Miercoles:
Dos perspectivas sobre la renovación de población

Tim Riffe

16 de junio de 2015

1. Dos perspectivos sobre la renovación

1.1. la cronológica

Algunos dirían que la demografia formal moderno empezó con las obras de A. Lotka & Sharpe a principios del siglo XX (e.g., 1911, pero también en otras obras de Lotka). La verdad es que había mucho trabajo formal antes de aquello, de Zeuner, Lexis, y otros, sobre todo con la tabla de vida y la medición de las tasas de mortalidad. Lotka nos proporcionó una equación que une las fuerzas de mortalidad y fecundidad en un modelo unificado y parsimonio que acabó motivando casi todo el trabajo de poblaciones estables que ha venido desde entonces. Pero otros también lo han hecho en otras formas matemáticas. P. Leslie (1945) ha hecho lo mismo en forma matricial, y McKendrick (1926) & von Foerster (1959) han hecho lo mismo en forma diferencial. Según el campo de investigación se suele aprender unos antes del otro. En la demografía formal prestamos mas peso a lo de A. Lotka, aunque hay mucho trabajo actualmente en la área de matrices, sobre todo por H. Caswell. Los matemáticos aplicados suelen preferir las equaciones de McKendrick & von Foerster. Vamos a seguir con Lotka. Hay maneras distintas de derivarlo, pero yo encuento que uno es más intuitiva.

Las reglas del modelo sencillo:

1. Las tasas de fecundidad y mortalidad no cambian.
2. La población está cerrada, i.e., la única manera de entrar es tras el nacimiento y la única manera de salir es tras morir.
3. Solo hay un sexo, así que la fecundidad es asexual, imaginamos. Hay maneras de incorporar dos sexos, pero los ignoramos ahora.

Definimos una serie de nacimientos, $N(t)$, donde t es el año de datos, y N es el número total de nacimientos en aquel año. En tiempo continuo, tenemos:

$$N(t) = \int P(x,t) \cdot f(x) \qquad , \tag{1}$$

donde $P(x,t)$ son poblaciones por edad en el año t, y $f(x)$ son nuestras tasas de fecundidad que son fijos en el tiempo (y por lo tanto no hace falta un t). Evidentamente, los estocs de pobación en el año t son los supervivientes de los nacimientos en el pasado. Entonces, tenemos:

$$N(t) = \int N(t-x) \cdot l(x) \cdot f(x) \qquad . \tag{2}$$

En nuestro caso la curva de supervivencia tampoco cambia en el tiempo: esta fijo. Ahora imaginamos que la serie de nacimientos empieza de forma accidentada, es decir no es estable. Si dejamos que la población desarolla de ésta forma se acabará suavizandose de tal forma que la razón entre los nacimientos de años sucesivos es constante. Es decir, que la población crece con una tasa constante. Los nacimientos en el año t estarán relacionados con los nacimientos del año $t - x$ así:

$$N(t) = N(t - x) \cdot \frac{1}{e^{-rx}} \qquad . \tag{3}$$

Hay maneras distintas de saber que (3) acabará pasando. Se encuentra una explicación más intuitiva en Arthur (1982). También se puede dibujar un grafo del sistema por edades y estados, y se verá que cumple con las condiciones del teorema de Perron-Frobenius (Perron 1907, Frobenius 1908), y tras darse cuenta de esto ya basta para concluir que “tiene que estabilizarse en algún momento”. Lo dibujaremos en clase. Integrando (3) en la demonstración, tenemos:

$$N(t) = \int N(t)e^{-rx} \cdot l(x) \cdot f(x) \qquad , \tag{4}$$

y se ve que ahora (decimos 100+ años más en el futuro que el inicio del ejercicio), $N(t)$ es una función de si mismo! De hecho, como $N(t)$ está tanto dentro como fuera del integral, podemos dividirlo todo por $N(t)$ y sale lo que conocemos como la equación Lotka:

$$1 = \int e^{-rx} \cdot l(x) \cdot f(x) \qquad , \tag{5}$$

y ya nada es función del tiempo, t. Es un sistema de renovación que una vez estabilizada se queda atrapada, fija, y siempre cumple con (5). Entonces, se puede optimizar r de varias maneras, y muchas veces el objectivo es saber que valor tiene r. Para profundizarse más, recomiendo Coale (2015).

1.2. la tánatológica

Ahora describo como también funciona en terminos de la edad tánatológica, es decir los años restantes de vida. Imaginamos que tenemos una población estructurada por años restantes. El martes he dibujado algunos en la pizzara, pero pueden venir en formas distintas. Por sencillez, imagina una pirámide de población típica, pero con perfil suave. Ahora, si tu pirámide ha sido en forma de uan pirámide, es decir con la base gorda, cambia el imágen a una pirámide “envejecida”, como la del Japón. Esto sería en muchos casos la traducción de una pirámide cronológica en una tánatológica. Y la heuristica funciona al reves.

Ahora imaginamos que tenemos tasas de fecundidad estructuradas por años restantes de vida. Esto es ya un concepto raro. Primero, la curva de fecundidad por años restantes es mucho más amplia que la por edad cronológica. Empieza con el tiempo restante de cero (es decir, la mortalidad materna), y acaba tal vez con 100. Jean Calment ha sobrevivido hasta los 122+ años, y tenía una hija cuando tenía unos 22 a nos. Por lo tanto, al parir tenía la edad tánatológica de 100! No sabemos si es un record, pero será cerca. Entonces la distribución de fecundidad por años restantes se extiende desde 0 a 100 como mínimo. También probablemente es unimodal. Probablemente la moda se encuentra entre los 50 y 75 años restantes. Probablemente no varie tanto sobre el tiempo como la distribución cronológica de la fecundidad. Digo probablemente porque no sabemos, pero podemos approximar la distribución usando unos supositos de la tabla de vida.[1]

[1] se puede ver ejemplos de éstas distribuciones en un paper en progreso aquí: `https://github.com/timriffe/ThanoRepro`. Esto viene de un capitulo de mi tésis, pero el articulo aun no está enviado.

Llamamos la población clasificada por años restantes $P(y)$, y la fecundidad por años restantes $f^\star(y)$. Los nacimientos en el año t entonces son:

$$N(t) = \int P(y,t) \cdot f^\star(y) \qquad , \tag{6}$$

parecida a la equación (1), de hecho en el año de partida siempre dan el mismo $N(t)$. Como hemos visto en clase el martes, el $P(y)$ es:

$$\begin{aligned} P(y) &= \int_0^\infty P(x) \cdot \mu(x+y) \cdot \frac{l(x+y)}{l(x)} \, \mathrm{d}x \qquad (7) \\ &= \int_0^\infty P(x) \cdot f(y|x) \, \mathrm{d}x \qquad . \qquad (8) \end{aligned}$$

Así podemos cambiar $P(y)$ por su equivalente:

$$N(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty P(x,t) \cdot f(y|x) \cdot f^\star(y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \qquad . \tag{9}$$

Resulta que ahora tenemos usos redundantes de la letra 'f', así que voy a cambiar $f(y|x) \Rightarrow z(y|x)$ para espero no confundirnos. Entonces:

$$N(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty P(x,t) \cdot z(y|x) \cdot f^\star(y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \qquad . \tag{10}$$

Como en el caso anterior, podemos relacionar el $P(x,t)$ con los nacimientos en el pasado:

$$N(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty N(t-x) \cdot l(x) \cdot z(y|x) \cdot f^\star(y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \qquad . \tag{11}$$

Mira la equación (7) para recordar que $z(y|x)$ tiene un $l(x)$ en el denominador, y nota que en la equación (11) acabmos multiplicandolo por otro $l(x)$. Entonces es igual que:

$$N(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty N(t-x) \cdot \mu(x+y) \cdot l(x+y) \cdot f^\star(y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \qquad , \tag{12}$$

y esto se reduce aun más porque $\mu(x) \cdot l(x) = d(x)$ de la tabla de vida:

$$N(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty N(t-x) \cdot d(x+y) \cdot f^\star(y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \qquad , \tag{13}$$

Ahora pasa lo mismo que antes. Si dejamos que la población se evoluciona con esa misma fecundidad y mortalidad entonces los nacimientos de la sistema se acaben cambiando de forma proporcional, año por año, según la equación (3), y se puede demostrar usando el mismo tipo de grafo y invocando el teorema Perron-Frobenius. Si lees el articulo de Arthur (1982) tiene todavia más sentido, como nuestra distribución de la fecundidad en el caso de la edad tánatológica es más gorda (menos curtósis!). Entonces modificamos lo anterior para incorporar esta regularidad:

$$N(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty N(t) e^{-rx} \cdot d(x+y) \cdot f^\star(y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \qquad . \tag{14}$$

Para acabar, dividimos por $N(t)$ y tenemos la equación final:

$$1 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-rx} \cdot d(x+y) \cdot f^\star(y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \qquad . \tag{15}$$

Compara con (5) y se ve que no son muy diferentes, sobre todo tomando en cuenta que $l(x)$ es la suma de $d(x' \geq x)$. Se puede demostrar que 1) solo hay un r real que cumple el sistema, y 2) que en el caso de una población ya estable que el mismo r tiene que salir de (5) y (15). También tiene su propia matriz tipo Leslie, y un grafo particular.

2. La ergodicidad y el momento

Si hay tiempo en la parte de practicas podemos demostrar estos dos conceptos con datos.

Referencias

W Brian Arthur. The ergodic theorems of demography: a simple proof. *Demography*, 19(4):439–445, 1982.

Ansley Johnson Coale. *Growth and Structure of Human Populations: A Mathematical Investigation.* Princeton University Press, 2015.

G Frobenius. Über matrizen aus positiven elementen, s. *B. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Germany.[Links]*, 1908.

Oskar Perron. Zur theorie der matrices. *Mathematische Annalen*, 64(2):248–263, 1907.