Studiengang:
Intelligent Systems Design (ISD)

HOCHSCHULE
HAMM-LIPPSTADT

Lehrveranstaltung:

Mathematik II

Sommer Semester 2022

Rechnen mit komplexen Zahlen

Fortsetzung: 3.Teil

Lernziele

- Wiederholung: Komplexe Zahlen. Umrechnungsformeln.
- Betrag einer komplexen Zahl. Veranschaulichung.
- Rechenregeln für den Betrag.
- Multiplikation und Division komplexer Zahlen.
- Potenzen komplexer Zahlen.
- Wurzeln von komplexen Zahlen.

Komplexe Zahlen

Umrechnungsformeln

Die Umrechnungsformeln zwischen kartesischen Koordinaten und Polarkoordinaten lauten:

$$z = x + yi \qquad z = r\hat{\varphi} = |z|\hat{\varphi}$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \hat{\varphi} = \pm arccos\left(\frac{x}{r}\right)$$

$$z = |z|e^{i\varphi} \qquad z = |z|(\cos(\varphi) + isin(\varphi))$$

$$x = |z|\cos(\varphi) \qquad y = |z|sin(\varphi)$$

Komplexe Zahlen

Umrechnungsformeln. Alternative

Man könnte hier auch die Beziehung $\tan\varphi = y/x$ verwenden, müsste aber bei der Umkehrfunktion $\arctan(y/x)$ vier Fallunterscheidungen, je nach Quadrant, in dem $(x;\, y)$ liegt, durchführen.

$$\hat{\varphi} = arctan\left(\frac{y}{x}\right) + k,$$

$$k = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ \pi, & x < 0,\ y \geq 0 \\ -\pi, & x < 0,\ y < 0 \end{cases}$$

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x = 0,\ y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0,\ y < 0 \end{cases}$$

Komplexe Zahlen

Umrechnungsformeln. Aufgabe

a) *Geben Sie die Polarkoordinaten* r *und* φ *der folgenden komplexen Zahlen an:* $z_1 = 7$, $z_2 = 4\mathrm{i}$, $z_3 = -6$, $z_4 = -3\mathrm{i}$, $z_5 = 1 - \mathrm{i}$.

b) *Berechnen Sie die kartesischen Koordinaten der komplexen Zahl* z_6 *mit den Polarkoordinaten* $r = 2$, $\varphi = \pi/3$.

Komplexe Zahlen

Umrechnungsformeln. Kontrollieren Sie Ihre Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
r_1 &= 7, & \varphi_1 &= 0; \\
r_2 &= 4, & \varphi_2 &= \pi/2; \\
r_3 &= 6, & \varphi_3 &= \pi; \\
r_4 &= 3, & \varphi_4 &= -\pi/2; \\
r_5 &= \sqrt{2}, & \varphi_5 &= -\pi/4.
\end{aligned}$$

b) $x_6 = 1,\ y_6 = \sqrt{3}.$

Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen. Praktisches Beispiel

Ermitteln Sie die trigonometrische Form der komplexen Zahl $z = -3 + 4i$.

Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen. Lösung

$$\begin{aligned} z &= -3+4\mathrm{i} \\ &\approx 5\cdot[\cos(2.214)+\mathrm{i}\cdot\sin(2.214)]\,. \end{aligned}$$

Umgekehrt:

$$\begin{aligned} &4\cdot[\cos(-\pi/6)+\mathrm{i}\cdot\sin(-\pi/6)] \\ &= 4\cdot\left(\sqrt{3}/2+\mathrm{i}\cdot(-1/2)\right) \\ &= 2\sqrt{3}-2\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Komplexe Zahlen

Betrag einer komplexen Zahl

Anstelle vom Radius und Polarwinkel bei Polarkoordinaten wird im Zusammenhang mit komplexen Zahlen meist vom (Absolut-) Betrag und vom Argument (oder Arcus oder Phase oder Winkel) einer komplexen Zahl gesprochen:

Definition

Unter dem Betrag einer komplexen Zahl $z = x + iy$ versteht man

$$|z| = |x + i \cdot y| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

Komplexe Zahlen

Betrag einer komplexen Zahl. Praktisches Beispiel

Ermitteln Sie den Betrag der komplexen Zahl $z = -3 + 4i$

Komplexe Zahlen

Betrag einer komplexen Zahl. Lösung

Komplexe Zahlen

Betrag einer komplexen Zahl. Veranschaulichung

Der Betrag einer komplexen Zahl ist anschaulich gesprochen die Länge ihres Ortsvektors bzw. ihr Abstand vom Nullpunkt.

Der Term $|z_1 - z_2|$, der Betrag von $z_1 - z_2$ also, steht für den Abstand der beiden Zahlen (d.h. Punkte im $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) z_1 und z_2.

Komplexe Zahlen

Betrag. Rechenregeln

$a)\ |z| \geq 0; \quad |z| = 0 \ \Leftrightarrow \ z = 0,$

$b)\ |\bar{z}| = |z|$

$c)\ |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Dreiecksungleichung)

$d)\ |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$e)\ |z_1/z_2| \leq |z_1|/|z_2|,$ falls $z_2 \neq 0$

Komplexe Zahlen

Betrag. Rechenregeln. Praktisches Beispiel

a) Zeigen Sie: $|\bar{z}| = |z|$. Was bedeutet dies geometrisch?

b) Was besagt die Dreiecksungleichung anschaulich?

Komplexe Zahlen

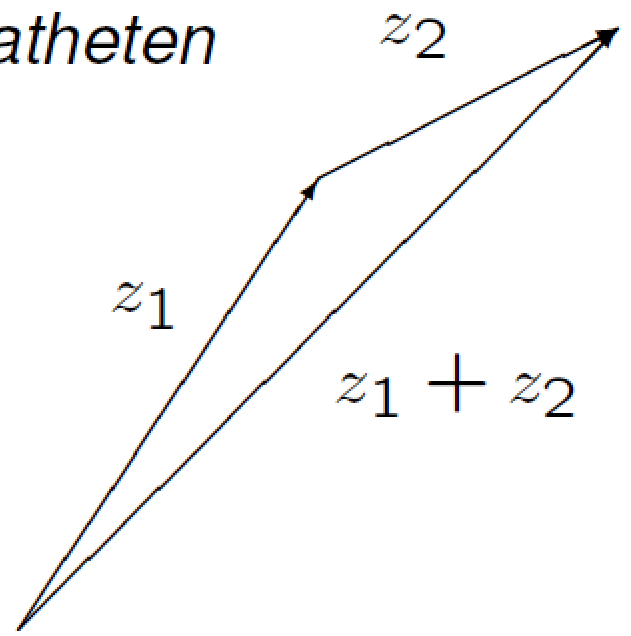
Betrag. Rechenregeln. Praktisches Beispiel. Lösung

a) *Es sei* $z := x + \mathrm{i} \cdot y$. *Dann ist* $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ *und* $|\overline{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$. *Die Ortsvektoren von* $|z|$ *und* $|\overline{z}|$, *welche durch Spiegelung an der* x*-Achse auseinander hervorgehen, sind gleich lang.*

Komplexe Zahlen

Praktisches Beispiel. Lösung. Fortsetzung

b) Die Länge des Vektors von $z_1 + z_2$ *(Hypotenuse des Dreiecks in Abb.) ist kleiner/gleich der Summe der Längen von* z_1 *und* z_2 *(Katheten des Dreiecks in Abb.).*



Komplexe Zahlen

Weitere praktische Beispiele

Ermitteln Sie die trigonometrische Form der folgenden Zahlen:

$$i$$

$$1+i$$

$$-7$$

Komplexe Zahlen

Weitere praktische Beispiele. Lösung

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i} &= 1 &&\cdot \left[\cos(\pi/2) + \mathrm{i}\cdot\sin(\pi/2)\right],\\
1+\mathrm{i} &= \sqrt{2} &&\cdot \left[\cos(\pi/4) + i\cdot\sin(\pi/4)\right],\\
-7 &= 7 &&\cdot \left[\cos\pi + \mathrm{i}\cdot\sin\pi\right].
\end{aligned}
$$

Komplexe Zahlen

Trigonometrische Form komplexer Zahlen. Aufgabe

Geben Sie die trigonometrische (Polar-) Form der folgenden komplexen Zahlen an:

$$z_1 = 7,\ z_2 = 4\mathrm{i},\ z_3 = -6,$$

$$z_4 = -3\mathrm{i}, \quad z_5 = 1 - \mathrm{i}.$$

Komplexe Zahlen

Trigonometrische Form komplexer Zahlen.

Kontrollieren Sie Ihre Lösung:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 7 &&= 7 \cdot [\cos 0 + \mathrm{i} \cdot \sin 0]\,,\\
z_2 &= 4\mathrm{i} &&= 4 \cdot [\cos(\pi/2) + \mathrm{i} \cdot \sin(\pi/2)]\,,\\
z_3 &= -6 &&= 6 \cdot [\cos \pi + \mathrm{i} \cdot \sin \pi]\,,\\
z_4 &= -3\mathrm{i} &&= 3 \cdot [\cos(-\pi/2) + \mathrm{i} \cdot \sin(-\pi/2)]\,,\\
z_5 &= 1 - \mathrm{i} &&= \sqrt{2} \cdot [\cos(-\pi/4) + \mathrm{i} \cdot \sin(-\pi/4)]\,.
\end{aligned}
$$

Komplexe Zahlen

Multiplikation und Division komplexer Zahlen

Die trigonometrische Form erlaubt nun eine sehr prägnante Beschreibung der Multiplikation und Division komplexer Zahlen:

Für die Zahlen $z_1 = |z_1| \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)$ und $z_2 = |z_2| \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)$ gilt:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Komplexe Zahlen

Multiplikation und Division komplexer Zahlen

Fortsetzung:

Für die Zahlen $z_1 = |z_1| \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)$ und $z_2 = |z_2| \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)$ gilt:

$$z_1/z_2 = |z_1|/|z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

(Division nur im Falle von $z_2 \neq 0$)

Komplexe Zahlen

Multiplikation und Division komplexer Zahlen

Bemerkung:

Komplexe Zahlen werden multipliziert (dividiert), indem man ihre Beträge multipliziert (dividiert) und ihre Winkel addiert (subtrahiert) und den resultierenden Winkel evtl. auf das Intervall $(-\pi;\ +\pi\,]$ reduziert.

Komplexe Zahlen

Multiplikation und Division komplexer Zahlen

Drehstreckung

Geometrisch kann die Multiplikation komplexer Zahlen

als Drehstreckung beschrieben werden:

Multipliziert man eine komplexe Zahl z_1 mit einer komplexen Zahl z_2, so wird der Betrag von z_1 um den Faktor $|z_2|$ „gestreckt“ (oder „gestaucht“), der Winkel von z_1 wird um den Winkel von z_2 „weitergedreht“.

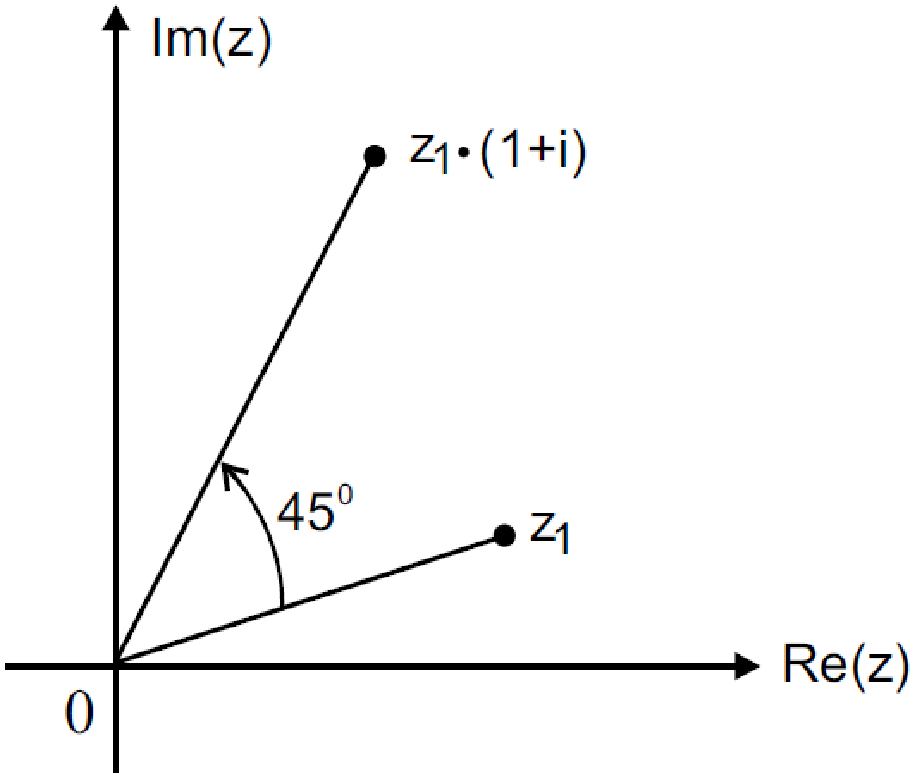
Komplexe Zahlen

Multiplikation und Division komplexer Zahlen

Praktisches Beispiel

Multiplikation einer Zahl z_1 mit der Zahl $z_2 = 1 + i$ bedeutet (wegen $|z_2| = \sqrt{2}$ und

$\varphi_2 = \arccos\left(1/\sqrt{2}\right) = \pi/4 = 45°$): Der Ortsvektor der Zahl z_1 wird um $\sqrt{2}$ gestreckt und um $45°$ (im mathematischen, also im Gegenuhrzeigesinn) gedreht.



Komplexe Zahlen

Multiplikation und Division komplexer Zahlen

Praktisches Beispiel

Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 1 + i$ und $z_2 = -1 + 2i$.

a) Führen Sie zunächst z_1 und z_2 in die trigonometrische Form über und berechnen Sie $z_1 \cdot z_2$.

b) Berechnen Sie $z_1 \cdot z_2$ in Normalform und führen Sie dann das Ergebnis in die trigonometrische Form über.

Komplexe Zahlen

Multiplikation und Division komplexer Zahlen

Praktisches Beispiel. Lösung

a) $$z_1 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right),$$

$$z_2 = \sqrt{5} \cdot (\cos 2.034 + i \sin 2.034),$$

$$z_1 \cdot z_2$$
$$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \left(\cos(\tfrac{\pi}{4} + 2.034) + i \sin(\tfrac{\pi}{4} + 2.034) \right)$$
$$= \sqrt{10} \cdot (\cos 2.819 + i \sin 2.819).$$

Komplexe Zahlen

Multiplikation und Division komplexer Zahlen

Praktisches Beispiel. Lösung. Fortsetzung

$$
\begin{aligned}
b)\ z_1 \cdot z_2 &= (1+\mathrm{i}) \cdot (-1+2\mathrm{i}) = -3+\mathrm{i} \\
&= \sqrt{10} \cdot (\cos 2.819 + \mathrm{i} \sin 2.819).
\end{aligned}
$$

Komplexe Zahlen

Die Euler‘sche Beziehung

Für den Term $\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$ bietet sich eine Abkürzung an. Wir benutzen dazu die folgende Gleichung, die so genannte *Euler'sche Beziehung*:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$$

Komplexe Zahlen

Exponentialform von komplexen Zahlen

Die bisher in Polarform gegebene komplexe Zahl

$$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

lässt sich unter Verwendung der Euler'schen Beziehung nun in der Exponentialform schreiben:

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi}$$

Der Anteil $|z|$ beschreibt dabei die Länge des Ortsvektors von z, der Anteil $e^{i\varphi}$ allein den Winkel

$$|e^{i\varphi}| = 1$$

Komplexe Zahlen

Exponentialform. Praktisches Beispiel

Geben Sie die Exponentialform der folgenden komplexen Zahlen an:

$$z_1 = 7,\ z_2 = 4\mathrm{i},\ z_3 = -6,$$

Komplexe Zahlen

Exponentialform. Praktisches Beispiel. Lösung

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 7 &&= 7 \cdot \mathrm{e}^{0\mathrm{i}}, \\
z_2 &= 4\mathrm{i} &&= 4 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}, \\
z_3 &= -6 &&= 6 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi},
\end{aligned}
$$

Komplexe Zahlen

Exponentialform. Aufgabe

Geben Sie die Exponentialform der folgenden komplexen Zahlen an:

$$z_4 = -3\mathrm{i}, \; z_5 = 1 - \mathrm{i}.$$

Komplexe Zahlen

Exponentialform. Aufgabe. Kontrollieren Sie Ihre Lösung:

$$\begin{aligned} z_4 &= -3\mathrm{i} &&= 3 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}, \\ z_5 &= 1 - \mathrm{i} &&= \sqrt{2} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}. \end{aligned}$$

Komplexe Zahlen

Satz von Moivre

Die „Abkürzung“ $e^{i\varphi}$ hat den großen Vorteil, dass man mit ihr wie mit einer „richtigen Potenz“ rechnen kann:

$$e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

$$\left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{i(n\varphi)}$$ (Satz von Moivre)

Komplexe Zahlen

Potenzen komplexer Zahlen

Die Exponentialform komplexer Zahlen ist besonders hilfreich, wenn man etwa Potenzen komplexer Zahlen berechnen will.

Praktisches Beispiel

Berechnen Sie $(1 - \mathrm{i})^6$

Komplexe Zahlen

Potenzen komplexer Zahlen. Praktisches Beispiel. Lösung

$$(1-\mathrm{i})^6 = \left(\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right)^6 = \left(\sqrt{2}\right)^6 \cdot e^{\mathrm{i}\,6\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= 8 \cdot e^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} = 8 \cdot e^{\mathrm{i}\left(-\frac{3\pi}{2}+2\pi\right)} = 8 \cdot e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$$

$$= 8\mathrm{i}.$$

Komplexe Zahlen

Wurzeln von komplexen Zahlen

Die Gleichung $z^n = c$ mit der komplexen Zahl $c = |c| \cdot e^{i\varphi} \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ hat genau n verschiedene Lösungen

$$z_k = \sqrt[n]{|c|} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

die so genannten *n*-ten Wurzeln aus c.

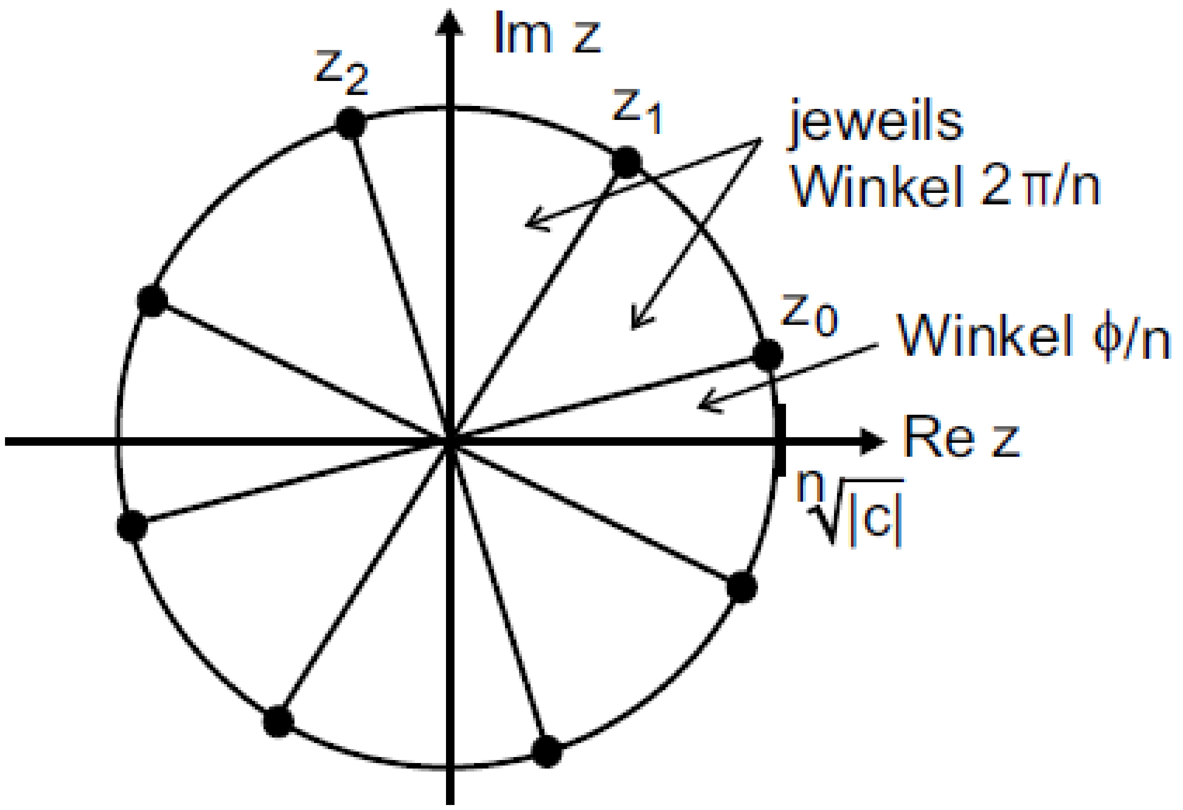
Komplexe Zahlen

Wurzeln von komplexen Zahlen. Veranschaulichung

Die n-ten Wurzeln aus $c = |c| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \neq 0$ liegen auf einem Kreis vom Radius $\sqrt[n]{|c|}$ um 0 und bilden die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks, weil sich benachbarte Arcuswerte um jeweils $2\pi/n$ unterscheiden. Der Winkel zwischen der positiven reellen Achse und der „ersten" Wurzel z_0 beträgt gerade ϕ/n:

Komplexe Zahlen

Wurzeln von komplexen Zahlen. Veranschaulichung



Komplexe Zahlen

Wurzeln von komplexen Zahlen. Praktisches Beispiel

Lösen Sie die Gleichung

$$z^3 = \mathrm{i} = 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$$

Komplexe Zahlen

Praktisches Beispiel. Lösung

Die Gleichung $z^3 = \mathrm{i} = 1 \cdot e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ *hat die 3 Lösungen (Wurzeln)*

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[3]{1} \cdot e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}+0\cdot\frac{2\pi}{3}\right)} &= 1 \cdot e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i},\\
z_1 &= \sqrt[3]{1} \cdot e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}+1\cdot\frac{2\pi}{3}\right)} &= 1 \cdot e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i},\\
z_2 &= \sqrt[3]{1} \cdot e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}+2\cdot\frac{2\pi}{3}\right)} &= 1 \cdot e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} &= -\mathrm{i}.
\end{aligned}
$$

Die Wurzeln z_0, z_1 *und* z_2 *liegen auf einem Kreis vom Radius* 1 *um den Nullpunkt. Sie bilden ein gleichseitiges Dreieck.*

Zusammenfassung

- Wiederholung: Komplexe Zahlen. Umrechnungsformeln.
- Betrag einer komplexen Zahl. Veranschaulichung.
- Rechenregeln für den Betrag.
- Multiplikation und Division komplexer Zahlen.
- Potenzen komplexer Zahlen.
- Wurzeln von komplexen Zahlen.