Studiengang:
Intelligent Systems Design (ISD)

HOCHSCHULE
HAMM-LIPPSTADT

Lehrveranstaltung:

Mathematik II

HOCHSCHULE
HAMM-LIPPSTADT

Lineare Algebra.
Matrizen

Fragen zur Selbststudiums-Wiederholung

- Skalarprodukt.
- Eigenschaften des inneren (Skalar-) Produkts.
- Vektorprodukt zweier 3d Vektoren.
- Gemischtes (Spat-) Produkt dreier 3d Vektoren.

Lernziele

- Ich weiss, was man unter einer linearen Abbildung versteht und kann diese bilden.
- Ich weiss, was man unter einer Matrix versteht.
- Ich kann feststellen, ob die gegebenen Matrizen gleich sind.
- Ich kann beurteilen zu welchem Sonderfall die Matrix gehört / welchen Typ die Matrix hat.
- Ich bin mit Matrizenoperationen vertraut und kann sie durchführen.

Grundlegende Definitionen

Bemerkung

Wir können einem n-dimensionalen Vektor einen m-dimensionalen Vektor zuordnen.

Interessant sind in diesem Zusammenhang spezielle Funktionen, so genannte lineare Abbildungen, die zusätzlich bestimmte (lineare) Eigenschaften erfüllen und üblicherweise mit φ bezeichnet werden.

Grundlegende Definitionen

Definition

Eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt lineare Abbildung, wenn für alle $\vec{x}$ und $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\boldsymbol{\varphi(\vec{x}+\vec{y}) = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y}),}$$

$$\boldsymbol{\varphi(c \cdot \vec{x}) = c \cdot \varphi(\vec{x}).}$$

Grundlegende Definitionen

Praktisches Beispiel

Bilden Sie eine lineare Abbildung, die jedem Vektor

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ einen Vektor $\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ zuordnet.

Grundlegende Definitionen

Praktisches Beispiel. Lösung

Setzt man $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, *dann ist durch*

$$\begin{aligned} z_1 &= \quad 3x_1 + x_2 + 5x_3 \\ z_2 &= -2x_1 \qquad + 8x_3 \end{aligned}$$

offensichtlich eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *gegeben. Jedem Vektor* $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ *wird ein Vektor* $\vec{z} \in \mathbb{R}^2$ *zugeordnet.*

Grundlegende Definitionen

Praktisches Beispiel. Bemerkung

Im Prinzip ist die Abbildung durch die Gleichungskoeffizienten definiert. Daher kann man diese auch beschreiben, indem man die Koeffizienten zu einem Schema zusammenfasst:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Grundlegende Definitionen

Bemerkung. Fortsetzung

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Das Koeffizientenschema nennt man Matrix:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildung

Allgemein ist eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
z_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\
z_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\
\ldots &\quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
z_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n.
\end{aligned}$$

Lineare Abbildung

Jedem Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ wird ein Vektor $\vec{z} \in \mathbb{R}^m$ zugeordnet.

In Matrix-Schreibweise lauten die Gleichungen dann:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Matrix

Definition

Ein rechteckiges Zahlenschema aus *m* Zeilen und *n* Spalten nennt man eine Matrix vom Typ (*m*, *n*):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrix

Definition. Fortsetzung

Die Zahlen a_{ik} heißen Elemente der Matrix.

Das Element a_{ik} steht in der i-ten Zeile und k-ten Spalte.

Daher heißt i Zeilenindex und k Spaltenindex.

Matrix

Bemerkung

Die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
z_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\
z_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\
\ldots \quad & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
z_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n
\end{aligned}
$$

können jetzt abkürzend geschrieben werden.

Matrix

Bemerkung. Fortsetzung

Wir erhalten

$$\vec{z} = A\vec{x}.$$

Die i-te Komponente z_i des Vektors $\vec{z}$ ergibt sich immer als Skalarprodukt aus der i-ten Matrixzeile und dem Vektor $\vec{x}$:

$$z_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \cdot \vec{x}.$$

Matrix

Praktisches Beispiel

a) Schreiben Sie die Gleichungen von $\vec{z} = A\vec{x}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 7 \\ -5 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

aus.

Matrix

Praktisches Beispiel. Lösung

$$\vec{z} = A\vec{x} \qquad\qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 7 \\ -5 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Der $(2,4)$*-Matrix* A *entnimmt man, dass*

$a_{11} = 2,\ a_{12} = 0,\ a_{13} = 4,\ a_{14} = 7$ *(1. Zeile) und*

$a_{21} = -5,\ a_{22} = 1,\ a_{23} = 3,\ a_{24} = 0$ *(2. Zeile) ist.*

Somit lauten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2x_1 + 0x_2 + 4x_3 + 7x_4 \\ z_2 &= -5x_1 + 1x_2 + 3x_3 + 0x_4 \end{aligned}$$

Matrix

Praktisches Beispiel

b) Welches Bild $\vec{z}$ ergibt sich für $\vec{x}^T = (1, 2, 3, 4)$?

Lösung:

Konkret ergibt sich

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 7 \cdot 4 = 42 \\ z_2 &= -5 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 0 \cdot 4 = 6. \end{aligned}$$

Matrizen. Weitere Begriffe

Bemerkung

Matrizen notiert man üblicherweise mit großen Buchstaben: $A, B, C, \ldots$ Möchte man auch den Typ aufführen, so schreibt man kurz $A_{(m,n)}$ für eine (m, n)-Matrix. Gebräuchlich ist auch die Schreibweise

$$\boxed{(a_{ik}), (b_{ik}), (c_{ik}), \ldots,}$$

wenn man notieren möchte, wie das allgemeine Element der jeweiligen Matrix in Position (i, k) definiert ist.

Matrizen. Weitere Begriffe

Sonderfälle

- Eine Matrix A mit gleich vielen Zeilen und Spalten, d.h. eine (m, m)-Matrix, nennt man *quadratisch*. Ihre Elemente $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm}$ bilden die so genannte *Hauptdiagonale*. Ihren Typ, üblicherweise *Ordnung* genannt, notiert man abkürzend zu A_m.

Beispiel

$$A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Die Hauptdiagonale ist $(a_{11}, a_{22}, a_{33}) = (7, 2, 5)$.

Matrizen. Weitere Begriffe

Sonderfälle

- Eine quadratische (m, m)-Matrix D_m, bei der alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen verschwinden ($d_{ik} = 0$ für $i \neq k$), heißt *Diagonalmatrix*. Abkürzend schreibt man auch $D_m = \text{diag}\,(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{mm})$.

Beispiel $D_3 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Hier ist $D_3 = (d_{11}, d_{22}, d_{33}) = (7, 2, 5)$.

Die folgenden Elemente verschwinden: $d_{12} = d_{13} = d_{21} = d_{23} = d_{31} = d_{32}$

Die Zeilen- und Spaltenindizes verschwundener Elemente sind unterschiedlich.

Matrizen. Weitere Begriffe

Sonderfälle

- Eine quadratische Matrix, die nur auf und oberhalb bzw. unterhalb der Hauptdiagonalen von Null verschiedene Elemente haben darf, heißt *obere Dreicksmatrix* bzw. *untere Dreiecksmatrix*.

Beispiele

Die von Null verschiedenen Elemente befinden sich auf und

(i) oberhalb

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(ii) unterhalb

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

der Hauptdiagonale.

Matrizen. Weitere Begriffe

Sonderfälle

- Eine quadratische (m,m)-Matrix, die auf der Hauptdiagonalen nur „1“, sonst „0“ stehen hat, nennt man *Einheitsmatrix* der Ordnung m. Üblicherweise bezeichnet man sie mit I_m oder I (I für Identität).

Beispiel

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{bzw.} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrizen. Weitere Begriffe

Sonderfälle

- Eine (m,n)-Matrix, deren Elemente alle 0 sind, heißt *Nullmatrix*, bezeichnet mit 0 bzw. $0_{(m,n)}$.

Beispiel

$$O_{(2,3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrizen. Weitere Begriffe

Sonderfälle

- Ein Spezialfall ist die $(m,1)$-Matrix, sie besteht nur aus einer Spalte und ist unser üblicher *Spaltenvektor*. Eine $(1,n)$-Matrix besteht dagegen nur aus einer Zeile und wird *Zeilenvektor* genannt.

Beispiel

(i) Eine (m,1) = (3,1) Matrix ist ein Spaltenvektor $S_{(3,1)} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

(ii) Eine (1,n) = (1,3) Matrix ist ein Zeilenvektor $Z_{(1,3)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

Matrizen. Weitere Begriffe

Praktisches Beispiel

Nennen Sie den Sonderfall und die Ordnung / den Typ der Matrix:

$$D_4 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$O_{(3,2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrizen. Weitere Begriffe

Praktisches Beispiel. Lösung

$D_4 = \mathit{diag}\,(7, 2, 0, 5)$ *ist eine Diagonalmatrix der Ordnung 4.*

I_3 *ist die Einheitsmatrix der Ordnung 3.*

$O_{(3,2)}$ *ist die* $(3, 2)$*-Nullmatrix.*

Operationen und Rechenregeln für Matrizen

Zunächst halten wir fest, dass zwei Matrizen A, B genau dann *gleich* sind (im Zeichen $A = B$), wenn sie vom gleichen Typ sind *und* elementweise übereinstimmen ($a_{ik} = b_{ik}$ für alle i, k).

Im Folgenden werden wir nun die wichtigsten Rechenregeln für Matrizen aufführen.

Skalarmultiplikation

Eine Matrix A wird mit einem Skalar λ multipliziert, indem man *alle* Elemente von A mit λ multipliziert:

$$\boxed{\lambda A = \lambda \cdot (a_{ik}) = (\lambda \cdot a_{ik}).}$$

Skalarmultiplikation

Praktisches Beispiel.

Multiplizieren Sie die gegebene Matrix mit dem Skalar 3.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Skalarmultiplikation

Praktisches Beispiel. Lösung

Multiplizieren Sie die gegebene Matrix mit dem Skalar 3.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow 3A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrixaddition/-subtraktion

Zwei Matrizen $A = (a_{ik})$ und $B = (b_{ik})$ des *gleichen Typs* werden addiert bzw. subtrahiert, indem man ihre entsprechenden Elemente addiert bzw. subtrahiert:

$$\boxed{A \pm B = (a_{ik}) \pm (b_{ik}) = (a_{ik} \pm b_{ik}).}$$

Matrixaddition/-subtraktion

Praktisches Beispiel

Berechnen Sie:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$$

Matrixaddition/-subtraktion

Praktisches Beispiel. Lösung

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 2+5 \\ 3+6 & 4-7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$$

Transponierte einer Matrix

Vertauscht man in einer Matrix A Zeilen mit Spalten, so entsteht die Transponierte von A: A^T. Für die Elemente von $A = (a_{ik})$ und $A^T = (a^T_{ik})$ gilt

$$\boxed{a^T_{ik} = a_{ki} \text{ für alle } i \text{ und } k.}$$

Transponierte einer Matrix

Praktisches Beispiel

Transponieren Sie die gegebene Matrix :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Transponierte einer Matrix

Praktisches Beispiel. Lösung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Transponierte einer Matrix

Bemerkung

Für transponierte Matrizen folgen unmittelbar aus der Definition die Rechengesetze:

$$\boxed{(A+B)^T = A^T + B^T \quad \text{und} \quad (A^T)^T = A.}$$

Transponierte einer Matrix

Bemerkung

In vielen Anwendungen treten übrigens so genannte *symmetrische Matrizen* auf, bei denen die Elemente spiegelsymmetrisch zur Hauptdiagonalen angeordnet sind, d.h. es gilt

$a_{ik} = a_{ki}$ für alle i und k bzw. $A^T = A$.

Transponierte einer Matrix

Praktisches Beispiel

Vereinfachen Sie den Ausdruck

$$(A^T + B)^T - A.$$

Transponierte einer Matrix

Praktisches Beispiel. Lösung

$$\begin{aligned}(A^T + B)^T - A &= (A^T)^T + B^T - A \\ &= A + B^T - A = B^T.\end{aligned}$$

Die Matrizenmultiplikation

Die Multiplikation zweier Matrizen A und B wird so definiert, dass sie der Hintereinanderschaltung der zugehörigen Abbildungen entspricht. Wir betrachten hierzu zunächst ein Beispiel:

Die Matrizenmultiplikation

Beispiel

Gegeben seien die zwei Abbildungen

$$\vec{y} = B\vec{x},$$

d.h $$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

und

Die Matrizenmultiplikation

Beispiel

und

$$\vec{z} = A\vec{y},$$

d.h $$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrizenmultiplikation

Beispiel

Gesucht ist nun die zusammengesetzte Abbildung $\vec{z} = C\vec{x}$, die $\vec{z}$ direkt in Abhängigkeit von $\vec{x}$ darstellt.

Die Matrizenmultiplikation

Beispiel. Lösung

$$
\begin{aligned}
z_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\
&= a_{11}(b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3) + a_{12}(b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3) \\
&= \underbrace{(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})}_{=:\, c_{11}} x_1 + \underbrace{(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})}_{=:\, c_{12}} x_2 \\
&\quad + \underbrace{(a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23})}_{=:\, c_{13}} x_3
\end{aligned}
$$

Die Matrizenmultiplikation

Beispiel. Lösung. Fortsetzung

$$\begin{aligned} z_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \\ &= a_{21}(b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3) + a_{22}(b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3) \\ &= \underbrace{(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})}_{=:\,c_{21}}x_1 + \underbrace{(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})}_{=:\,c_{22}}x_2 \\ &\quad + \underbrace{(a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23})}_{=:\,c_{23}}x_3 \end{aligned}$$

Die Matrizenmultiplikation

Beispiel. Bemerkung

Man erkennt, dass sich die c_{ik} jeweils als *Skalarprodukt* der i-ten Zeile von A und k-ten Spalte von B ergeben!

Die Matrizenmultiplikation

Beispiel. Bemerkung. Fortsetzung

Es gilt einerseits

$$\vec{z} = C\vec{x} \quad \text{mit} \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix},$$

andererseits aber

$$\vec{z} = A\vec{y} = AB\vec{x}.$$

Man definiert daher C als Produkt:

$$C = A \cdot B.$$

Die Matrizenmultiplikation

Definition

Für zwei Matrizen A und B ist das Produkt A · B genau dann definiert, wenn die Spaltenzahl von A gleich der Zeilenzahl von B ist. Es gilt dann

$$A_{(m,n)} \cdot B_{(n,s)} = C_{(m,s)}$$

Die Matrizenmultiplikation

Definition. Fortsetzung

Die Elemente c_{ik} $(i = 1, \ldots, m; \quad k = 1, \ldots, s)$

von C sind definiert als Skalarprodukte der i-ten Zeile von A und der k-ten Spalte von B:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk}$$

Die Matrizenmultiplikation

Typcheck

Ob ein Produkt $A \cdot B$ definiert ist, lässt sich leicht überprüfen, wenn man den Typ notiert :

$$A_{(m,n)} \cdot B_{(r,s)} = C_{(m,s)}.$$

Die inneren Elemente n, r der beiden „Typ-Paare“ müssen gleich sein: $n = r$. In diesem Fall kann man den Typ der Produktmatrix ablesen: Er entspricht den beiden äußeren Elementen, d.h. ergibt sich zu (m, s).

Die Matrizenmultiplikation

Bemerkung

Die Berechnung des Elementes c_{ik} der Produktmatrix lässt sich einfach durchführen, wenn man die Matrizen nebeneinander schreibt und das Skalarprodukt aus der i-ten Zeile von A mit der k-ten Spalte von B bildet.

Die Matrizenmultiplikation

Bemerkung. Veranschaulichung

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} & \dots & b_{1s} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} & \dots & b_{ns} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k} & \dots & c_{1s} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \dots & c_{ik} & \dots & c_{is} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mk} & \dots & c_{ms} \end{pmatrix}$$

Die Matrizenmultiplikation

Praktisches Beispiel

Berechnen Sie das Produkt $C = A \cdot B$ *der Matrizen*

$$A_{(2,3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } B_{(3,2)} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 7 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Ist auch das Produkt $B \cdot A$ *definiert?*

Von welchem Typ ist es?

Die Matrizenmultiplikation

Praktisches Beispiel. Lösung. Falk-Schema

$$C = A_{(2,3)} \cdot B_{(3,2)}$$

$$\begin{array}{ccc|cc}
 & & & 5 & 6 \\
 & & & -1 & 7 \\
 & & & 0 & -8 \\
\hline
0 & 1 & 2 & 0\cdot 5 - 1\cdot 1 + 2\cdot 0 = -1 & 0\cdot 6 + 1\cdot 7 - 2\cdot 8 = -9 \\
3 & 4 & 0 & 3\cdot 5 - 4\cdot 1 + 0\cdot 0 = 11 & 3\cdot 6 + 4\cdot 7 - 0\cdot 8 = 46
\end{array}$$

Die Matrizenmultiplikation

Praktisches Beispiel. Lösung. Fortsetzung

Das Produkt $B_{(3,2)} \cdot A_{(2,3)}$ *ist wegen* $2 = 2$ *(innere Elemente) ebenfalls definiert und vom Typ* $(3, 3)$ *(äußere Elemente).*

Die Matrizenmultiplikation

Rechenregeln

Auch bei der Multiplikation von Matrizen gelten viele, von den reellen Zahlen her bekannte, Rechengesetze:

- Assoziativgesetz: $(AB)C = A(BC)$,
- Distributivgesetze: $A(B + C) = AB + AC$,
  $(A + B)C = AC + BC$,
- Speziell gilt: $AI = IA = A$ (I: Einheitsmatrix),
- $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$,
- $(AB)^T = B^T A^T$.

Die Matrizenmultiplikation

Praktisches Beispiel

a) Gegeben seien die Matrizen

$$A_{(2,3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{(3,2)} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 7 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

und $C = AB$.

Berechnen Sie möglichst einfach das Produkt ABC.

Die Matrizenmultiplikation

Praktisches Beispiel. Lösung

a) *Es ist nach Assoziativgesetz* $ABC = (AB)C = CC$

$$= \begin{pmatrix} -1\cdot(-1) - 9\cdot 11 & -1\cdot(-9) - 9\cdot 46 \\ 11\cdot(-1) + 46\cdot 11 & 11\cdot(-9) + 46\cdot 46 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -98 & -405 \\ 495 & 2017 \end{pmatrix}.$$

Die Matrizenmultiplikation

Praktisches Beispiel

b) Vereinfachen Sie den Ausdruck:

$$(C + I)^T D^T - (DC)^T.$$

Die Matrizenmultiplikation

Praktisches Beispiel. Lösung

$$\begin{aligned}(C+I)^T D^T - (DC)^T &= C^T D^T + I^T D^T - C^T D^T \\ &= I D^T = D^T.\end{aligned}$$

Zusammenfassung

- Lineare Abbildung.
- Matrix. Matrizengleicheit.
- Sonderfall und Typ einer Matrix.
- Matrizenoperationen und Typcheck.