Układy równań liniowych

Tim Schopinski, 09.05.2023

1. Wstęp

Celem projektu jest implementacja metod iteracyjnych, takich jak Jacobiego, Gaussa-Seidla oraz bezpośrednich do rozwiązywania układów równań liniowych. W tym celu użyto języka Python wraz z biblioteką matplotlib do prezentacji wykresów oraz modułu time do pomiaru czasu.

2. Zadanie A

Celem zadania było utworzenie układu równań Ax = b.
Dla numeru indeksu 188749 otrzymujemy a1 = 12 i N = 949. Wektor b również ma długość N = 949, natomiast n−ty element ma wartość sin(n ·(8 + 1)).
Macierz A dla powyższych danych wygląda w ten sposób:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 12 & -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 12 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 12 & -1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 12 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 12 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 12 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -1 & 12 \end{bmatrix}$$

Wektor b wygląda tak:
$b = [0.412 \quad -0.750 \quad ... \quad -0.535 \quad 0.836]$

3. Zadanie B

W ramach tego zadania został rozwiązany powyższy układ równań za pomocą metod iteracyjnych Jacobiego i Gaussa-Seidla.

Metoda	Czas [s]	Liczba iteracji
Jacobiego	3.16	16
Gaussa-Seidla	2.32	12

Dla układu równań opisanego w podpunkcie A, wyniki uzyskane za pomocą metod Jacobiego i Gaussa-Seidla są następujące: Metody były wykonywane do momentu, gdy norma wektora residuum przekroczyła wartość 10^-9. Można zauważyć, że metoda Gaussa-Seidla wymaga mniejszej liczby iteracji i wykonuje obliczenia około 1,36 raza szybciej niż metoda Jacobiego.

4. Zadanie C

W ramach tego zadania utworzono macierz C podobnie jak w zadaniu 1, przy czym a1 = 3, , a2 = a3 = −1.
Macierz C wygląda w ten sposób:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

W tym przypadku, obie metody iteracyjne osiągnęły ustalony przeze mnie limit 1000 iteracji.
Można na podstawie tego wywnioskować, że dla
powyższych wartości metody iteracyjne nie zbiegają się.

5. Zadanie D

W ramach zadania, rozwiązano powyższy układ równań metodą bezpośrednią, jaką jest faktoryzacja LU. W wyniku tego rozwiązania, wartość normy residuum wyniosła około 1.56*10^-13. Jest to wynik bardzo bliski zeru, co oznacza, że wykonane obliczenia były bardzo dokładne.

6. Zadanie E

W ramach tego zadania wykonano wykres, który przedstawia zależność między czasem obliczeń a liczbą niewiadomych dla metod opisanych wcześniej. Przedstawienie tej zależności znajduje się na poniższym wykresie:

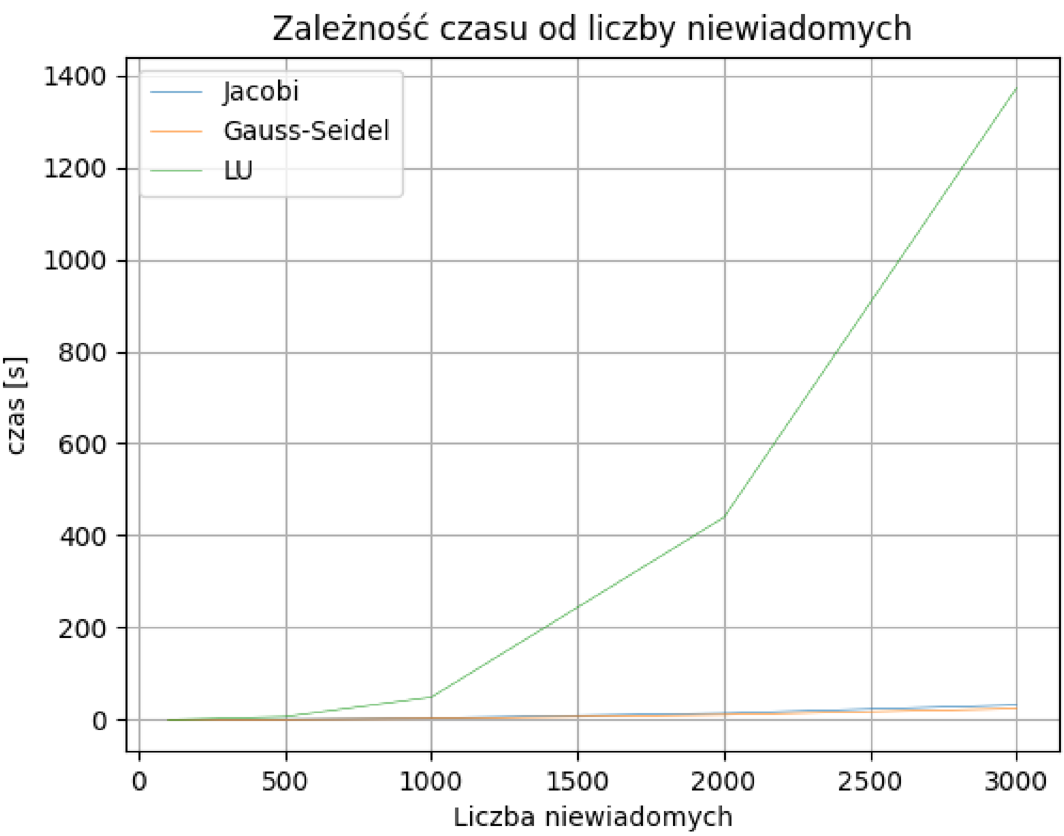

Tabela przedstawiająca czasy działania metod w zależności od liczby iteracji:

Gauss-Seidel	Jacobi	Faktoryzacja LU	Liczba iteracji
0.04s	0.043s	0.05s	100
0.67s	1.00s	6.42s	500
2.79s	3.61s	48.80s	1000
10.46s	14.02s	439.40s	2000
23.87s	31.85s	1372.30s	3000

7. Zadanie F

Czas obliczeń dla każdej z opisanych metod rośnie wraz ze wzrostem liczby niewiadomych. Metoda bezpośrednia, czyli faktoryzacja LU, jest najdokładniejsza, ale zajmuje dużo czasu, na przykład dla 3000 niewiadomych czas obliczeń wyniósł około 20 minut. Metody iteracyjne są mniej dokładne, ale wykonują się znacznie szybciej. Metoda Gaussa-Seidla wymaga mniejszej liczby iteracji i znajduje rozwiązanie szybciej niż metoda Jacobiego, niezależnie od rozmiaru danych testowych. Ważne jest jednak zauważenie, że im większe dane, tym większa różnica pomiędzy metodami iteracyjnymi. Można z tego wywnioskować, że metody iteracyjne są lepsze w rozwiązywaniu układów równań z dużą liczbą niewiadomych, jednak należy pamiętać o sytuacjach, w których te metody nie zbiegają do rozwiązania, jak w zadaniu C. W takich przypadkach jedyną opcją pozostaje rozwiązanie za pomocą metody bezpośredniej.