$$

Grundüberlegungen und Begriffe der Wahrscheinlichkeit

(Bortz + Döring 2006, Meindl 2011, Gonick & Smith 2005)

	A	¬A	Summe
B	**0,00099**	**0,01998**	**0,02097**
¬B	**$P(A \wedge \neg B)$**	**$P(\neg A \wedge \neg B)$**	**$P(\neg B)$**
Summe	**0,001**	**0,999**	**1**

$P(A) = 0{,}001$

$P(B \mid A) = 0{,}99$

$P(B \mid \neg A) = 0{,}02$

Grundüberlegungen und Begriffe der Wahrscheinlichkeit

(Bortz + Döring 2006, Meindl 2011, Gonick & Smith 2005)

	A	¬A	Summe
B	0,00099	0,01998	0,02097
¬B	0,00001	0,97902	0,97903
Summe	0,001	0,999	1

Person wird positiv getestet: mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie erkrankt?

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)}$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)} = \frac{0{,}00099}{0{,}02097} = \mathbf{0{,}0472}$$

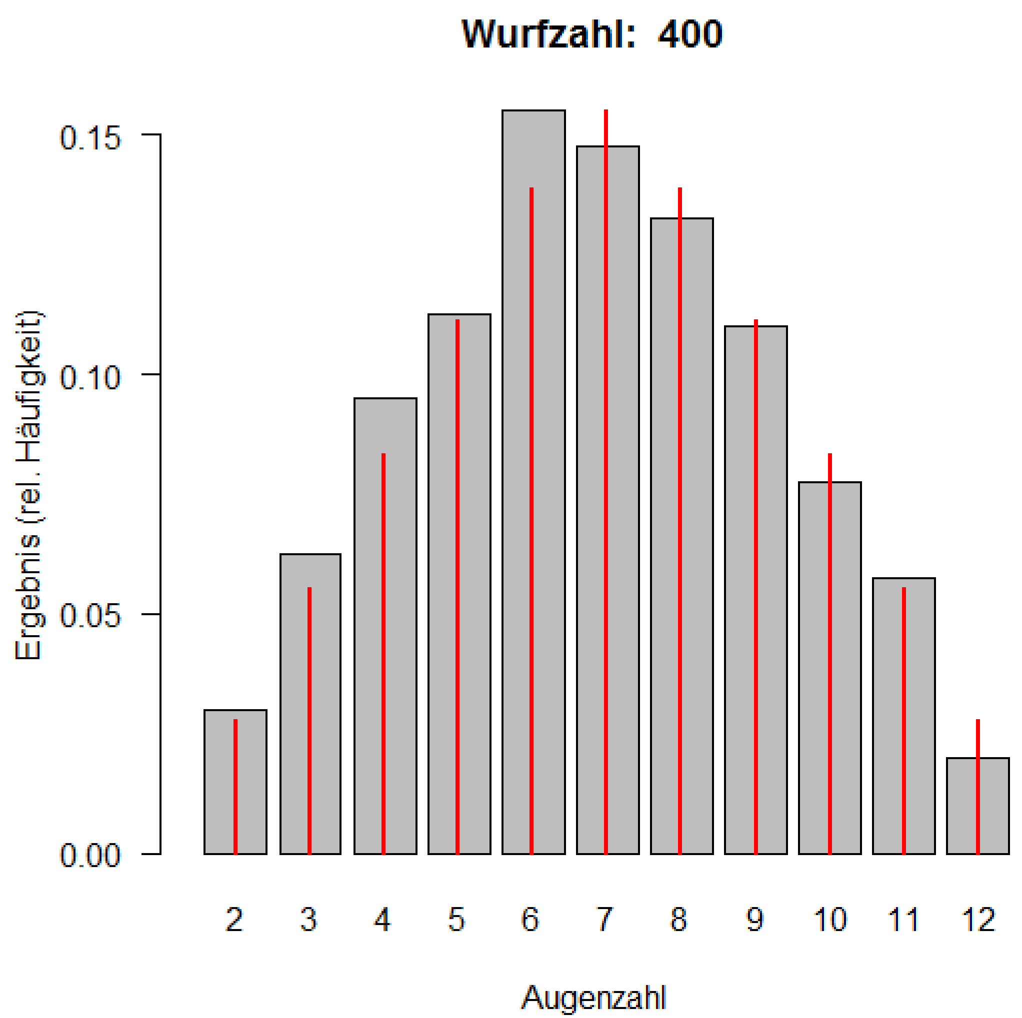
$$\boxed{\begin{aligned} P(A) &= 0{,}001 \\ P(B \mid A) &= 0{,}99 \\ P(B \mid \neg A) &= 0{,}02 \end{aligned}}$$

Grundüberlegungen und Begriffe der Wahrscheinlichkeit

(Bortz + Döring 2006, Meindl 2011, Gonick & Smith 2005)

- $$\mathbf{P(A \mid B) = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)} = \frac{P(A \wedge B)}{P(A \wedge B) + P(\neg A \wedge B)}}$$

$$= \frac{\mathbf{P(A)P(B|A)}}{\mathbf{P(A)P(B|A)+P(\neg A)P(B|\neg A)}}$$


Wurfzahl: 400
0.15
0.10
0.05
0.00
Ergebnis (rel. Häufigkeit)
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
Augenzahl

Grundüberlegungen und Begriffe der Wahrscheinlichkeit

(Bortz + Döring 2006, Meindl 2011, Gonick & Smith 2005)

- Beispielstichprobe
  - Stichprobenumfang 400
  - Häufigkeitstabelle:

```
> table(ergebnis)
ergebnis
 2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12
12 25 38 45 62 59 53 44 31 23  8
```

  - Stichprobenmittelwert:

```
> mean(ergebnis)
[1] 6.85
```

  - $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad = \frac{12}{400}\cdot 2 + \frac{25}{400}\cdot 3 + \frac{38}{400}\cdot 4 + \ldots + \frac{8}{400}\cdot 12 = \sum_{i \in I} h_i \cdot x_i$

relative Häufigkeiten ***h***

  - **Erwartungswert** μ oder E(x) einer diskreten Zufallsvariable: $\sum_{i \in I} p_i \cdot x_i$

Grundüberlegungen und Begriffe der Wahrscheinlichkeit

(Bortz + Döring 2006, Meindl 2011, Gonick & Smith 2005)

- **Stetige Zufallsvariable**:
  nicht abzählbar unendlich viele Werte;
  können jeden Wert annehmen, der zwischen zwei beliebigen Werten der Zufallsvariablen liegt.

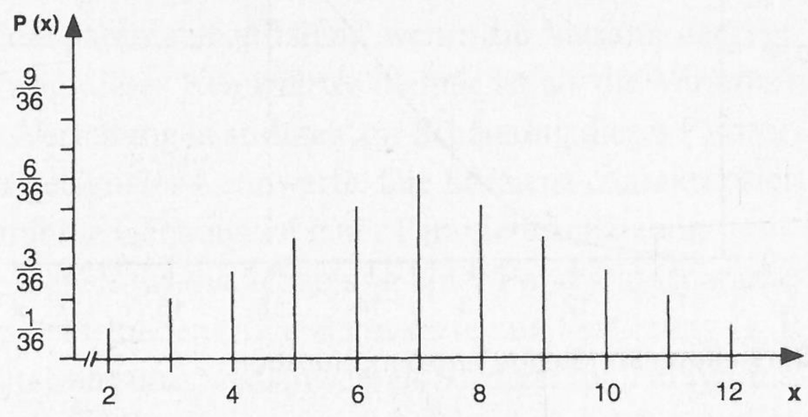
- Die Wahrscheinlichkeit eines Einzelereignisses P(X=x) ist gleich 0 !
  → Es können nur Wahrscheinlichkeiten bzgl. eines Intervalls an Zufallsvariablen berechnet werden!

- $P(a \leq x \leq b) = \int_b^a f(x)dx$
  - f(x) ist Dichtefunktion

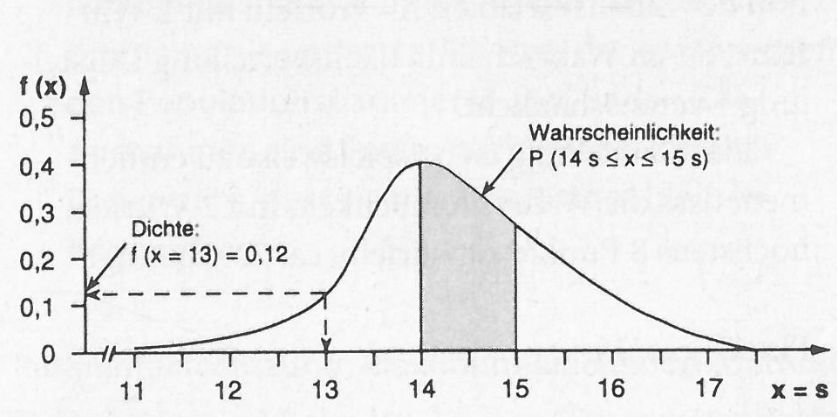
Grundüberlegungen und Begriffe der Wahrscheinlichkeit

(Bortz + Döring 2006, Meindl 2011, Gonick & Smith 2005)

- Wahrscheinlichkeitsfunktion und Dichtefunktion



Wahrscheinlichkeitsfunktion
(diskrete Zufallsvariable)



Dichtefunktion
(stetige Zufallsvariable)

Erwartungswert $\boldsymbol{\mu}$ oder E(x)
einer stetigen Zufallsvariable:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \cdot x$$

Gesamtfläche unterhalb der Kurve:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Grundüberlegungen und Begriffe der Wahrscheinlichkeit

(Bortz + Döring 2006, Meindl 2011, Gonick & Smith 2005)

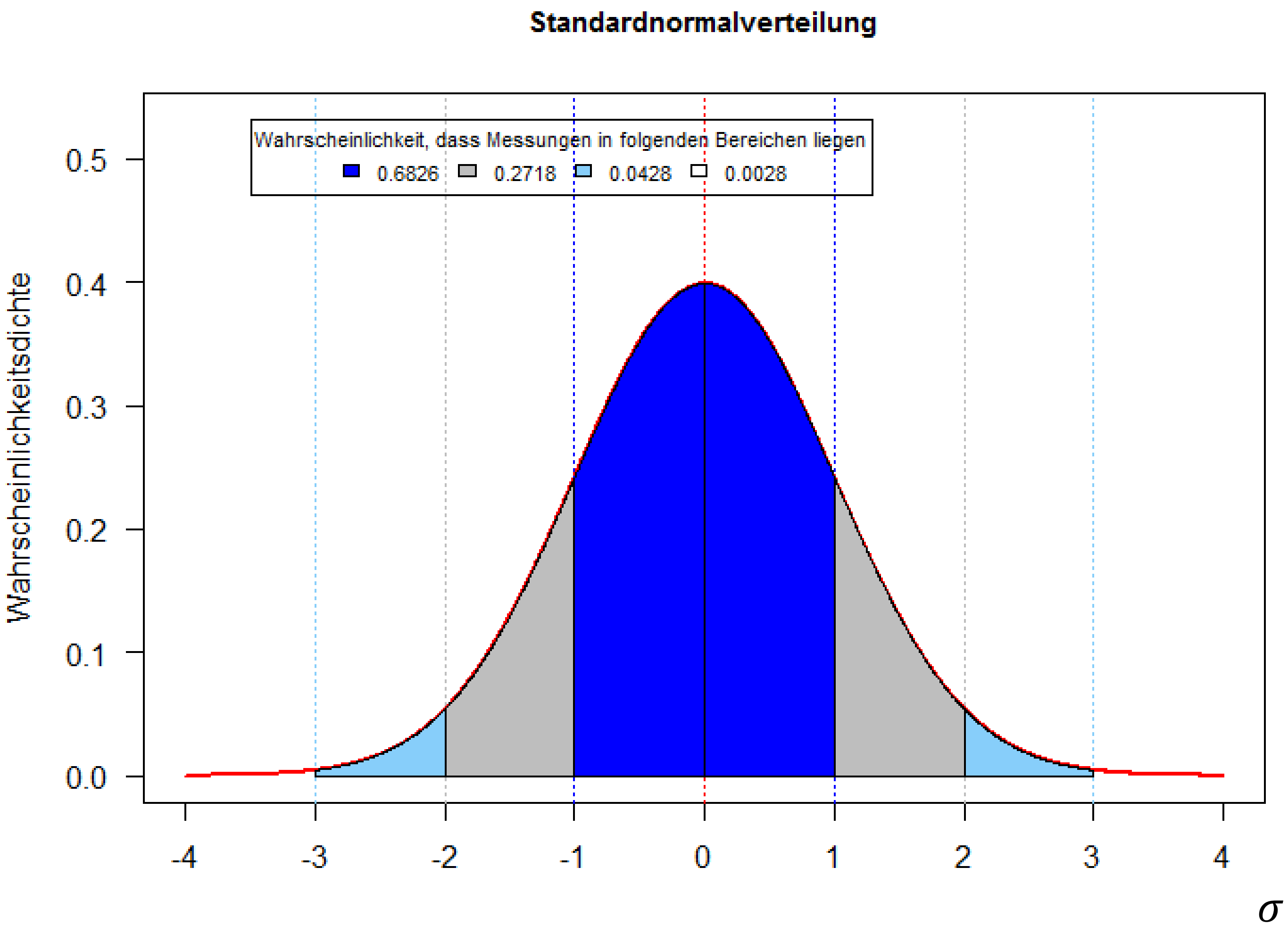
- **Varianz einer Zufallsvariable**:
  - diskrete Zufallsvariable:

$$\sigma^2 = \sum_{i \in I} (x_i - \mu)^2 \, p_i$$

  - stetige Zufallsvariable

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu)^2 \, f(x) dx$$

Standardnormalverteilung



Standardnormalverteilung

Stichprobengröße und Standardnormalverteilung

- Zentraler Grenzwertsatz: Werden theoretisch unendlich viele, unabhängige Stichproben mit Umfang n aus einer Population gezogen, geht die Verteilung der unabhängigen Zufallsvariablen mit wachsendem Stichprobenumfang $(n \geq 30)$ in eine Normalverteilung über
  - Auch die Schätzung der Populationsparameter wird mit größerem Stichprobenumfang genauer

Schätzung Populationsparameter

- Unbekannte Parameter der Population (K) werden geschätzt
  → auf Basis der Stichprobenkennwerte (k) der Stichprobe(n)

- Kriterien der Parameterschätzung, u.a.
  - **Konsistenz**: Stichprobenparameter k schätzt Populationsparameter K konsistent, wenn k mit wachsendem Stichprobenumfang ($n \to \infty$) gegen K konvergiert
    - $\bar{x}$, s^2 ,p sind konsistente Schätzer

Schätzung Populationsparameter

- Unbekannte Parameter der Population (K) werden geschätzt → auf Basis der Stichprobenkennwerte (k) der Stichprobe(n)

- Kriterien der Parameterschätzung, u.a.
  - **Suffizienz**: Schätzer k ist suffizient, wenn er alle in den Daten einer Stichprobe enthaltenden Informationen berücksichtigt
    - so gesehen ist z.B. das arithmetische Mittel suffizienter als der Median, da der Median nur auf Ordnungsrelationen basiert

Schätzung Populationsparameter

- Unbekannte Parameter der Population (K) werden geschätzt
  → auf Basis der Stichprobenkennwerte (k) der Stichprobe(n)
- Kriterien der Parameterschätzung, u.a.
  - **Erwartungstreue**: Stichprobenkennwert k schätzt Populationsparameter K erwartungstreu, wenn der Mittelwert der k-Werte für zufällig aus der Population gezogene Stichproben identisch ist mit dem Populationsparameter K.
    - Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ schätzt Erwartungswert μ erwartungstreu
    - Relative Häufigkeit in Stichprobe p schätzten relative Häufigkeit in Population π erwartungstreu
    - Empirische Varianz s^2 schätzt Populationsvarianz σ^2 *nicht* erwartungstreu

      → s^2 unterschätzt σ^2 (vgl. bspw. geringe Stichproben-Auswahlwahrscheinlichkeit von Merkmalsträgern mit extremen positiven oder negativen Merkmalsausprägungen bei Normalverteilung)

      → Korrektur: kleinerer Nenner (Freiheitsgrad n – 1 statt n) bei der Populationsvarianz: erwartungstreuer Schätzer $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^2$
      je kleiner der Stichprobenumfang, desto größer fällt die Korrektur aus (d.h. umso größer wird die Differenz zwischen empirischer Varianz (kleinerer Wert) und korrigierter Populationsvarianz)

Schätzung Populationsparameter

Mit dem Ergebnis meiner Stichprobe …

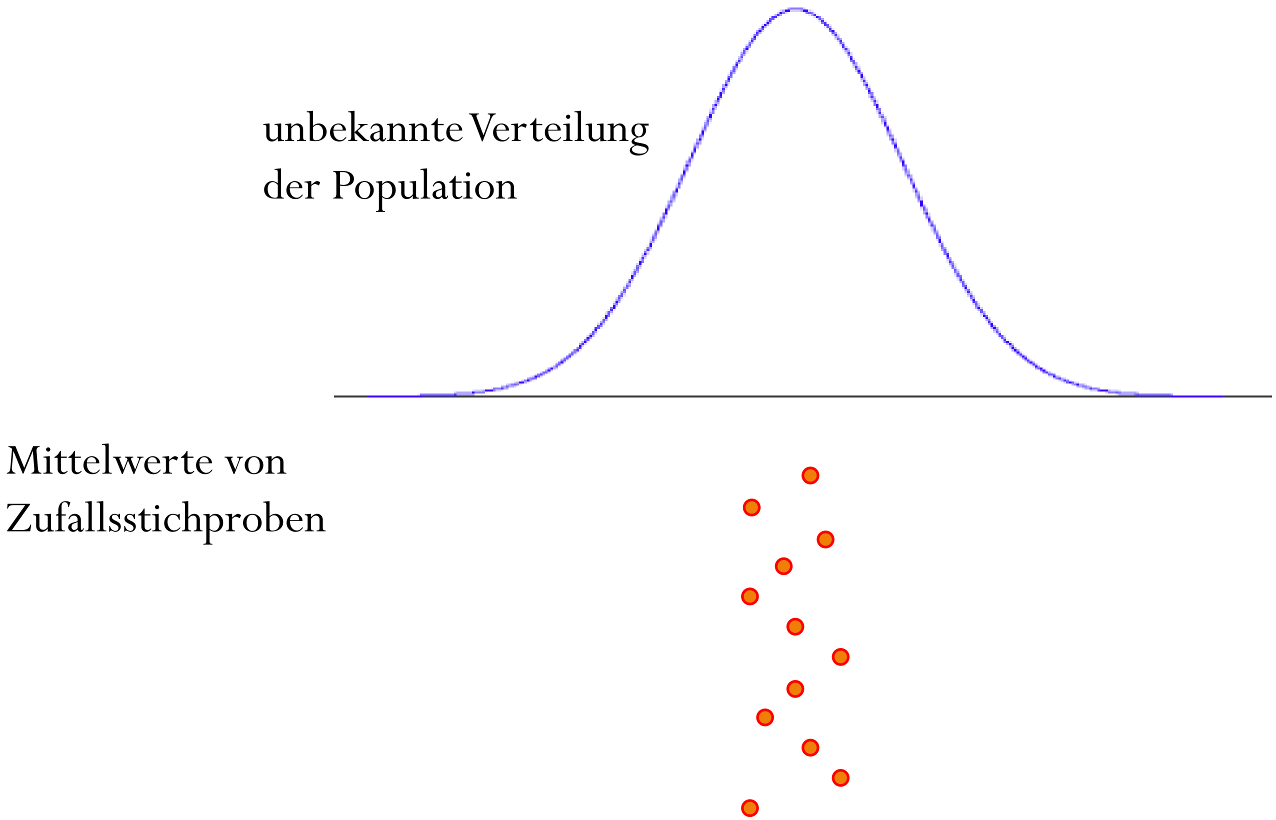
1072	YQ	5	strong	with_film	bt	Adj.3.07	2po	7
1073	YQ	5	strong	with_film	bt	Adj.3.08	2po	1
1074	YQ	5	strong	with_film	bt	Adj.3.09	3ac	7
1075	YQ	5	strong	with_film	bt	Adj.3.02	1ev	6
1076	YQ	5	strong	with_film	bt	Adj.3.04	1ev	7
1077	YQ	5	strong	with_film	bt	Adj.3.10	3ac	5
1078	YQ	5	strong	with_film	bt	Adj.3.05	2po	1
1079	YQ	5	strong	with_film	bt	Adj.3.11	3ac	7
1080	YQ	5	strong	with_film	bt	Adj.3.01	1ev	6
1081	YQ	5	strong	with_film	bt	Adj.3.03	1ev	7
1082	YQ	5	strong	with_film	bt	Adj.3.06	2po	1
1084	YQ	5	strong	with_film	st	Adj.2.08	2po	6
1085	YQ	5	strong	with_film	st	Adj.2.03	1ev	2
1086	YQ	5	strong	with_film	st	Adj.2.07	2po	4
1087	YQ	5	strong	with_film	st	Adj.2.06	2po	5
1088	YQ	5	strong	with_film	st	Adj.2.09	3ac	6
1089	YQ	5	strong	with_film	st	Adj.2.10	3ac	7
1090	YQ	5	strong	with_film	st	Adj.2.11	3ac	6
1091	YQ	5	strong	with_film	st	Adj.2.04	1ev	2
1092	YQ	5	strong	with_film	st	Adj.2.12	3ac	6
1093	YQ	5	strong	with_film	st	Adj.2.05	2po	6
1094	YQ	5	strong	with_film	st	Adj.2.02	1ev	2
1095	YQ	5	strong	with_film	st	Adj.2.01	1ev	2
1097	YQ	5	strong	with_film	sc	Adj.1.03	1ev	5
1098	YQ	5	strong	with_film	sc	Adj.1.06	2po	2
1099	YQ	5	strong	with_film	sc	Adj.1.08	2po	1
1100	YQ	5	strong	with_film	sc	Adj.1.09	3ac	2
1101	YQ	5	strong	with_film	sc	Adj.1.02	1ev	4
1102	YQ	5	strong	with_film	sc	Adj.1.05	2po	1
1103	YQ	5	strong	with_film	sc	Adj.1.12	3ac	2
1104	YQ	5	strong	with_film	sc	Adj.1.01	1ev	4
1105	YQ	5	strong	with_film	sc	Adj.1.10	3ac	2
1106	YQ	5	strong	with_film	sc	Adj.1.04	1ev	5
1107	YQ	5	strong	with_film	sc	Adj.1.11	3ac	6
1108	YQ	5	strong	with_film	sc	Adj.1.07	2po	1

Was kann ich damit jetzt über die unbekannten Populations-paramer Mittelwert und Streuung aussagen?

- z.B. - falls Variable mindestens intervallskaliert:
  - Arithmetisches Mittel $\bar{x}$ schätzt Erwartungswert μ (und dies „besser“ als der Median)
  - erwartungstreuer Schätzer der Varianz der Population: $\hat{\sigma}^2$

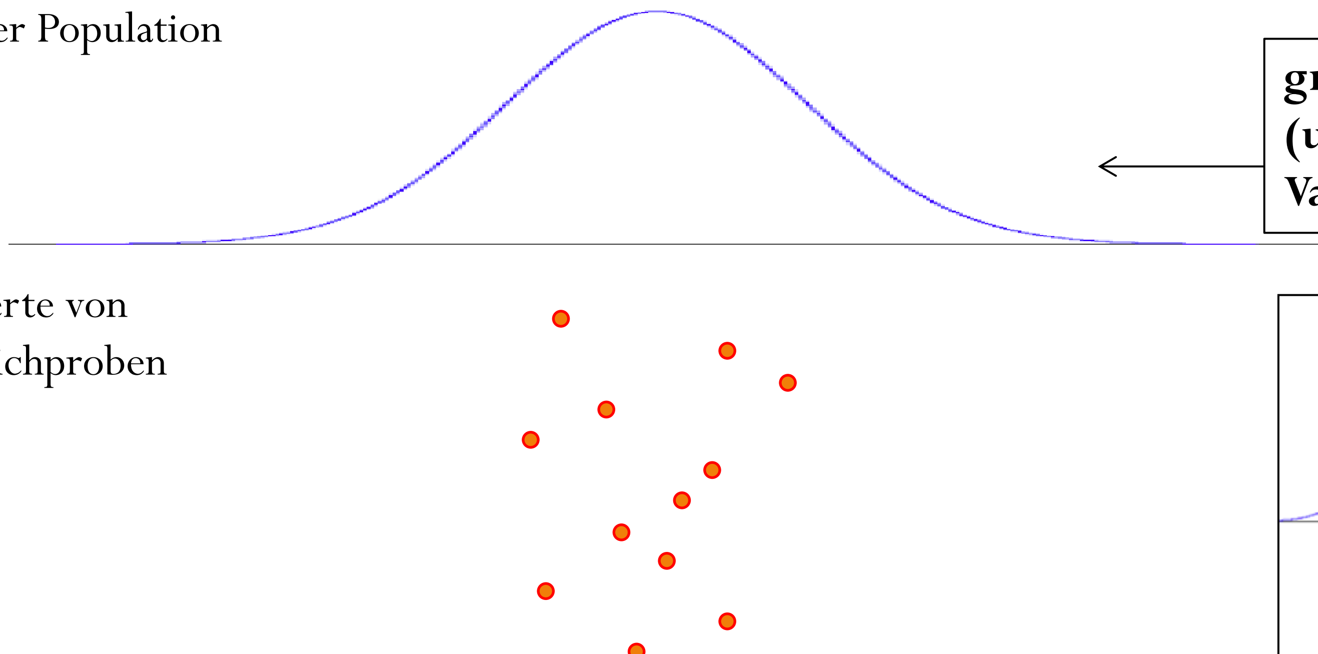
Schätzung Populationsparameter

- $\bar{x}$ ist ein **Punktschätzer** des unbekannten Erwartungswerts



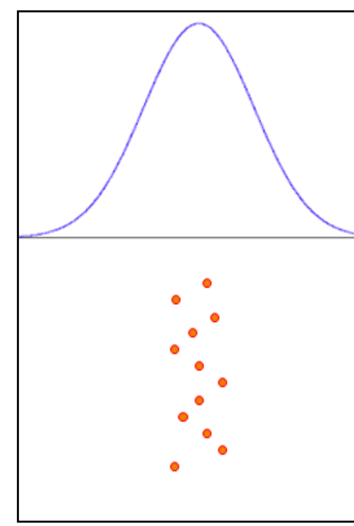
Schätzung Populationsparameter

unbekannte Verteilung
der Population



größere (unbekannte) Varianz

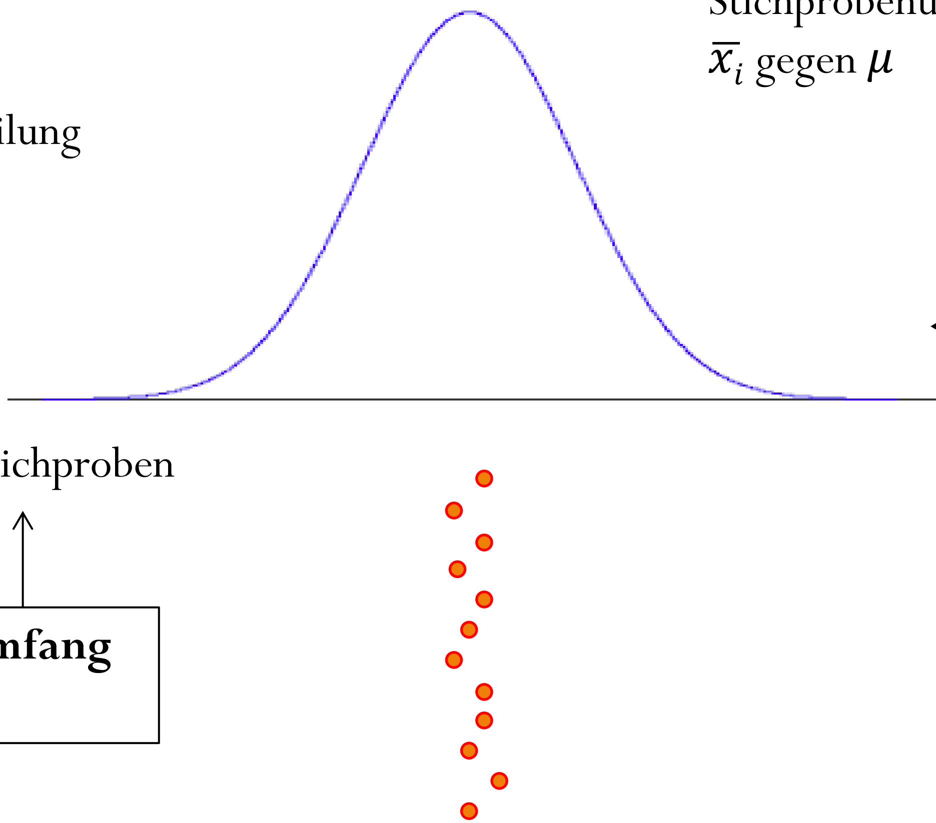
Mittelwerte von
Zufallsstichproben



Schätzung Populationsparameter

Konsistenz: mit wachsendem Stichprobenumfang konvergieren $\overline{x}_i$ gegen μ

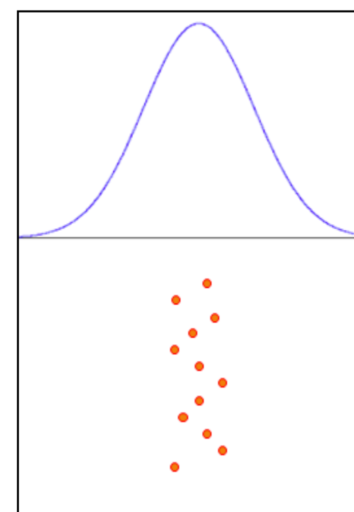
unbekannte Verteilung der Population



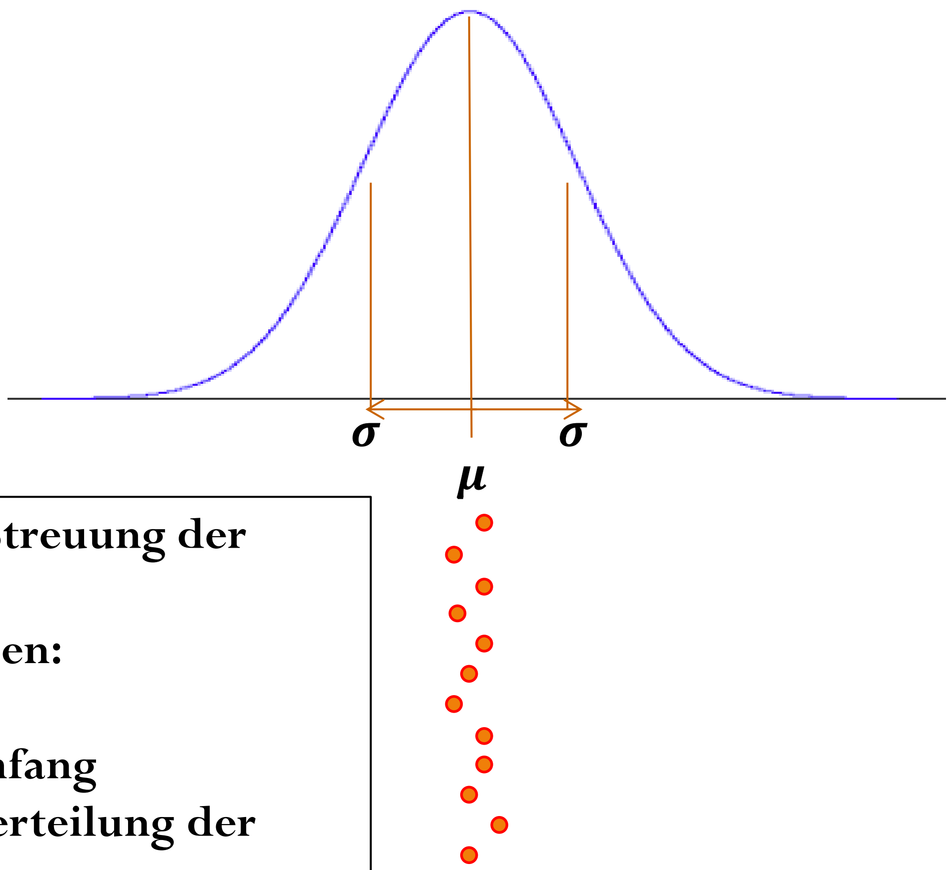
gleiche Varianz

Mittelwerte der Stichproben

Stichprobenumfang größer

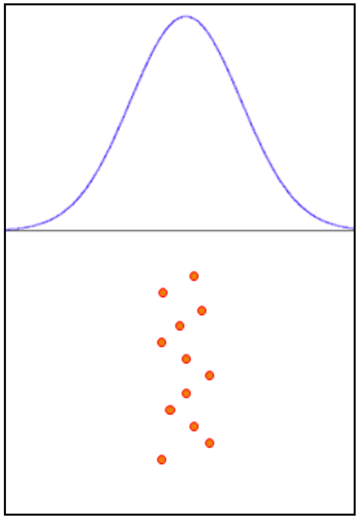


Schätzung Populationsparameter

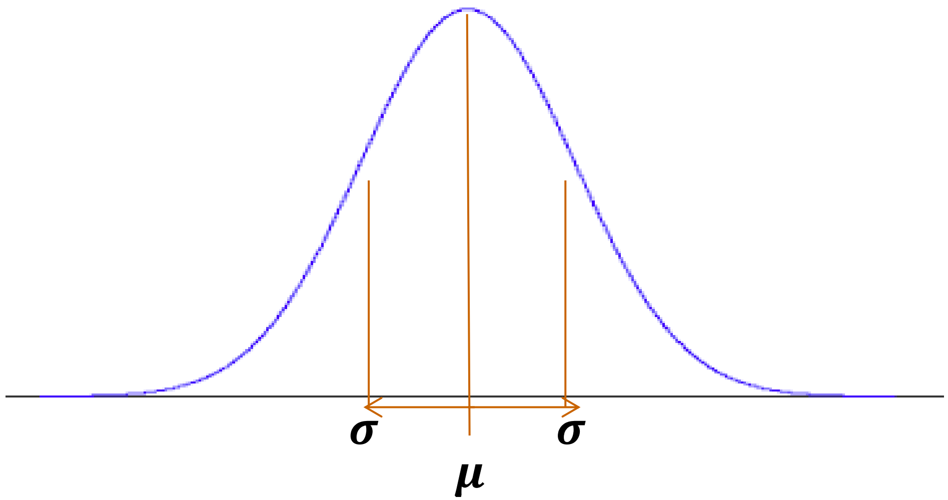


Einfluss auf die Streuung der Mittelwerte der Zufallsstichproben:

- **Stichprobenumfang**
- **Streuung der Verteilung der Population**

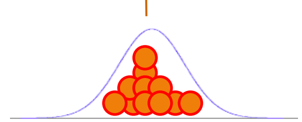


Schätzung Populationsparameter



Auch die Mittelwerte der Zufallsstichproben sind Zufallsvariablen mit einer bestimmten Verteilung :

- Ihr Mittelwert ist μ
- Ihre Streuung wird durch den Standardfehler SE bestimmt



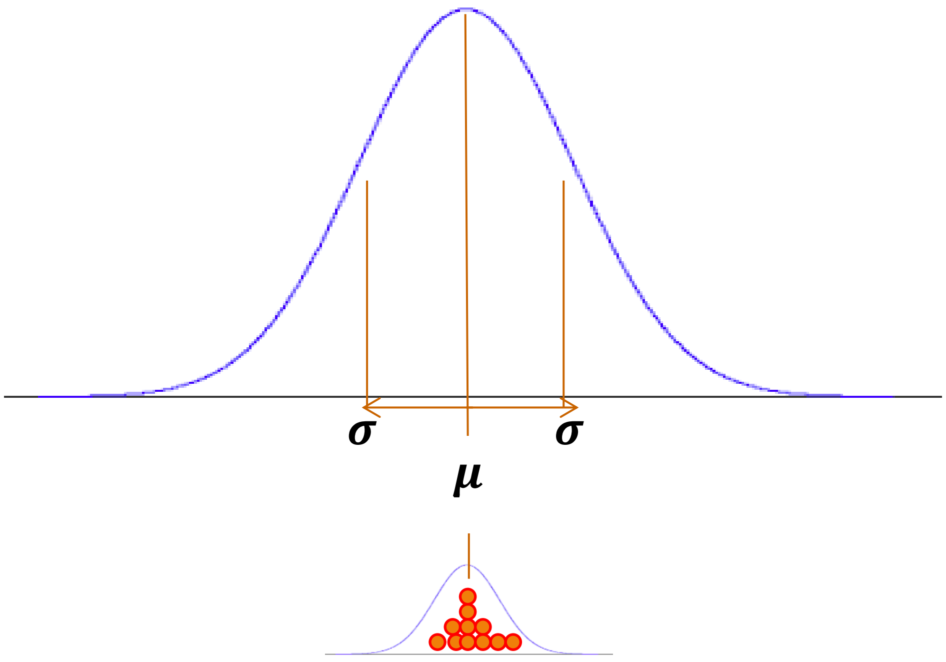
Der Standardfehler berücksichtigt:

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

→ Standardabweichung der Population

→ Stichprobenumfang

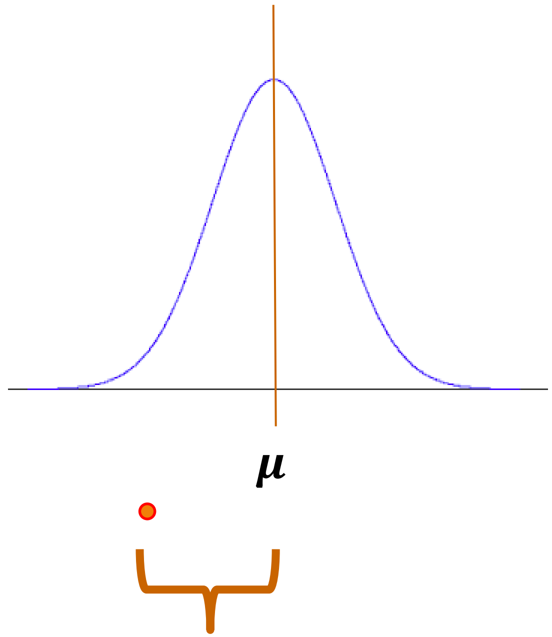
Schätzung Populationsparameter



$$\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}$$

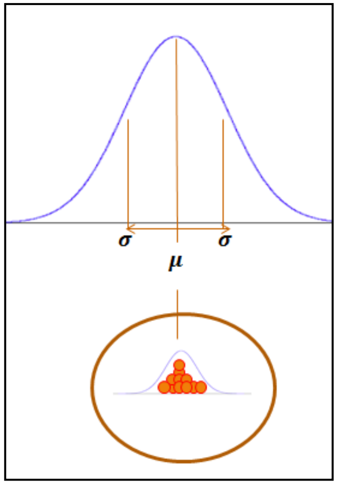
"The standard error is the standard deviation of the sampling distribution of the sample mean" Cumming 2012:59

Schätzung Populationsparameter

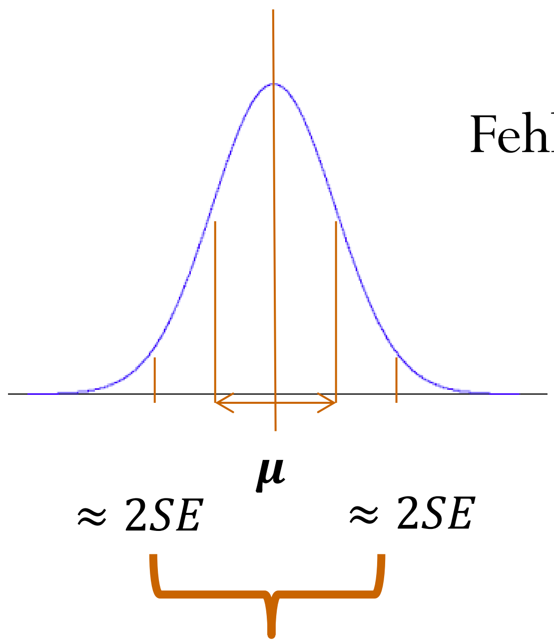


Schätzfehler (estimation error):

$\bar{x} - \mu$

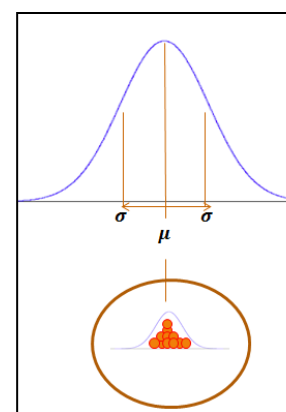


Schätzung Populationsparameter



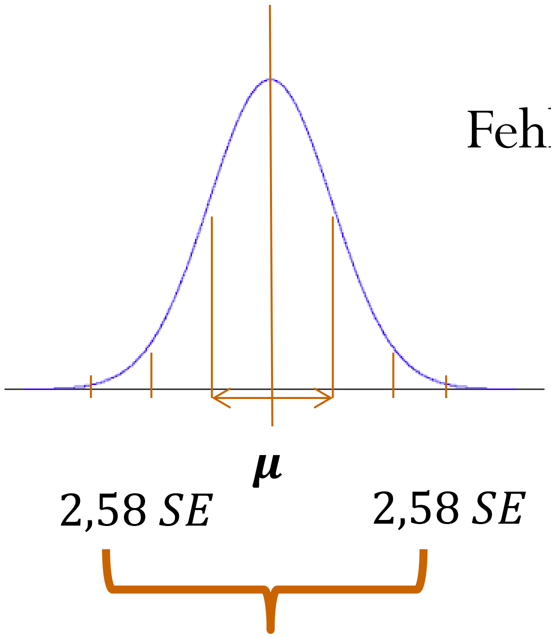
Fehlerspanne: $\approx 2\,SE$

→ Wahrscheinlichkeit ist 0.95, dass Schätzfehler in der Fehlerspanne $\boldsymbol{\mu}$ +/- $\approx 2SE$ liegt



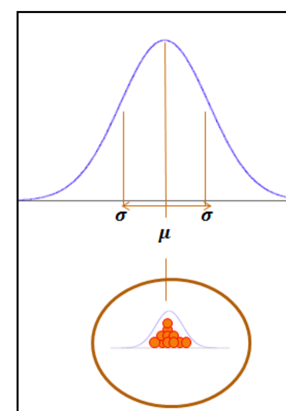
genauer: 1,96 SE

Schätzung Populationsparameter



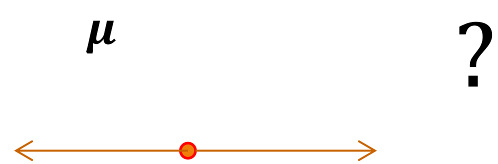
Fehlerspanne: $2{,}58\ SE$

→ Wahrscheinlichkeit ist 0.99, dass Schätzfehler in der Fehlerspanne $\boldsymbol{\mu}$ +/- $\approx 2{,}58\ SE$ liegt



Schätzung Populationsparameter

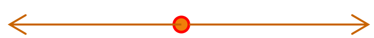
- Es stellt sich nun die Frage, wie gut unser Arithmetisches Mittel (ein Punktschätzer) den unbekannten Populationsmittelwert schätzt:
  Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein rechts und links von dem Punktschätzer liegendes Intervall die unbekannte Größe überdeckt?



Schätzung Populationsparameter

- **Konfidenzintervall (CI) <u>bei Stichproben mit n>30</u>:** $[\bar{x}\ - Fehlerspanne,\ \bar{x} + Fehlerspanne]$

- Ist die Fehlerspanne z.B. 1,96 SE, können wir mit 95%iger Wahrscheinlichkeit davon ausgehen, dass der unbekannte Populationsmittelwert innerhalb dieser Spanne liegt



- 95% CI: $[\bar{x}\ - 1{,}96\ SE,\ \bar{x} + 1{,}96\ SE]$
  - Hinweis: bei kleinerem Stichprobenumfang ist nicht von einer Standardnormalverteilung auszugehen, hier müssen in der Berechnung der CI t-Werte einer t-Verteilung berücksichtigt werden (auf die wir im Rahmen dieses Seminars nicht mehr eingehen werden)

Schätzung Populationsparameter

- Zurück zur Messung:
  Es seien Parameter einer Zufallsstichprobe (n=50) bestimmt worden:
  - Arithmetisches Mittel $\bar{x}$
  - Varianz s^2 und Standardabweichung s
- Auf Basis dieser Werte können wir nun die Populationsparameter schätzen:
  - Populationsmittelwert μ auf Basis des Arithmetischen Mittels $\bar{x}$
  - Populationsstreuung auf Basis der erwartungstreuen Schätzer (mit Nenner n-1) Varianz $\boldsymbol{\hat{\sigma}^2}$ und Standardabweichung $\boldsymbol{\hat{\sigma}}$
  - den Standardfehler (SE) durch $\frac{\boldsymbol{\hat{\sigma}}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}$
  - Konfidenzintervall für den Populationsmittelwert, z.B. 95%-CI:
    $[\bar{x} - 1{,}96 \cdot \frac{\boldsymbol{\hat{\sigma}}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}},\ \bar{x} + 1{,}96 \cdot \frac{\boldsymbol{\hat{\sigma}}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}]$

Schätzung Populationsparameter

R Implementation

Random sample generation for the normal distribution:

- 1000 sample data
- mean: 20
- standard deviation: 2

```
random_norm_data <- rnorm(1000, mean=20, sd=2)
```

Define function for standard error $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

```
SE <- function(x) {
    sd(x)/sqrt(length(x))
}
```

```
SE(a)
```

0.0642116001725348

Schätzung Populationsparameter

Define 95%-CI function

$(sample \geq 30)$

$\bar{x} - margin\ error\ 1.96SE\ ;\ \bar{x} + margin\ error\ 1.96SE$

```
CI95 <- function(x) {
    c(mean(x)-1.96*SE(x),mean(x)+1.96*SE(x))
    }
```

```
CI95(a)
```

1. 19.8624545629745
2. 20.1141640356508

Literatur

- Bortz, Jürgen & Nicola Döring (2006). *Forschungsmethoden und Evaluation für Human- und Sozialwissenschaftler* (4. Aufl.). Heidelberg: Springer Medizin Verlag.
- Gonick, Larry & Woollcot Smith (2005). *The Cartoon Guide to Statistics*. New York: Collins.
- Meindl, Claudia (2011). *Methoden für Linguisten. Eine Einführung in die Versuchsplanung*. Tübingen: Narr Verlag.