

Ergänzende Aufgaben: Lineare Gleichungssysteme. Lösungsmethoden

1. Ermitteln Sie die Lösung des folgenden eindeutig lösbaren LGS:

- a) mittels des Gauß-Jordan-Verfahrens, indem Sie zunächst die eindeutige Lösbarkeit anhand einer Determinante prüfen. Berechnen Sie die Determinante nach dem Laplace'schen Entwicklungssatz.

$$\begin{array}{rrrrrrcl} 4x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 10 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 8 \end{array}$$

- b) anhand der Crammer'schen Regel, indem Sie zunächst die Determinante der Matrix A nach dem Laplace'schen Entwicklungssatz berechnen. Ist die Matrix A regulär? (ja/nein und warum). Welche Eigenschaften hat ein LGS mit einer regulären Koeffizientenmatrix?

Die restlichen Determinanten berechnen Sie bitte nach der Regel von Sarrus:

$$\begin{array}{rrrrrrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 7 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 10 \\ 3x_1 & & & + & x_3 & = & 5 \end{array}$$

2. Analysieren Sie das folgende LGS auf die Lösbarkeit:

$$\begin{array}{rrrrrrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 7 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & & & + & x_3 & = & 5 \end{array}$$

3. a) Analysieren Sie das folgende LGS auf die (ein-/mehrdeutige) Lösbarkeit. Ermitteln Sie ggf. die Lösung nach dem Gauß-Verfahren:

$$\begin{array}{lcl} 1) & \begin{array}{rrrrrrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 7 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 11 \end{array} & 2) & \begin{array}{rrrrrrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -3x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & -3 \\ 5x_1 & - & 5x_2 & + & 5x_3 & = & 5 \end{array} \end{array}$$

- b) Lösen Sie das zugehörige homogene LGS.

*4. Die Variablen x_1, x_2, \dots in den folgenden chemischen Reaktionen sollen für möglichst kleine natürliche Zahlen stehen:

- a) $x_1 Fe + x_2 O_2 \longrightarrow x_3 Fe_2O_3$
- b) $x_1 FeS_2 + x_2 O_2 \longrightarrow x_3 Fe_2O_3 + x_4 SO_4$
- c) $x_1 C_6H_{12}O_6 + x_2 O_2 \longrightarrow x_3 CO_2 + x_4 H_2O$
- d) $x_1 C_3H_5N_3O_9 \longrightarrow x_2 CO_2 + x_3 H_2O + x_4 N_2 + x_5 O_2$
- e) $x_1 NH_3 + x_2 CuO_2 \longrightarrow x_3 N_2 + x_4 Cu + x_5 H_2O$
- f) $x_1 Al + x_2 H_2SO_4 \longrightarrow x_3 Al_2(SO_4)_3 + x_4 H_2$
- g) $x_1 Ca_3(PO_4) + x_2 HCl \longrightarrow x_3 CaCl_2 + x_4 H_3(PO_4)$

*Vertiefungsaufgabe