V354 Gekoppelte und erzwungene Schwingungen

Connor Magnus Böckmann
email: connormagnus.boeckmann@tu-dortmund.de

Tim Theissel
email: tim.theissel@tu-dortmund.de

10. Januar 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Das Ziel des Versuchs ist die Untersuchung eines RCL-Schwingkreises. Dabei soll der reale gedämpfte Schwingkreis anhand der Zeitabhängigkeit der Amplituden, des effektiven Widerstandes, dem aperiodischen Grenzfall und die Frequenzabhängigkeiten der Kondensatorspannung und ihrer Phase zur Erregerspannung.

2 Theoretische Grundlagen

Beim in diesem Versuch untersuchten Schwingkreis handelkt es sich um einen RCL-Schwingkreis. Dieser enthält, verglichen mit dem RC-Kreis, neben dem Kondensator und dem Widerstand noch eine Spule mit Induktivität L. Dadurch ergibt sich ein zweiter Energiespeicher in Form der Spule. Diese ermöglicht ein Pendeln der Energie zwischen den beiden Energiespeichern, Spule und Kondensator. Das RCL-System schwingt also periodisch hin und her. Ohne Energieverbraucher, zum Beispiel den Widerstand, würde das System unendlich lange ungedämpft schwingen. Da der Widerstand aber elektrische Energie in Wärme umwandelt, geht darüber Energie verloren und der Schwingkreis wird gedämpft. Besonders von Interesse ist dabei das Zeitgesetz.

2.1 Differentialgleichung für eine gedämpfte Schwingung-Herleitung und Lösung

Vereinfacht lässt sich der RCl-Schwingkreis darstellen wie in Abb. 1. Daraus lässt sich erkennen, dass die zweite Kirchhoffsche Regel hier verwendet werden kann. Mit der

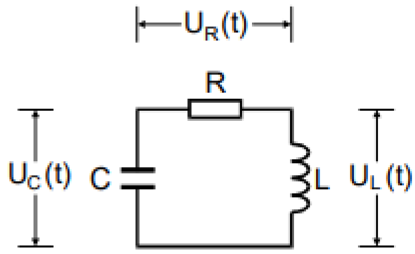

Abbildung 1: Abb.1: RCL-Schwingkreis

zweiten Kirchhoffschen Regel lässt sich die Spannung im System darstellen:

$$U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = 0$$

$$U_R(t) = R \cdot I(t)$$

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} \text{(Q(t)=Ladung des Kondensators)}$$

$$U_L(t) = L\frac{dI}{dt} \text{(Induktionsgesetz)}$$

Es folgt also daraus:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + Q\frac{Q}{C} = 0$$

Die gesuchte Schwingungsgleichung ergibt sich dann mit

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

aus der ersten Ableitung zu

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{RdI}{Ldt} + \frac{I}{LC} = 0 \tag{1}$$

Geloest wird diese lineare, homogene DGL mit dem Ansatz

$$\tau(t) = \xi e^(j\omega t)$$

Dabei sind ξund ωkomplexe Zahlen und $j = \sqrt{-1}$. Daraus erhaelt man

$$(-\omega^2 + j\frac{R}{L}\omega + \frac{1}{LC})\xi e^j\omega t$$

Die DGL wird nun fuer beliebige ξund beliebige t erfuellt, solange ωdie charakteristische Gleichung

$$\omega^2 - j\frac{R\omega}{L} - \frac{1}{LC} = 0$$

Daher muss ωeinen der beiden Werte

$$\omega = j\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Alle Loesungen der DGL lassen sich dann ausdruecken als

$$\tau = \xi_1 e^{j\omega_1 t} + \xi_2 e^{j\omega_2 t}$$

Ausserdem werden die Abkuerzungen

$$\begin{aligned} 2\pi\mu &:= \frac{R}{2L} \\ 2\pi v &:= \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \end{aligned} \tag{2}$$

$\tau(t)$ laest sich dann schreiben als

$$\tau(t) = e^{-2\pi\mu t}(\xi_1 e^{j2\pi vt} + \xi_2 e^{-j2\pi vt}) \tag{3}$$

Die Loesung haengt nun massgebend davon ab, ob $\frac{1}{LC}$ groesser oder kleinr als $\frac{R^2}{4L^2}$. Dieser Umstand entscheide nun, ob v reell oder imaginaer ist. Daher ist eine Fallunterscheidung notwendig.

2.2 1. Fall: $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$

Unter diesen Bedingungen ist dann $\xi_1 = \bar{\xi_2}$, damit die Loesung $\tau(t)$ reell wird. Das laesst sich ausdruecken durch den Ansatz

$$\xi_1 = \frac{1}{2}A_0 e^{j\eta}\xi_2 \qquad\qquad = \frac{1}{2}A_0 e^{-j\eta}$$

Fuer $\tau(t)$ unter Benutzung der Euler-Identitaet gilt

$$\frac{e^{j\phi} + e{-}j\phi}{2} = \cos\phi$$

Daher ergibt sich fuer den geklammerten Ausdruck aus 3 eine reine oszillatorische Funktion.

$$I(t) = A_0 e^{-2\pi\mu t}\cos(2\pi vt + \eta)$$

Diese Gleichung stellt eine gedaempfte Schwingung dar. Die Schwingung ist also harmonisch, geht aber mit fortschreitender Zeit exponentiell gegen null. Die Schwingungsdauer laesst sich dabei ausdruecken als:

$$T = \frac{1}{v} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$

Sie naehert sich dem Wert

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$

der ungedaempften Schwingung an, wenn $\frac{R^2}{4L^2}$ klein gegen $\frac{1}{LC}$. Die Amplitudenabnahmmegeschwindigkeit wird charakterisiert durch $2\pi\mu = \frac{R}{2L}$. Die Amplitude geht dabei nach der Zeit

$$T_e x = \frac{1}{2\pi\mu} = 2\pi\sqrt{LC}$$

auf den e-ten Teil des Startwerts zurueck. $T_e x$ wird Abklingdauer genannt.

2.3 2. Fall: Aperiodische Daempfung fuer $\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$

Die Loesung I(t) enthaelt fuer diesen Fall keinen oszillatorischen Anteil mehr. Dieser Fall nennt sich aperiodiche Daempfung. Von besonderer Bedeutung ist der Spezialfall des aperiodischen Grenzfalls.

$$\frac{1}{LC} = \frac{R_a p^2}{4L^2}$$

Dadurch ist $v = 0$ und

$$I(t) = Ae^{-\frac{Rt}{2L}} = Ae^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}}$$

Der aperiodische Grenzfall stellt einen Fall ohne Ueberschwingen dar fuer den die Schwingung am schnellsten gegen null geht.

3 Differentialgleichung fuer erzwungene Schwingungen

Im Folgenden wird das schwingfaehige System durch eine aeussere, periodische Kraft ausgelenkt. Im Fall des RCL-Schwingkreises handelt es sich dabei um eine sinusfoermige Wechselspannung u(t).

$$u(t) = U_0 e^{j\omega t}$$

Die in den vorigen Abschnitten beschriebene Differentialgleichung 1 nimmt hier somit die Form

$$L\frac{d\xi}{dt} + R\xi + \frac{Q}{C} = U_0 e^{j\omega t}$$

oder

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = U_0 e^{j\omega t} \tag{4}$$

an. Q(t) stellt hierbei die Ladung auf dem Kondensator dar, weshalb damit die Spannung folgendes ist:

$$u_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

Betrachtet wird im Folgenden vorallem die Amplitude der Kondensatorspannung $u_C(t)$ mit ihrem Phasenunterschied gegenueber der Erregerspannung u(t). Besonderes Augenmerk wird dabei auf ihre Frequenzabhaengigkeit gelegt.
Der Ansatz ist

$$u_C(\omega, t) = \xi(\omega)e^{j\omega t}(\xi komplex) \tag{5}$$

. Nun wird 5 in 4 eingesetzt und die Bestimmungsgleichung $-LC\omega^2\xi + j\omega RC\xi + \xi = U_0$ nach ξaufgeloest.

$$\xi = \frac{U_0}{1 - LC\omega^2 + j\omega RC} = \frac{U_0(1 - LC\omega^2 - j\omega RC)}{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}$$

Der Betrag betraegt dann

$$|\xi| = \sqrt{Re^2(\xi) + Im^2(\xi)} = U_0\sqrt{\frac{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}{((1 - LC\omega^2)^2) + \omega^2 R^2 C^2)^2}} \tag{6}$$

mit der Phase

$$\tan\phi(\omega) = \frac{Im(\xi)}{Re(\xi)} = \frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2}$$

beziehungsweise

$$\phi(\omega) = \arctan(\frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2})$$

Der Betrag der Loesungsfunktion nach 5 entspricht dabei dem Betrag von ξ. Somit erhaelt man aus 6 als Ergebnis

$$U_C(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \tag{7}$$

Durch diese Beziehung laesst sich also nun die gesuchte Frequenzabhaengigkeit zwischen der Kondensatorspannung und der Frequenz ω. Dieser Zusammenhang nennt sich Resonanzkurve. Fuer $\omega \to \infty$ geht $U_C \to 0$ und fuer $\omega \to 0$ geht $U_C \to U_0$. Bei einer bestimmten Frequenz gibt es ein U_C, welches groesser als die urspruengliche Erregeramplitude U_0 ist. Diese Frequenz nennt sich Resonanzfrequenz und das zugehoerige Phaenomen nennt sich Resonanz. Gegeben wird die Resonanzfrequenz durch

$$\omega_r es = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$$

Besonderer Betrachtung wird der Fall der schwachen Daempfung, also $\frac{R^2}{2L^2} << \frac{1}{LC}$, unterzogen. Dort naehert sich die Resonanzfrequenz naemlich der Kreisfrequenz des ungedaempften Schwingkreises an. Die Kondensatorspannung uebertrift die Erregerspannung um den Faktor $\frac{1}{\omega_0 RC}$, die so genannte Resonanzueberhoehung oder Guete q eines Schwingkreises.

$$U_{c,max} = \frac{1}{\omega_0 RC} U_0 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} U_0 \tag{8}$$

Es laesst sich bereits erkennen, dass die Kondensatorspannung fuer $R \to 0$ gegen ∞ geht. Es handelt sich dabei um die so genannte Resonanzkatastrophe. Ausserdem ist die Breite der Resonanzkurve in 7 ein Mass fuer die Schaerfe eines Schwingkreises. Charakterisiert wird sie durch die Frequenzen bei denen U_C auf den $\frac{1}{\sqrt{2}}$-sten Bruchteil seines Maximums 8 abgefallen ist. Diese werden ω_+ und ω_- genannt und werden durch

$$U_{c,max} = \frac{1}{\omega_0 RC} U_0 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} U_0$$

gegeben. Unter Beachtung, dass $\frac{R^2}{L^2} << \omega_0^2$ ist, folgt fuer die Breite der Resonanzkurve

$$\omega_+ - \omega_- \approx \frac{R}{L}$$

Somit besteht zwischen der Guete q und der Breite der Resonanzkurve die folgende Beziehung:

$$q = \frac{\omega_0}{\omega_+ - \omega_-}$$