V103 Biegung elastischer Staebe

Connor Magnus Böckmann
email: connormagnus.boeckmann@tu-dortmund.de

Tim Theissel
email: tim.theissel@tu-dortmund.de

28. Juni 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Im folgenden Versuch soll an Hand der Biegung von Metallstäben die Materialkonstante des Elastizitätsmoduls ermittelt werden. Dies wird jeweils mit einseitiger, sowie mit beidseitiger Auflage erfolgen.

2 Theoretische Grundlagen

Kräfte an einem Körper führen zu Volumen- und Gestaltsveränderungen. Bezogen auf eine Fläche wird diese physikalische Größe Spannung genannt. Unterschieden wird dabei in die Normalspannung σ und die parallel zur Oberfläche stehende Tangentialspannung bzw. Schubspannung. Bei kleiner Gestaltänderung $\Delta L/L$ so kann ein linearer Zusammenhang zwischen der angreifenden Spannung σ und der Deformation $\Delta L/L$ erkannt werden. Dieser Zusammenhang wird als Hooksches Gesetz bezeichnet

$$\sigma = E\frac{\Delta L}{L}. \tag{1}$$

Der Faktor E wird als Elastizitätsmoduls bezeichnet und stellt einen Proportionalitätsfaktor dar. Hierbei handelt es sich um eine Materialkonstante. Dieses könnte durch Stauchung oder Dehnung ermittelt werden, was jedoch sehr präzise Messapparaturen voraussetzen würden, da ΔL dort sehr klein ist. Dieses Problem lässt sich umgehen, wenn statt einer Dehnung oder Stauchung, die Biegung betrachtet wird. Hier ist die Verformung bei gleicher Kraft und gleichem Stab deutlich größer.

2.1 Biegung eines einseitig eingespannten Stabes

Bei der Biegung lässt sich die Verformung auf eine Dehnung zurückführen, welche jedoch nicht über den Qürschnitt des Stabes konstant ist.

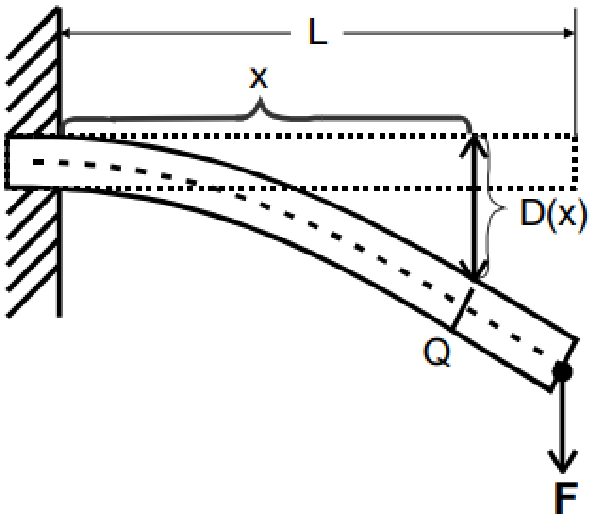

Abbildung 1: Biegung eines Stabes bei einseitiger Einspannung.
Aus: [3]

Die Formel der Durchbiegung D(x), also die Verschiebung des Oberflächenpunktes an der Stelle x zwischen unbelastetem und belastetem Zustand, enthält das Elastizitätsmodul. Somit kann dieses berechnet werden, wenn D(x) bekannt ist. Die aufgebrachte Kraft F übt auf den Qürschnitt Q mit Abstand x das Drehmoment M_F aus, welches den Qürschnitt Q aus einer vertikalen Lage verdreht. Die oberen Schichten werden hierbei gedehnt und die unteren Schichten gestaucht. Durch die elastischen Eigenschaften des Stabes widersteht der Stab der Verformung durch die in ihm auftretenden Normalspannungen. Es stellt sich ein Gleichgewichtszustand ein. Bei dieser ist dann die bei der angelegten Kraft maximale Auslenkung erreicht. Die Schicht des Stabes in der weder Zugspannungen, noch Druckspannungen auftreten, welche also ihre vorherige Lage beibehält, nennt sich die neutrale Faser. Diese ist in Abbildung 1 gestrichelt eingezeichnet. Durch die Zug- und Druckspannungen ensteht ein Drehmoment, welches durch Integration über den Qürschnitt

$$M_\sigma = \int_Q y\sigma(y)dq \tag{2}$$

berechnet werden kann. Der Wert y ist dabei der Abstand von der neutralen Faser. Die Drehmomente gleichen sich bei der Deformation also aus ($M_F = M_\sigma$). Das Drehmoment M_F entspricht dabei $M_F = F(L-x)$, da die Kraft F am Hebel der Länge $L-x$ angreift. Nach Einsetzen des Hookschen Gesetzes für ein kleines Stabstück der Länge Δx, also $\sigma(y) = E\frac{\delta x}{\Delta x}$, und Ausnutzung der Geometrie für geringe Verkrümmungen des Stabes, ergibt sich die Momentengleichung zu

$$E\frac{d^2D}{dx^2}\int_Q y^2 dq = F(L-x). \tag{3}$$

Der hier verwendete Ausdruck $\int_Q y^2 dq$ wird, in Analogie zum Massenträgheitsmoment, Flächenträgheitsmoment I genannt. Nach Durchführung der Integration wird die Beziehung

$$D(x) = \frac{F}{2EI}(Lx^2 - \frac{x^3}{3}) \tag{4}$$

erhalten. Die Integrationskonstanten entfallen, da $D(0) = 0$, also der Stab horizontal eingespannt ist, und da $\frac{dD}{dx}(0) = 0$, also die Durchbiegung an der Einspannstelle null ist.

2.2 Biegung eines beidseitig eingespannten Stabes

Eine Biegung kann auch, wie in Abbildung 2 zu sehen, erzeugt werden.

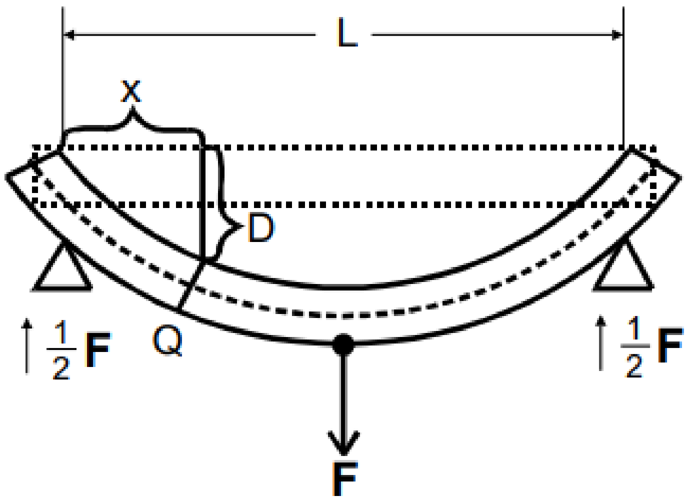

Abbildung 2: Biegung eines Stabes bei beidseitiger Einspannung.
Aus: [3].

Dabei greift die Kraft an der Stabmitte an. Das Drehmoment M_F im Bereich $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ ist dann $M_F = -\frac{F}{2}x$. Dementsprend ist M_F für $\frac{L}{2} \leq x \leq L$ $M_F = -\frac{F}{2}(L-x)$. Die Momentengleichungen sind also

$$\frac{d^2D}{dx^2} = -\frac{F}{EI}\frac{x}{2},$$

bzw.

$$\frac{d^2D}{dx^2} = -\frac{F}{EI}(L-x).$$

Integration dieser Gleichung liefert

$$\frac{dD}{dx} = -\frac{F}{EI}\frac{x^2}{4} + C \text{ für } 0 \leq x \leq \frac{L}{2},$$

bzw.

$$\frac{dD}{dx} = -\frac{F}{2EI}(Lx - \frac{x^2}{2}) = C' \text{ für } \frac{L}{2} \leq x \leq L.$$

Unter der Annahme, dass die Tangente des Stabes in der Stabmitte horizontal ist, liefert dies für $C = \frac{FL^2}{16EI}$ und $C' = \frac{3FL^2}{16EI}$. Eine weitere Integration liefert nun mit $D(0) = 0$ für die linke Stabhälfte

$$D(x) = \frac{F}{48EI}(3L^2x - 4x^3)$$

. Entsprechend gilt für die rechte Stabhälfte ($\frac{L}{2} \leq x \leq L$) mit $D(L) = 0$

$$D(x) = \frac{F}{48EI}(4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3)$$

3 Versuchsaufbau

In 3 ist der schematische Aufbau der Versuchsapparatur zur Ermittlung der Auslenkung zu sehen.

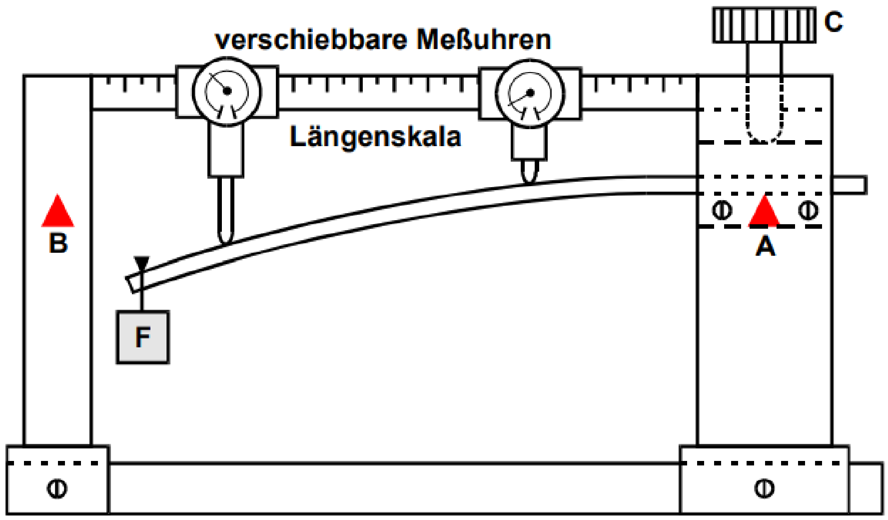

Abbildung 3: Schematische Darstellung der Messaparatur zur Biegung elastischer Stäbe. Aus: [3].

Die Stäbe werden hier in die Spannvorrichtung C eingespannt oder für die Messung mit beidseitiger Auflage auf A und B aufgelegt. Die Kraft wird aufgebracht durch Anhängen von Gewichten an der Stabmitte bzw. dem Stabende. Die Durchbegiegung wird hierbei mit zwei Messuhren bestimmt, welche vor jeder Messung genullt werden müssen. Die

Nullung der Uhr vor jeder Messung ist erforderlich, da nicht davon ausgegangen werden kann, dass der Stab exakt gerade ist und horizontal eingespannt wurde. Die Messuhren messen mit Hilfe eines gefederten Messstabes die Auslenkung aus einer Null-Lage. Ein Teilstrich stellt dabei 10 µm dar. Das angehängte Gewicht sollte groß genug sein, um eine hinreichend große Durchbiegung zu erreichen.

4 Auswertung

4.1 Eckige Stäbe, einseitige Einspannung

Um den Elastizitätsmodul von den eckigen Stäben bei einseitiger Einspannung zu bestimmen wird zunächst eine Grafik erstellt. Dafür wird die Gesamtauslenkung der eckigen Stäbe bei einseitiger Einspannung D(x) aus den Tabellen 1 und 2 gegen $Lx^2 - \frac{x^3}{3}$ aufgetragen. Dabei enstehen die Diagramme in den Abbildungen 4 und 5.

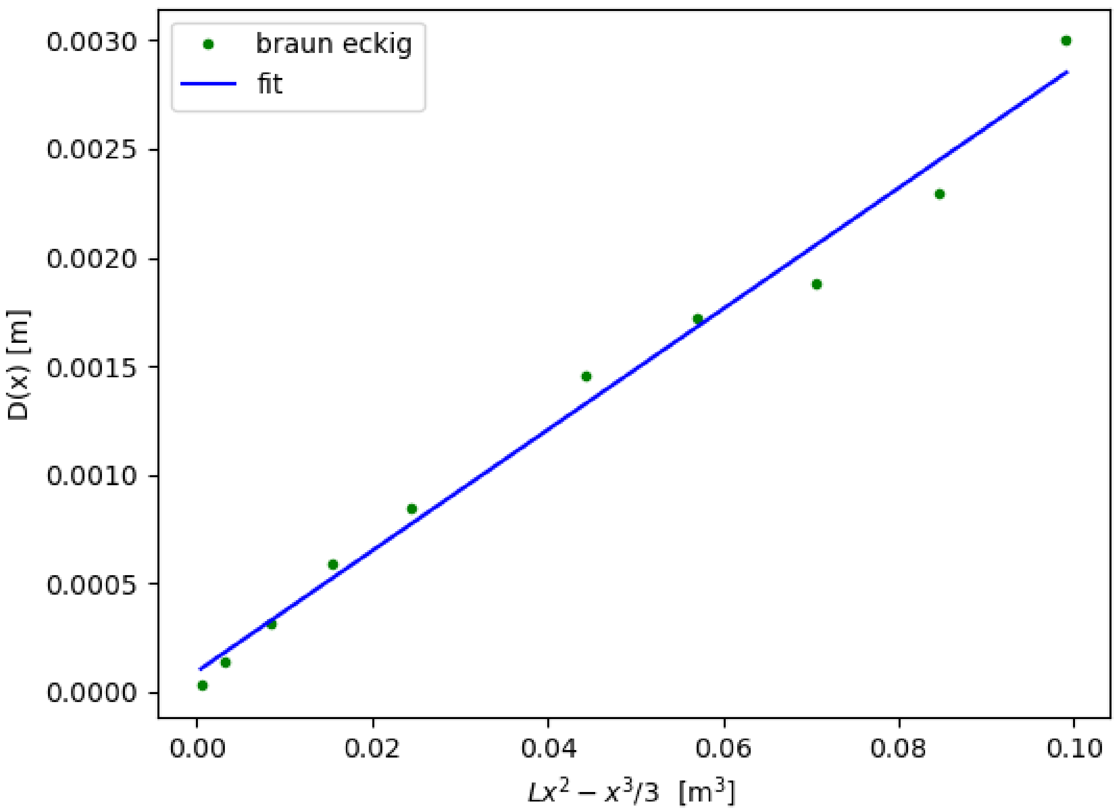

Abbildung 4: Biegung eines braunen, eckigen Stabes mit zugehöriger Ausgleichsrechnung, bei einseitiger Einspannung.

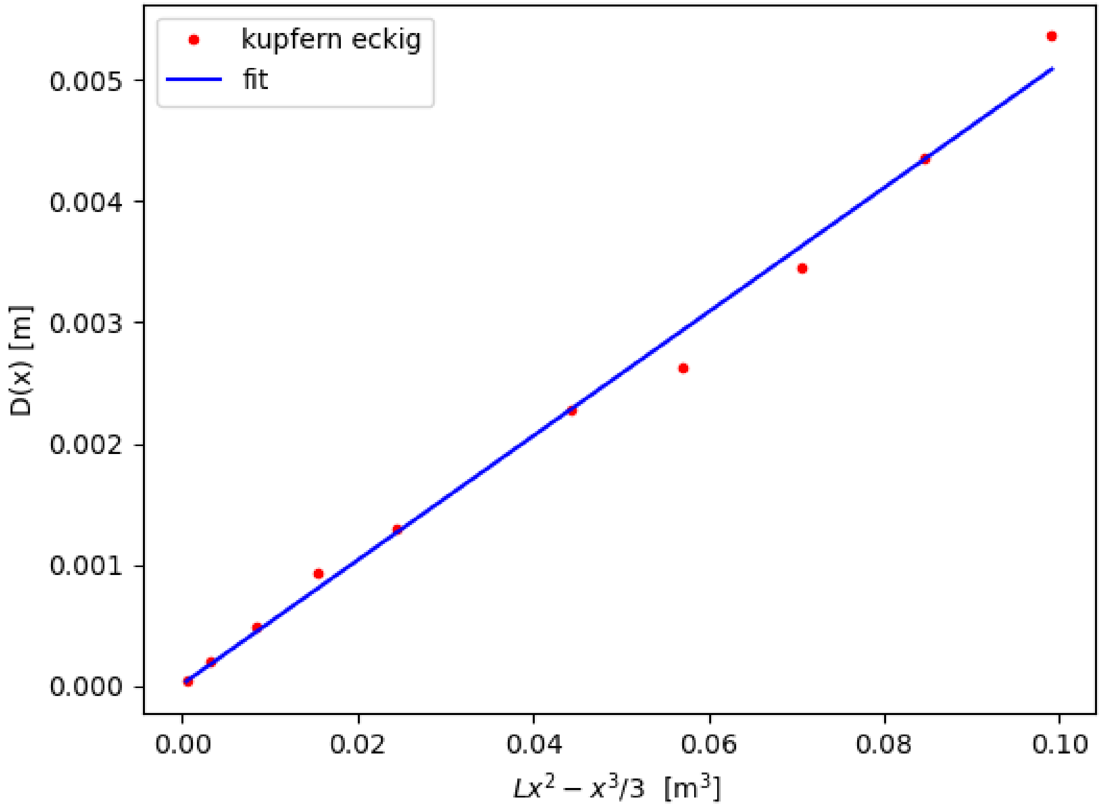

Abbildung 5: Biegung eines kupfernen, eckigen Stabes mit zugehöriger Ausgleichsrechnung, bei einseitiger Einspannung.

Die Ausgleichsrechnungen wurden mit der allgemeinen Geradengleichung $y = ax + b$ durchgeführt. Aus diesen Graphen und den Ausgleichsrechnungen lässt sich der Elastizitätsmodul mit folgender Formel berechnen

$$E = \frac{m\,g}{2\,I\,a}$$

Dabei ist a die mit der Ausgleichsrechnung bestimmte Steigung der Ausgleichsgeraden. Die Masse m beträgt hier jeweils 1.0543kg. I ist das Flächenträgheitsmoment. Da die Stäbe Quadratisch sind, ist das Flächenträgheitsmoment $I = \frac{h^4}{12}$. Beide Stäbe haben als Kantenlänge h=1cm. Die berechneten Parameter sind

$$
\begin{aligned}
a_{\text{braun}} &= (2.78 \pm 0.11) \times 10^{-2}\,\text{m}^{-2} \\
b_{\text{braun}} &= (9.3 \pm 5.9) \times 10^{-5}\,\text{m} \\
a_{\text{kupfern}} &= (5.10 \pm 0.16) \times 10^{-2}\,\text{m}^{-2} \\
b_{\text{kupfern}} &= (1.5 \pm 8.2) \times 10^{-5}\,\text{m}.
\end{aligned}
$$

Diese Abweichungen liefert die von Python durchgeführte Ausgleichsrechnung direkt mit. Mit diesen Werten ergibt sich für die Elastizitätsmodule

$$
\begin{aligned}
E_{\text{braun}} &= (223 \pm 9)\,\text{GPa} \\
E_{\text{kupfern}} &= (122 \pm 4)\,\text{GPa}.
\end{aligned}
$$

Die Abweichungen der Elastizitätsmodule werden, wegen der Fehlerbehafteten Größe a, mit der Fromel für die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung

$$
\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 + \cdots \;\Rightarrow\; u_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot u_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot u_2\right)^2 + \cdots} \tag{5}
$$

berechnet.

4.2 runde Stäbe, einseitige Einspannung

Für die runden Stäbe ist das Vorgehen identisch zu dem Vorgehen bei den Eckigen. Hier werden die Werte von D(x) aus 3 und 4 genommen. Diese werden genauso gegen $Lx^2 - \frac{x^3}{3}$ aufgetragen. Dabei enstehen die Diagramme in den Abbildungen 6 und 7.
Die Ausgleichsrechnung liefert hier folgende Werte

$$
\begin{aligned}
a_{\text{golden}} &= (6.19 \pm 0.12) \times 10^{-2}\,\text{m}^{-2} \\
b_{\text{golden}} &= (1.26 \pm 0.53) \times 10^{-4}\,\text{m} \\
a_{\text{kupfern}} &= (1.70 \pm 0.03) \times 10^{-2}\,\text{m}^{-2} \\
b_{\text{kupfern}} &= (3.3 \pm 1.6) \times 10^{-5}\,\text{m}.
\end{aligned}
$$

Auch die Formel für den Elastizitätsmodul und dessen Fehler (Gleichung 5) bleiben gleich. Die einzigen Unterschiede sind hier das Flächenträgheitsmoment und die an den Stab gehängte Masse. Die Masse beträgt 0.2492kg für den kupfernen Stab und 0.552kg für den Messingstab. Das Flächenträgheitsmoment lässt sich aufgrund des runden Querschnitts nun folgendermaßen bestimmen

$$
I = \frac{\pi R^4}{4}.
$$

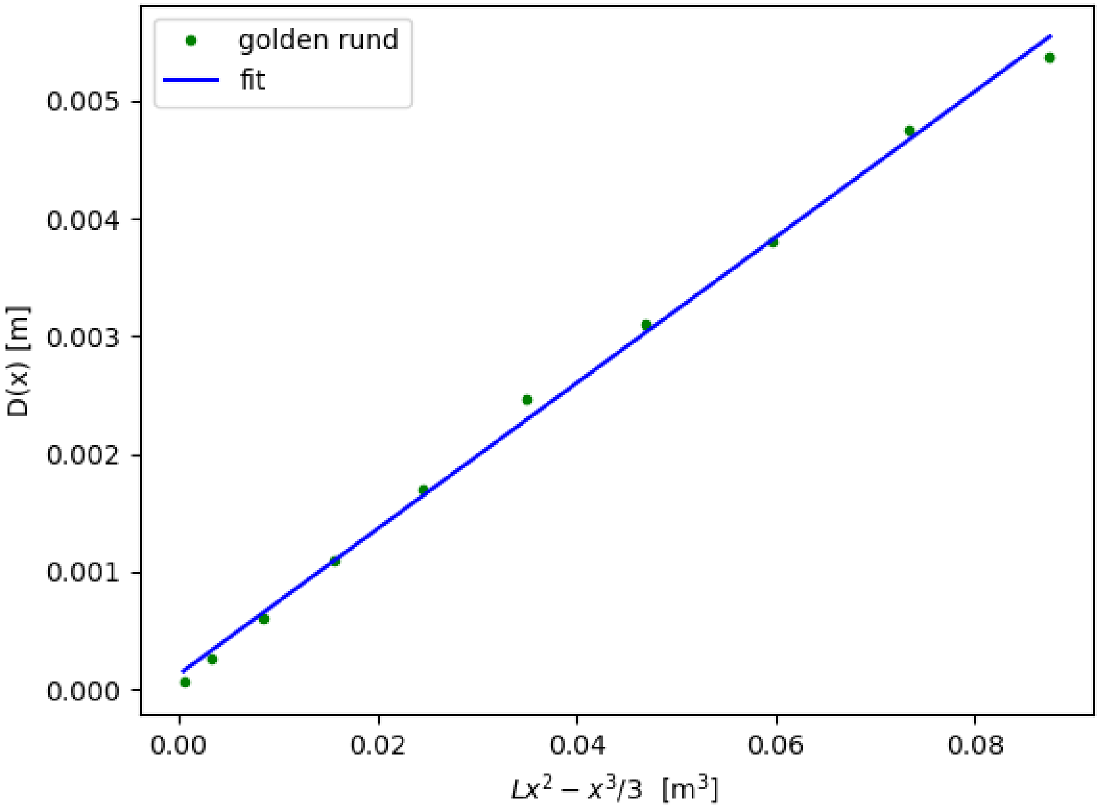

Abbildung 6: Biegung eines goldenen, runden Stabes mit zugehöriger Ausgleichsrechnung, bei einseitiger Einspannung.

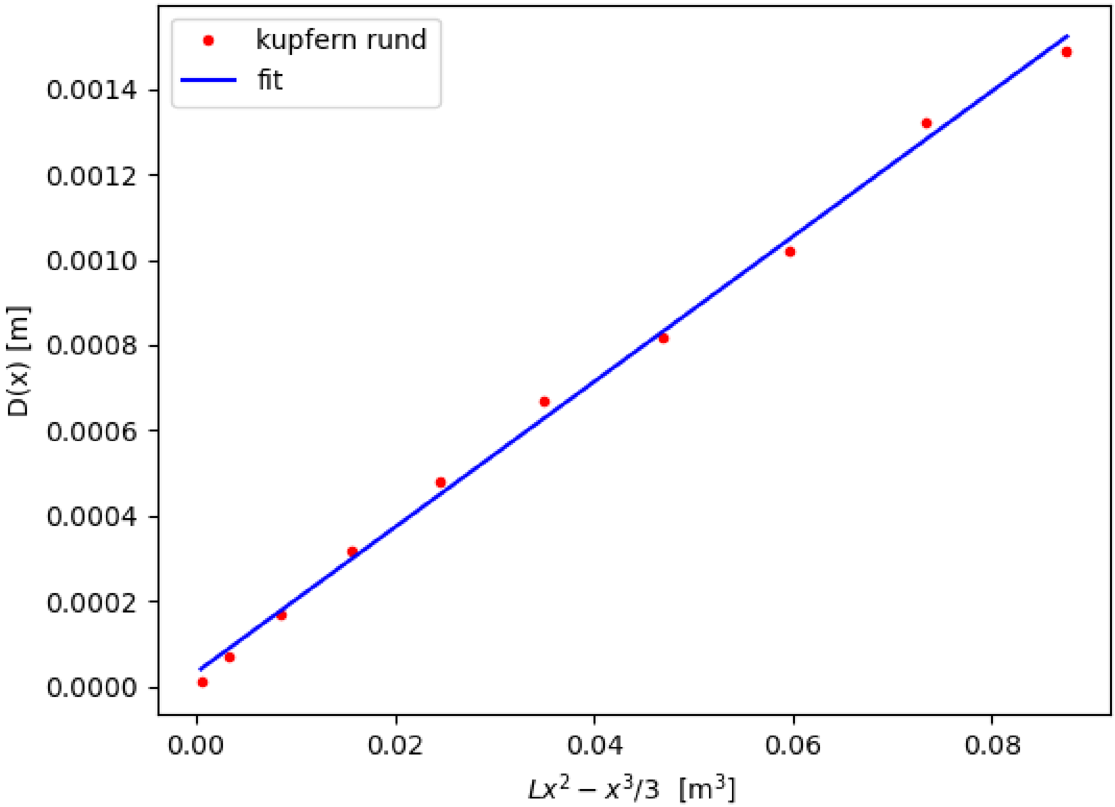

Abbildung 7: Biegung eines kupfernen, runden Stabes mit zugehöriger Ausgleichsrechnung, bei einseitiger Einspannung.

Der Durchmesser der beiden Stäbe beträgt 1cm.
Nun lassen sich wieder die Elastizitätsmodule bestimmen

$$E_{\text{kupfern}} = (146.5 \pm 2.6)\,\text{GPa}$$
$$E_{\text{golden}} = (89 \pm 17)\,\text{GPa}.$$

4.3 eckige Stäbe, beidseitige Einspannung

Für die eckigen Stäbe bei beidseitiger Einspannung werden Werte für D(x) aus den Tabellen 1 und 2 in Diagrammen aufgetragen. Dabei werden jeweils die Werte links vom Aufhängungspunkt (27.5cm) und rechts vom Aufhängungspunkt gesondert aufgetragen. Die Werte links vom Aufhängungspunkt werden dabei gegen $3L^2x - 4x^3$ und die Werte rechts vom Aufhängungspunkt gegen $4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3$ aufgetragen. Anschließend wird bei allen Graphen eine lineare Ausgleichsrechnung durchgeführt. Dabei entstehen folgende Diagramme:

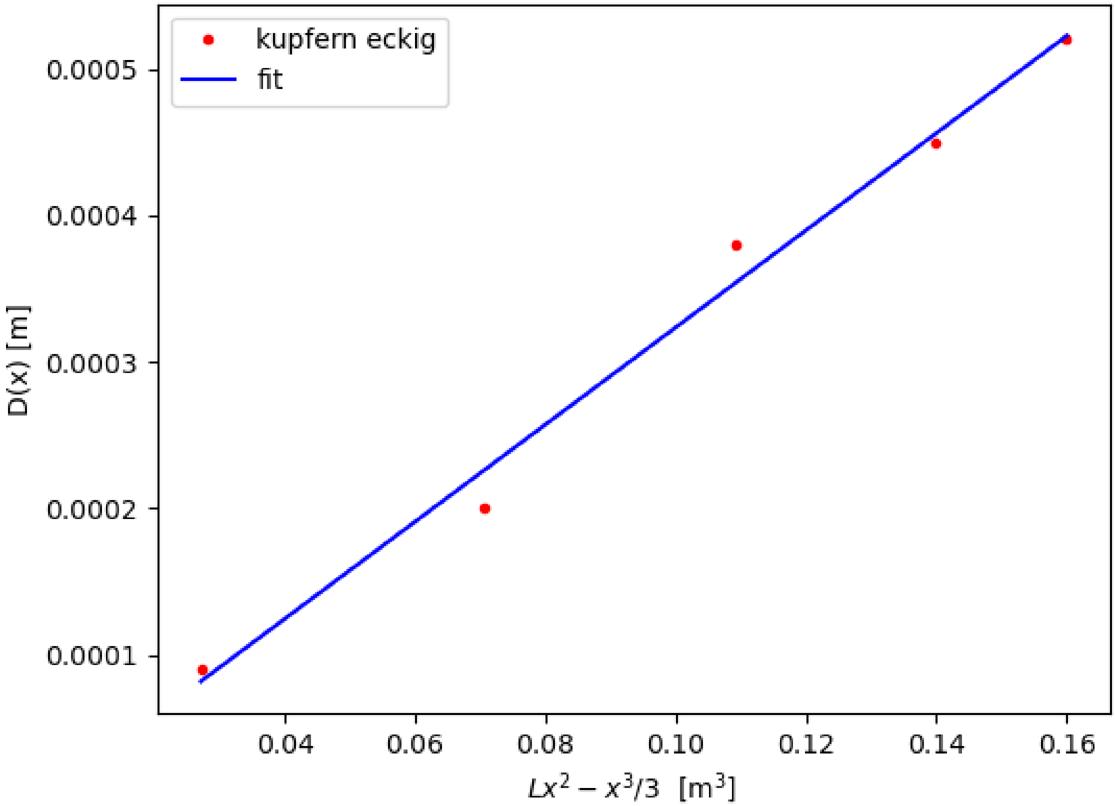

Abbildung 8: Biegung eines kupfernen, eckigen Stabes mit zugehöriger Ausgleichsrechnung, bei beidseitiger Einspannung links vom Aufhängungspunkt.

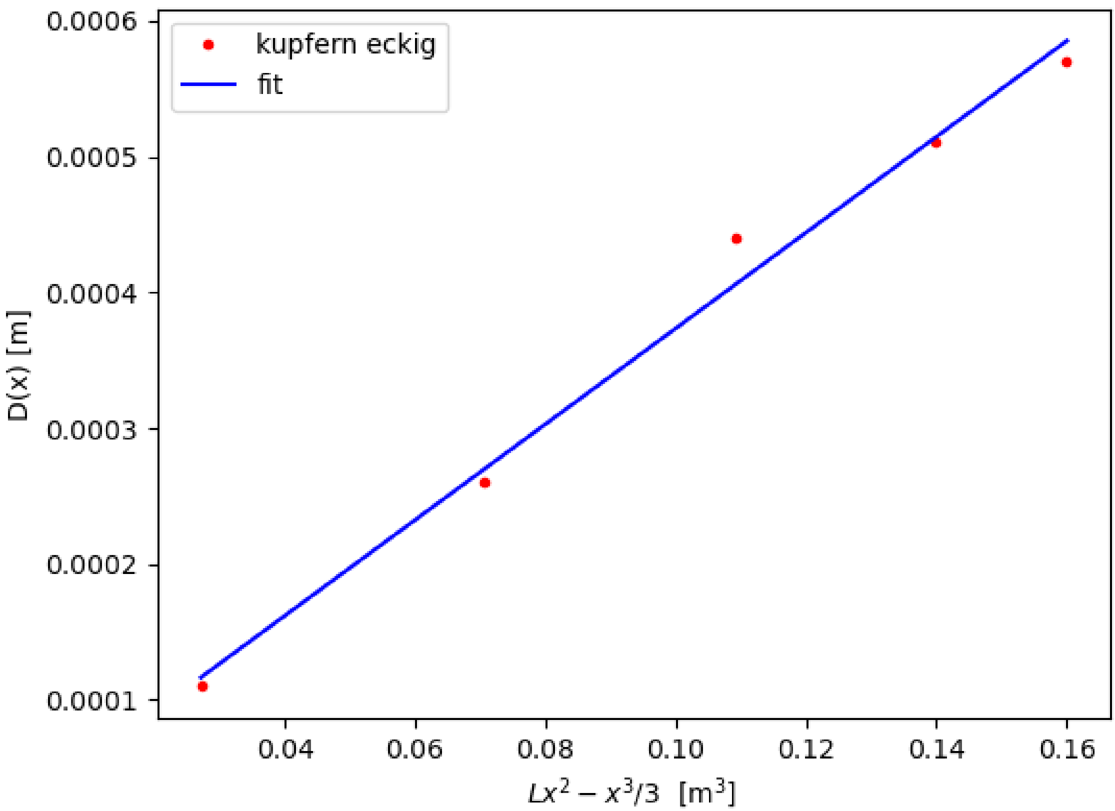

Abbildung 9: Biegung eines kupfernen, eckigen Stabes mit zugehöriger Ausgleichsrechnung, bei beidseitiger Einspannung rechts vom Aufhängungspunkt.

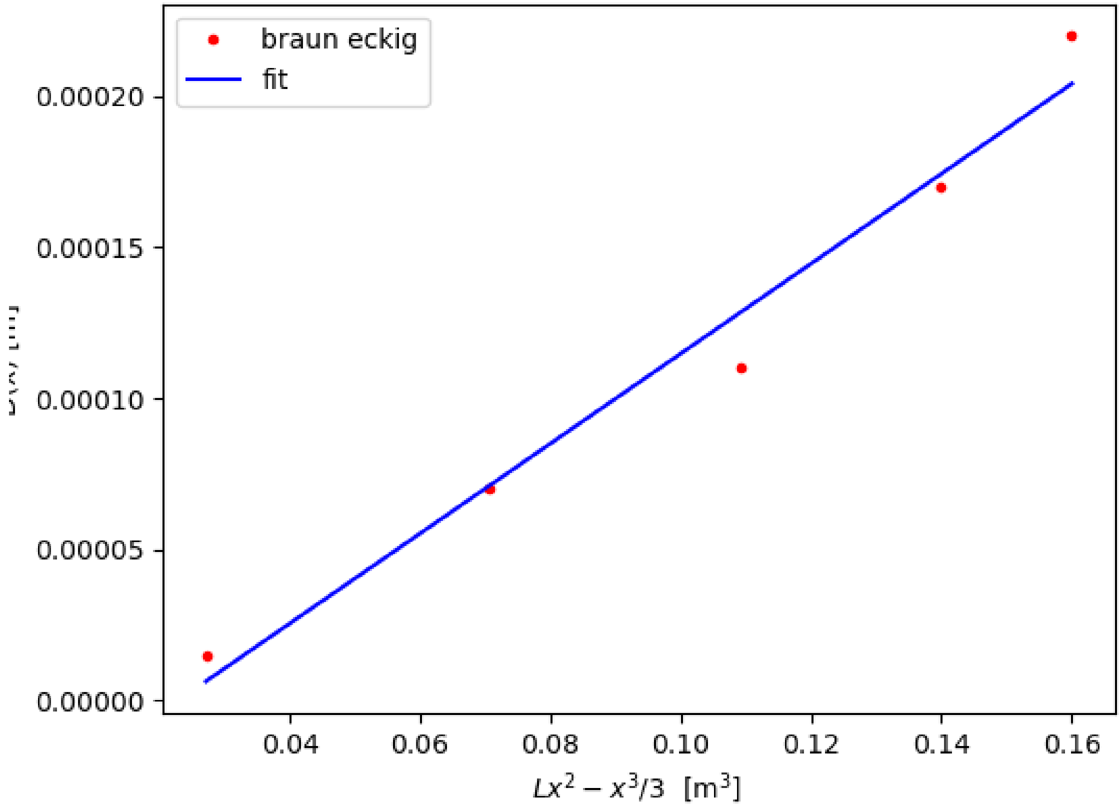

Abbildung 10: Biegung eines braunen, eckigen Stabes mit zugehöriger Ausgleichsrechnung, bei beidseitiger Einspannung links vom Aufhängungspunkt.

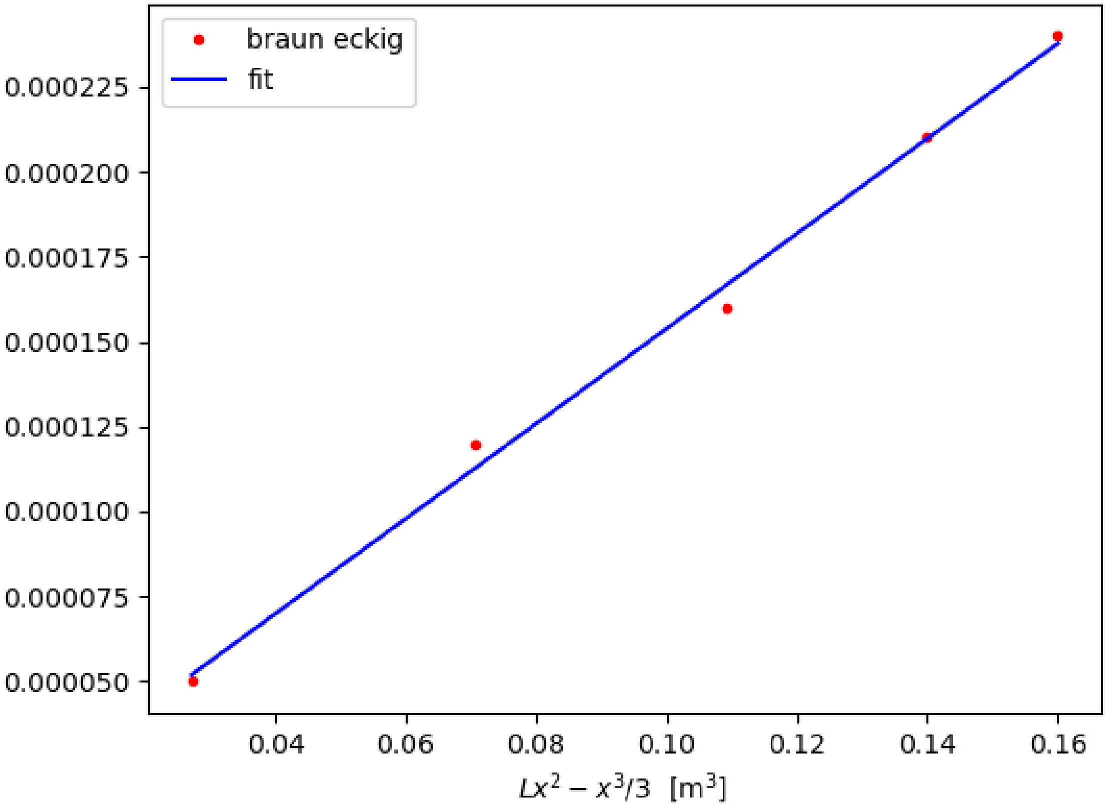

Abbildung 11: Biegung eines kupfernen, eckigen Stabes mit zugehöriger Ausgleichsrechnung, bei beidseitiger Einspannung rechts vom Aufhängungspunkt.

Die Ausgleichsrechnungen liefern folgende Steigungen:

$$
\begin{aligned}
a_{\text{Kupfer, links}} &= (3.30 \pm 0.21) \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^{-2} \\
b_{\text{Kupfer, links}} &= (-0.8 \pm 2.3) \times 10^{-6}\,\mathrm{m} \\
a_{\text{Kupfer, rechts}} &= (3.50 \pm 0.21) \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^{-2} \\
b_{\text{Kupfer, rechts}} &= (2.1 \pm 2.4) \times 10^{-5}\,\mathrm{m} \\
a_{\text{braun, links}} &= (1.50 \pm 0.14) \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^{-2} \\
b_{\text{braun, links}} &= (-3.4 \pm 1.6) \times 10^{-5}\,\mathrm{m} \\
a_{\text{braun, rechts}} &= (1.40 \pm 0.06) \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^{-2} \\
b_{\text{braun, rechts}} &= (1.4 \pm 0.6) \times 10^{-5}\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

Mit diesen Steigungen können anschließend die Elastizitätsmodule und deren Fehler (Gleichung 5) berechnet werden. Dafür wird die folgende Gleichung benötigt:

$$E = \frac{m\,g}{48\,I\,a}$$

Die angehängte Masse beträgt hier bei allen Gewichten 2.3408kg. Das Flächenträgheitsmoment ist das gleich wie bei vorherigen Rechnungen mit den eckigen Stäben. Dabei entstehen folgende Werte für die Elastizitätsmodule:

$$\begin{aligned} E_{\text{Kupfer, links}} &= (380 \pm 40)\,\text{GPa} \\ E_{\text{Kupfer, rechts}} &= (410 \pm 18)\,\text{GPa} \\ E_{\text{braun, links}} &= (174 \pm 11)\,\text{GPa} \\ E_{\text{braun, rechts}} &= (164 \pm 10)\,\text{GPa} \end{aligned}$$

4.4 runde Stäbe, beidseitige Einspannung

Zur Bestimmung dieser Elastizitätsmodule ist das Vorgehen sehr ähnlich dem Vorherigen. Die Werte für die Diagramme stammen allerdings aus den Tabellen 3 und 4. Die Diagramme sehen diesmal folgendermaßen aus:

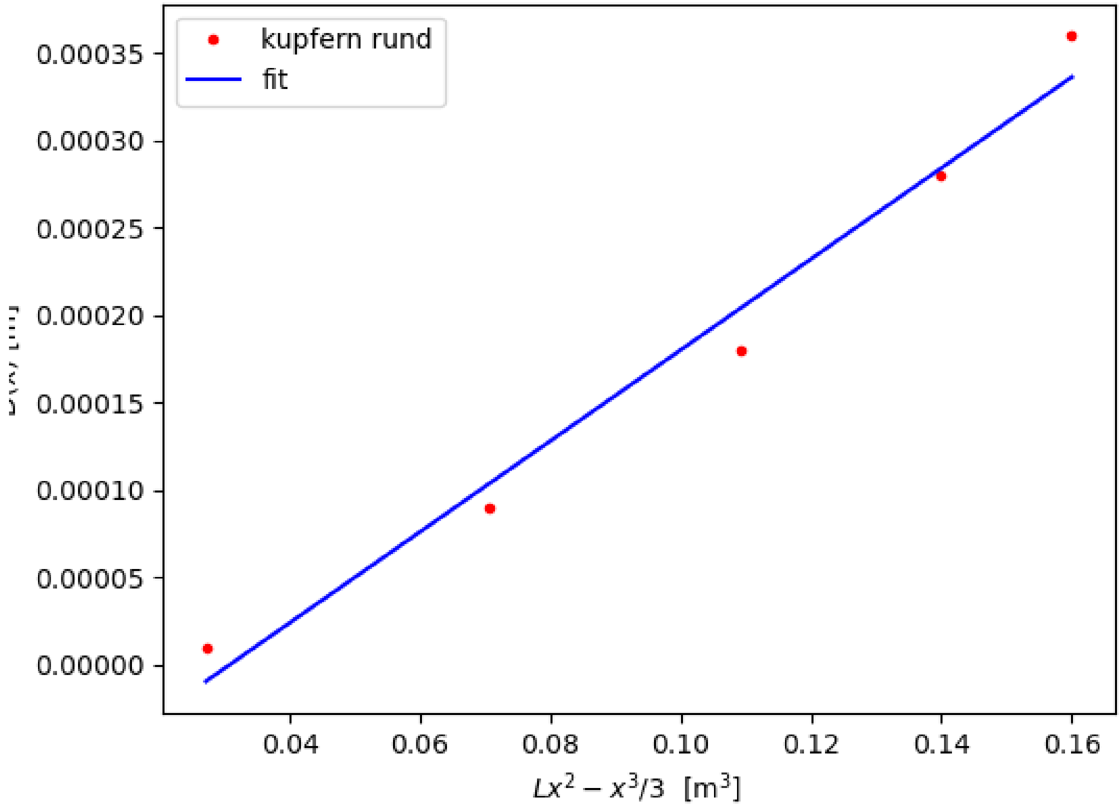

Abbildung 12: Biegung eines kupfernen, runden Stabes mit zugehöriger Ausgleichsrechnung, bei beidseitiger Einspannung links vom Aufhängungspunkt.

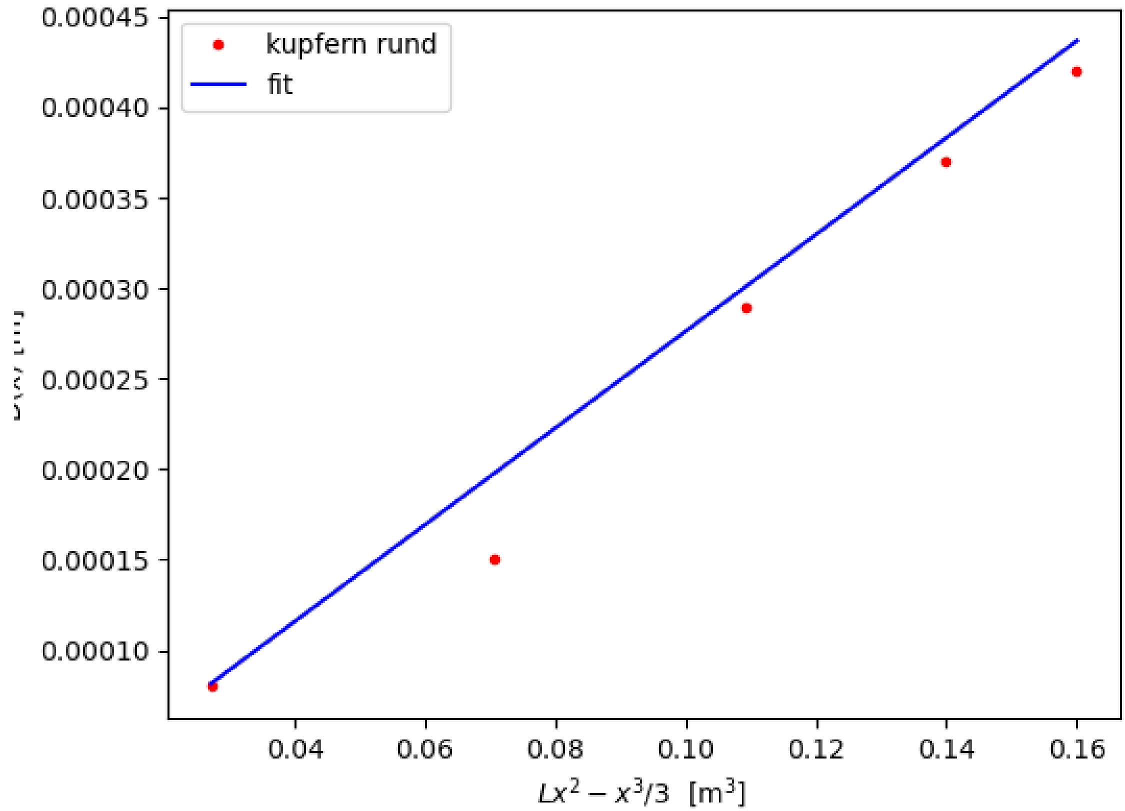

Abbildung 13: Biegung eines kupfernen, runden Stabes mit zugehöriger Ausgleichsrechnung, bei beidseitiger Einspannung rechts vom Aufhängungspunkt.

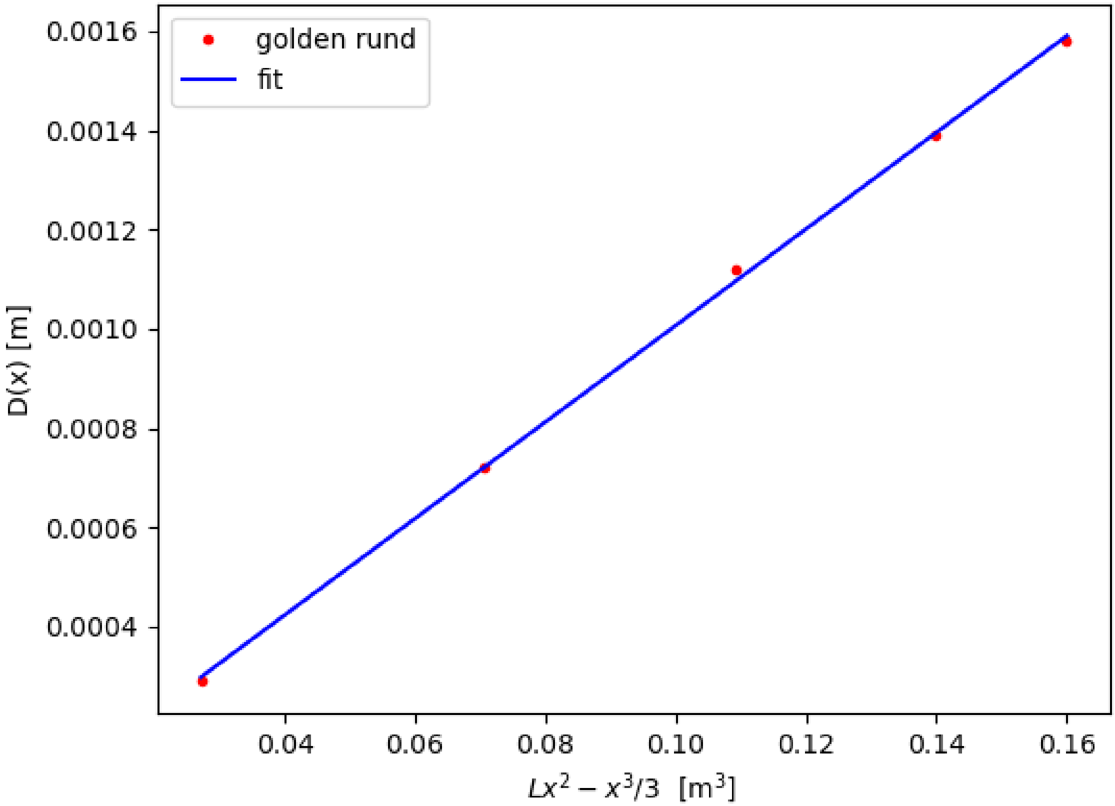

Abbildung 14: Biegung eines goldenen, runden Stabes mit zugehöriger Ausgleichsrechnung, bei beidseitiger Einspannung links vom Aufhängungspunkt.

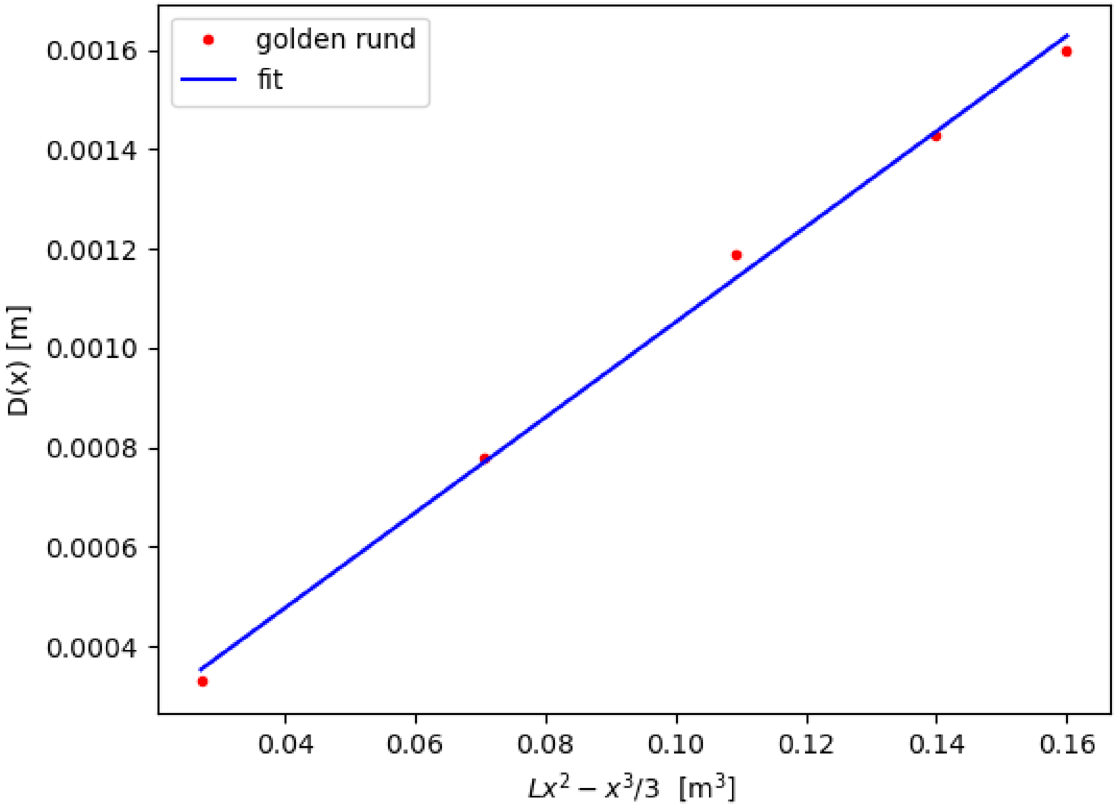

Abbildung 15: Biegung eines goldenen, runden Stabes mit zugehöriger Ausgleichsrechnung, bei beidseitiger Einspannung rechts vom Aufhängungspunkt.

Die Ausgleichsrechnungen liefern folgende Steigungen:

$$
\begin{aligned}
a_{\text{kupfer, links}} &= (2.60 \pm 0.22) \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^{-2} \\
b_{\text{kupfer, links}} &= (8.0 \pm 2.5) \times 10^{-5}\,\mathrm{m} \\
a_{\text{kupfer, rechts}} &= (2.70 \pm 0.19) \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^{-2} \\
b_{\text{kupfer, rechts}} &= (-0.9 \pm 2.1) \times 10^{-5}\,\mathrm{m} \\
a_{\text{golden, links}} &= (9.70 \pm 0.15) \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^{-2} \\
b_{\text{golden, links}} &= (3.5 \pm 1.7) \times 10^{-5}\,\mathrm{m} \\
a_{\text{golden, rechts}} &= (9.60 \pm 0.34) \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^{-2} \\
b_{\text{golden, rechts}} &= (9.4 \pm 3.8) \times 10^{-5}\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

Mit diesen Steigungen können anschließend die Elastizitätsmodule und deren Fehler (Gleichung 5) berechnet werden. Dafür wird die folgende Gleichung benötigt:

$$E = \frac{m\,g}{48\,I\,a}$$

Die am kupferfarbenen Stab angehängte Masse beträgt 1,7294kg. Die am goldenen Stab angehängte Masse beträgt 2.3408kg. Das Flächenträgheitsmoment ist das gleiche wie bei der vorherigen Rechnung mit runden Stäben. Bei der Rechnung ergeben sich diese Elastizitätsmodule:

$$\begin{aligned}
E_{\text{kupfer, links}} &= (277 \pm 23)\,\text{GPa} \\
E_{\text{kupfer, rechts}} &= (267 \pm 19)\,\text{GPa} \\
E_{\text{golden, links}} &= (100.5 \pm 1.6)\,\text{GPa} \\
E_{\text{golden, rechts}} &= (102 \pm 4)\,\text{GPa}
\end{aligned}$$

4.5 Materialbestimmung durch Dichte

4.5.1 brauner, eckiger Stab

Das Gewicht dieses Stabes beträgt 0.4546kg. Er hat einen quadratischen Querschnitt mit Kantenlänge a=1cm. Dazu ist der Stab 59.4cm lang. Daraus ergibt sich eine Dichte von $7653.20\frac{kg}{m^3}$. Der Farbe und der dichte nach zu urteilen handelt es sich bei dem Material dieses Stabes um Stahl.

4.5.2 kupferner, eckiger Stab

Das Gewicht dieses Stabes beträgt 0.5359kg. Er hat einen quadratischen Querschnitt mit Kantenlänge a=1cm. Dazu ist der Stab 60.2cm lang. Daraus ergibt sich eine Dichte von $8902.00\frac{kg}{m^3}$. Der Farbe und der dichte nach zu urteilen handelt es sich bei dem Material dieses Stabes um Kupfer.

4.5.3 kupferner, runder Stab

Das Gewicht dieses Stabes beträgt 0.4168kg. Er hat einen runden Querschnitt mit Durchmesser r=1cm. Dazu ist der Stab 60.2cm lang. Daraus ergibt sich eine Dichte von $8811.84\frac{kg}{m^3}$. Der Farbe und der dichte nach zu urteilen handelt es sich bei dem Material dieses Stabes um Kupfer.

4.5.4 goldener, runder Stab

Das Gewicht dieses Stabes beträgt 0.394kg. Er hat einen runden Querschnitt mit Durchmesser r=1cm. Dazu ist der Stab 60.2cm lang. Daraus ergibt sich eine Dichte von $8329.81\frac{kg}{m^3}$. Der Farbe und der dichte nach zu urteilen handelt es sich bei dem Material dieses Stabes um Messing.

5 Diskussion

Zu Beginn der Diskussion sind hier nocheinmal alle Elastizitätsmodule gebündelt aufgeführt:

$$
\begin{aligned}
&\text{einseitige Einspannung}\\
E_{\text{Stahl, eckig}} &= (223 \pm 9)\,\text{GPa}\\
E_{\text{Kupfer, eckig}} &= (122 \pm 4)\,\text{GPa}\\
E_{\text{Kupfer, rund}} &= (146.5 \pm 2.6)\,\text{GPa}\\
E_{\text{Messing, rund}} &= (89 \pm 17)\,\text{GPa}\\
&\text{beidseitige Einspannung}\\
E_{\text{Stahl, eckig, links}} &= (380 \pm 40)\,\text{GPa}\\
E_{\text{Stahl, eckig, rechts}} &= (410 \pm 18)\,\text{GPa}\\
E_{\text{Kupfer, eckig, links}} &= (174 \pm 11)\,\text{GPa}\\
E_{\text{Kupfer, eckig, rechts}} &= (164 \pm 10)\,\text{GPa}\\
E_{\text{Kupfer, rund, links}} &= (277 \pm 23)\,\text{GPa}\\
E_{\text{Kupfer, rund, rechts}} &= (267 \pm 19)\,\text{GPa}\\
E_{\text{Messing, rund, links}} &= (100.5 \pm 1.6)\,\text{GPa}\\
E_{\text{Messing, rund, rechts}} &= (102 \pm 4)\,\text{GPa}
\end{aligned}
$$

Die Literaturwerte der Elastizitätsmodule sind:

$$
\begin{aligned}
E_{\text{Stahl}} &= 210\,\text{GPa}\\
E_{\text{Kupfer}} &= (100 - 130)\,\text{GPa}\\
E_{\text{Messing}} &= (78 - 123)\,\text{GPa}
\end{aligned}
$$

Diese sind aus [1].
Um zu prüfen wie nah die berechneten Werte an den Literaturwerten liegen wird die prozentuale Abweichung

$$\Delta\% = \left| \frac{E_{\text{lit}} - E_{\text{berechnet}}}{E_{\text{lit}}} \right| \cdot 100\%$$

bestimmt. Dieser Wert lässt dann Aussagen über Güte der berechneten Werte zu und macht die einzelnen Messungen auch noch vergleichbar.
Auffällig ist hierbei sofort, dass bei der Messung mit der beidseitigen Einspannung des Kupfer Stabes ein systematischer Fehler vorliegen muss. Die Abweichung der Werte, die für das Elastizitätsmodul dabei entstanden weichen deutlich stärker ab als jeder andere

Wert. Die Abweichung dieses Wertes beträgt 95.23%. Bei den anderen Werten ist mit bloßem Auge zu erkennen, dass die Abweichung deutlich geringer ist. Genauer sind hier alle Abweichungen der Werte einmal aufgelistet:

$$\begin{aligned}
&\text{einseitige Einspannung}\\
\Delta E_{\text{Stahl, eckig}} &= 6.19\%\\
\Delta E_{\text{Kupfer, eckig}} &=\\
\Delta E_{\text{Kupfer, rund}} &= 12.31\%\\
\Delta E_{\text{Messing, rund}} &=\\
&\text{beidseitige Einspannung}\\
\Delta E_{\text{Stahl, eckig, links}} &= 80.95\%\\
\Delta E_{\text{Stahl, eckig, rechts}} &= 95.23\%\\
\Delta E_{\text{Kupfer, eckig, links}} &= 33.85\%\\
\Delta E_{\text{Kupfer, eckig, rechts}} &= 26.15\%\\
\Delta E_{\text{Kupfer ,rund, links}} &= 113.08\%\\
\Delta E_{\text{Kupfer , rund, rechts}} &= 105.38\%\\
\Delta E_{\text{Messing, rund, links}} &=\\
\Delta E_{\text{Messing, rund, rechts}} &=
\end{aligned}$$

Zu diesen Werten ist zu sagen, dass die Abweichungen, die nicht berechnet wurden nicht 0% sind. Die Abweichungen wurden nur nicht bestimmt, da das E-modul von Kupfer und Messing in Bereichen angegeben ist. Wenn keine Abweichung bestimmt wurde liegt der berechnete Wert in diesem Bereich. Wenn die Abweichung bestimmt wurde dann immer zu der näheren Grenze des Bereichs.
Im Allgemeinen fällt auf, dass die Messung bei einseitiger Einspannung sehr viel genauer funktioniert als die Messung bei beidseitiger Einspannung. Dies könnte zum einen daran liegen, dass die Auslenkungen bei einseitiger Einspannung größer sind. Wenn die Messwerte größer sind haben absolute systematische Fehler wie Ableseungenauigkeiten oder eine schlechtere Eichung der Messuhren einen geringeren prozentualen Einfluss.
Außerdem können bei der auswertung der Messung mit einseitiger Einspannung alle Messwerte in einem Diagramm aufgetragen werden und müssen nicht auf zwei aufgeteilt werden. Die Ausgleichsrechnungen laufen bei einseitiger Einspannung also mit der doppelten Menge an Messwerten was den Fehler auch noch verkleinert.
Des Weiteren heben die Stäbe bei beidseitiger Einspannung auf einer Seite unweigerlich an. Durch den Druch den der Schraubstock an der einen Seite auf den Stab ausübt hebt sich das andere Ende an. Dies verfälscht zusätzlich die Messwerte.
Für kleinere Fehler sorgt noch, dass die Stäbe durch häufiges Benutzen im Experiment nicht mehr ganz gerade sind. Eine leichte Vorkrümmung sorgt hier auch noch für kleinere Abweichungen.

6 Messwerte

Tabelle 1: brauner, eckiger Stab

x [cm]	D(x) (einseitig) [mm]	D(x) (beidseitig) [mm]
3	0.03	0.015
8	0.14	0.07
13	0.32	0.11
18	0.59	0.17
23	0.85	0.22
32	1.46	0.24
37	1.72	0.21
42	1.88	0.16
47	2.30	0.12
52	3.00	0.05

Tabelle 2: kupferner, eckiger Stab

x [cm]	D(x) (einseitig) [mm]	D(x) (beidseitig) [mm]
3	0.04	0.09
8	0.21	0.20
13	0.49	0.38
18	0.93	0.45
23	1.29	0.52
32	2.28	0.57
37	2.62	0.51
42	3.45	0.44
47	4.35	0.26
52	5.36	0.11

Tabelle 3: kupferner, runder Stab

x [cm]	D(x) (einseitig) [mm]	x2 [cm]	D(x) (beidseitig) [mm]
3	0.01	3	0.01
8	0.07	8	0.09
13	0.17	13	0.18
18	0.32	18	0.28
23	0.48	23	0.36
28	0.67	32	0.42
33	0.82	37	0.37
38	1.02	42	0.29
43	1.32	47	0.15
48	1.49	52	0.08

Tabelle 4: goldener, runder Stab

x [cm]	D(x) (einseitig) [mm]	x2 [cm]	D(x) (beidseitig) [mm]
3	0.06	3	0.29
8	0.26	8	0.72
13	0.61	13	1.12
18	1.10	18	1.39
23	1.70	23	1.58
28	2.46	32	1.60
33	3.1	37	1.43
38	3.8	42	1.19
43	4.75	47	0.78
48	5.37	52	0.33

Literatur

[1] *Literaturwerte für das E-Modul.* URL: `https://de.wikipedia.org/wiki/Elastizit%5C%C3%5C%A4tsmodul`.

[2] *Literaturwerte für die Dichte.* URL: `https://de.wikibooks.org/wiki/Tabellensammlung_Chemie/_Dichte_fester_Stoffe`.

[3] *Versuchsanleitung V103.* TU Dortmund, Physik Fakultät. URL: `https://moodle.tu-dortmund.de/pluginfile.php/1587045/mod_resource/content/1/V103.pdf`.