Studiengang:
Intelligent Systems Design (ISD)

HOCHSCHULE
HAMM-LIPPSTADT

Lehrveranstaltung:

Mathematik II

Sommer Semester 2022

Rechnen mit komplexen Zahlen
(zum Nachbereiten. Teil 1)

Lernziele

- Wiederholung:
  - Menge der reellen Zahlen,
  - Linearkombination.
- Menge der komplexen Zahlen.
- Operationen auf komplexen Zahlen.

Wiederholung: Menge der reellen Zahlen

Was verstehen wir unter der Menge reeller Zahlen?

Wiederholung: Menge der reellen Zahlen

Die Gesamtheit aller **rationalen** und **irrationalen** Zahlen bezeichnet man als Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Die Elemente dieser Menge kann man durch **die Punkte der Zahlengeraden** veranschaulichen.

Wiederholung: Menge der reellen Zahlen

Was verstehen wir unter der Menge rationaler Zahlen?

Wiederholung: Menge der reellen Zahlen

Menge der rationalen Zahlen.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

Wiederholung: Menge der reellen Zahlen

Was verstehen wir unter der Menge irrationaler Zahlen?

Wiederholung: Menge der reellen Zahlen

Menge der irrationalen Zahlen.

Jede rationale Zahl lässt sich als **endlicher** oder **periodischer** Dezimalbruch darstellen.

Andererseits gibt es **Dezimalbrüche**, die weder endlich noch periodisch sind. Solche Dezimalbrüche werden als **irrationale** Zahlen bezeichnet.

Wiederholung: Linearkombination

Definition

Einen Vektor $\vec{b}$ der Form

$$\boxed{\vec{b} = \lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \overrightarrow{a_2} + \ldots + \lambda_n \overrightarrow{a_n}}$$

mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ nennt man eine Linearkombination der Vektoren

$$\boxed{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots \overrightarrow{a_n}}$$

Zahlenbereichserweiterung

Offensichtlich gelten die folgenden Teilmengenbeziehungen:

$$\boxed{\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.}$$

Man kann auch sagen, dass durch *Zahlbereichserweiterung* immer umfassendere Zahlenmengen erhältlich sind:

Zahlenbereichserweiterung

So führt etwa die Subtraktion aus dem Bereich der natürlichen Zahlen hinaus zu den ganzen Zahlen:

$$\boxed{3 - 7 = -4 \in \mathbb{Z}}$$

und die Division führt von den ganzen Zahlen in den Bereich der Brüche:

$$\boxed{3/(-7) = -\tfrac{3}{7} \in \mathbb{Q}.}$$

Zahlenbereichserweiterung

Brüche lassen sich nun addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren. Als Ergebnis erhält man stets wieder einen Bruch.

Auf die irrationalen Zahlen kommt man erst beispielsweise durch das Lösen von quadratischen Gleichungen.

So ist $\boxed{\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}}$ Lösung von $\boxed{x^2 = 2}$.

Komplexe Zahlen. Menge der komplexen Zahlen

Definition

Die Menge $\boxed{\mathbb{C} = \{z = x + i \cdot y \mid \; x, y \in \mathbb{R}\}}$ bezeichnet die Menge der komplexen Zahlen.

Man nennt $\boxed{x = Re\, z}$ den Realteil, $\boxed{y = Im\, z}$ den Imaginärteil der komplexen Zahl $\boxed{z = x + i \cdot y}$.

Komplexe Zahlen. Menge der komplexen Zahlen

Definition. Fortsetzung

Die Zahl i mit $\boxed{i^2 = -1}$ heißt imaginäre Einheit.

Komplexe Zahlen

Praktisches Beispiel

Nennen Sie den Realteil und den Imaginärteil der komplexen Zahl

$$z = 5 - 7i$$

Komplexe Zahlen

Praktisches Beispiel. Lösung

Die komplexe Zahl $z = 5 - 7\mathrm{i}$ *hat den Realteil* $\operatorname{Re} z = 5$ *und den Imaginärteil* $\operatorname{Im} z = -7$ *(und nicht den Imaginärteil* $-7\mathrm{i}$*).*

Komplexe Zahlen

Praktisches Beispiel

Nennen Sie den Realteil und den Imaginärteil der imaginären Einheit.

Komplexe Zahlen

Praktisches Beispiel. Lösung

Die imaginäre Einheit $\mathrm{i} = 0 + 1 \cdot \mathrm{i}$

hat den Realteil $\operatorname{Re} \mathrm{i} = 0$ *und den Imaginärteil* $\operatorname{Im} \mathrm{i} = 1$.

Komplexe Zahlen

Bemerkung

Der imaginäre Einheit heißt in den technischen Disziplinen oft j und in den Informationsdisziplinen I.

Komplexe Zahlen

Reelle und komplexe Zahlen. Zahlbereichserweiterung

Die komplexen Zahlen, deren Imaginärteil 0 ist, kann man mit den reellen Zahlen identifizieren.

In diesem Sinne ist $\mathbb{R}$ eine Teilmenge von $\mathbb{C}$.

Komplexe Zahlen, deren Realteil 0 ist, nennt man rein-imaginär.

Komplexe Zahlen

Praktisches Beispiel

Welcher reellen Zahl entspricht die komplexe Zahl

$$z = \sqrt{2} + 0i \text{ ?}$$

Wie heißt die komplexe Zahl $-\frac{5}{7}i$?

Komplexe Zahlen

Praktisches Beispiel. Lösung

Die komplexe Zahl $\sqrt{2} + 0 \cdot \mathrm{i}$ *entspricht der reellen Zahl* $\sqrt{2}$. *Die (komplexe) Zahl* $-5/7\,\mathrm{i}$ *ist rein-imaginär. Die imaginäre Einheit* i *ist ebenfalls rein-imaginär.*

Komplexe Zahlen

Gleichheit komplexer Zahlen. Praktisches Beispiel

Welche von den komplexen Zahlen sind gleich und warum ?

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 8/5 - 3/10\,\mathrm{i}, \\
z_2 &= 8/5 - 4/10\,\mathrm{i}, \\
z_3 &= \sqrt{3} - 0.3\mathrm{i}, \\
z_4 &= 1.6 - 0.3\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

Komplexe Zahlen

Gleichheit komplexer Zahlen. Praktisches Beispiel. Lösung

Von den komplexen Zahlen

$$\begin{aligned} z_1 &= 8/5 - 3/10\,\mathrm{i}, \\ z_2 &= 8/5 - 4/10\,\mathrm{i}, \\ z_3 &= \sqrt{3} - 0.3\mathrm{i}, \\ z_4 &= 1.6 - 0.3\mathrm{i} \end{aligned}$$

sind nur z_1 und z_4 gleich.

Komplexe Zahlen

Gleichheit komplexer Zahlen. Definition

Zwei komplexe Zahlen sind genau dann gleich, wenn sowohl ihr Realteil als auch ihr Imaginärteil übereinstimmen:

$$\boxed{\begin{gathered} x_1 + i \cdot y_1 = x_2 + i \cdot y_2 \\ \Leftrightarrow \\ x_1 = x_2 \text{ und } y_1 = y_2 \end{gathered}}$$

Komplexe Zahlen

Die Grundrechenarten. Definition

$$(x_1 + y_1 \cdot i) + (x_2 + y_2 \cdot i) = \ (x_1 + x_1) + \ (y_1 + y_2) \cdot i$$

$$(x_1 + y_1 \cdot i) - (x_2 + y_2 \cdot i) = \ (x_1 - x_1) + \ (y_1 - y_2) \cdot i$$

Komplexe Zahlen

Die Grundrechenarten. Definition. Fortsetzung

$$(x_1 + y_1 \cdot i) \cdot (x_2 + y_2 \cdot i) = \ (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \ (x_1 y_2 + x_2 y_1) \cdot i$$

$$\frac{(x_1 + y_1 \cdot i)}{(x_2 + y_2 \cdot i)} = \ \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{{x_2}^2 + {y_2}^2} + \ \frac{(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{{x_2}^2 + {y_2}^2} \cdot i \ ,$$

$$x_2 + y_2 \cdot i \neq 0$$

Komplexe Zahlen

Die Grundrechenarten. Merkregel

Die Definition der *Summe bzw. Differenz* zweier komplexer Zahlen ist jedenfalls „straightforward“: Man addiert bzw. subtrahiert jeweils sowohl die Real- als auch die Imaginärteile getrennt.

Komplexe Zahlen

Die Grundrechenarten. Merkregel. Fortsetzung

Die Definition der *Multiplikation* sieht kompliziert aus, folgt aber einfach aus den üblichen (aus dem reellen Rechnen bekannten) Regeln, wie man Klammern ausmultipliziert:

$$\begin{aligned}
&(x_1 + i \cdot y_1) \cdot (x_2 + i \cdot y_2) = \\
&\quad = \; x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot i \cdot y_2 + i \cdot y_1 \cdot x_2 + i \cdot y_1 \cdot i \cdot y_2 \\
&\quad = \; x_1 x_2 + i \cdot x_1 y_2 + i \cdot x_2 y_1 - y_1 y_2 \\
&\quad = \; (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i \cdot (x_1 y_2 + x_2 y_1),
\end{aligned}$$

Komplexe Zahlen

Die Grundrechenarten. Merkregel. Fortsetzung

Auf die Formel für die *Division* komplexer Zahlen kommen wir durch folgende Umformungen:

$$\frac{x_1 + \mathrm{i} \cdot y_1}{x_2 + \mathrm{i} \cdot y_2} = \frac{(x_1 + \mathrm{i} \cdot y_1) \cdot (x_2 - \mathrm{i} \cdot y_2)}{(x_2 + \mathrm{i} \cdot y_2) \cdot (x_2 - \mathrm{i} \cdot y_2)}$$

$$= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + \mathrm{i} \cdot (x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} .$$

Komplexe Zahlen

Die Grundrechenarten. Praktisches Beispiel

Berechnen Sie:

$$(3+4i)+(1-2i)$$

$$(3+4i)-(1-2i)$$

Komplexe Zahlen

Die Grundrechenarten. Praktisches Beispiel. Lösung

$$
\begin{aligned}
(3+4i)+(1-2i) &= (3+1)+(4-2)i \\
&= 4+2i, \\
(3+4i)-(1-2i) &= (3-1)+(4-(-2))i \\
&= 2+6i.
\end{aligned}
$$

Komplexe Zahlen

Die Grundrechenarten. Praktisches Beispiel

Berechnen Sie:

$$(3 + 4\mathrm{i}) \cdot (1 - 2\mathrm{i})$$

Komplexe Zahlen

Die Grundrechenarten. Praktisches Beispiel. Lösung

$$
\begin{aligned}
(3+4i)\cdot(1-2i) &= \\
&= \underbrace{3\cdot 1}_{3} + \underbrace{3\cdot(-2i)}_{-6i} + \underbrace{4i\cdot 1}_{4i} + \underbrace{4i\cdot(-2i)}_{-8i^2} \\
&= 3 - 6i + 4i + 8 \\
&= (3+8) + (4-6)i = 11 - 2i\,.
\end{aligned}
$$

Komplexe Zahlen

Die Grundrechenarten. Praktisches Beispiel

Berechnen Sie:

$$\frac{3+4i}{1-2i}$$

Komplexe Zahlen

Die Grundrechenarten. Praktisches Beispiel. Lösung

Und für die Division erhält man durch Erweitern mit $(1+2i)$*:*

$$\frac{3+4i}{1-2i} = \frac{(3+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$$

$$= \frac{(3-8)+(4+6)i}{1+2^2}$$

$$= \frac{-5+10i}{5} = -1+2i\,.$$

Komplexe Zahlen

Die Grundrechenarten. Aufgabe. Lösen Sie beim Nachbereiten:

a) *Gegeben seien die komplexen Zahlen* $z_1 := -1 - 8\mathrm{i}$ *und* $z_2 := -2 - 3\mathrm{i}$.
Berechnen Sie $2z_1$, $2z_1 + z_2$, $z_2 - z_1$, $z_1 \cdot z_2$, z_1^2 $(:= z_1 \cdot z_1)$ *und* $z_1 : z_2$.

b) *Berechnen Sie die folgenden Potenzen von* i:
i^2, i^3, i^4, i^5, i^6 *und* i^{27}.

Zusammenfassung

- Wiederholung:
  - Menge der reellen Zahlen,
  - Lineare Kombination.
- Menge der komplexen Zahlen.
- Operationen auf komplexen Zahlen.

Test 1.) oxoo, 2.) oxoo, 3.) ooox, 4.) oxoo, 5.) xoxx,

(1) Der Imaginärteil von $5 - 7i$ lautet

☐ $-7i$ ☐ -7 ☐ $7i$ ☐ 7

(2) Die komplexe Zahl $5/i$ ist gleich

☐ $5i$ ☐ $-5i$ ☐ $i/5$ ☐ $5 + i$

(3) Welche Beziehung gilt zwischen 4i und 5i?

☐ $4i < 5i$ ☐ $4i = 5i$ ☐ $4i > 5i$ ☐ weder/noch

(4) Die konjugiert komplexe Zahl zu $5 - 7i$ lautet

☐ $-5 - 7i$ ☐ $5 + 7i$ ☐ $-5 + 7i$ ☐ $-7i$

(5) Stets reell ist/sind

☐ $z + \overline{z}$ ☐ $z - \overline{z}$ ☐ $|z|$ ☐ $\overline{z} \cdot z$