Studiengang:
Intelligent Systems Design (ISD)

HOCHSCHULE
HAMM-LIPPSTADT

Lehrveranstaltung:

Mathematik II

Sommer Semester 2022

Rechnen mit komplexen Zahlen
Teil 2

Lernziele

- Wiederholung:
  - Menge der reellen Zahlen,
  - Linearkombination.
- Menge der komplexen Zahlen.
- Operationen auf komplexen Zahlen.
- Konjugiert-komplexe Zahl
- Darstellungsformen und Umrechnungsformeln.

Komplexe Zahlen

Die Grundrechenarten. Praktisches Beispiel

a) *Gegeben seien die komplexen Zahlen* $z_1 := -1 - 8\mathrm{i}$ *und* $z_2 := -2 - 3\mathrm{i}$.
Berechnen Sie $2z_1$, $2z_1 + z_2$, $z_2 - z_1$, $z_1 \cdot z_2$, z_1^2 $(:= z_1 \cdot z_1)$ *und* $z_1 : z_2$.

b) *Berechnen Sie die folgenden Potenzen von* i:
i^2, i^3, i^4, i^5, i^6 *und* i^{27}.

Komplexe Zahlen

Die Grundrechenarten. Beispiel. Lösung

a)

$$
\begin{aligned}
&2z_1 = -2 - 16i,\\
&2z_1 + z_2 = -4 - 19i,\\
&z_2 - z_1 = -1 + 5i,\\
&z_1 \cdot z_2 = -22 + 19i,\\
&z_1^2 = -63 + 16i,\\
&z_1 : z_2 = 2 + i.
\end{aligned}
$$

Komplexe Zahlen

Die Grundrechenarten. Beispiel. Lösung

b)

$$
\begin{aligned}
&i^2 = -1,\\
&i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i,\\
&i^4 = i^3 \cdot i = (-i) \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1,\\
&i^5 = i,\\
&i^6 = -1,\\
&i^{27} = i^{6\cdot 4+3} = i^3 = -i.
\end{aligned}
$$

Komplexe Zahlen

Bemerkung: Keine Größer-/Kleiner-Beziehung in $\mathbb{C}$.

Anders als in $\mathbb{R}$ gibt es aber *keine Größer-/Kleiner-Beziehung in* $\mathbb{C}$. Man kann also zwei komplexe Zahlen nur auf Gleichheit/Ungleichheit untersuchen, nicht aber sinnvoll sagen, welche von beiden die größere ist.

Komplexe Zahlen

Bemerkung: Keine positiven oder negativen Zahlen in $\mathbb{C}$.

Außerdem gibt es keine positiven oder negativen komplexen Zahlen.

Es wäre also *falsch* zu sagen, dass $+\mathrm{i}$ positiv sei. Ebensowenig ist $+\mathrm{i}$ negativ.

Auch $-2\mathrm{i}$ ist weder positiv noch negativ!

Bedenken Sie dazu, dass das Produkt zweier positiver oder zweier negativer Zahlen stets positiv ist: Das Produkt von i mit sich selbst ergibt aber -1, also eine negative Zahl!

Komplexe Zahlen

Die konjugiert-komplexe Zahl. Definition

Die komplexe Zahl

$$\boxed{\bar{z} = x + (-y) \cdot i = x - y \cdot i}$$

heißt die zu $\boxed{z = x + y \cdot i}$ **konjugiert-komplexe** Zahl.

Für die konjugiert-komplexe Zahl $\overline{z}$ ist auch die Abkürzung z^* gebräuchlich.

Komplexe Zahlen

Die konjugiert-komplexe Zahl. Praktisches Beispiel

Ermitteln Sie die konjugiert-komplexe Zahl zu

$$z_1 = -7-8i$$

$$z_2 = 4i$$

$$z_3 = -17$$

Komplexe Zahlen

Die konjugiert-komplexe Zahl. Lösung

Die zu $z_1 = -7 - 8\mathrm{i}$ *konjugiert-komplexe Zahl lautet* $\overline{z_1} = -7 + 8\mathrm{i}$.

Für $z_2 = 4\mathrm{i} = 0 + 4 \cdot \mathrm{i}$ *gilt* $\overline{z_2} = -4\mathrm{i} = -z_2$.

Für $z_3 = -17 = -17 + 0 \cdot \mathrm{i}$ *ist* $\overline{z_3} = -17 = z_3$.

Komplexe Zahlen

Die Grundrechenarten. Merkregel. Fortsetzung

Man dividiert, indem man durch Erweitern mit dem konjugiert-Komplexen des Nenners diesen Nenner reell macht.

Komplexe Zahlen

Rechenregel für konjugiert-komplexe Zahlen

Mit $z = x + y \cdot i$ und $\bar{z} = x - y \cdot i$ gilt für konjugiert-komplexe Zahlen die folgende Rechenregel:

$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$ ist stets reell und nicht negativ.

Komplexe Zahlen

Rechenregel für konjugiert-komplexe Zahlen

Dies kann man durch einfaches Nachrechnen zeigen:

$$\begin{aligned} z \cdot \overline{z} &= (x + \mathrm{i}y) \cdot (x - \mathrm{i}y) \\ &= x \cdot x + x \cdot (-\mathrm{i}y) + \mathrm{i}y \cdot x + \mathrm{i}y \cdot (-\mathrm{i}y) \\ &= x^2 - \mathrm{i}xy + \mathrm{i}xy - \mathrm{i}^2 y^2 \\ &= x^2 + y^2 \,. \end{aligned}$$

Komplexe Zahlen

Rechenregel für konjugiert-komplexe Zahlen. Praktisches Beispiel

a) *Gegeben sei die komplexe Zahl* $z_0 = 1 - 2\mathrm{i}$. *Geben Sie an bzw. berechnen Sie:* $\mathrm{Re}\,(z_0)$, $\mathrm{Im}\,(z_0)$, $\overline{z_0}$, $\mathrm{Re}\,(1/z_0)$, $\mathrm{Im}\,(\mathrm{i}\cdot\overline{z_0})$, $\overline{\mathrm{Im}\,(z_0)}$, $\overline{\mathrm{i}\cdot\mathrm{Re}\,(z_0)}$.

b) *Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen* $z = x + \mathrm{i}\cdot y$ *mit* $\mathrm{Im}\,(2\overline{z} + z) = 1$.

Komplexe Zahlen

Rechenregel für konjugiert-komplexe Zahlen. Lösung

a)

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\,(z_0) = 1,\\
&\mathrm{Im}\,(z_0) = -2,\\
&\overline{z_0} = 1 + 2\mathrm{i},\\
&\mathrm{Re}\,(1/z_0) = 1/5,\\
&\mathrm{Im}\,(\mathrm{i}\cdot\overline{z_0}) = 1,\\
&\overline{\mathrm{Im}\,(z_0)} = -2,\\
&\overline{\mathrm{i}\cdot\mathrm{Re}\,(z_0)} = -\mathrm{i}.
\end{aligned}
$$

Komplexe Zahlen

Rechenregel für konjugiert-komplexe Zahlen. Lösung

b) *Alle komplexen Zahlen* $z = x + \mathrm{i} \cdot y$ *mit Imaginärteil* $y = -1$.

Komplexe Zahlen

Rechenregel für konjugiert-komplexe Zahlen

Mit $z = x + y \cdot i$ und $\bar{z} = x - y \cdot i$ gilt:

a) Genau für reelle z ist $z = \bar{z}$.

b) Das Bilden der konjugiert-komplexen Zahl ist mit allen vier Grundrechenarten vertauschbar:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2 \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

(Division nur im Falle von $z_2 \neq 0$)

Komplexe Zahlen

Rechenregel für konjugiert-komplexe Zahlen.
Praktisches Beispiel

Beweisen Sie: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Komplexe Zahlen

Rechenregel für konjugiert-komplexe Zahlen. Lösung

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

Mit $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ *und* $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ *ist:*

$$\begin{aligned}\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(x_1 + \mathrm{i}y_1) \cdot (x_2 + \mathrm{i}y_2)} \\ &= \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1)} \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) - \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1)\,.\end{aligned}$$

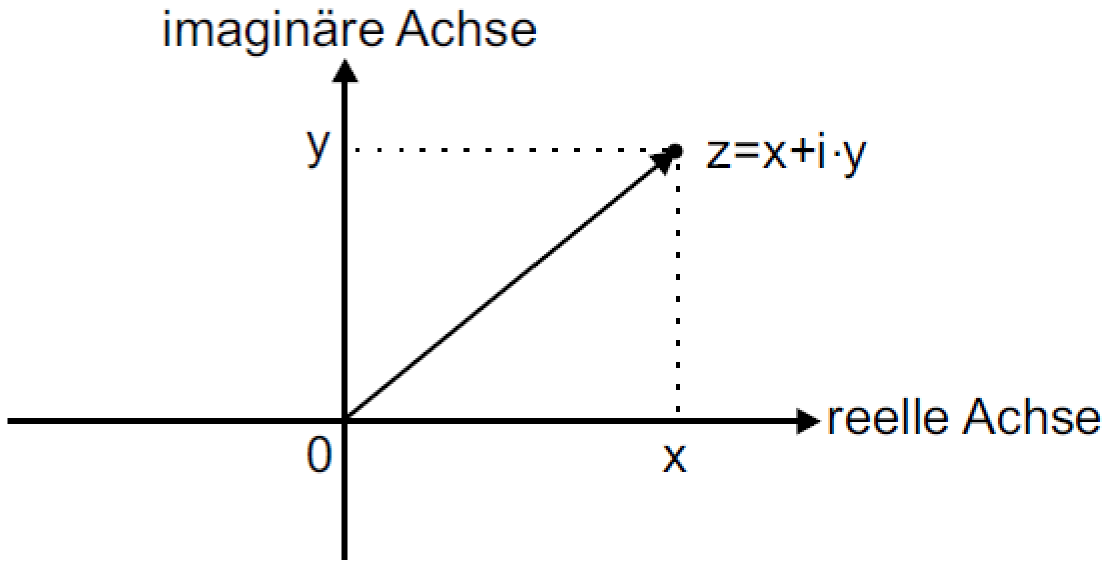
Umgekehrt gilt:

$$\begin{aligned}\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} &= (x_1 - iy_1) \cdot (x_2 - iy_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1).\end{aligned}$$

Komplexe Zahlen

Die Gauß'sche Zahlenebene

Jeder komplexen Zahl $x + i \cdot y$ entspricht genau ein Vektor $\binom{x}{y}$ bzw. genau ein Punkt (x, y) der Ebene und umgekehrt.



Komplexe Zahlen

Die Gauß'sche Zahlenebene

Bemerkung

In der Technik spricht man anstelle von Ortsvektoren häufig von Zeigern auf komplexe Zahlen.

Komplexe Zahlen

Die Gauß'sche Zahlenebene. Praktisches Beispiel

Nennen und zeichnen Sie auf der Gauß‘schen Zahlenebene den Punkt, der der folgenden komplexen Zahl entspricht:

$$z = -3 + 4\mathrm{i}$$

$$z = \mathrm{i}$$

$$z = 0$$

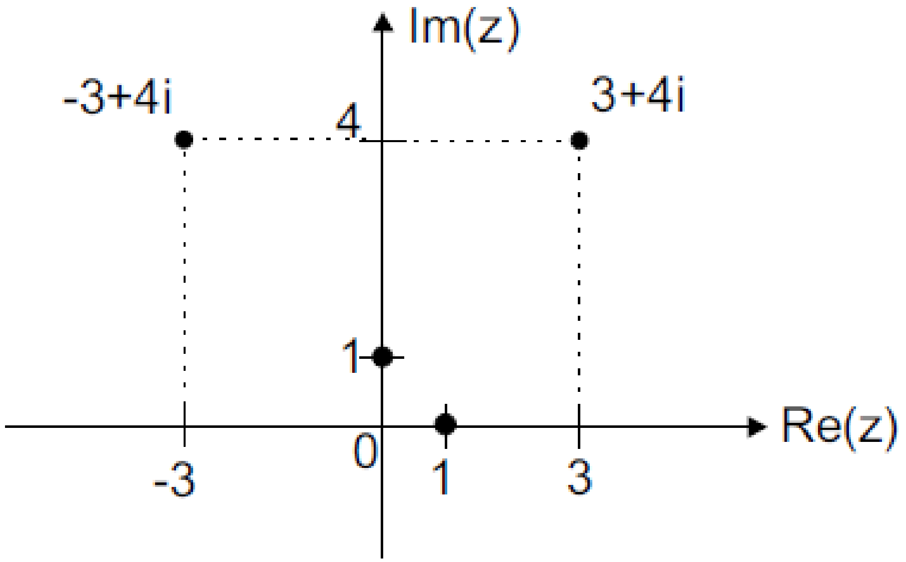
Komplexe Zahlen

Die Gauß'sche Zahlenebene. Lösung

Der komplexen Zahl $z = -3 + 4\mathrm{i}$ *entspricht der Punkt* $(-3, 4)$*;* $z = 1$ *entspricht der Punkt* $(1, 0)$*;* $z = \mathrm{i}$ *entspricht der Punkt* $(0, 1)$*;* $z = 0$ *entspricht der Punkt* $(0, 0)$*, der Ursprung des Koordinatensystems.*

Komplexe Zahlen

Die Gauß'sche Zahlenebene. Lösung. Fortsetzung



Komplexe Zahlen

Die Gauß'sche Zahlenebene. Bemerkung

Genau für reelle Zahlen z *gilt* $\mathrm{Im}\, z = 0$; *sie werden durch die Punkte der* reellen Achse *dargestellt.* Rein-imaginäre Zahlen *(*$\mathrm{Re}\, z = 0$*) werden durch die Punkte der* imaginären Achse *veranschaulicht.*

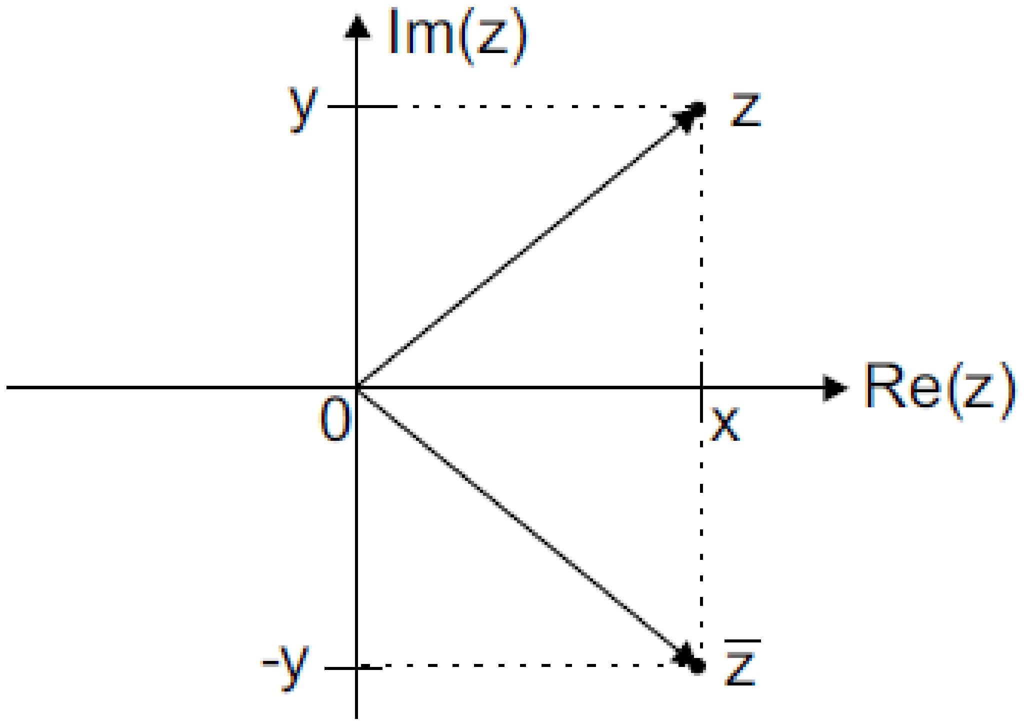
Komplexe Zahlen

Die Gauß'sche Zahlenebene. Praktisches Beispiel

Finden Sie den zur konjugiert-komplexen Zahl gehörigen Ortsvektor, wenn der zur $z = x + i \cdot y$ gehörige Vektor gegeben ist.

Komplexe Zahlen

Die Gauß'sche Zahlenebene. Lösung



Komplexe Zahlen

Die Gauß'sche Zahlenebene. Bemerkung

Punkte in der Gauß'schen Zahlenebene und folglich die komplexen Zahlen kann man nicht linear anordnen (keine Größer-/Kleiner-Beziehung!).

Komplexe Zahlen

Rechenoperation in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Wenn wir $z = x + \mathrm{i} \cdot y = (x, y)$

setzen und Addition und Multiplikation umschreiben, so erhalten wir für die Rechenoperationen + und · auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) | \, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}\}$ die folgende Darstellung:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Komplexe Zahlen

Rechenoperation in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Die erste der beiden obigen Gleichungen besagt, dass die Addition komplexer Zahlen wie die Addition von Vektoren in der Ebene (Kräfteparallelogramm!) vorgenommen wird.

Komplexe Zahlen

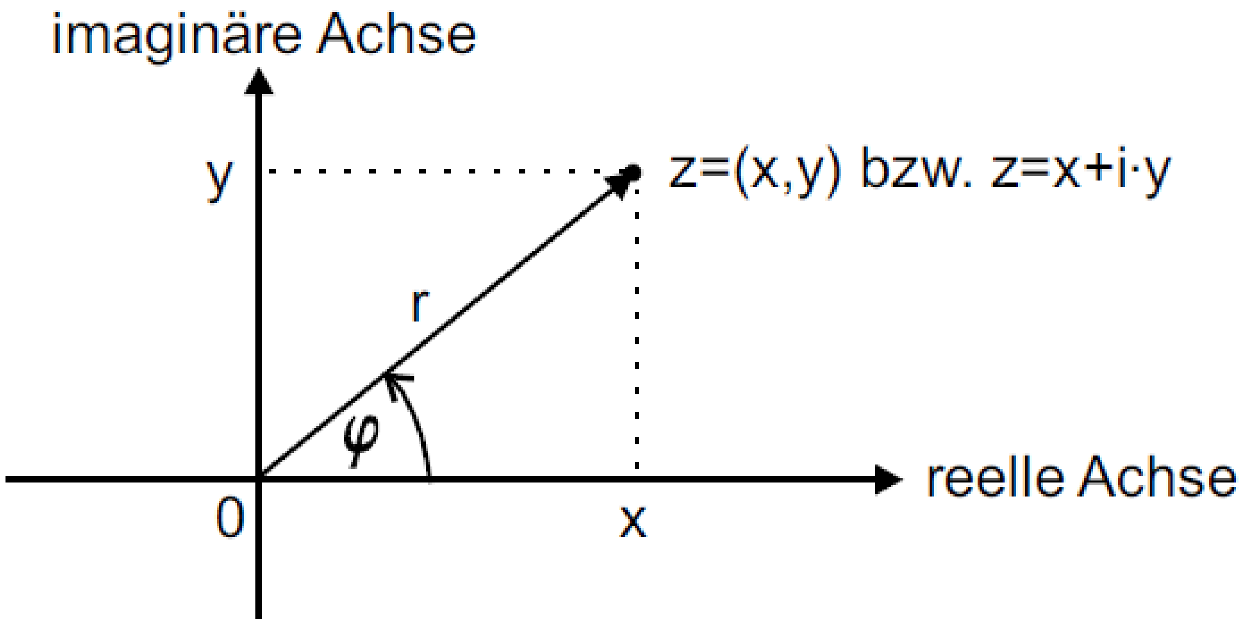
Polarkoordinaten

Die Lage eines Punktes der Ebene lässt sich durch seinen Abstand r („Radius“) vom Koordinatenursprung und, wenn $r > 0$, durch den Winkel φ des Ortsvektors mit der positiven x-Achse („Polarwinkel“) kennzeichnen.

(Im Fall $r = 0$, am Koordinatenursprung also, lässt sich φ nicht definieren.)

Komplexe Zahlen

Polarkoordinaten



Komplexe Zahlen

Winkel

Winkel werden meist in *Bogenmaß* angegeben. Das bekannte Gradmaß $\hat{\varphi}$ (Einheit: Grad) und das Bogenmaß φ (Einheit: Radiant) hängen dabei wie folgt zusammen:

$$\boxed{\frac{\hat{\varphi}}{360^\circ} = \frac{\varphi}{2\pi}}$$

Komplexe Zahlen

Winkel

Da der Winkel nur bis auf Vielfache von 2π (bzw. 360°) bestimmt ist, legt man willkürlich ein Intervall fest, in dem der Winkel angeben wird, z.B.

$$\boxed{-\pi < \varphi \leq +\pi}$$

Komplexe Zahlen

Umrechnungsformeln

Die Umrechnungsformeln zwischen kartesischen Koordinaten und Polarkoordinaten lauten:

$$x = r \cdot \cos\varphi \qquad \text{und} \qquad y = r \cdot \sin\varphi$$

sowie

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{und} \qquad \varphi = \pm \arccos\left(\frac{x}{r}\right).$$

(Vorzeichen von φ je nachdem ob $y \geq 0$ oder $y < 0$.)

Komplexe Zahlen

Umrechnungsformeln. Alternative

Man könnte hier auch die Beziehung $\tan\varphi = y/x$ verwenden, müsste aber bei der Umkehrfunktion $\arctan(y/x)$ vier Fallunterscheidungen, je nach Quadrant, in dem $(x; y)$ liegt, durchführen.

Komplexe Zahlen

Umrechnungsformeln. Aufgabe

a) Ermitteln Sie die Polarkoordinaten aus den kartesischen Koordinaten $x = -3$ und $y = 4$ der komplexen Zahl $z = -3 + 4i$.

b) Ermitteln Sie die kartesischen Koordinaten aus den Polarkoordinaten $r = 4$ und $\varphi = -\pi/6$ der komplexen Zahl z.

Komplexe Zahlen

Umrechnungsformeln. Kontrollieren Sie Ihre Lösung:

a) *Aus den kartesischen Koordinaten* $x = -3$ *und* $y = 4$ *der komplexen Zahl* $z = -3 + 4\mathrm{i}$ *ergeben sich die Polarkoordinaten* $r = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ *und* $\varphi = +\arccos(-3/5) \approx 2.214$ *(bzw.* $\hat{\varphi} \approx 126.87^\circ$*).*

Komplexe Zahlen

Umrechnungsformeln. Lösung. Fortsetzung

b) *Aus den Polarkoordinaten* $r = 4$ *und* $\phi = -\pi/6$ ($\widehat{\varphi} = -30°$) *erhält man die kartesischen Koordinaten* $x = 4 \cdot \cos(-\pi/6) = 4 \cdot 1/2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ *und* $y = 4 \cdot \sin(-\pi/6) = 4 \cdot (-1/2) = -2$ *der komplexen Zahl* $z = 2\sqrt{3} - 2\text{i}$.

Komplexe Zahlen

Umrechnungsformeln. Aufgabe

a) Geben Sie die Polarkoordinaten r und φ der folgenden komplexen Zahlen an: $z_1 = 7$, $z_2 = 4\mathrm{i}$, $z_3 = -6$, $z_4 = -3\mathrm{i}$, $z_5 = 1 - \mathrm{i}$.

b) Berechnen Sie die kartesischen Koordinaten der komplexen Zahl z_6 mit den Polarkoordinaten $r = 2$, $\varphi = \pi/3$.

Komplexe Zahlen

Umrechnungsformeln. Kontrollieren Sie Ihre Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
r_1 &= 7, & \varphi_1 &= 0;\\
r_2 &= 4, & \varphi_2 &= \pi/2;\\
r_3 &= 6, & \varphi_3 &= \pi;\\
r_4 &= 3, & \varphi_4 &= -\pi/2;\\
r_5 &= \sqrt{2}, & \varphi_5 &= -\pi/4.
\end{aligned}$$

b) $x_6 = 1,\ y_6 = \sqrt{3}.$

Komplexe Zahlen

Betrag einer komplexen Zahl

Anstelle vom Radius und Polarwinkel bei Polarkoordinaten wird im Zusammenhang mit komplexen Zahlen meist vom (Absolut-) Betrag und vom Argument (oder Arcus oder Phase oder Winkel) einer komplexen Zahl gesprochen:

Definition

Unter dem Betrag einer komplexen Zahl $z = x + iy$ versteht man

$$|z| = |x + i \cdot y| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot z}$$

Komplexe Zahlen

Betrag einer komplexen Zahl. Aufgabe

Ermitteln Sie den Betrag der komplexen Zahl $z = -3 + 4i$

Komplexe Zahlen

Betrag einer komplexen Zahl. Kontrollieren Sie Ihre Lösung:

Der Betrag der komplexen Zahl $z = -3 + 4\mathrm{i}$ *ist gleich* 5 *und das Argument von* z *ist ungefähr* 2.214.

Zusammenfassung

- Wiederholung:
  - Menge der reellen Zahlen,
  - Lineare Kombination.
- Menge der komplexen Zahlen.
- Operationen auf komplexen Zahlen.
- Konjugiert-komplexe Zahl.
- Darstellungsformen und Umrechnungsformeln.