1 Лабораторная работа №1

1.1 Вероятностное пространство, формула Байеса

1. Определить (с обоснованием), зависимы или независимы следующие события:

   (a) Несовместные события;

   (b) События, образующие σ-алгебру Σ в пространстве $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$;

   (c) События, имеющие одинаковую вероятность?

2. Опыт заключается в независимом подбрасывании двух симметричных монет. Рассматриваются следующие события:

   - A — появление герба на первой монете;
   - B — появление решки на первой монете;
   - C — появление герба на второй монете;
   - D — появление решки на второй монете;
   - E — появление хотя бы одного герба;
   - F — появление хотя бы одной решки;
   - G — появление одного герба и одной решки;
   - H — непоявление ни одного герба;
   - K — появление двух гербов.

   Определить, каким событиям этого списка равносильны следующие события:

   (a) $A + C =?$

   (b) $AC =?$

   (c) $EF =?$

   (d) $G + E =?$

   (e) $GE =?$

   (f) $BD =?$

   (g) $E + K =?$

3. Производится выстрел по вращающейся круговой мишени, в которой закрашены два непересекающихся сектора с углом $20°$. Какова вероятность попадания в закрашенную область?

4. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу независимо друг от друга и равновозможно в течение суток. Определить вероятность того, что одному из них придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого парохода — 1 час, а второго — 2 часа.

5. Самолет, по которому ведется стрельба, состоит из трех различных по уязвимости частей:

   (a) Кабина летчика и двигатель

   (b) Топливные баки

   (c) Планер

   Для поражения самолета достаточно либо одного попадания в первую часть, либо двух попаданий во вторую, либо трех в третью. При попадании в самолет одного снаряда, снаряд с вероятностью p_1 попадает в первую часть, с вероятностью p_2 — во вторую, с вероятностью p_3 — в третью. Попавшие снаряды распределяются по частям независимо друг от друга.

   Известно, что в самолет попало m снарядов. Найти условную вероятность $\mathbb{P}(A|m)$ события A – «Самолет поражен» – при $m = 1, 2, 3, 4$.

1.2 Случайный вектор и числовые характеристики

1. Пусть
$$f_\xi(x, y) = \frac{e^{-2|y|}}{\pi(1 + x^2)}$$
   Является ли данная функция плотностью распределения случайного вектора?

2. Совместное распределение случайных величин ξ и η задано следующей таблицей

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1
-1	$1/8$	$1/12$	$7/24$
1	$1/3$	$1/6$	0

   (a) Найти маргинальные распределения ξ и η

(b) Вычислить математическое ожидание, ковариационную и корреляционную матрицы вектора (ξ, η)

(c) Исследовать ξ и η на независимость и некоррелированность

3. Пусть имеются два одинаковых тетраэдра с числами $1, 2, 3, 4$ на гранях. Подкидываем оба и смотрим на выпавшие числа ξ_1 и ξ_2. Зададим следующие случайные величины:

$$\phi_1 = \xi_1 + \xi_2 \qquad \phi_2 = \begin{cases} 1, & (\xi_1 \vdots \xi_2) \cup (\xi_2 \vdots \xi_1) \\ 0, & else \end{cases}$$

(a) Составить таблицу совместного распределения ξ и η

(b) Найти маргинальные распределения ξ и η

(c) Вычислить математическое ожидание, ковариационную и корреляционную матрицы вектора (ξ, η)

(d) Исследовать ξ и η на независимость и некоррелированность

4. Пусть $\xi \sim U_{-\pi,\pi}$ и $\eta_1 = \cos\xi$, $\eta_2 = \sin\xi$.

(a) Вычислить математическое ожидание, ковариационную и корреляционную матрицы вектора (ξ, η)

(b) Исследовать ξ и η на независимость и некоррелированность

5. Найти плотность распределения суммы двух независимых случайных величин ξ и η, если $\xi \sim \mathrm{Exp}_2$ и $\eta \sim \mathrm{U}_{0,1}$.