106 gekoppeltes Pendel

Connor Magnus Böckmann
email: connormagnus.boeckmann@tu-dortmund.de

Tim Theissel
email: tim.theissel@tu-dortmund.de

8. Dezember 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Das Ziel des Versuchs ist die Bestimmung der Schwingungs- und Schwebungsdauer bei gleichsinnigen-, gegensinnigen-, sowie gekoppelten Schwingungen.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Einfaches Fadenpendel

Zur Betrachtung zweier gekoppelter Pendel bedarf es zuerst der Betrachtung eines einfachen Pendels der Länge l und der Masse m. Außerdem sei es reibungsfrei aufgehängt. Bei Auslenkung des Pendels wirkt die Gewichtskraft $\vec{F}_\mathrm{g} = m \cdot \vec{a}$ als Rückstellkraft der Bewegung entgegen. Dadurch wird ein Drehmoment $\mathrm{M} = \mathrm{D_p} \cdot \Phi$ auf das Pendel mit der Winkelrichtgröße $\mathrm{D_p}$ und der Auslenkung Φ aus der Ruhelage. Die Bewegungsgleichung für ein einzelnes, reibungsfreies Pendel unter Annahme der Kleinwinkelnäherung ($\sin\theta = \theta$) ergibt sich somit zu

$$J \cdot \ddot{\Phi} + D_\mathrm{p} \cdot \Phi = 0 \tag{1}$$

mit dem Trägheitsmoment J des Pendels. Gelöst wird die Differentialgleichung durch eine harmonische Schwingung. Die Schwingungsfrequenz des Einzelpendels ergibt sich dabei zu

$$\omega = \sqrt{\frac{D_p}{J}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Aus der Formel lässt sich bereits erkennen, dass die Schwingungsdauer vollkommen unabhängig von der Masse m des Pendels und dem Auslenkungswinkel Φ ist, vorausgesetzt die Auslenkung genügt der Kleinwinkelnäherung. Werden zwei Pendel gekoppelt durch eine Feder, wirkt auf das Pendel ein weiteres Drehmoment

$$M_1 = D_F(\Phi_2 - \Phi_1) \tag{2}$$

$$M_2 = D_F(\Phi_1 - \Phi_2) \tag{3}$$

Die Bewegungsgleichungen für das gekoppelte System werden durch

$$J\ddot{\Phi_1} + D\Phi_1 = D_F(\Phi_2 - \Phi_1)$$
$$J\ddot{\Phi_2} + D\Phi_2 = D_F(\Phi_1 - \Phi_2)$$

beschrieben. Dabei ist erkennbar, dass die linke Seite der Gleichungen, die vom Einzelpendel bekannte Differentialgleichung aus 1 dargestellt wird. Erweitert wird die rechte Seite durch das Drehmoment aus 2 und 3, welches durch die Kopplung über die Feder dazu kommt. Gelöst wird das Differentialgleichungssystem erneut durch harmonische Schwingungen mit den Kreisfrequenzen ω_1 und ω_2. α_1 und α_2 bezeichnen dabei die Auslenkungswinkel der Pendel aus der Ruhelage.

2.2 Schwingungsarten

Es werden verschiedene Arten von Schwingungen bei gekoppelten Pendeln unterschieden, je nach dem wie die Anfangsbedingungen α(t=0) und $\dot{\alpha}(t=0)$ gewählt werden.

Gleichsinnige Schwingung für α_1=α_2:
Beide Pendel werden um den selben Winkel α aus ihrer Ruhelage in die selbe Richtung ausgelenkt, also α_1=α_2. Da die Feder dabei weder gestreckt noch gestaucht wird, übt sie dabei keine Kraft auf die Pendel aus. Beide Pendel schwingen also, als wären sie nicht über die Feder verbunden. Die rücktreibende Kraft ist also nur die Gravitationskraft. Genau wie beim Einzelpendel schwingen beide Pendel mit der Schwingungsfrequenz

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{4}$$

Die Schwingungsdauer bei einer gleichsinnigen Schwingung beträgt dann

$$T_+ = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{5}$$

Gegensinnige Schwingung für α_1=-α_2:
Beide Pendel werden um betragsmäßig gleiche Winkel α_1=-α_2 entgegengesetzt ausgelenkt. Auf beide Pendel wirkt dabei die gleiche, aber entgegengesetzte Kraft durch die Kopplungsfeder. Die entstehende Schwingung ist daher symmetrisch. Die Schwingungsfrequenz ergibt sich dabei zu

$$\omega_- = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2K}{l}} \tag{6}$$

Die Schwingungsdauer ist folglich

$$T_- = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + 2K}} \tag{7}$$

Die Kopplungskonstante der Feder wird K genannt.

Gekoppelte Schwingung für α_1=0, α_2≠0:
Bei der gekoppelten Schwingung ist eines der Pendel zu Beginn in seiner Ruhelage, wobei das andere um den Winkel α ausgelenkt wird. Wird das ausgelenkte Pendel schwingen gelassen, fängt es an seine Energie über die Feder an das andere Pendel zu übertragen. Das andere Pendel beginnt zu schwingen mit steigender Amplitude. Die Amplitude erreicht ihr Maximum in dem Moment in dem das erste Pendel wieder in Ruhe ist. Die Energie wird vollständig übertragen. Der Prozess wiederholt sich immer wieder. Die Schwebungsdauer T_S -die Zeit zwischen zwei Stillständen eines Pendels- berechnet sich zu

$$T_S = \frac{T_+ * T_-}{T_+ - T_-} \tag{8}$$

mit der Schwebungsfrequenz

$$\omega_S = \omega_+ - \omega_-$$

mit der Schwingungsdauer der gleichsinnigen Schwingung T_+ und der Schwingungsdauer der gegensinnigen Schwingung T_-.

2.3 Kopplungskonstante K

Die Kopplungskonstante K ist ein Maß für die Kopplung der Pendel durch die Feder und berechnet sich zu

$$K = \frac{\omega_-^2 - \omega_+^2}{\omega_-^2 + \omega_+^2} = \frac{T_+^2 - T_-^2}{T_+^2 + T_-^2} \tag{9}$$

3 Aufbau des Versuchs

Der Aufbau des Versuchs besteht aus zwei Stabpendeln. Die Massen (m=1kg) sind dabei über die Länge des Stabes verschiebbar, um verschiedene Pendellängen einstellbar zu machen und genau gleich lange Pendel zu ermöglichen. Die Pendel sind dabei reibungsarm auf einer Spitzenlagerung gelagert. Das bedeutet, dass am oberen Ende eines jeden Pendels eine Spitze in einer keilförmigen Nut liegt, was die Kontaktfläche und dadurch die Reibung minimiert. Beide Pendel sind über eine Kopplungsfeder mit Kopplungskonstante K verbunden. Diese Feder kann aber auch entfernt werden. Die Schwingungsdauern werden händisch mit einer Stoppuhr gemessen. Ebenso erfolgt die Auslenkung der Pendel nach Augenmaß.

4 Auswertung

4.1 Aufgabe 1

Ziel der Aufgabe ist die Bestimmung der Schwingungsdauern T_1 und T_2. Dazu werden gemessenen Zeiten (t) durch 5 geteilt, um so die gemessenen Schwingungsdauern zu erhalten und die Schwingungsdauern T_1 und T_2 ergeben sich dann jeweils als Mittelwert der 10 gemessenen Schwingungsdauern. Die Mittelwerte werden nach der Formel 12 berechnet.

Allerdings muss in diesem Fall noch die Standardabweichung bestimmt werden, da die gemessenen Werte Unsicherheiten besitzen. Diese werden nach der Formel 13

Es wurden die folgenden Messwerte verwendet:

Tabelle 1: 1m Pendellänge, Pendel nicht durch Feder verbunden

t_1 (s)	T_1 (s)	t_2 (s)	T_2 (s)
9.9400	1.9880	9.4000	1.8800
9.3400	1.8680	9.5700	1.9140
9.2600	1.8520	9.3800	1.8760
9.2000	1.8400	9.3300	1.8660
9.4500	1.8900	9.6000	1.9200
9.5500	1.9100	9.4500	1.8900
9.4400	1.8880	9.7700	1.9540
9.5100	1.9020	9.8700	1.9740
9.3900	1.8780	9.9100	1.9820
9.5000	1.9000	9.8900	1.9780
Mittelwerte:			
9.4580	1.8916	9.6170	1.9234

Tabelle 2: 0,5m Pendellänge, Pendel nicht durch Feder verbunden

t_1 (s)	T_1 (s)	t_2 (s)	T_2 (s)
7.21	1.442	7.26	1.452
7.18	1.436	7.39	1.478
7.23	1.446	7.25	1.450
7.17	1.434	7.19	1.438
7.3	1.460	7.26	1.452
7.25	1.450	7.34	1.468
7.22	1.444	7.19	1.438
7.3	1.460	7.3	1.460
7.25	1.450	7.24	1.448
7.41	1.482	7.15	1.430
Mittelwerte:			
7.252	1.4504	7.257	1.4514

Daraus ergibt sich als Ergebnis:

Pendellänge (m)	T_1 (s) $\pm\sigma_1$	T_2 (s) $\pm\sigma_2$
1	1.8916±0.0802	1.9234±0.1292
0.5	1.4504±0.0299	1.4514±0.0379

4.2 Aufgabe 2

Analog zu Aufgabe 1 lässt sich auch die die Schwingungsdauer für eine gleichphasige Schwingung der gekoppelten Pendel bestimmen. Diesesmal wird die Formel 5 Auch wird für die Standardabweichung die Formel 13 und für den Mittelwert die Formel 12 verwendet.

Tabelle 3: Gleichphasige Schwingung bei verschidenen Pendellängen

$t_{+\ (1m)}$ (s)	$T_{+\ (1m)}$ (s)	$t_{+\ (0,5m)}$ (s)	$T_{+\ (0,5m)}$ (s)
9.470	1.8940	7.2900	1.4580
9.670	1.9340	7.1800	1.4360
9.630	1.9260	7.0400	1.4080
9.460	1.8920	7.1900	1.4380
9.710	1.9420	7.3900	1.4780
9.820	1.9640	7.4000	1.4800
9.370	1.8740	7.3000	1.4600
9.760	1.9520	7.2500	1.4500
9.830	1.9660	7.1800	1.4360
9.850	1.9700	7.3000	1.4600
Mittelwerte:			
9.657	1.9314	7.2520	1.4504

Mit den Messwerten aus der obigen Tabelle ergibt sich für T_+:

Pendellänge (m)	T_+ (s)$\pm\sigma$
1	1.9314±0.0958
0.5	1.4504±0.0645

4.3 Aufgabe 3

Auch die gegenphasige Schwingungsdauer T_- lässt sich auf die gleiche Weise mit 7 bestimmen. Wieder wurden die Formeln 12 und 13 verwendet.

Die Messwerte sind:

Tabelle 4: Gegenphasige Schwingung bei verschiedenen Pendellängen

$t_{-\,(1m)}$ (s)	$T_{-\,(1m)}$ (s)	$t_{-\,(0,5m)}$ (s)	$T_{-\,(0,5m)}$ (s)
8.870	1.7740	5.97	1.1940
8.450	1.6900	5.90	1.1800
8.640	1.7280	5.92	1.1840
8.520	1.7040	5.86	1.1720
8.980	1.7960	5.85	1.1700
8.550	1.7100	5.93	1.1860
8.660	1.7320	5.93	1.1860
8.750	1.7500	5.92	1.1840
8.850	1.7700	5.84	1.1680
8.660	1.7320	5.91	1.1820
Mittelwerte:			
8.693	1.7386	5.31	1.1806

Daraus lässt sich T_- berechnen zu:

Pendellänge (m)	T_- (s) $\pm\sigma$
1	1.7386±0.1010
0.5	1.1806±0.0246

4.4 Aufgabe 4

In dieser Aufgabe sollen die Schwingungsdauern T_K und Schwebungsdauern T_S für eine gekoppelte Schwingung bestimmt werden. T_K lässt sich, nach dem in Aufgabe 1 vorgestellten Verfahren, bestimmen. Für T_S gilt es zu beachten, dass die gemessenen Schwebungsdauern nicht durch 5 geteilt werden müssen, da diese in einer Schwebung gemessen wurden und nicht in 5. Für T_K und T_S müssen auch hier wieder Mittelwert und Standardabweichung nach 12 und 13 berechnet werden.

Tabelle 5: gekoppelte Schwingung verschiedener Pendellängen

$T_{S\ (1m)}$ (s)	$t_{K\ (1m)}$ (s)	$T_{(1m)}$ (s)	$T_{S\ (0,5m)}$ (s)	$t_{K\ (0,5m)}$ (s)	$T_{(0.5m)}$ (s)
14.420	9.830	1.9660	6.310	6.300	1.2600
14.830	9.910	1.9820	6.080	7.000	1.6000
14.800	10.140	2.0280	5.900	5.500	1.1000
14.420	9.640	1.9280	6.410	6.580	1.3160
14.880	9.620	1.9240	5.980	6.410	1.2820
14.660	9.370	1.8740	5.990	5.830	1.1660
14.400	9.740	1.9480	6.080	6.300	1.2600
14.030	9.370	1.8740	5.970	6.530	1.3060
15.030	9.230	1.8460	6.260	6.560	1.3120
14.160	9.310	1.8620	6.010	5.500	1.1000
Mittelwerte:					
14.563	9.616	1.9232	6.099	6.251	1.2502

Als Ergebnis ergeben sich folgende Werte:

Pendellänge (m)	T_S (s)$\pm\sigma$	T_K (s)$\pm\sigma$
1	14.563$\pm$0.9743	1.9232$\pm$0.1722
0.5	6.099 $\pm$0.4627	1.2502$\pm$0.4324

4.5 Aufgabe 5

Der Kopplungsgrad K kann aus den Schwingungsdauern nach Gleichung 9 brechnet werden. Da diese Formel allerdings bedeutet, dass der Kopplungsgrad durch fehlerbehaftete Größen berechnet wird, muss hier der Gauß-Fehler nach 14 bestimmt werden. Mit den Schwingungsdauern aus Aufgabe 2 und 3 erhält man folgende Werte für den Kopplungsgrad:

Pendellänge (m)	K $\pm$Gauß-Fehler
1	0.1048$\pm$0.0755
0.5	0.2030$\pm$0.0471

Der Kopplungsgrad lässt sich auch durch die Frequenzen bestimmen. Dafür müssen aus den Schwingungsdauern noch die Frequenzen bestimmt werden. Um die Frequenzen aus den Schwingungsdauern zu berechnen lohnt sich ein Vergleich zwischen 4 und 5, sowie 6 und 7.

Es fällt auf, dass gilt:

$$T_{+/-} = \frac{2\pi}{\omega_{+/-}} \tag{10}$$

$$\omega_{+/-} = \frac{2\pi}{T_{+/-}} \tag{11}$$

Der Gauß-Fehler lässt sich nach 14 berechnen. Mit den Mittelwerten der Schwingungsdauern und deren Unsicherheit aus Aufgabe 2 und Aufgabe 3 ergibt sich für die Frequenzen:

Pendellänge (m)	ω_+ ±Gauß-Fehler	ω_- ±Gauß-Fehler
1	3.2532±0.1614	3.6139±0.2099
0.5	4.3320±0.1926	5.3220±0.4553

Werden diese Werte nun in 9 eingesetzt ist K aus ω:

Pendellänge (m)	K ±Gauß-Fehler
1	0.1048±4.8516
0.5	0.2030±3.2161

4.6 Aufgabe 6

Die Schwebungsdauer T_S lässt sich nach 8 berechnen. Da T_+ und T_- fehlerbehaftete Größen sind, muss auch hier der Gauß-Fehler berechnet werden. Die Werte für die Schwingungsdauern sind:

Pendellänge (m)	T_+ (s)±σ	T_- (s) ±σ
1	1.9314±0.0958	1.7386±0.1010
0.5	1.4504±0.0645	1.1806±0.0246

Für die Schwebungsdauer ergibt sich dann:

Pendellänge (m)	T_S ±Gauß-Fehler
1	17.4167±12.7836
0.5	6.3467 ±1.4250

4.7 Fehlerrechnung

Arithmetischer Mittelwert:

$$x_{arithm} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N} x_k \tag{12}$$

Dabei ist N die Anzahl aufgenommener Messwerte und x_k sind die Messwerte.

Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2} \tag{13}$$

Hier ist N wider die Anzahl aufgenommener Messwerte, $\mathrm{x_k}$ sind die Messwerte und $\bar{x}$ ist der arithmetische Mittelwert.

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{(\partial f)}{(\partial x)}\right)^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{(\partial f)}{(\partial y)}\right)^2 (\Delta y)^2 + ... + \left(\frac{(\partial f)}{(\partial z)}\right)^2 (\Delta z)^2} \tag{14}$$

5 Diskussion

5.1 Vergleich Aufgabe 6

Für einen Vergleich der Messwerte mit den berechneten Schwebungsdauern sind hier nocheinmal die zu vergleichenden Werte dargestellt:

Pendellänge (m)	$\mathrm{T_S}$ (berechnet)	±Gauß-Fehler	$\mathrm{T_S}$ (gemessen)	±σ
1	17.4167	±12.7836	14.563	±0.9743
0.5	6.3467	±1.4250	6.099	±0.4627

5.2 Schwebungsdauer

Die gemessenen Werte liegen nah zwar an den berechneten Werten, jedoch ist eine Abweichung festzustellen. Diese ist darauf zurückzuführen, dass bei diesem Versuch die Schwebungsdauer mit bloßem Auge gemessen wurde. Ebenso wurde auch die zum Start benötigte Auslenkung mit der Hand bis zu einem Punkt ausgeführt. Auch dabei ist es nicht möglich immer genau den gleichen Punkt zu treffen. Eine weitere Schwierigkeit dieses Vergleichs sind die Gauß-Fehler der berechneten Werte. Die Gauß-Fehler sind so groß, weil die Werte aus vier (zwei verschiedenen) fehlerbehafteten Größen bestimmt wurden und sich die Unsicherheit der gemessenen Schwingungsdauern so vervielfältigt. Die berechneten Schwebungsdauern an sich liegen dabei sehr nah an den gemessenen Schwebungsdauern aber die Gauß-Fehler lassen, durch den großen Bereich, den sie für die berechneten Werte zulassen, kaum eine qualifizierte Aussage über die Abweicheng dieser Schwebungsdauern zu.

5.3 Allgemeine Probleme des Versuchs und Verbesserungsvorschläge

Um alle Messwerte genauer zu bestimmen könnte bei der Durchführung des Versuchs auf Lichtschranken zurückgegriffen werden. Dann stoppt die Zeit immer genau zu dem Zeitpunkt an dem gestoppt werden soll und die Reaktionszeit bis zum Stoppen ist geringer.

Ebenso könnte eine mechanische Sperre anbringen, die es ermöglicht präzise die Pendel auszulenken. Dies würde es ermöglichen, eine nahezu perfekt gleichphasige oder nahezu perfekt gegenphasige Schwingung zu erhalten. Bei der Auslenkung mit der Hand kommt es häufig zu Schwingungen, die in gekoppelten Schwingungen enden, anstatt gleichphasig oder gegenphasig zu bleiben. Es entsteht also ein Messfehler, weil es nahezu nicht möglich ist mit der Hand die Pendel so exakt auszulenken.

Ein weiteres Problem dieses Versuchs liegt bei den berechneten Werten. Diese werden nahezu ausschließlich aus den fehlerbehafteten Messwerten berechnet, was dazu führt, dass die Gauß-Fehler bei einigen Werten sehr hoch ausfallen.

6 Literatur

Anleitung V106 Gekoppelte Pendel TU Dortmund Formelsammlung zur Berechnung von Messunsicherheiten

7 Originalwerte

In diesem Kapitel sind alle, bei dem Versuch aufgenommenen unbearbeiteten, Messwerte:

Tabelle 6: Gemessene Zeiten für alle Schwingungsarten bei einer Pendellänge von einem Meter

t_1 (s)	t_2	t_+	t_-	T_S	t_K
9.9400	9.4000	9.47	8.87	14.42	9.83
9.3400	9.5700	9.67	8.45	14.83	9.91
9.2600	9.3800	9.63	8.64	14.80	10.14
9.2000	9.3300	9.46	8.52	14.42	9.64
9.4500	9.6000	9.71	8.98	14.88	9.62
9.5500	9.4500	9.82	8.55	14.66	9.37
9.4400	9.7700	9.37	8.66	14.40	9.74
9.5100	9.8700	9.76	8.75	14.03	9.37
9.3900	9.9100	9.83	8.85	15.03	9.23
9.5000	9.8900	9.85	8.66	14.16	9.31

Tabelle 7: Gemessene Zeiten für alle Schwingungsarten bei einer Pendellänge von einem halben Meter

t_1 (s)	t_2	t_+	t_-	T_S	t_K
7.21	7.26	7.29	5.97	6.31	6.3
7.18	7.39	7.18	5.9	6.08	7.0
7.23	7.25	7.04	5.92	5.9	5.5
7.17	7.19	7.19	5.86	6.41	6.58
7.3	7.26	7.39	5.85	5.98	6.41
7.25	7.34	7.4	5.93	5.99	5.83
7.22	7.19	7.3	5.93	6.08	6.3
7.3	7.3	7.25	5.92	5.97	6.53
7.25	7.24	7.18	5.84	6.26	6.56
7.41	7.15	7.3	5.91	6.01	5.5