V103 Biegung elastischer Staebe

Connor Magnus Böckmann
email: connormagnus.boeckmann@tu-dortmund.de

Tim Theissel
email: tim.theissel@tu-dortmund.de

15. Juni 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Im folgenden Versuch soll an Hand der Biegung von Metallstaeben die Materialkonstante des Elastizitaetsmoduls ermittelt werden. Dies wird jeweils mit einseitiger, sowie mit beidseitiger Auflage erfolgen.

2 Theoretische Grundlagen

Kraefte an einem Koerper fuehren zu Volumen- und Gestaltsveraenderungen. Bezogen auf eine Flaeche wird diese physikalische Groesse Spannung genannt. Unterschieden wird dabei in die Normalspannung σ und die parallel zur Oberflaeche stehende Tangentialspannung bzw. Schubspannung. Bei kleiner Gestaltaenderung $\Delta L/L$ so kann ein linearer Zusammenhang zwischen der angreifenden Spannung σ und der Deformation $\Delta L/L$ erkannt werden. Dieser Zusammenhang wird als Hooksches Gesetz bezeichnet:

$$\sigma = E\frac{\Delta L}{L}. \tag{1}$$

Der Faktor E wird als Elastizitaetsmoduls bezeichnet und stellt einen Proportionalitaetsfaktor dar. Hierbei handelt es sich um eine Materialkonstante. Dieses koennte durch Stauchung oder Dehnung ermittelt werden, was jedoch sehr praezise Messapparaturen voraussetzen wuerden, da ΔL dort sehr klein ist. Dieses Problem laesst sich umgehen, wenn statt einer Dehnung oder Stauchung, die Biegung betrachtet wird. Hier ist die Verformung bei gleicher Kraft und gleichem Stab deutlich groesser.

2.1 Biegung eines einseitig eingespannten Stabes

Bei der Biegung laesst sich die Verformung auf eine Dehnung zurueckfuehren, welche jedoch nicht ueber den Querschnitt des Stabes konstant ist.

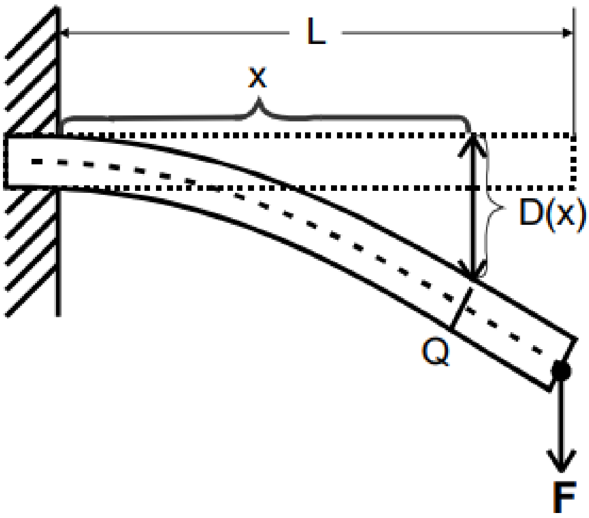

Abbildung 1: Biegung bei einseitiger Einspannung
Aus: Anleitung V103 Seite 107.

Die Formel der Durchbiegung D(x), also die Verschiebung des Oberflaechenpunktes an der Stelle x zwischen unbelastetem und belastetem Zustand, enthaelt das Elastizitaetsmodul. Somit kann dieses berechnet werden, wenn D(x) bekannt ist. Die aufgebrachte Kraft F uebt auf den Querschnitt Q mit Abstand x das Drehmoment M_F aus, welches den Querschnitt Q aus einer vertikalen Lage verdreht. Die oberen Schichten werden hierbei gedehnt und die unteren Schichten gestaucht. Durch die elastischen Eigenschaften des Stabes widersteht der Stab der Verformung durch die in ihm auftretenden Normalspannungen. Es stellt sich ein Gleichgewichtszustand ein. Bei dieser ist dann die bei der angelegten Kraft maximale Auslenkung erreicht. Die Schicht des Stabes in der weder Zugspannungen, noch Druckspannungen auftreten, welche also ihre vorherige Lage beibehaelt, nennt sich die neutrale Faser. Diese ist in 1 gestrichelt eingezeichnet. Durch die Zug- und Druckspannungen ensteht ein Drehmoment, welches durch Integration ueber den Querschnitt berechnet werden kann:

$$M_\sigma = \int_Q y\sigma(y)dq \tag{2}$$

Der Wert y ist dabei der Abstand von der neutralen Faser. Die Drehmomente gleichen sich bei der Deformation also aus ($M_F = M_\sigma$). Das Drehmoment M_F entspricht dabei $M_F = F(L-x)$, da die Kraft F am Hebel der Laenge L-x angreift. Nach Einsetzen des Hookschen Gesetzes fuer ein kleines Stabstueck der Laenge Δx, also $\sigma(y) = E\frac{\delta x}{\Delta x}$, und Ausnutzung der Geometrie fuer geringe Verkruemmungen des Stabes, ergibt sich die Momentengleichung zu

$$E\frac{d^2D}{dx^2}\int_Q y^2 dq = F(L-x). \tag{3}$$

Der hier verwendete Ausdruck $\int_Q y^2dq$ wird, in Analogie zum Massentraegheitsmoment, Flaechentraegheitsmoment I genannt. Nach Durchfuehrung der Integration wird die Beziehung

$$D(x) = \frac{F}{2EI}(Lx^2 - \frac{x^3}{3}) \tag{4}$$

erhalten. Die Integrationskonstanten entfallen, da $D(0) = 0$, also der Stab horizontal eingespannt ist, und da $\frac{dD}{dx}(0) = 0$, also die Durchbiegung an der Einspannstelle null ist.

2.2 Biegung eines beidseitig eingespannten Stabes

Eine Biegung kann auch, wie in **??** zu sehen, erzeugt werden.

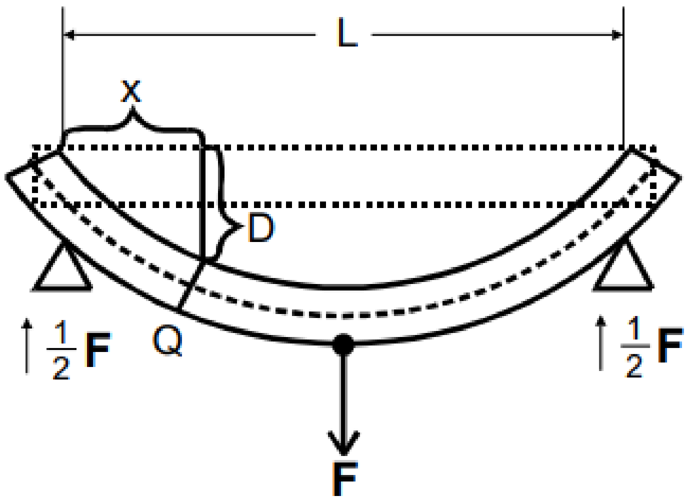

Abbildung 2: Biegung bei beidseitiger Einspannung
Aus: Anleitung V103 Seite 110.

Dabei greift die Kraft an der Stabmitte an. Das Drehmoment M_F im Bereich $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ ist dann $M_F = -\frac{F}{2}x$. Dementsprend ist M_F fuer $\frac{L}{2} \leq x \leq L$ $M_F = -\frac{F}{2}(L-x)$. Die Momentengleichungen sind also

$$\frac{d^2D}{dx^2} = -\frac{F}{EI}\frac{x}{2},$$

bzw.

$$\frac{d^2D}{dx^2} = -\frac{F}{EI}(L-x).$$

Integration dieser Gleichung liefert

$$\frac{dD}{dx} = -\frac{F}{EI}\frac{x^2}{4} + C \text{ fuer } 0 \leq x \leq \frac{L}{2},$$

bzw.

$$\frac{dD}{dx} = -\frac{F}{2EI}(Lx - \frac{x^2}{2}) = C' \text{ fuer } \frac{L}{2} \leq x \leq L.$$

Unter der Annahme, dass die Tangente des Stabes in der Stabmitte horizontal ist, liefert dies fuer $C = \frac{FL^2}{16EI}$ und $C' = \frac{3FL^2}{16EI}$. Eine weitere Integration liefert nun mit $D(0) = 0$ fuer die linke Stabhaelfte

$$D(x) = \frac{F}{48EI}(3L^2x - 4x^3)$$

. Entsprechend gilt fuer die rechte Stabhaelfte ($\frac{L}{2} \leq x \leq L$) mit $D(L) = 0$

$$D(x) = \frac{F}{48EI}(4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3)$$

3 Versuchsaufbau

In **??** ist der schematische Aufbau der Versuchsapparatur zur Ermittlung der Auslenkung zu sehen.

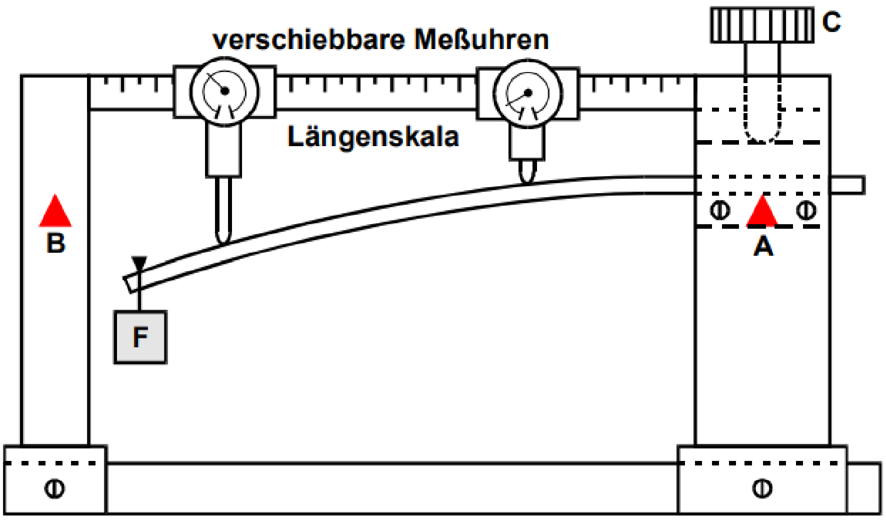

Abbildung 3: Biegung bei beidseitiger Einspannung
Aus: Anleitung V103 Seite 111.

Die Staebe werden hier in die Spannvorrichtung C eingespannt oder fuer die Messung mit beidseitiger Auflage auf A und B aufgelegt. Die Kraft wird aufgebracht durch Anhaengen von Gewichten an der Stabmitte bzw. dem Stabende. Die Durchbegiegung wird hierbei mit zwei Messuhren bestimmt, welche vor jeder Messung genullt werden muessen. Die

Nullung der Uhr vor jeder Messung ist erforderlich, da nicht davon ausgegangen werden kann, dass der Stab exakt gerade ist und horizontal eingespannt wurde. Die Messuhren messen mit Hilfe eines gefederten Messstabes die Auslenkung aus einer Null-Lage. Ein Teilstrich stellt dabei $10\mu m$ dar. Das angehaengte Gewicht sollte gross genug sein, um eine hinreichend grosse Durchbiegung zu erreichen.

4 Auswertung

4.1 Eckige Stäbe, einseitige Einspannung

Um den Elastizitätsmodul von den eckigen Stäben bei einseitiger Einspannung zu bestimmen wird zunächst eine Grafik erstellt. Dafür wird die Gesamtauslenkung der eckigen Stäbe bei einseitiger Einspannung D(x) aus den Tabellen **??** und **??** gegen $Lx^2 - \frac{x^3}{3}$ aufgetragen. Dabei enstehen folgende Diagramme:

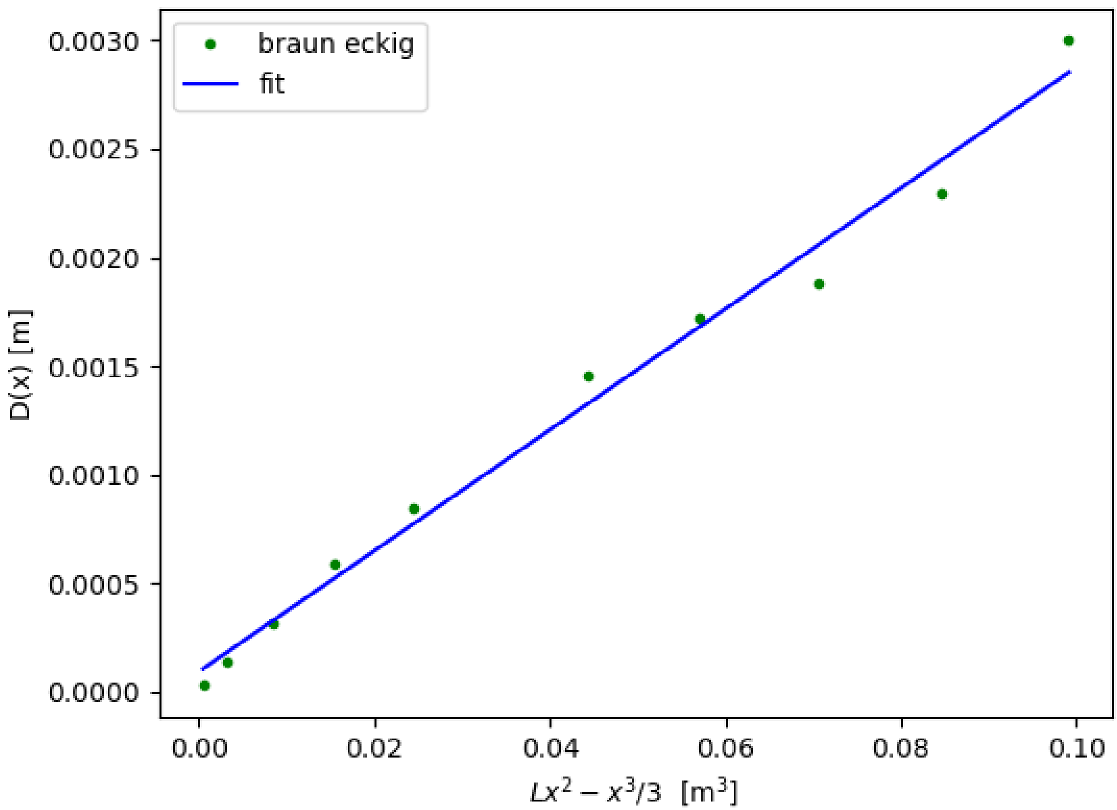

Abbildung 4: Biegung eines braunen, eckigen Stabes mit zugehöriger Ausgleichsrechnung, bei einseitiger Einspannung.

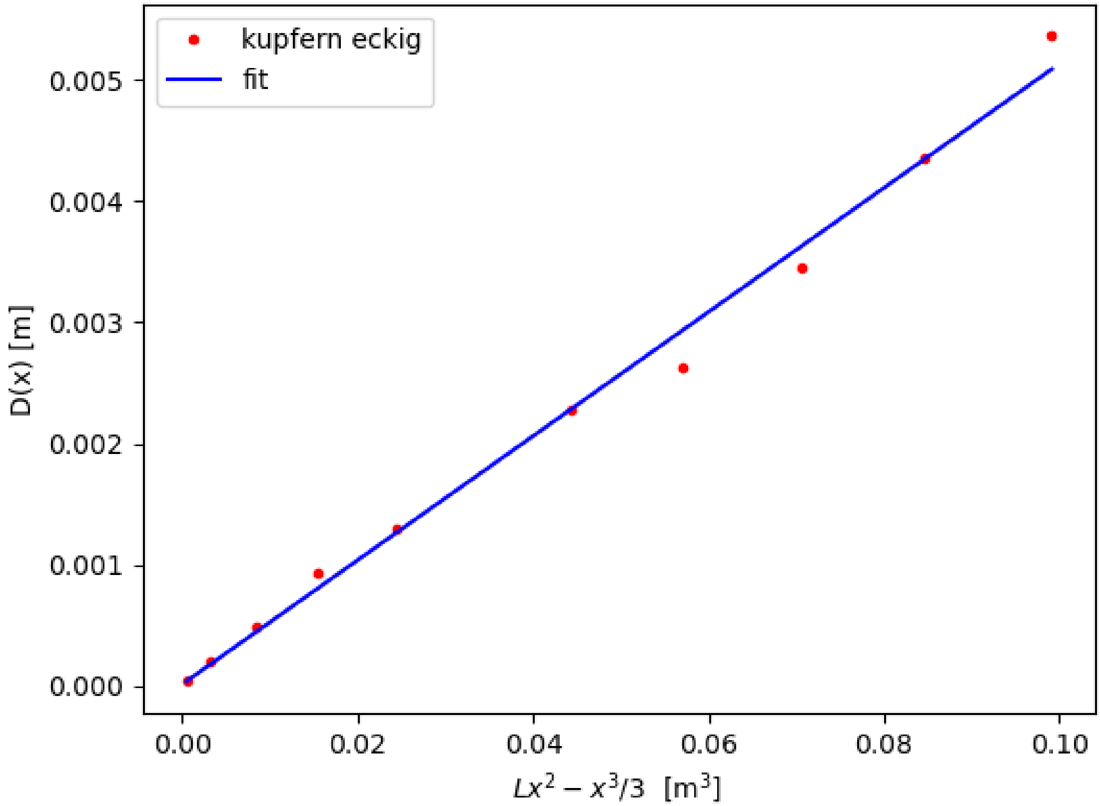

Abbildung 5: Biegung eines kupfernen, eckigen Stabes mit zugehöriger Ausgleichsrechnung, bei einseitiger Einspannung.

Die Ausgleichsrechnungen wurden mit der allgemeinen Geradengleichung: $y = ax + b$ durchgeführt. Aus diesen Graphen und den Ausgleichsrechnungen lässt sich der Elastizitätsmodul mit folgender Formel berechnen:

$$E = \frac{m * g}{2 * I * a}$$

Dabei ist a die mit der Ausgleichsrechnung bestimmte Steigung der Ausgleichsgeraden. Die Masse m beträgt hier jeweils 1.0543kg. I ist das Flächenträgheitsmoment. Da die Stäbe Quadratisch sind, ist das Flächenträgheitsmoment: $I = \frac{h^4}{12}$. Beide Stäbe haben als Kantenlänge h=1cm. Die berechneten Steigungen sind:

$$a_{braun} = (2.78 \pm 0.11)\frac{10^{-2}}{m^2}$$
$$a_{kupfern} = (5.1 \pm 0.16)\frac{10^{-2}}{m^2}$$

Mit diesen Werten ergibt sich für die Elastizitätsmodule:

$$E_{braun} = (223 \pm 9) GPa$$
$$E_{kupfern} = (1.22 \pm 4) GPa$$

4.2 runde Stäbe, einseitige Einspannung

Für die runden Stäbe ist das Vorgehen identisch zu dem Vorgehen bei den Eckigen. Hier werden die Werte von D(x) aus **??** und **??** genommen. Diese werden genauso gegen $Lx^2 - \frac{x^3}{3}$ aufgetragen. Dabei entstehen folgende Diagramme:

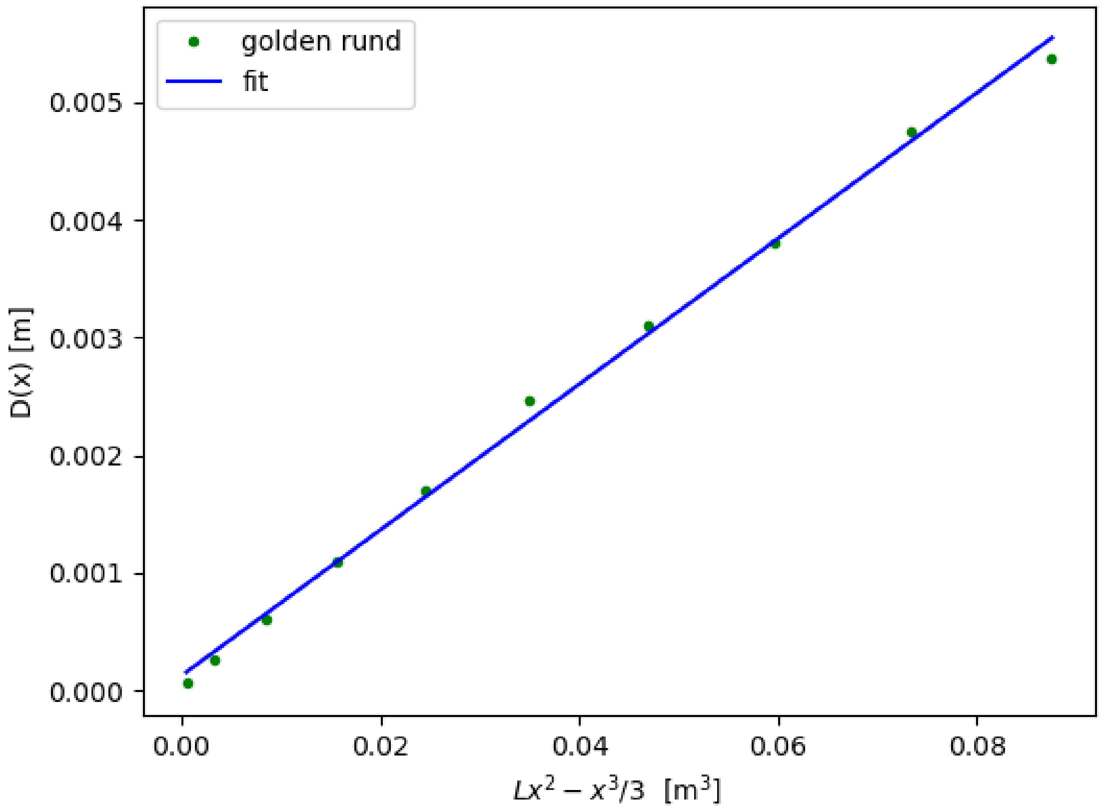

Abbildung 6: Biegung eines goldenen, runden Stabes mit zugehöriger Ausgleichsrechnung, bei einseitiger Einspannung.

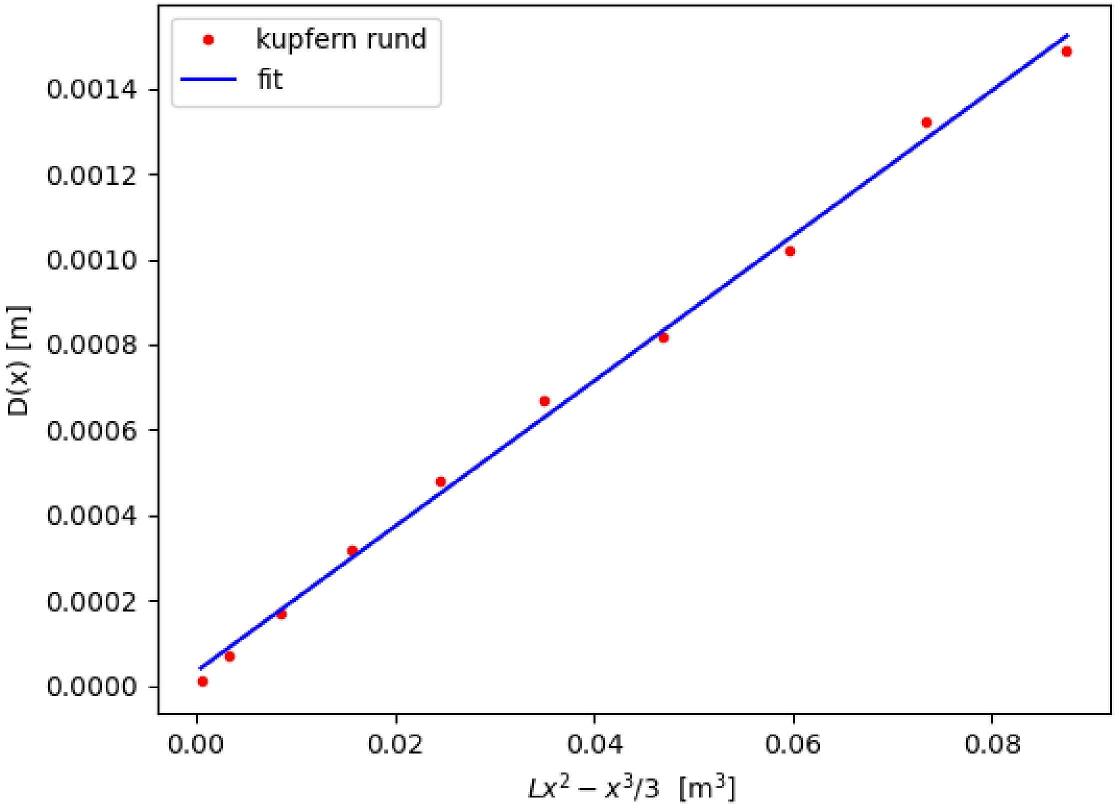

Abbildung 7: Biegung eines kupfernen, runden Stabes mit zugehöriger Ausgleichsrechnung, bei einseitiger Einspannung.

Auch die Formel für den Elastizitätsmodul bleibt gleich. Die einzigen Unterschiede sind hier das Flächenträgheitsmoment und die an den Stab gehängte Masse. Die Masse beträgt 0.2492kg für den kupfernen Stab und 0.552kg für den Messingstab. Das Flächenträgheitsmoment lässt sich aufgrund des runden Querschnitts nun folgendermaßen bestimmen:

$$\frac{\pi R^4}{4}$$

Der Durchmesser der beiden Stäbe beträgt 1cm.
Nun lassen sich wieder die Elastizitätsmodule bestimmen:

$$E_{kupfern} = (146.5 \pm 2.6) GPa$$
$$E_{golden} = (89 \pm 17) GPa$$

4.3 eckige Stäbe, beidseitige Einspannung

Für die eckigen Stäbe bei beidseitiger Einspannung werden Werte für D(x) aus **??** und **??** in Diagrammen aufgetragen. Dabei werden jeweils die Werte links vom Aufhängungspunkt (27.5cm) und rechts vom Aufhängungspunkt gesondert aufgetragen. Die Werte links vom Aufhängungspunkt werden dabei gegen $3L^2x - 4x^3$ und die Werte rechts vom Aufhängungspunkt gegen $4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3$ aufgetragen. Anschließend wird bei allen Graphen eine lineare Ausgleichsrechnung durchgeführt. Dabei entstehen folgende Diagramme:

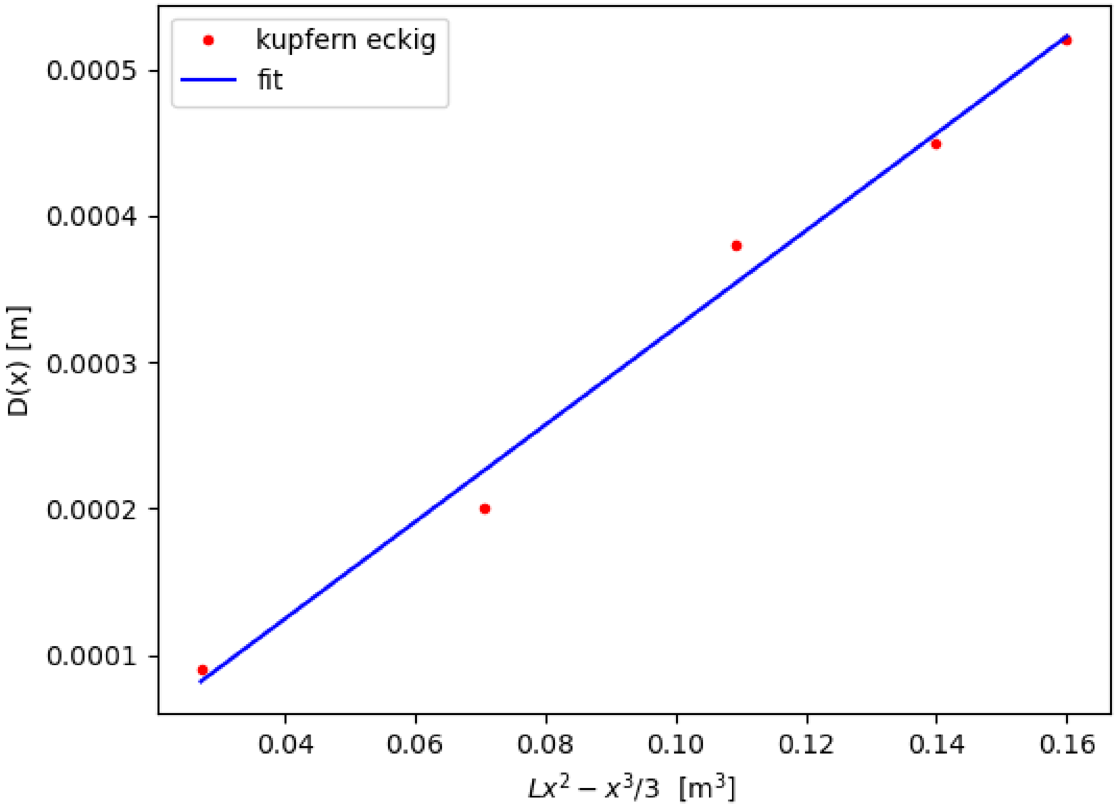

Abbildung 8: Biegung eines kupfernen, eckigen Stabes mit zugehöriger Ausgleichsrechnung, bei beidseitiger Einspannung links vom Aufhängungspunkt.

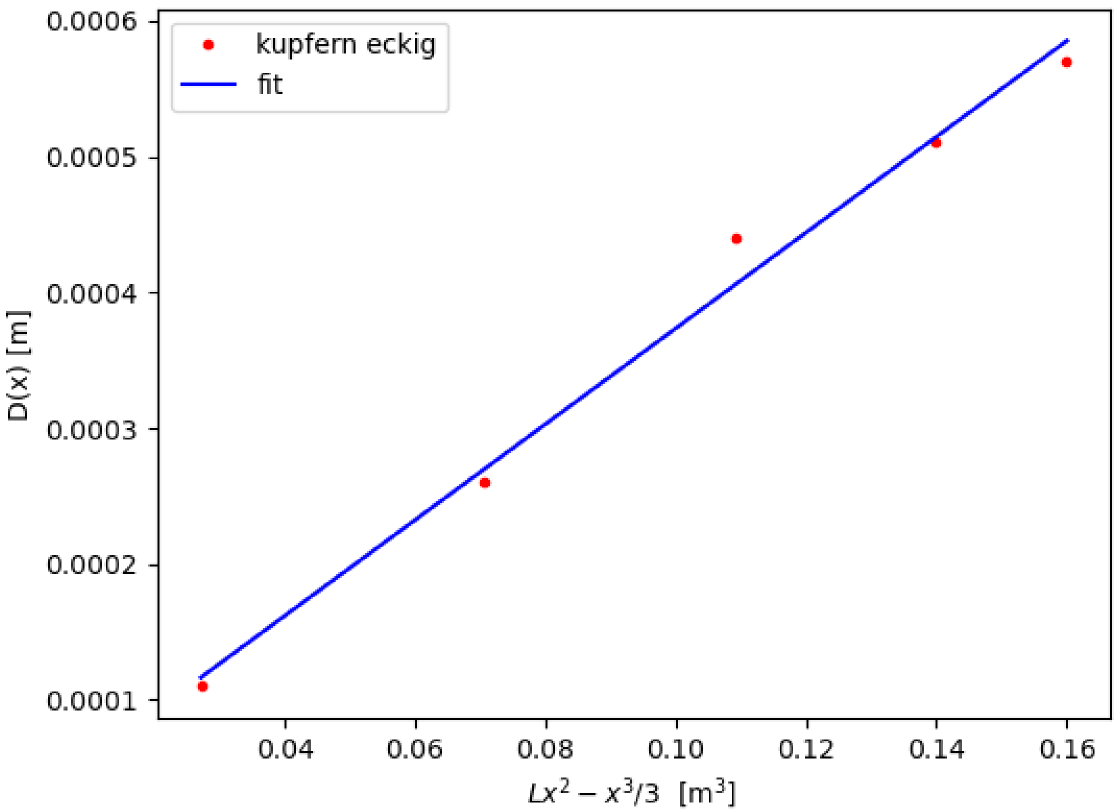

Abbildung 9: Biegung eines kupfernen, eckigen Stabes mit zugehöriger Ausgleichsrechnung, bei beidseitiger Einspannung rechts vom Aufhängungspunkt.

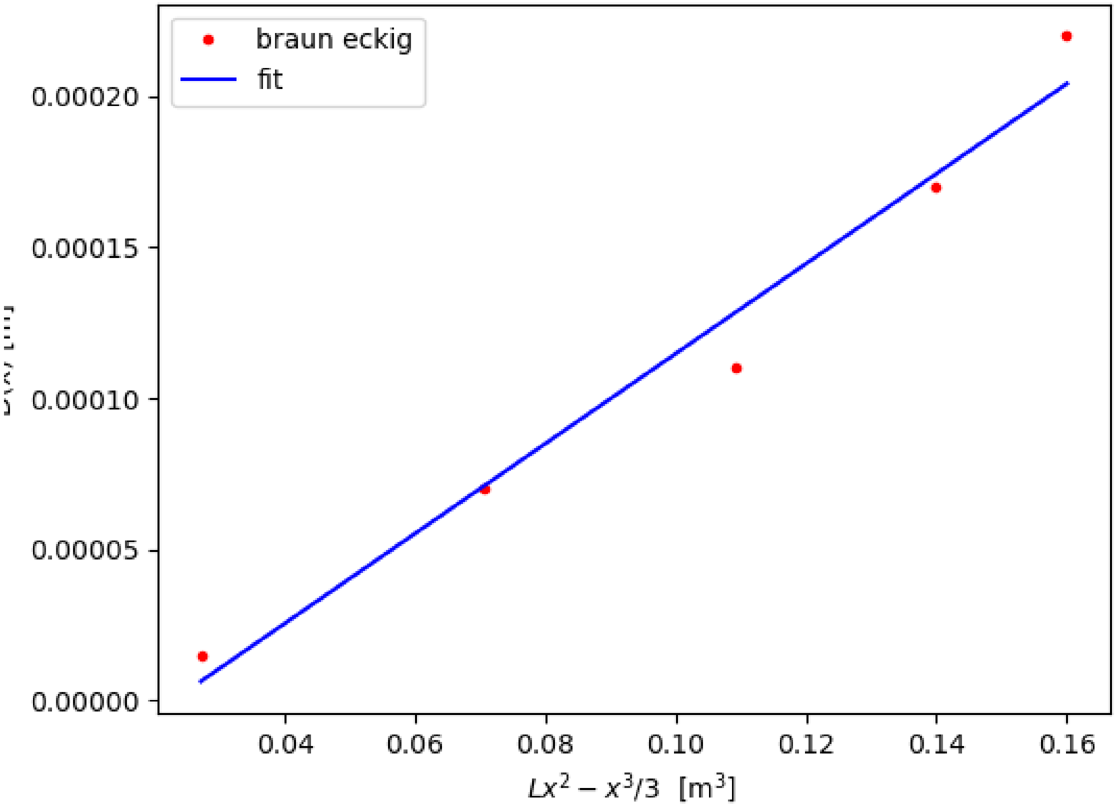

Abbildung 10: Biegung eines braunen, eckigen Stabes mit zugehöriger Ausgleichsrechnung, bei beidseitiger Einspannung links vom Aufhängungspunkt.

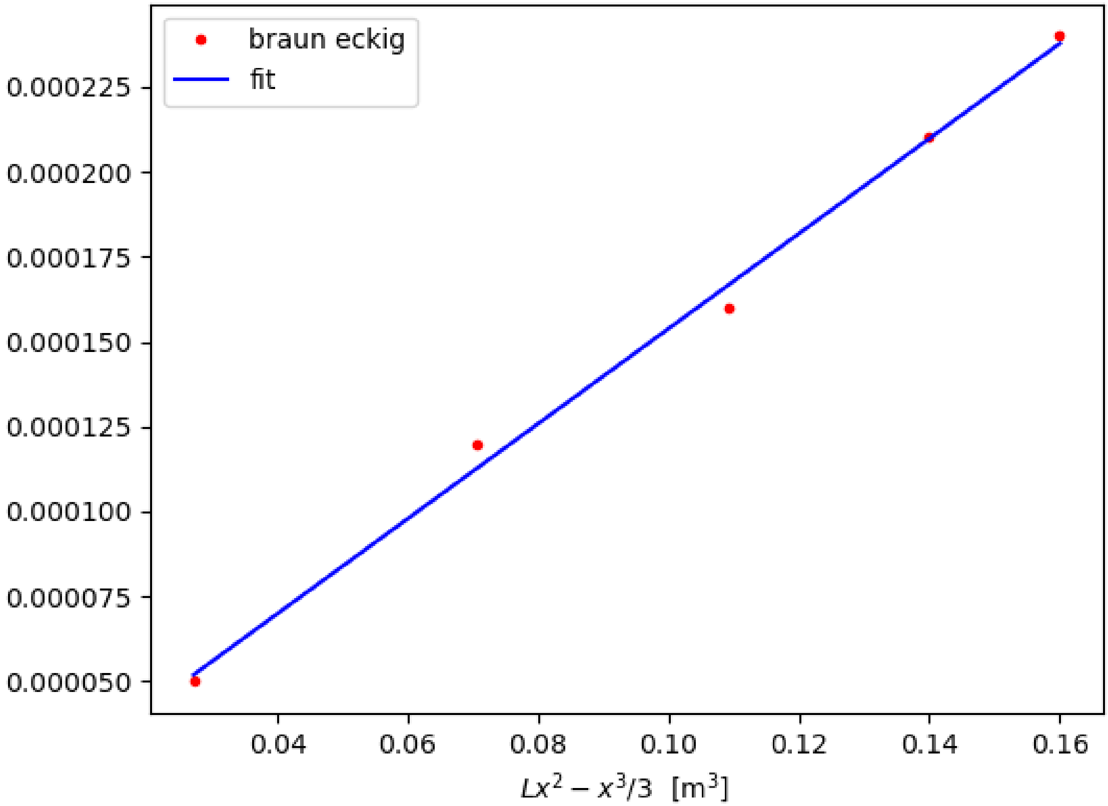

Abbildung 11: Biegung eines kupfernen, eckigen Stabes mit zugehöriger Ausgleichsrechnung, bei beidseitiger Einspannung rechts vom Aufhängungspunkt.

Die Ausgleichsrechnungen liefern folgende Steigungen:

$$
\begin{aligned}
a_{Kupfer,links} &= (3.3 \pm 0.21)\frac{10^{-3}}{m^2} \\
a_{Kupfer,rechts} &= (3.5 \pm 0.21)\frac{10^{-3}}{m^2} \\
a_{braun,links} &= (1.5 \pm 0.14)\frac{10^{-3}}{m^2} \\
a_{braun,rechts} &= (1.4 \pm 0.06)\frac{10^{-3}}{m^2}
\end{aligned}
$$

Mit diesen Steigungen können anschließend die Elastizitätsmodule berechnet werden. Dafür wird die folgende Gleichung benötigt:

$$E = \frac{m * g}{48 * I * a}$$

Die angehängte Masse beträgt hier bei allen Gewichten 2.3408kg. Das Flächenträgheitsmoment ist das gleich wie bei vorherigen Rechnungen mit den eckigen Stäben. Dabei entstehen folgende Werte für die Elastizitätsmodule:

$$\begin{aligned}
E_{Kupfer,links} &= (380 \pm 40)GPa \\
E_{Kupfer,rechts} &= (410 \pm 18)GPa \\
E_{braun,links} &= (174 \pm 11)GPa \\
E_{braun,rechts} &= (164 \pm 10)GPa
\end{aligned}$$

4.4 runde Stäbe, beidseitige Einspannung

Zur Bestimmung dieser Elastizitätsmodule ist das Vorgehen sehr ähnlich dem Vorherigen. Die Werte für die Diagramme stammen allerdings aus **??** und **??**. Die Diagramme sehen diesmal folgendermaßen aus:

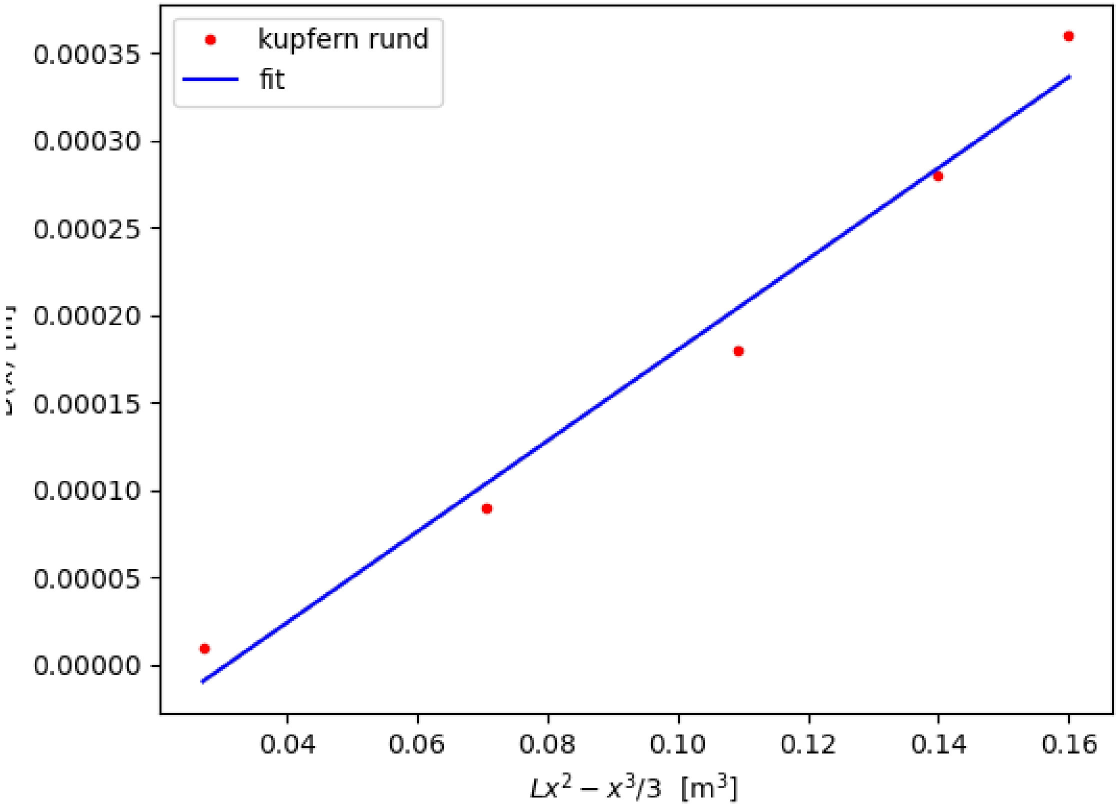

Abbildung 12: Biegung eines kupfernen, runden Stabes mit zugehöriger Ausgleichsrechnung, bei beidseitiger Einspannung links vom Aufhängungspunkt.

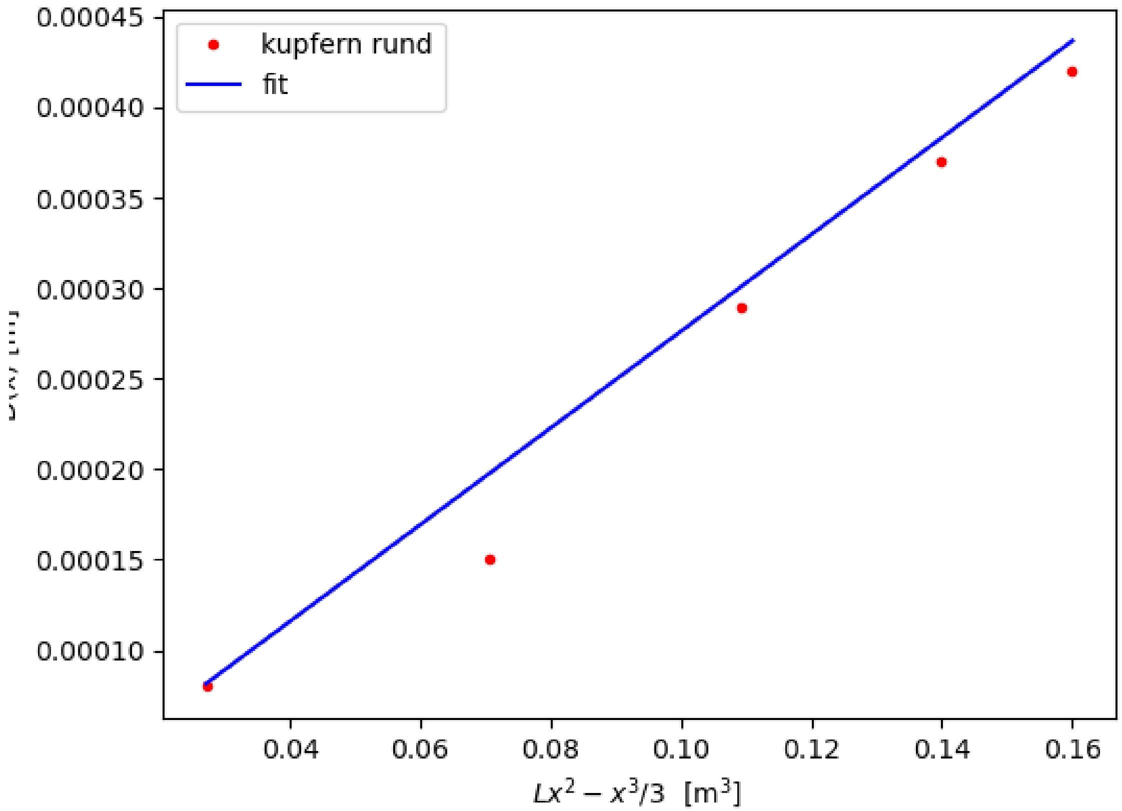

Abbildung 13: Biegung eines kupfernen, runden Stabes mit zugehöriger Ausgleichsrechnung, bei beidseitiger Einspannung rechts vom Aufhängungspunkt.

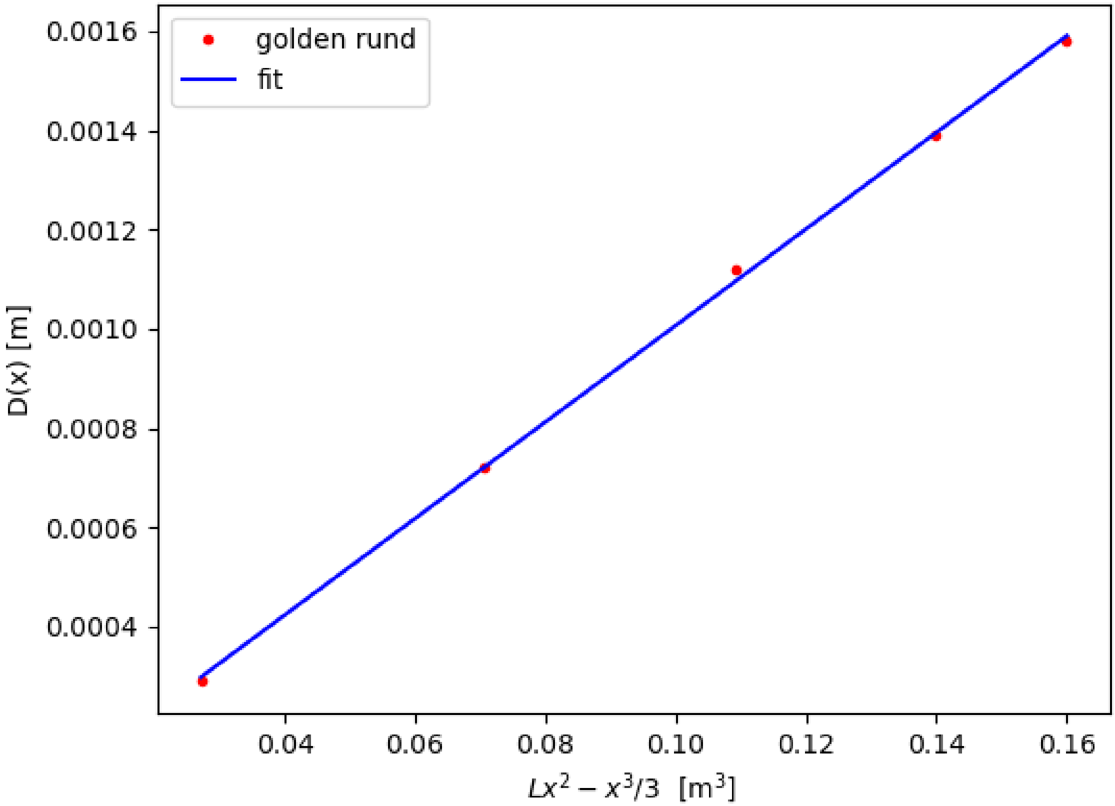

Abbildung 14: Biegung eines goldenen, runden Stabes mit zugehöriger Ausgleichsrechnung, bei beidseitiger Einspannung links vom Aufhängungspunkt.

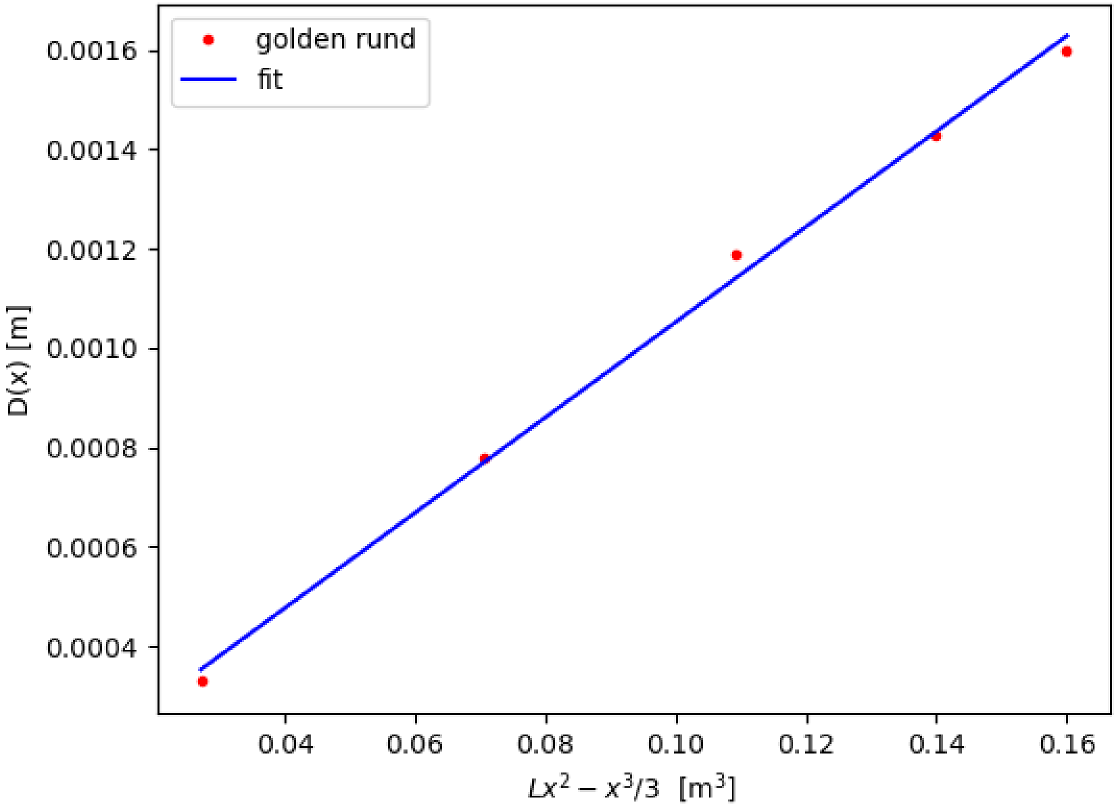

Abbildung 15: Biegung eines goldenen, runden Stabes mit zugehöriger Ausgleichsrechnung, bei beidseitiger Einspannung rechts vom Aufhängungspunkt.

Die Ausgleichsrechnungen liefern folgende Steigungen:

$$a_{kupfer,links} = (2.6 \pm 0.22)\frac{10^{-3}}{m^2}$$
$$a_{kupfer,rechts} = (2.7 \pm 0.19)\frac{10^{-3}}{m^2}$$
$$a_{golden,links} = (9.7 \pm 0.15)\frac{10^{-3}}{m^2}$$
$$a_{golden,rechts} = (9.6 \pm 0.34)\frac{10^{-3}}{m^2}$$

Mit diesen Steigungen können anschließend die Elastizitätsmodule berechnet werden. Dafür wird die folgende Gleichung benötigt:

$$E = \frac{m * g}{48 * I * a}$$

Die am kupferfarbenen Stab angehängte Masse beträgt 1,7294kg. Die am goldenen Stab angehängte Masse beträgt 2.3408kg. Das Flächenträgheitsmoment ist das gleiche wie bei der vorherigen Rechnung mit runden Stäben. Bei der Rechnung ergeben sich diese Elastizitätsmodule:

$$\begin{aligned}
E_{kupfer,links} &= (277 \pm 23)GPa \\
E_{kupfer,rechts} &= (267 \pm 19)GPa \\
E_{golden,links} &= (100.5 \pm 1.6)GPa \\
E_{golden,rechts} &= (102 \pm 4)GPa
\end{aligned}$$

4.5 Materialbestimmung durch Dichte

4.5.1 brauner, eckiger Stab

Das Gewicht dieses Stabes beträgt 0.4546kg. Er hat einen quadratischen Querschnitt mit Kantenlänge a=1cm. Dazu ist der Stab 59.4cm lang. Daraus ergibt sich eine Dichte von: $7653.20\frac{kg}{m^3}$. Der Farbe und der dichte nach zu urteilen handelt es sich bei dem Material dieses Stabes um Stahl.

4.5.2 kupferner, eckiger Stab

Das Gewicht dieses Stabes beträgt 0.5359kg. Er hat einen quadratischen Querschnitt mit Kantenlänge a=1cm. Dazu ist der Stab 60.2cm lang. Daraus ergibt sich eine Dichte von: $8902.00\frac{kg}{m^3}$. Der Farbe und der dichte nach zu urteilen handelt es sich bei dem Material dieses Stabes um Kupfer.

4.5.3 kupferner, runder Stab

Das Gewicht dieses Stabes beträgt 0.4168kg. Er hat einen runden Querschnitt mit Durchmesser r=1cm. Dazu ist der Stab 60.2cm lang. Daraus ergibt sich eine Dichte von: $8811.84\frac{kg}{m^3}$. Der Farbe und der dichte nach zu urteilen handelt es sich bei dem Material dieses Stabes um Kupfer.

4.5.4 goldener, runder Stab

Das Gewicht dieses Stabes beträgt 0.394kg. Er hat einen runden Querschnitt mit Durchmesser r=1cm. Dazu ist der Stab 60.2cm lang. Daraus ergibt sich eine Dichte von: $8329.81\frac{kg}{m^3}$. Der Farbe und der dichte nach zu urteilen handelt es sich bei dem Material dieses Stabes um Messing.