

V354 Gekoppelte und erzwungene Schwingungen

Connor Magnus Böckmann

email: connormagnus.boeckmann@tu-dortmund.de

Tim Theissel

email: tim.theissel@tu-dortmund.de

12. Januar 2021

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	3
2	Theoretische Grundlagen	3
2.1	Differentialgleichung für eine gedämpfte Schwingung-Herleitung und Lösung	3
2.2	1. Fall: $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$	5
2.3	2. Fall: Aperiodische Daempfung fuer $\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$	5
2.4	Differentialgleichung fuer erzwungene Schwingungen	6
2.5	Impedanz eines Schwingkreises	8
2.6	Parallelschwingkreis als Zweipol	9
3	Auswertung	10
3.1	Aufgabe 5a	11
3.2	Aufgabe 5b	12
3.3	Aufgabe 5c	13
3.4	Aufgabe 5d	16
4	Diskussion	18
5	Tabellen	19
6	Quellen	20

1 Zielsetzung

Das Ziel des Versuchs ist die Untersuchung eines RCL-Schwingkreises. Dabei soll der reale gedämpfte Schwingkreis anhand der Zeitabhängigkeit der Amplituden, des effektiven Widerstandes, dem aperiodischen Grenzfall und die Frequenzabhängigkeiten der Kondensatorspannung und ihrer Phase zur Erregerspannung.

2 Theoretische Grundlagen

Beim in diesem Versuch untersuchten Schwingkreis handelt es sich um einen RCL-Schwingkreis. Dieser enthält, verglichen mit dem RC-Kreis, neben dem Kondensator und dem Widerstand noch eine Spule mit Induktivität L . Dadurch ergibt sich ein zweiter Energiespeicher in Form der Spule. Diese ermöglicht ein Pendeln der Energie zwischen den beiden Energiespeichern, Spule und Kondensator. Das RCL-System schwingt also periodisch hin und her. Ohne Energieverbraucher, zum Beispiel den Widerstand, würde das System unendlich lange ungedämpft schwingen. Da der Widerstand aber elektrische Energie in Wärme umwandelt, geht darüber Energie verloren und der Schwingkreis wird gedämpft. Besonders von Interesse ist dabei das Zeitgesetz.

2.1 Differentialgleichung für eine gedämpfte Schwingung-Herleitung und Lösung

Vereinfacht lässt sich der RCL-Schwingkreis darstellen wie in Abb. 1. Daraus lässt sich erkennen, dass die zweite Kirchhoffsche Regel hier verwendet werden kann.

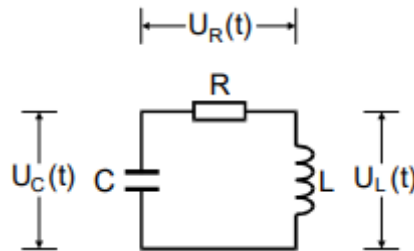


Abbildung 1: RCL-Schwingkreis

Mit der zweiten Kirchhoffschen Regel lässt sich die Spannung im System darstellen:

$$U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = 0$$

$$U_R(t) = R \cdot I(t)$$

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} \quad (Q(t) = \text{Ladung des Kondensators})$$

$$U_L(t) = L \frac{dI}{dt} \quad (\text{Induktionsgesetz})$$

Es folgt also daraus:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + Q \frac{Q}{C} = 0$$

Die gesuchte Schwingungsgleichung ergibt sich dann mit

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

aus der ersten Ableitung zu

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{RdI}{Ldt} + \frac{I}{LC} = 0 \quad (1)$$

Geloest wird diese lineare, homogene DGL mit dem Ansatz

$$\tau(t) = \xi e^{j\omega t}$$

Dabei sind ξ und ω komplexe Zahlen und $j = \sqrt{-1}$. Daraus erhaelt man

$$(-\omega^2 + j \frac{R}{L} \omega + \frac{1}{LC}) \xi e^{j\omega t}$$

Die DGL wird nun fuer beliebige ξ und beliebige t erfuehrt, solange ω die charakteristische Gleichung

$$\omega^2 - j \frac{R\omega}{L} - \frac{1}{LC} = 0$$

Daher muss ω einen der beiden Werte

$$\omega = j \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Alle Loesungen der DGL lassen sich dann ausdruecken als

$$\tau = \xi_1 e^{j\omega_1 t} + \xi_2 e^{j\omega_2 t}$$

Ausserdem werden die Abkuerzungen

$$2\pi\mu := \frac{R}{2L} \quad (2)$$

$$2\pi v := \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (3)$$

$\tau(t)$ laest sich dann schreiben als

$$\tau(t) = e^{-2\pi\mu t} (\xi_1 e^{j2\pi v t} + \xi_2 e^{-j2\pi v t}) \quad (4)$$

Die Loesung haengt nun massgebend davon ab, ob $\frac{1}{LC}$ groesser oder kleiner als $\frac{R^2}{4L^2}$. Dieser Umstand entscheide nun, ob v reell oder imaginair ist. Daher ist eine Fallunterscheidung notwendig.

2.2 1. Fall: $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$

Unter diesen Bedingungen ist dann $\xi_1 = \bar{\xi}_2$, damit die Lösung $\tau(t)$ reell wird. Das lässt sich ausdrücken durch den Ansatz

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{1}{2}A_0 e^{j\eta} \\ \xi_2 &= \frac{1}{2}A_0 e^{-j\eta}\end{aligned}$$

Für $\tau(t)$ unter Benutzung der Euler-Identität gilt

$$\frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2} = \cos \varphi$$

Daher ergibt sich für den geklammerten Ausdruck aus 4 eine reine oszillatorische Funktion.

$$I(t) = A_0 e^{-2\pi\mu t} \cos(2\pi\nu t + \eta)$$

Diese Gleichung stellt eine gedämpfte Schwingung dar. Die Schwingung ist also harmonisch, geht aber mit fortschreitender Zeit exponentiell gegen null. Die Schwingungsdauer lässt sich dabei ausdrücken als:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$

Sie nähert sich dem Wert

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$

der ungedämpften Schwingung an, wenn $\frac{R^2}{4L^2}$ klein gegen $\frac{1}{LC}$. Die Amplitudenabnahmegeschwindigkeit wird charakterisiert durch $2\pi\mu = \frac{R}{2L}$. Die Amplitude geht dabei nach der Zeit

$$T_{ex} = \frac{1}{2\pi\mu} = 2\pi\sqrt{LC} \quad (5)$$

auf den e-ten Teil des Startwerts zurück. T_{ex} wird Abklingdauer genannt.

2.3 2. Fall: Aperiodische Dämpfung für $\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$

Die Lösung $I(t)$ enthält für diesen Fall keinen oszillatorischen Anteil mehr. Dieser Fall nennt sich aperiodische Dämpfung. Von besonderer Bedeutung ist der Spezialfall des aperiodischen Grenzfalls.

$$\frac{1}{LC} = \frac{R_a p^2}{4L^2} \quad (6)$$

Dadurch ist $\nu = 0$ und $I(t) = A e^{-\frac{Rt}{2L}} = A e^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}}$. Der aperiodische Grenzfall stellt einen Fall ohne Ueberschwingen dar für den die Schwingung am schnellsten gegen null geht.

2.4 Differentialgleichung fuer erzwungene Schwingungen

Im Folgenden wird das schwingfaehige System durch eine aeussere, periodische Kraft ausgelenkt. Im Fall des RCL-Schwingkreises handelt es sich dabei um eine sinusfoermige Wechselspannung $u(t)$.

$$u(t) = U_0 e^{j\omega t}$$

Die in den vorigen Abschnitten beschriebene Differentialgleichung 1 nimmt hier somit die Form

$$L \frac{d\xi}{dt} + R\xi + \frac{Q}{C} = U_0 e^{j\omega t}$$

oder

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_0 e^{j\omega t} \quad (7)$$

an. $Q(t)$ stellt hierbei die Ladung auf dem Kondensator dar, weshalb damit die Spannung folgende ist:

$$u_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

Betrachtet wird im Folgenden vorallem die Amplitude der Kondensatorspannung $u_C(t)$ mit ihrem Phasenunterschied gegenueber der Erregerspannung $u(t)$. Besonderes Augenmerk wird dabei auf ihre Frequenzabhaengigkeit gelegt.

Der Ansatz ist

$$u_C(\omega, t) = \xi(\omega) e^{j\omega t} (\xi \text{ komplex}) \quad (8)$$

Nun wird 8 in 7 eingesetzt und die Bestimmungsgleichung $-LC\omega^2\xi + j\omega RC\xi + \xi = U_0$ nach ξ aufgeloesst.

$$\xi = \frac{U_0}{1 - LC\omega^2 + j\omega RC} = \frac{U_0(1 - LC\omega^2 - j\omega RC)}{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}$$

Der Betrag betraegt dann

$$|\xi| = \sqrt{Re^2(\xi) + Im^2(\xi)} = U_0 \sqrt{\frac{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}{((1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2)^2}} \quad (9)$$

mit der Phase

$$\tan \varphi(\omega) = \frac{Im(\xi)}{Re(\xi)} = \frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2}$$

beziehungsweise

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2}\right) \quad (10)$$

Der Betrag der Loesungsfunktion nach 8 entspricht dabei dem Betrag von ξ . Somit erhaelt man aus 9 als Ergebnis

$$U_C(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (11)$$

Durch diese Beziehung laesst sich also nun die gesuchte Frequenzabhaengigkeit zwischen der Kondensatorspannung und der Frequenz ω . Dieser Zusammenhang nennt sich Resonanzkurve. Fuer $\omega \rightarrow \infty$ geht $U_C \rightarrow 0$ und fuer $\omega \rightarrow 0$ geht $U_C \rightarrow U_0$. Bei einer bestimmten Frequenz gibt es ein U_C , welches groesser als die urspruengliche Erregeramplitude U_0 ist. Diese Frequenz nennt sich Resonanzfrequenz und das zugehoerige Phaenomen nennt sich Resonanz. Gegeben wird die Resonanzfrequenz durch

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \quad (12)$$

Besonderer Betrachtung wird der Fall der schwachen Daempfung, also $\frac{R^2}{2L^2} \ll \frac{1}{LC}$, unterzogen. Dort naehert sich die Resonanzfrequenz naemlich der Kreisfrequenz des ungedaempften Schwingkreises an. Die Kondensatorspannung uebertrifft die Erregerspannung um den Faktor $\frac{1}{\omega_0 RC}$, die so genannte Resonanzueberhoehung oder Guete q eines Schwingkreises.

$$U_{c,max} = \frac{1}{\omega_0 RC} U_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_0 \quad (13)$$

Es laesst sich bereits erkennen, dass die Kondensatorspannung fuer $R \rightarrow 0$ gegen ∞ geht. Es handelt sich dabei um die so genannte Resonanzkatastrophe. Ausserdem ist die Breite der Resonanzkurve in 11 ein Mass fuer die Schaerfe eines Schwingkreises. Charakterisiert wird sie durch die Frequenzen bei denen U_C auf den $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -sten Bruchteil seines Maximums 13 abgefallen ist. Diese werden ω_+ und ω_- genannt und werden durch

$$U_{c,max} = \frac{1}{\omega_0 RC} U_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_0$$

gegeben. Unter Beachtung, dass $\frac{R^2}{L^2} \ll \omega_0^2$ ist, folgt fuer die Breite der Resonanzkurve

$$\omega_+ - \omega_- \approx \frac{R}{L}$$

Somit besteht zwischen der Guete q und der Breite der Resonanzkurve die folgende Beziehung:

$$q = \frac{\omega_0}{\omega_+ - \omega_-}$$

Das Verhalten aendert sich fuer starke Daempfung, also $\frac{R^2}{2L^2} \gg \frac{1}{LC}$, grundlegend. Es existiert keine Frequenzueberhoehung mehr. Stattdessen geht U_C von U_0 aus mit wachsender Frequenz monoton gegen 0. Bei hinreichend hohen Frequenzen faellt U_C proportional zu $\frac{1}{\omega^2}$.

Im Folgenden soll ausserdem noch die Frequenzabhaengigkeit der Phase zwischen Erreger- und Kondensatorspannung untersucht werden. Nach dem Ansatz aus 8 gibt Gleichung 10 den Zusammenhang zwischen φ und ω wieder. Gleichung 10 sagt dabei aus, dass bei kleinen Frequenzen Kondensator- und Erregerspannung praktisch in Phase sind. Im Gegensatz dazu verschiebt sich die Kondensatorspannung bei sehr grossen Frequenzen um π und hinkt dadurch der Erregerspannung hinterher.

2.5 Impedanz eines Schwingkreises

Ein RCL-Serienschwingkreis kann auch als ein Zweipol aufgefasst werden.

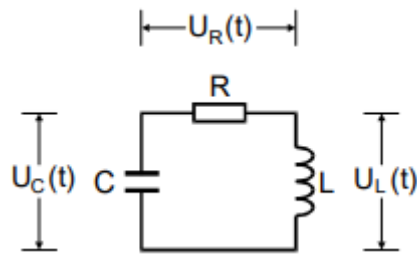


Abbildung 2: Serienschwingkreis als Zweipol

An den Enden des Zweipols lässt sich ein Widerstand feststellen. Dieser ist frequenzabhängig und wird Impedanz. Sie wird auf Grund der häufig vorhandenen Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung als komplexe Zahl definiert.

$$z = x + iy$$

Dabei sind x und y reelle Widerstände. Sie werden Blindwiderstand (Reaktanz) und Wirkwiderstand genannt. Der Betrag der Impedanz

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

nennt sich Scheinwiderstand. Die Darstellung der Impedanz $z(\omega)$ in der komplexen Zahlenebene wird Ortskurve genannt und lässt sich durch einen Vektor aus dem Ursprung darstellen. Die Länge des Vektors entspricht dem Scheinwiderstand. Der Winkel α zwischen dem Vektor und der reellen Achse ist genauso groß wie die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom im Serienschwingkreis als Zweipol.

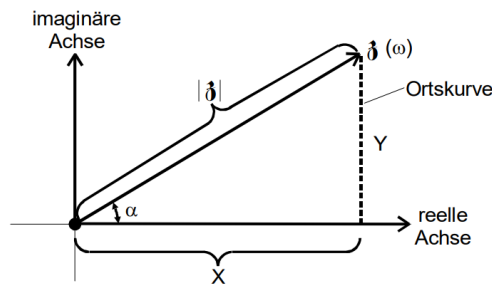


Abbildung 3: Darstellung der Impedanz des Serienschwingkreises als Zweipol in der komplexen Zahlenebene

Die Impedanz z errechnet sich nun folgendermassen mit den Widerstandsoperatoren

$$\begin{aligned} z_C &= -i \frac{1}{C\omega} \text{ (Widerstand der Kapazitaet)} \\ z_L &= iL\omega \text{ (Widerstand der Induktivitaet)} \\ z_R &= R_S \text{ (ohmscher Widerstand)} \end{aligned} \quad (14)$$

zu

$$z_S = R_S + i\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

x_S und y_S sind dann

$$\begin{aligned} x_S &= R_S \\ y_S &= iL\omega - \frac{1}{C\omega} \\ |z_S| &= \sqrt{R_S^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \end{aligned} \quad (15)$$

Die Frequenzunabhaengigkeit von x_S sorgt fuer eine Ortskurve, welche immer parallel zur imaginaeren Achse verlaeuft und an der Stelle R_S die reelle Achse schneidet. Der Scheinwiderstand erreicht auf Grund von 15 an der Stelle $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ sein Minimum R_S . Fuer $\omega \rightarrow 0$ und $\omega \rightarrow \infty$ geht der Widerstand gegen ∞ .

2.6 Parallelschwingkreis als Zweipol

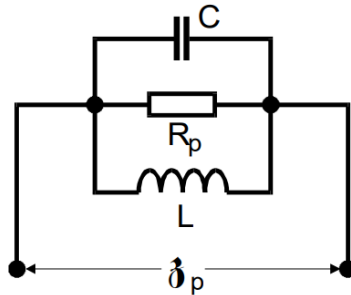


Abbildung 4: Parallelschwingkreis als Zweipol

Die Impedanz eines Parallelschwingkreises soll der Vollstaendigkeit halber auch noch kurz erwaeht werden. Diese errechnet sich dann zu

$$z_p = \frac{\frac{1}{R_p} + i\left(\frac{1}{\omega L} - C\omega\right)}{\frac{1}{R_p^2} + \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)^2} \quad (16)$$

und der Scheinwiderstand dementsprechend zu

$$|z_p| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R_p^2} + \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)^2}} \quad (17)$$

$|z_p|$ durchläuft also nun bei $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ein Maximum mit dem Wert R_p . $|z_p|$ geht fuer $\omega \rightarrow 0$ gegen ∞ . Die Abhaengigkeit des Scheinwiderstandes von der Frequenz laesst sich wie folgt darstellen:

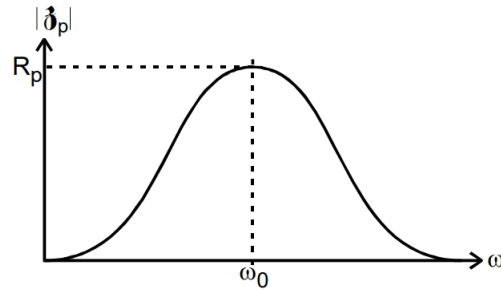


Abbildung 5: Abhaengigkeit des Scheinwiderstandes von der Frequenz im Parallelschwingkreis

Aus 16 ergibt sich fuer die Ortskurve des parallel geschalteten RCL-Schwingkreises ein Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2}R_p$. Der Mittelpunkt ist dabei der Punkt $(0, \frac{1}{2}R_p)$, siehe 6.

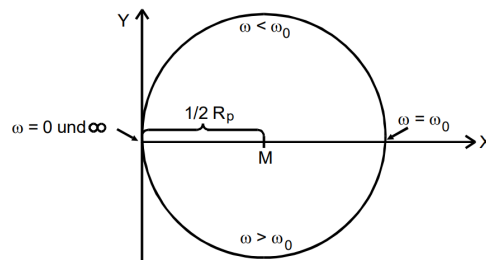


Abbildung 6: Ortskurve eines Parallelschwingkreis

3 Auswertung

Zu Beginn dieser Auswertung ist zu sagen, dass sämtliche in dieser Auswertung vorkommenden Fehlerrechnungen mit der Python-Funktion "uncertainties" durchgeführt werden.

Durch die Bauteile werden bei diesem Versuch folgende Werte für den Schwingkreis vorgegeben:

$$\begin{aligned}
L &= (16.78 \pm 0.09)H \\
C &= (2.066 \pm 0.006)nF \\
R_1 &= (67.2 \pm 0.2)\Omega \\
R_2 &= (682 \pm 1)\Omega
\end{aligned}$$

3.1 Aufgabe 5a

In diesem Aufgabenteil soll die Zeitabhängigkeit der Amplitude einer gedämpften Schwingung und daraus der Dämpfungswiderstand bestimmt werden. Dafür wurden am Oszilloskop die Amplituden abgelesen und dann gegen die Zeit in einem Diagramm dargestellt (7). Die abgelesenen Werte sind in Tabelle 1 zu finden. Eine Ausgleichsrechnung mit einer Funktion der Form:

$$b * e^{-2*\pi*a*x}$$

liefert den, in dem Diagramm 7 zu sehenden, Graphen. Diese Ausgleichsrechnung wurde mit der Python-Funktion "scipy.optimize" durchgeführt und liefert folgende Parameter für die Funktion:

Parameter	Wert	± Unsicherheit
a	0.001218 ± 0.000017	
b	4.033851 ± 0.035089	

Der Parameter a entspricht fast dem μ aus 5. Dadurch, dass die Zeitachse in diesem Diagramm die Einheit μs hat muss der Parameter a folgendermaßen angepasst werden. Der Exponent der e Funktion aus 5 muss insgesamt einheitslos sein. Da t allerdings die Einheit μs trägt muss a folglich den Kehrwert dieser Einheit tragen. Deshalb müssten die beiden Parameter in SI-Einheiten so wie folgt aussehen:

Parameter	Wert	± Unsicherheit
a	1218	± 17
b	4.033851 ± 0.035089	

Mit diesem Parameter und den Beziehungen aus 2, lässt sich der effektive Dämpfungswiderstand bestimmen. Nach der Umstellung der Gleichung 2 ergibt sich, unter Verwendung des zu Beginn der Auswertung vorgegebenen Wertes für L, R_{eff} zu:

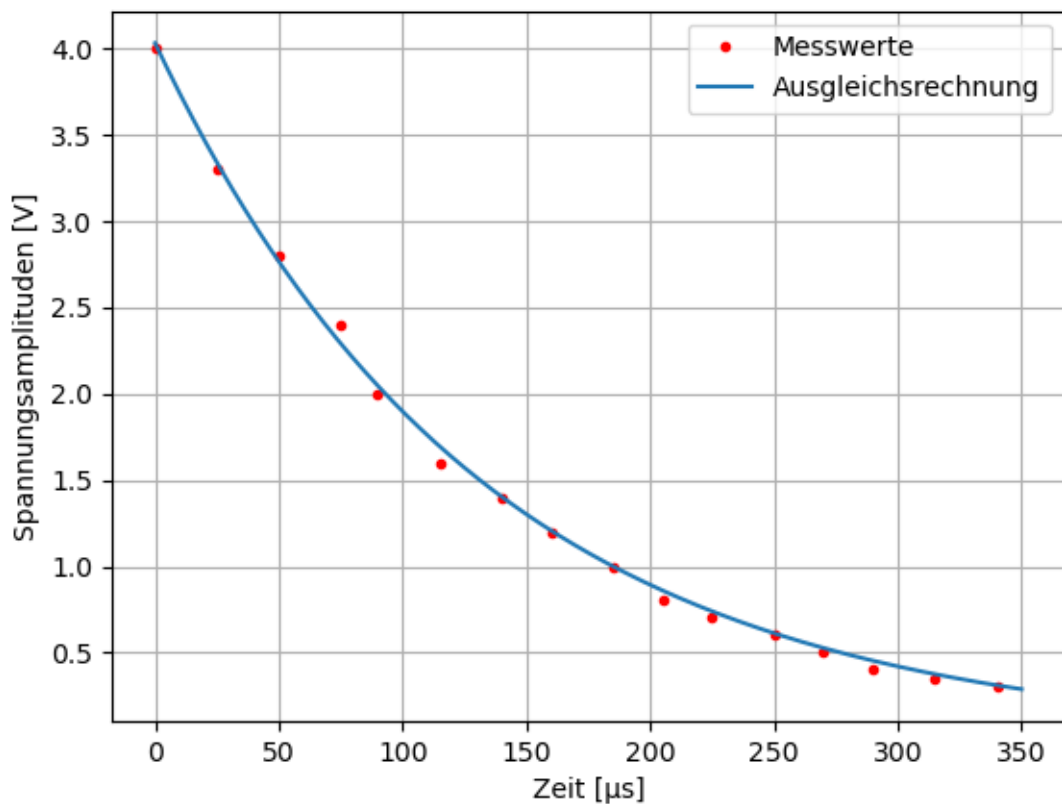
$$R_{eff} = 257 \pm 4\Omega$$

Es ist deutlich zu erkennen, dass der gegebene Wert für den eingebauten Widerstand überschritten wird. Der gegebene Wert ist nämlich lediglich $R_1 = (67.2 \pm 0.2)\Omega$. Der noch nicht betrachtete Generatorinnenwiderstand von 50Ω verringert die Abweichung zwar etwas, allerdings ist diese immer noch sehr groß. Dies könnte mit den verwendeten Geräten zusammenhängen. Die Werte für die Spannung müssen mit bloßem Auge vom

Bildschirm des Oszillographen abgelesen werden. Dabei entstehen Ablesefehler. Eine weitere Fehlerquelle liegt bei der Eichung des Geräts. Die Funktion zur Eichung des Oszillographen sollte Das Gerät eine zur x-Achse parallele Linie anzeigen. In der Realität war diese Linie Allerdings nicht parallel zur x-Achse. Dieser Umstand macht eine exakte Eichung sehr schwierig. Es gibt auch noch den Fehler durch die Ungenauigkeit des berechneten Widerstands. Diese fällt sehr klein aus, da nur Werte mit relativ geringen Fehlern in der REchnung verwendet werden.

Um nun die Abklingdauer T_{ex} zu berechnen wird die Gleichung 5 verwendet. $a = 1218 \pm 17$

$$T_{ex} = 0.0001307 \pm 0.0000018s$$



Abbildungung 7: Spannungsamplituden-Diagramm

3.2 Aufgabe 5b

Der gemessene Wert R_{ap} beträgt: 3250Ω .

Um R_{ap} zu berechnen ist Formel 6 zu verwenden. Nach kurzen Umformungen lässt sich folgender Wert berechnen:

$$R_{ap} = 5700 \pm 17\Omega$$

Bei dieser Messung musste der Widerstand am Oszillographen, mit einem Drehrad, eingestellt und an diesem auch abgelesen werden. Dabei gibt es schon kleinere Ablesefehler. Das größere Problem ist hier allerdings, dass es im Auge des Betrachters liegt wann der aperiodische Grenzfall erreicht ist. Der aperiodische Grenzfall lässt in seiner Definition zwar keine subjektive Interpretation zu, allerdings ist es auf dem Bildschirm des Oszillographen schwer zu erkennen, ob der aperiodische Grenzfall tatsächlich schon erreicht oder vielleicht sogar überschritten ist. Auch hier könnte die in Aufgabenteil 5a erwähnte Eichung ein großes Problem darstellen.

3.3 Aufgabe 5c

Die Resonanzüberhöhung lässt sich bestimmen, indem in einem halblogarithmischen Diagramm U_C/U gegen die Frequenz ν aufgetragen wird. Dabei wird die Resonanzüberhöhung als Peak des Graphen auftreten.

Das Diagramm sieht wie folgt aus:

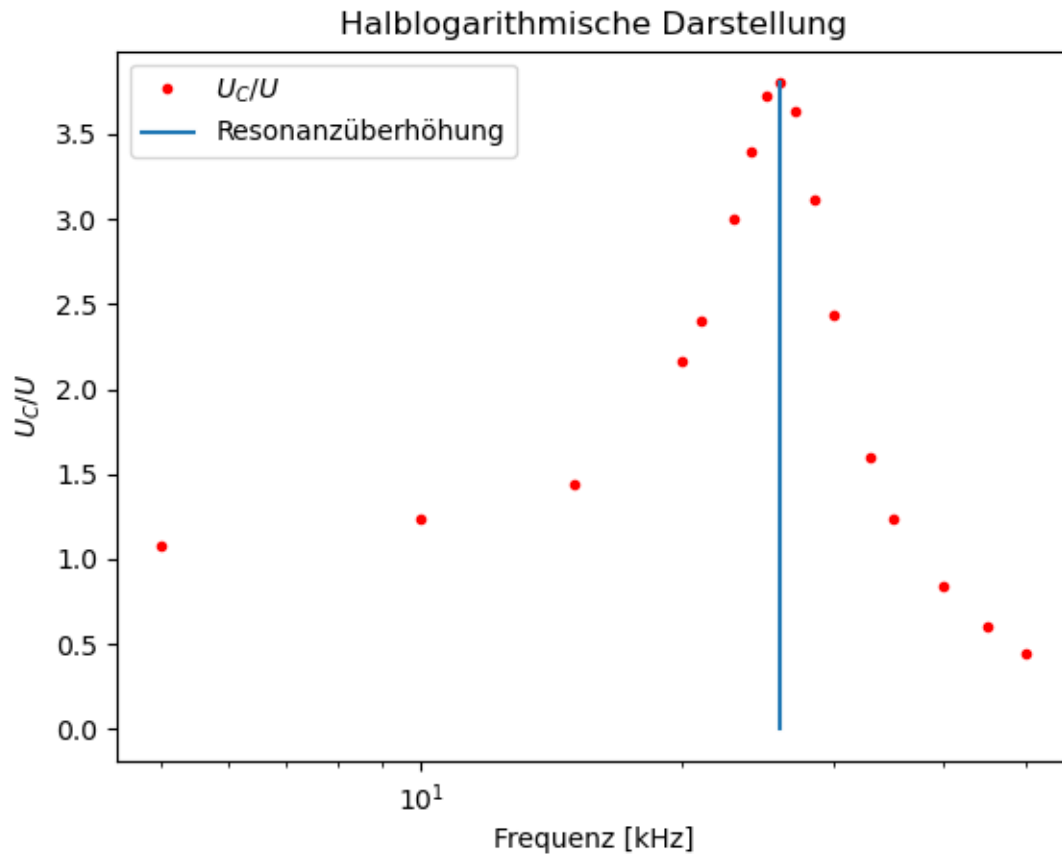


Abbildung 8: Resonanzüberhöhung

Die Resonanzüberhöhung tritt bei einer Frequenz von 26kHz auf und beträgt $q = 3,8$. Die Resonanzfrequenz lässt sich auch mit der Formel

$$q = \sqrt{\frac{L}{R^2 C}}$$

berechnen.

$$\omega_{res} 24.32 \pm 0.08 kHz$$

Die Abweichung der Resonanzüberhöhung vom theoretischen Wert liegt an den klassischen Fehlerquellen der graphischen Bestimmung von Werten.

Dazu gehören:

- Ablesefehler bei der Aufnahme von Messwerten die sich durch die Ausgleichsrechnung weiter fortpflanzen.
- Ungenauigkeiten der Ausgleichsrechnung.
- Eichfehler des Geräts.

Im folgenden Diagramm wird der Ausschnitt um die Resonanzfrequenz linear dargestellt.

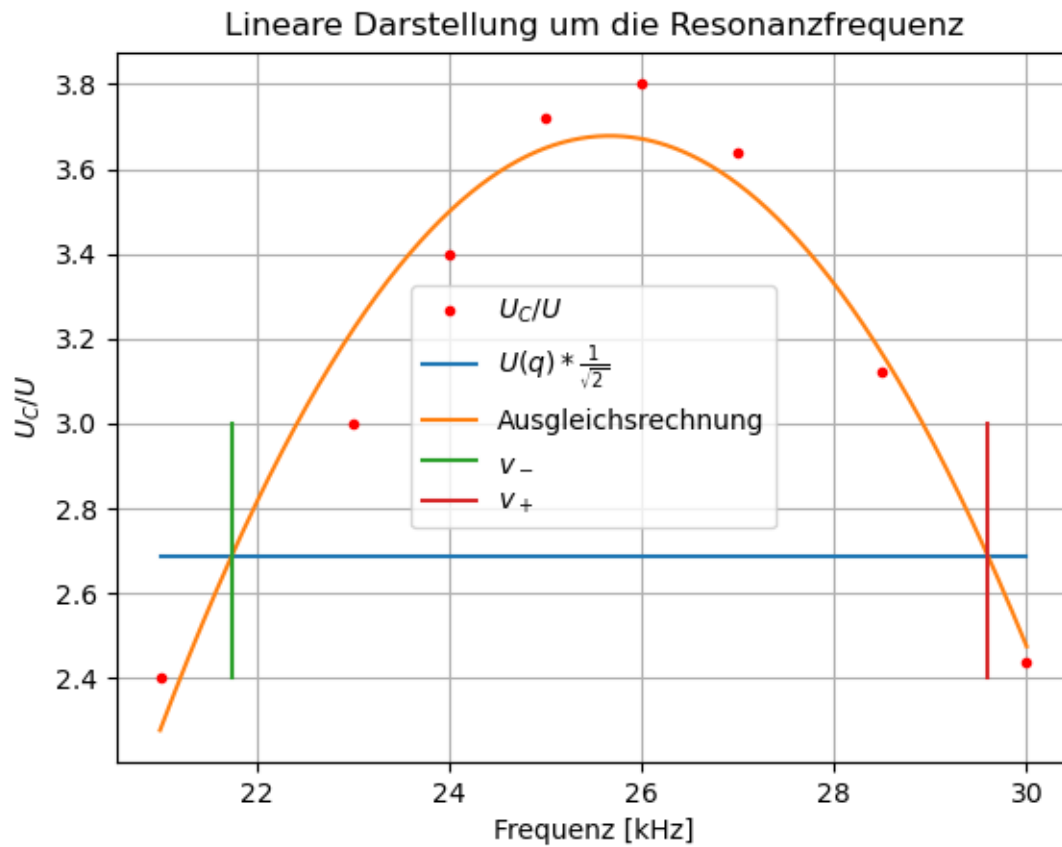


Abbildung 9: Breite der Resonanzkurve

Die Breite der Resonanzkurve ließ sich bestimmen, indem in diesem Bereich eine Ausgleichsrechnung mit einer Funktion der Form:

$$a * (x - b)^2 + c$$

Die Ausgleichsrechnung wurde auch mit der Python-Funktion "scipy.optimize" durchgeführt. Die Ergebnisse lauten:

Parameter	Wert	± Unsicherheit
a	-0.064195	± 0.006518
b	25.670798	± 0.144380
c	3.677980	± 0.070971

Nun wird der Wert, der bei der Resonanzfrequenz erreicht wird, mit dem Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ multipliziert. Die Schnittpunkte der entstehenden Gerade bilden die gesuchten Frequenzen ν_1 und ν_2 .

ν_- [kHz]	ν_+ [kHz]	Breite der Resonanzkurve [kHz]
21.7418	29.5997	7.8579

Der theoretische Wert für die Breite der Resonanzkurve beträgt:

$$\frac{R}{L} = 6.98 \pm 0.04 \text{ kHz}$$

Dabei ist für R $R_1 + 50\Omega$ einzusetzen.

Die Abweichung der beiden Werte ist unter anderem durch den Fehler der genommenen Messwerte zu erklären. Das können Ablesefehler durch die Durchführenden oder auch Eichfehler des Geräts bewirken. Weiterhin liefert auch die Ausgleichsrechnung einen gewissen Fehler. Denn die Frequenzen ν_+ und ν_- sind durch Schnittpunkte mit der Ausgleichskurve bestimmt worden. Diese Ausgleichskurve besitzt allerdings auch eine gewisse Ungenauigkeit.

3.4 Aufgabe 5d

Für die Berechnung Phasenverschiebung sind die Werte in 3 aufgenommen worden. Die Werte werden mit

$$\varphi = \frac{a}{b} * 2\pi$$

in einen Winkel im Bogenmaß umgerechnet. Diese Winkel werden gegen die Frequenz in einem halb-logarithmischen Diagramm aufgetragen. Anschließend wird mit der Python-Funktion "scipy.optimize" eine Ausgleichsrechnung mit einer Funktion der Form:

$$\frac{a}{1 + e^{-(x-b)}} + c$$

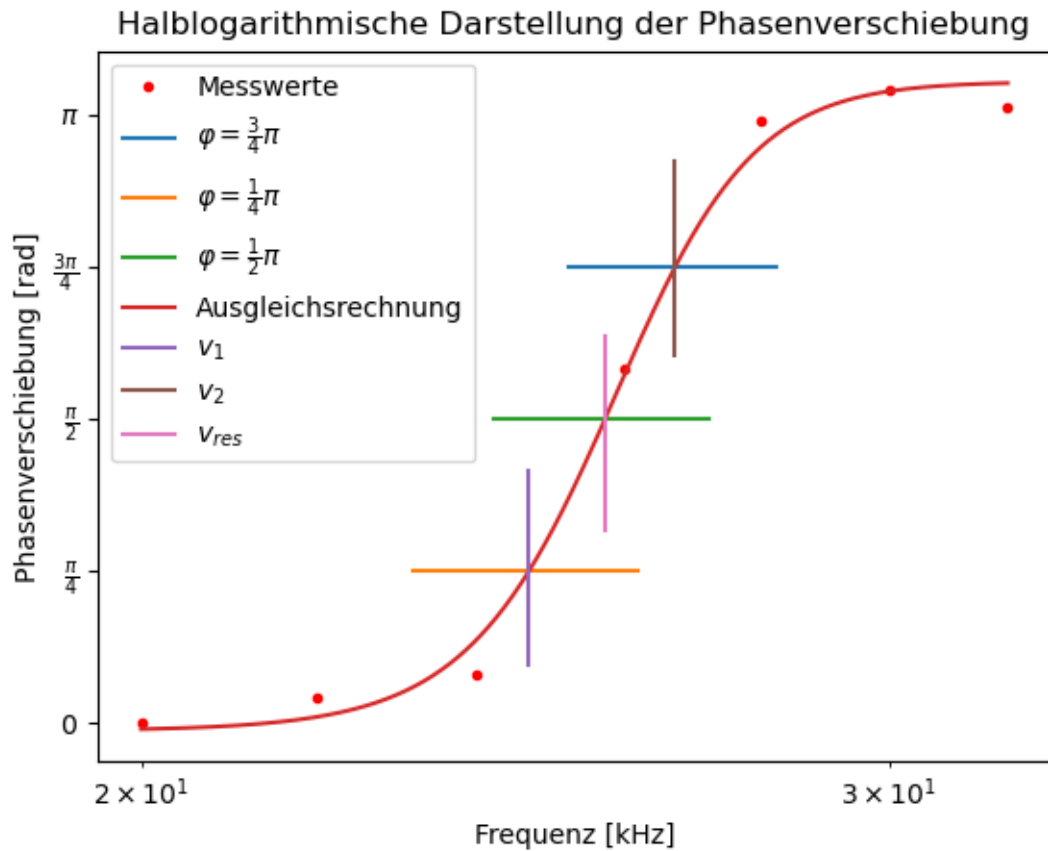
durchgeführt.

Es ergeben sich folgende Werte für die Parameter:

Parameter	Wert	\pm Unsicherheit
a	3.348	± 0.127
b	25.800	± 0.192
c	-0.040	± 0.097

Nun sind die Punkte der entstehenden Ausgleichskurve interessant, bei denen $\varphi = \frac{\pi}{2} = \nu_{res}$ sowie $\varphi = \frac{\pi}{4} = \nu_1$ und $\varphi = \frac{3\pi}{4} = \nu_2$

Das entstehende Diagramm sieht folgendermaßen aus:



Für die benötigten Punkte sind nun die drei Schnittpunkte der eingezeichneten Waagerechten mit der Ausgleichskurve zu bestimmen.

Dafür wird die Formel der Ausgleichfunktion nach x umgestellt und die Parameter so wie die gegebenen Werte für die Phasenverschiebung werden eingesetzt. Über den graphischen Ansatz ergeben sich also diese Werte:

Frequenz	Wert \pm Unsicherheit
v_{res}	25.72 ± 0.24
v_1	24.68 ± 0.25
v_2	26.72 ± 0.27

Die theoretischen Werte lassen sich mit den Folgenden zwei Formeln bestimmen:

$$\begin{aligned}\omega_{1,2} &= \pm \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}} \\ \omega_{res} &= \sqrt{\frac{1}{L * C} - \frac{R^2}{4L^2}}\end{aligned}\tag{18}$$

Es ergeben sich mit den zu Beginn der Auswertung erwähnten Werte für C, L und R, wobei R₁ noch um 50 Ω vergrößert werden muss, folgende Theoriewerte.:

Frequenz	Wert ± Unsicherheit
v _{res}	16.98 ± 0.28
v ₁	16.64 ± 0.27
v ₂	17.34 ± 0.28

Auch hier sind die auftretenden Abweichungen von den Theoriewerten mit ähnlichen Fehlerquellen behaftet. Allerdings kommt hier noch erschwerend hinzu, dass die gemessenen Werte, bevor sie verwendet werden, schon in eine Rechnung involviert sind und sich der Fehler dort schon fortpflanzt.

4 Diskussion

Die Abweichungen der einzelnen Werte sind bei der jeweiligen Rechnung bereits diskutiert worden. Es fällt jedoch auf, dass, obwohl viele verschiedene REchnungen durchgeführt werden, die Fehlerquellen relativ ähnlich bleiben. Die Abweichung aller berechneten Werte lassen sich deutlich verbessern, wenn ein Gerät verwendet würde, welches eine genauere Möglichkeit bietet die Werte auch abzulesen. Das verwendete Gerät misst sehr genau und ist sehr empfindlich, jedoch ist das Ablesen der Werte aufgrund der Empfindlichkeit und der Beschaffenheit des Bildschirm nur verhältnismäßig grob möglich. Eine digitale Anzeige der abzulesenden Werte wäre nicht nur einfacher sondern auch genauer.

Des Weiteren wurden viele Werte graphisch bestimmt. Bei einer solchen Vorgehensweise werden immer bestimmte Ungenauigkeiten in Kauf genommen, da Ausgleichsrechnungen mit fehlerbehafteten Größen zur weiteren Ungenauigkeiten führen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die experimentell bestimmten Werte zwar große, aber keine unerklärbaren Abweichungen aufweisen. Die zu zeigenden Zusammenhänge konnten auch gut mit diesen Werten dargestellt werden, obwohl sie teilweise sehr weit von theoretischen Werten abweichen und deshalb ist das Ziel des Versuchs erreicht.

5 Tabellen

Zeit [μ s]	Spannung [V]
0	4
25	3.3
50	2.8
75	2.4
90	2
115	1.6
140	1.4
160	1.2
185	1
205	0.8
225	0.7
250	0.6
270	0.5
290	0.4
315	0.35
340	0.3

Tabelle 1: Spannungsamplituden

Frequenz [kHz]	$\frac{U_C}{U}$ [V]
5	1.08
10	1.24
15	1.44
20	2.16
21	2.40
23	3.00
24	3.40
25	3.72
26	3.80
27	3.64
28.5	3.12
30	2.44
33	1.60
35	1.24
40	0.84
45	0.60
50	0.44

Tabelle 2: Resonanzfrequenz

Frequenz [kHz]	a [μ s]	b [μ s]
20	0	32
22	0.6	28
24	1	25
26	7	24
28	10.4	21
30	10.4	20
32	9.6	19

Tabelle 3: Phasenverschiebung

6 Quellen

Versuchsanleitung zum Versuch 354 gedämpfte und erzwungene Schwingungen:

https://moodle.tu-dortmund.de/pluginfile.php/1368604/mod_resource/content/1/V354.pdf

Versuchsanleitung zum Versuch 353 Relaxationsverhalten eines RC-Kreises:

https://moodle.tu-dortmund.de/pluginfile.php/1368601/mod_resource/content/1/V353.pdf