Studiengang:
Intelligent Systems Design (ISD)

HOCHSCHULE
HAMM-LIPPSTADT

Lehrveranstaltung:

Mathematik I

Matrizen und Determinanten.
LGS: 3.Teil

Lernziele

- Ich kann eine reguläre Matrix invertieren.
- Ich kann ein LGS mittels Gauß-Jordan-Verfahren lösen.
- Ich kann ein LGS mittels der Crammer‘schen Regel lösen.
- Ich kann Eigenwerte und –Vektoren einer Matrix errechnen.

Die Inverse einer Matrix

Definition und Rechenregeln

Ist A eine reguläre (n,n)-Matrix, dann gilt per definition $\mathrm{Rg}(A) = n$. Es stellt sich nun die Frage, ob es eine Matrix X gibt, für die gilt:

$$\boxed{AX = I\,.}$$

Die Inverse einer Matrix

Definition und Rechenregeln

Bezeichnen wir mit $\vec{e}_i$ die i-te Spalte der Einheitsmatrix $I = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$, dann sind wegen $\mathrm{Rg}(A) = n$ die folgenden Gleichungssysteme *eindeutig lösbar*:

$$A\vec{x}_1 = \vec{e}_1,\ A\vec{x}_2 = \vec{e}_2,\ \ldots,\ A\vec{x}_n = \vec{e}_n.$$

Die Inverse einer Matrix

Definition und Rechenregeln

Wir können daher eine Matrix X definieren, deren Spalten den n *eindeutigen* Lösungen $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ dieser Systeme entspechen:

$$X := (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n) .$$

Die Inverse einer Matrix

Definition

Zu jeder regulären Matrix A existiert genau eine Matrix X, für die $AX = I$ gilt.

Man nennt X zu A invers oder die zu A inverse Matrix und schreibt:

$$X = A^{-1}.$$

Es gilt damit stets

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Die Inverse einer Matrix

Bemerkung

Die Regularität ist dabei für die Existenz einer solchen Matrix notwendige Voraussetzung.

Auch A^{-1} ist wieder regulär.

Die Inverse einer Matrix

Rechenregeln

Für den Umgang mit Inversen sind folgende Rechenregeln wichtig:

$$(A^{-1})^{-1} = A;$$

$$(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1};$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1};$$

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1} \quad (\lambda \neq 0).$$

Die Inverse einer Matrix

Bemerkung

Wir können jetzt die Lösung eines linearen (n,n)-*Systems*

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

mit regulärer Matrix A *mittels der Inversen berechnen. Das System ist nämlich äquivalent zu*

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b},$$

woraus wegen $A^{-1}A = I$ *sofort folgt:*

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Die Inverse einer Matrix

Bemerkung

Kennt man also die Inverse A^{-1}, so lässt sich die Lösung des Systems sofort angeben. Dies ist von Vorteil, wenn für verschiedene rechte Seiten $\vec{b}$ Lösungen gesucht sind.

Die Inverse einer Matrix

Beispiel

Gegeben seien die regulären Matrizen A, B. *Vereinfachen Sie den Ausdruck*

$$\left(2AB^{-1}\right)^{-1}\left(B^{-1}A^{T}\right)^{T}$$

unter der Annahme, dass B *symmetrisch ist, soweit wie möglich.*

Die Inverse einer Matrix

Beispiel. Lösung

Für den ersten Faktor gilt

$$\left(2AB^{-1}\right)^{-1} = \frac{1}{2}\left(B^{-1}\right)^{-1}A^{-1} = \frac{1}{2}BA^{-1}.$$

Die Inverse einer Matrix

Beispiel. Lösung. Fortsetzung

Der zweite Faktor vereinfacht sich wegen der Symmetrie von B zu

$$\begin{aligned}\left(B^{-1}A^T\right)^T &= (A^T)^T(B^{-1})^T \\ &= A(B^T)^{-1} = AB^{-1}.\end{aligned}$$

Die Inverse einer Matrix

Beispiel. Lösung. Fortsetzung

Insgesamt ergibt sich also

$$\begin{aligned}\left(2AB^{-1}\right)^{-1}\left(B^{-1}A^{T}\right)^{T} &= \frac{1}{2}B(A^{-1}A)B^{-1}\\ &= \frac{1}{2}BB^{-1}\\ &= \frac{1}{2}I.\end{aligned}$$

Die Inverse einer Matrix

Das Gauß-Jordan-Verfahren

Zur Bestimmung der Inversen gibt es ein numerisches Verfahren, das *Gauß-Jordan-Verfahren*. Dieses lässt sich am besten anhand eines Beispiels erläutern.

Die Inverse einer Matrix

Das Gauß-Jordan-Verfahren. Beispiel

Wir geben uns nun die reguläre Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

vor. Wie bisherige Überlegungen zeigen, müssen zur Bestimmung der Inversen die 3 *Gleichungssysteme*

$$\boxed{A\vec{x}_i = \vec{e}_i,\ i = 1, 2, 3}$$

gelöst werden.

Die Inverse einer Matrix

Das Gauß-Jordan-Verfahren. Beispiel

Man schreibt in das Starttableau auf die rechte Seite alle drei Vektoren $\vec{e}_i$, also die Matrix I.

Auf diese wendet man gleichzeitig die benötigten elementaren Umformungen an, um A auf *obere Dreiecksgestalt* zu bringen:

Die Inverse einer Matrix

Das Gauß-Jordan-Verfahren. Beispiel

$$
\begin{array}{cccc|ccc}
(1) & 3 & -3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\
(2) & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\
(3) & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{cccc|ccc}
(1') & 3 & -3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\
(2') & 0 & 2 & -1 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\
(3') & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -1 & 1
\end{array}
$$

Die Inverse einer Matrix

Das Gauß-Jordan-Verfahren. Beispiel

Drei Lösungen effizient bestimmen: Obere Dreiecksmatrix auf der linken Tableauseite mittels elementarer Umformungen in die Einheitsmatrix überführen. Hierzu erzeugen wir — zunächst in der letzten Spalte der Dreiecksmatrix — oberhalb der Hauptdiagonalen Nullen ($z_{1''} = z_{1'} - 6z_{3'}$, $z_{2''} = z_{2'} + z_{3'}$), danach in der mittleren Spalte ($z_{1'''} = z_{1''} + \frac{3}{2}z_{2''}$).

Die Inverse einer Matrix

Das Gauß-Jordan-Verfahren. Beispiel

$$
\begin{array}{cccc|ccc}
(1'') & 3 & -3 & 0 & -1 & 6 & -6 \\
(2'') & 0 & 2 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \\
(3'') & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -1 & 1
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{ccc|ccc}
3 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 6 & -\frac{9}{2} \\
0 & 2 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -1 & 1
\end{array}
$$

Die Inverse einer Matrix

Das Gauß-Jordan-Verfahren. Beispiel

Abschließend müssen wir lediglich alle Zeilen durch das entsprechende Diagonalelement (dies ist die dritte elementare Umformung!) dividieren und erhalten:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -1 & 1 \end{array}$$

Die Inverse einer Matrix

Das Gauß-Jordan-Verfahren. Beispiel

Die Lösungen der drei Systeme können jetzt abgelesen werden:

Die 1. Spalte auf der rechten Seite ist $\vec{x}_1$, die 2. Spalte ist $\vec{x}_2$ und die 3. Spalte entspricht $\vec{x}_3$.

Die Inverse einer Matrix

Das Gauß-Jordan-Verfahren. Beispiel

D.h. die zu A inverse Matrix A^{-1} ergibt sich zu

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Um Rechenfehler auszuschließen, empfiehlt sich abschließend eine Probe: $AA^{-1} = I$.

Die Inverse einer Matrix

Das Gauß-Jordan-Verfahren. Praktisches Beispiel

Welche Lösungen hat das System $A\vec{x} = \vec{b}$ *mit der Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

für die rechten Seiten

a) $\vec{b} = \vec{0}$,

b) $\vec{b} = (1, 1, 1)^T$?

Die Inverse einer Matrix

Praktisches Beispiel. Lösung

Da wir die Inverse A^{-1} im vorangegangenen Beispiel bereits zu

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

berechnet haben, können wir die Lösung des Systems als $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ schreiben. Damit ist:

Die Inverse einer Matrix

Praktisches Beispiel. Lösung. Fortsetzung 1 von 2

a) $\vec{x} = A^{-1}\vec{0} = \vec{0}.$

Die triviale Lösung ist also die einzige Lösung des homogenen Systems.

Die Inverse einer Matrix

Praktisches Beispiel. Lösung. Fortsetzung 2 von 2

b) $\vec{x} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$

Zusammenfassung

- Inverse einer regulären Matrix.
- Gauß-Jordan-Verfahren.
- Crammer‘sche Regel.
- Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix.