206 Die Wärmepumpe

Connor Magnus Böckmann
email: connormagnus.boeckmann@tu-dortmund.de

Tim Theissel
email: tim.theissel@tu-dortmund.de

24. November 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung **3**

2 Theoretische Grundlagen **3**
2.1 Güteziffer . . . 3
2.2 Massendurchsatz . . . 4
2.3 Kompressorleistung N_{mech} . . . 5
2.4 Gauß-Fehler . . . 5

3 Aufbau und Funktionsweise einer Wärmepumpe **5**

4 Durchführung **7**

5 Messwerte/Auswertung **7**
5.1 Aufgabe 5a) und 5b) . . . 9
5.2 Aufgabe 5c) . . . 10
5.3 Aufgabe 5d) . . . 10
5.4 Aufgabe 5e) . . . 11
5.5 Aufgabe 5f) . . . 12

6 Diskussion **12**
6.1 Aufgabe 5g) . . . 12

7 Literatur **12**

1 Zielsetzung

Der Versuch V206 "Die Wärmepumpe" dient zur Untersuchung des Transports von Wärmeenergie entgegen des Wärmeflusses, wobei die reale Güteziffer der Wärmepumpe, der Massendurchsatz und der Wirkungsgrad des Kompressors bestimmt werden. Diese Kenngrößen sind ausschlaggebend für die Qualität der im Versuch verwendeten Wärmepumpe.

2 Theoretische Grundlagen

Eine Wärmepumpe dient dem Transport von Wärme von einem kälteren zu einem wärmeren Reservoir. Wärme fließt aber nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik immer von einem wärmeren zu einem kälteren Reservoir, weshalb bei der Wärmepumpe mechanische Arbeit verrichtet werden muss, um diesen Ablauf umzukehren.

2.1 Güteziffer

Unter idealisierenden Bedingungen soll das Verhältnis aus transportierter Wärmemenge und der mechanischen Arbeit A, welche zum Wärmetransport aufgebracht werden muss, ausgerechnet werden. Eben dieses Verhältnis wird Güteziffer v einer Wärmepumpe genannt. Dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik folgend, geht hervor dass die Wärmemenge Q_2, welche aus dem kälteren Reservoir abgeführt wurde, und die aufgebrachte mechanische Arbeit A in Summe der an das wärmere Reservoir abgegebenen Wärmemenge Q_1 entspricht.

$$Q_1 = Q_2 + A \tag{1}$$

Das oberhalb beschriebene Verhältnis aus Wärmemenge Q_1 und mechanischer Arbeit A, also Güteziffer v, ergibt sich zu:

$$v = \frac{Q_1}{A}$$

Eine weitere entscheidende Beziehung zwischen zwei Temperaturen T_1 und T_2 und den Wärmemengen Q_1 und Q_2 entstammt dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik. Wenn sich die Temperaturen der beiden Reservoirs T_1 und T_2 während des Wärmetransports nicht ändern, verschwinden die summierten reduzierten Wärmemengen.

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0 \tag{2}$$

Damit die Gleichung 2 allerdings funktioniert muss eine idealisierende Annahme getroffen werden. Damit die Gleichung gilt muss die Wärmeübertragung nämlich vollständig reversibel, also umgekehrt werden können. Dies ist in der Realität aber nicht möglich. Für realitätsgenaue Berechnungen gilt also eigentlich:

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} > 0$$

Aus 1 und 2 folgt dann

$$Q_1 = A + \frac{T_2}{T_1} \cdot Q_1$$

, für die Güteziffer einer idealisierten Wärmepumpe

$$\nu_{id} = \frac{Q_1}{A} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} \tag{3}$$

und für die reale Wärmepumpe dementsprechend

$$\nu_{real} < \frac{T_1}{T_1 - T_2}.$$

Aus (4) folgt, dass die Wärmepumpe umso günstiger funktioniert, wenn die Temperaturdifferenz zwischen T1 und T2 gering ist, also die beiden Reservoirs ähnlich warm sind. Verwendet werden derartige Wärmepumpen zur kostengünstigen Beheizung, da die Wärmemenge Q2 einem kostenlos zur Verfügung stehenden Reservoir wie etwa der Luft oder dem Grundwasser entnommen wird. Daher muss der Betreiber nur Kosten für die mechanische Arbeit tragen, um Q2 = Q1 - A aus dem Reservoir zu pumpen. Die erhaltene Wärme ist hierbei potenziell höher als die aufgebrachte mechanische Arbeit

$$Q_{1_{rev}} = A\frac{T_1}{T_1 - T_2}.$$

Die reale Güteziffer lässt sich durch den Differentialquotienten ΔT1/Δt für das Zeitintervall Δ t berechnen. Des Weiteren wird die Wärmemenge ΔQ1/Δt benötigt nach

$$\frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = (m_1 c_w + m_k c_k)\frac{\Delta T_1}{\Delta t}$$

wobei $m_1 c_w$ die Wärmekapazität des Wassers und $\mathrm{m_k c_k}$ die Wärmekapazität der Apparatur darstellt. N ist die von einem Wattmeter angezeigte und gemittelte Leistung des Kompressors. Die reale Güteziffer ist damit

$$\nu = \frac{\Delta Q_1}{\Delta t N}. \tag{4}$$

2.2 Massendurchsatz

Die Vorschrift

$$\frac{\Delta Q_2}{\Delta t} = (m_2 c_w + m_k c_k)\frac{\Delta T_2}{\Delta t}$$

stellt die pro Zeitintervall entnommene Wärmemenge dar. Außerdem gilt

$$\frac{\Delta Q_2}{\Delta t} = L\frac{\Delta m}{\Delta t}$$

L ist dabei die Verdampfungswärme des Transportmediums. Daraus ergibt sich

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = (m_2 c_w + m_k c_k)\frac{\Delta T_2}{\Delta t L} = \frac{\Delta Q_2}{\Delta t} \cdot \frac{1}{L}. \tag{5}$$

2.3 Kompressorleistung $\mathrm{N_{mech}}$

Für die Komprimierung des Gasvolumens von $\mathrm{V_a}$ auf $\mathrm{V_b}$ benötigte Arbeit $\mathrm{A_m}$ gilt

$$A_m = -\int_{V_a}^{V_b} p\, dV$$

Mit $N_{mech} = \frac{\delta A_m}{\delta t}$ und der Poissonschen Gleichung ergibt sich

$$N_{mech} = \frac{\Delta A_m}{\Delta t} = \frac{1}{\kappa - 1}\left(p_b \sqrt[\kappa]{\frac{p_a}{p_b}} - p_a\right)\frac{\Delta V_a}{\Delta t} = \frac{1}{\kappa - 1}\left(p_b \sqrt[\kappa]{\frac{p_a}{p_b}} - p_a\right)\frac{1}{\rho}\frac{\Delta m}{\Delta t} \tag{6}$$

mit ρ als Dichte des Mediums im gasförmigen Zustand und κ, dem Verhältnis der Molwärmen, $\mathrm{c_p}$ und $\mathrm{c_v}$.

2.4 Gauß-Fehler

Der Gauß- Fehler wird in verschiedenen Abschnitten berechnet, jedoch immer nach der folgenden Formel der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{(\partial f)^2}{(\partial x)^2}\right)(\Delta x)^2 \left(\frac{(\partial f)^2}{(\partial y)^2}\right)(\Delta y)^2 \left(\frac{(\partial f)^2}{(\partial z)^2}\right)(\Delta z)^2} \tag{7}$$

3 Aufbau und Funktionsweise einer Wärmepumpe

Im Folgenden wird die prinzipielle Funktionsweise einer Wärmepumpe, wie sie zur Durchführung des Versuchs verwendet wird, genauer beschrieben.
Die Wärmepumpe funktioniert auf dem Prinzip der Phasenumwandlung. Dazu wird ein reales Gas als Medium zum Transport der Wärme benutzt. Dieses nimmt während des Verdampfens Energie auf und gibt diese bei der Kondensation wieder ab. Daher sollte ein Medium mit möglichst großer Kondensationswärme gewählt werden.

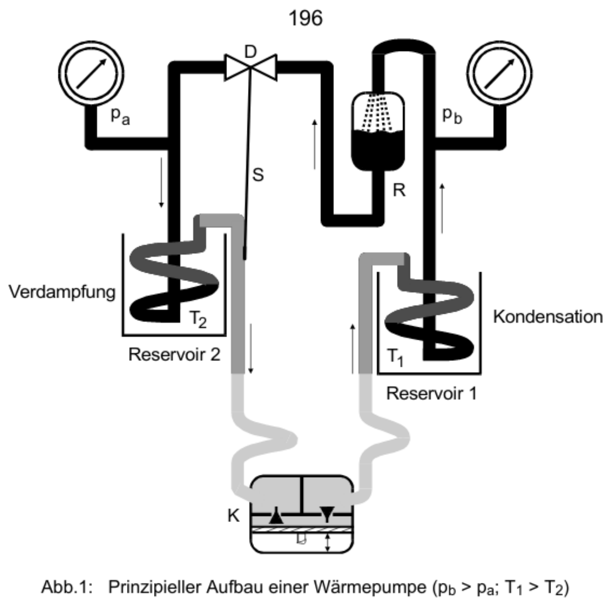


Abbildung 1: TU Dortmund.Versuchsanleitung zum Experiment V206 - Die Wärmepumpe Seite 196.

Der schematische Aufbau einer Wärmepumpe wird in Abb. 1 dargestellt. Sie besteht aus einem geschlossenen Mediumkreislauf, welcher durch den Kompressor K erzeugt wird und durch die beiden Reservoirs 1 und 2 verläuft. Außerdem durchströmt das Medium das Drosselventil D, an welchem sich eine Druckdifferenz p_b-p_a einstellt. Das Medium soll dabei bei der Temperatur T1 und dem Druck p_b flüssig und bei dem Druck p_a und der Temperatur T2 gasförmig sein. Das flüssige Medium verdampft beim Durchfließen von Reservoir 2, wodurch es dem Reservoir die Verdampfungswärme L entzieht. Das Reservoir 2 stellt also die kalte Seite da und gibt somit Wärme ab. Das Medium wird daraufhin vom Kompressor so adiabatisch komprimiert, dass es sich erwärmt, sich der Druck erhöht und in Reservoir 1 kondensiert und die Kondensationswärme L abgibt.

Für die reibungslose Funktion werden noch ein Reiniger, welcher die Flüssigkeit gasblasenfrei macht, und eine Steuervorrichtung für das Drosselventil, welche dafür sorgt, dass nur Gas in den Kompressor gelangt und keine Flüssigkeitsreste, benötigt. Diese Bauteile haben mit der theoretischen Arbeitsweise der Apparatur nichts zu tun, werden aber für eine gute Funktion benötigt.

4 Durchführung

Die Versuchsapparatur sieht schematisch folgendermaßen aus:

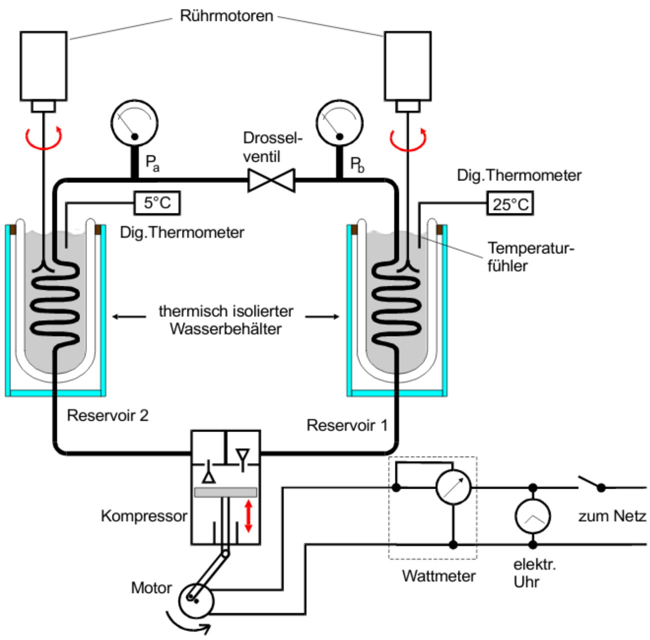


Abbildung 2: TU Dortmund.Versuchsanleitung zum Experiment V206 - Die Wärmepumpe Seite 197.

Vor Beginn sind die Anfangsdrücke und Temperaturen aufzunehmen. Daraufhin werden die beiden Reservoirs mit genau abgemessenen 4l Wasser befüllt und die Wärmekapazität $m_k g_k$=750$\frac{J}{K}$ notiert. Nun wird der Kompressor eingeschaltet und in Abständen von einer Minute die Temperaturen T_1 und T_2, die Drücke p_a und p_b, die Zeit und die Leistungsaufnahme des Kompressors von den Thermo- und Manometern beziehungsweise dem Wattmeter aufgenommen. Auf die abgelesenen Drücke muss jeweils immer noch 1 bar addiert werden. Die Messung wird abgebrochen, wenn die Temperatur T_1 einen Wert von 50°C übersteigt.

5 Messwerte/Auswertung

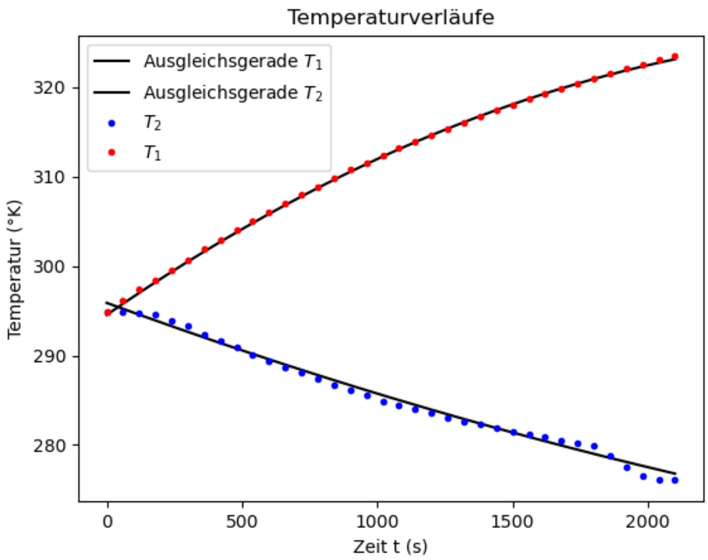
Zu Beginn der Auswertung werden in diesm Abschnitt alle gemessenen Werte in einer Tabelle dargestellt. Außerdem wurden hier die Temperaturen von °C in °K umgerechnet, da diese im weiteren Verlauf der Rechnung auch in dieser Einheit verwendet werden. Die Auswertung beschäftigt sich dann mit derBerechnung aller wichtigen Kenngrößen aus den gemessenen Größen unter Betrachtung des Gauß-Fehlers, der durch die Messungenauigkeiten bei der Durchführung des Versuchs entsteht und sich durch weitere Rechnungen fortpflanzt.

Tabelle 1: Gemessene Werte

Zeit t (s)	T_1 (°C)	p_b (bar)	T_2 (°C)	p_a (bar)	N (W)	T_1 (K)	T_2 (K)
0	21.7	4.0	21.7	4.1	120	294.85	294.85
60	23.0	5.0	21.7	3.2	120	296.15	294.85
120	24.3	5.5	21.6	3.4	120	297.45	294.75
180	25.3	6.0	21.5	3.5	120	298.45	294.65
240	26.4	6.0	20.8	3.5	120	299.55	293.95
300	27.5	6.0	20.1	3.4	120	300.65	293.25
360	28.8	6.5	19.2	3.3	120	301.95	292.35
420	29.7	6.5	18.5	3.2	120	302.85	291.65
480	30.9	7.0	17.7	3.2	120	304.05	290.85
540	31.9	7.0	16.9	3.0	120	305.05	290.05
600	32.9	7.0	16.2	3.0	120	306.05	289.35
660	33.9	7.5	15.5	2.9	120	307.05	288.65
720	34.8	7.5	14.9	2.8	120	307.95	288.05
780	35.7	8.0	14.2	2.8	120	308.85	287.35
840	36.7	8.0	13.6	2.7	120	309.85	286.75
900	37.6	8.0	13.0	2.6	120	310.75	286.15
960	38.4	8.5	12.4	2.6	120	311.55	285.55
1020	39.2	8.5	11.7	2.6	120	312.35	284.85
1080	40.0	9.0	11.3	2.5	120	313.15	284.45
1140	40.7	9.0	10.9	2.5	120	313.85	284.05
1200	41.4	9.0	10.4	2.4	120	314.55	283.55
1260	42.2	9.0	9.9	2.4	120	315.35	283.05
1320	42.9	9.5	9.5	2.4	120	316.05	282.65
1380	43.6	9.5	9.1	2.4	120	316.75	282.25
1440	44.3	10.0	8.7	2.4	120	317.45	281.85
1500	44.9	10.0	8.3	2.4	120	318.05	281.45
1560	45.5	10.0	8.0	2.3	120	318.05	281.15
1620	46.1	10.0	7.7	2.2	122	319.25	280.85
1680	46.7	10.5	7.4	2.2	122	319.85	280.55
1740	47.3	10.5	7.1	2.2	122	320.45	280.25
1800	47.8	10.75	6.8	2.2	122	320.95	279.95
1860	48.4	11.0	5.6	2.2	122	321.55	278.75
1920	48.9	11.0	4.3	2.2	122	322.05	277.45
1980	49.4	11.0	3.4	2.2	122	322.55	276.55
2040	49.9	11.0	3.0	2.2	122	323.05	276.15
2100	50.3	11.0	2.9	2.2	122	323.45	276.05

5.1 Aufgabe 5a) und 5b)

In dieser Aufgabe sollen die Temperaturverläufe dargestellt werden und dann mit Hilfe einer nicht linearen Ausgleichsrechnung approximiert werden. Dafür werden die Messwerte für die verschiedenen Temperaturen in Kelvin auf der x-Achse und die jewilige Zeit auf der y-Achse dargestellt. Außerdem werden die Graphen der Ausgleichsrechnungen noch in diesem Diagramm eingezeichnet.



Bestimmung der Parameter der Näherungsfunktionen: Eine nicht-lineare Ausgleichsrechnung in mycurvefit.com mittels der Funktion At^2+Bt+C ergibt die folgenden Parameter: Für T_1:

Parameter	$T_1(t) \pm$	Fehler
A	-3.47 $* 10^{-6} \pm$	$0.227 * 10^{-6}$
B	$0.0209 \pm$	$0.0475 * 10^{-2}$
C	$294.54 \pm$	0.1732

Und für T_2:(5)

Parameter	$T_2(t) \pm$	Fehler
A	$9.563 * 10^{-6} \pm$	$0.4694 * 10^{-6}$
B	-0.0111 $\pm$	$0.094 * 10^{-2}$
C	$295.88 \pm$	0.3465

5.2 Aufgabe 5c)

Bestimmung der Differentialquotienten: Nun werden aus ebendieser Funktion At^2+Bt+C die Differentialquotienten $\frac{dT_1}{dt}$ und $\frac{dT_2}{dt}$ zu vier verschiedenen Zeiten berechnet. Als Temperaturen wurden die Temperaturen nach 300s, 600s, 900s und 1200s gewählt. Der Differentialquotient ergibt sich dabei aus der Ableitung der Näherungsfunktion:

$$\frac{dT}{dt} = 2At + B$$

Mit den Parametern aus 5b) ergeben sich folgende Differentialquotienten und Gauß-Fehler nach (7)

Für T_1:

Zeit t (s)	T_1(K)	$\frac{dT_1}{dt}$	Gauß-Fehler
300	300.65	0.0188	$4.941 * 10^{-4}$
600	306.05	0.0167	$5.476 * 10^{-4}$
900	310.75	0.0147	$6.266 * 10^{-4}$
1200	314.55	0.0126	$7.228 * 10^{-4}$
Mittelwert		$1.57 * 10^{-2}$	
Standardabweichung		$2.6595 * 10^{-3}$	

Und für T_2:

Zeit t (s)	T_2(K)	$\frac{dT_2}{dt}$	Gauß-Fehler
300	293.25	$-1.05 * 10^{-2}$	$9.813 * 10^{-4}$
600	289.35	$-9.952 * 10^{-3}$	$1.096 * 10^{-3}$
900	286.15	$-9.3787 * 10^{-3}$	$1.264 * 10^{-3}$
1200	283.55	$-8.8099 * 10^{-3}$	$1.467 * 10^{-3}$
Mittelwert		$-9.6589 * 10^{-3}$	
Standardabweichung		$7.3057 * 10^{-4}$	

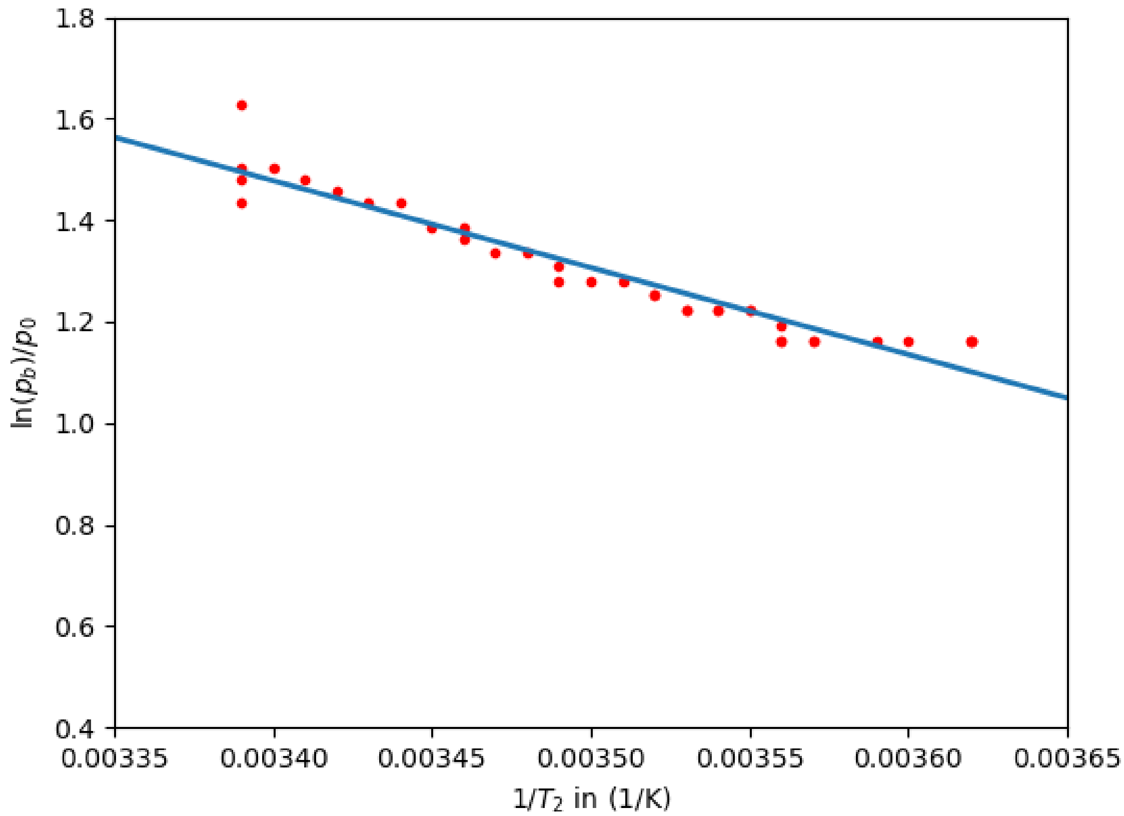
5.3 Aufgabe 5d)

Bestimmung der Güteziffer: Schließlich soll die empirische Güteziffer nach Gleichung (4) und die ideale nach Gleichung (2) bestimmt werden. Auch hier ergibt sich der Guaß-Fehler nach (7) Die Wärmekapazität der Apparatur beträgt $c_k m_k$=750J/K. Der $c_w m_w$-Wert ist die Wärmekapazität des Wassers beträgt 16736J/K und errechnet sich durch Multiplikation der spezifischen Wärmekapazität des Wassers von 4184J/kg*K mit der Masse von 4kg.

Zeit t	Güteziffer (empirisch)	Güteziffer (ideal)	Abweichung in %	Gauß Fehler
300	2.739	40.628	93.26	$7.035 * 10^{-2}$
600	2.433	18.326	86.72	$7.797 * 10^{-2}$
900	2.142	12.632	83.04	$8.922 * 10^{-2}$
1200	1.836	10.147	81.91	$1.029 * 10^{-1}$

5.4 Aufgabe 5e)

Im Folgenden soll, für verschiedene Temperaturen, der Massendurchsatz des Transportgases berechnet werden. Dafür wird die Verdampfungswärme benötigt, welche sich aus Messwerten un dem Umgebungsdruck bestimmen lässt. Dazu wird die Dampfdruck-Kurve erstellt. Die Steigung dieser Ausgleichsgerade wird bestimmt und damit die Verdampfungswärme, die zur Berechnung des Massendurchsatzes von Nöten ist.



Dieses Diagramm stellt die Dampfdruck-Kurve dar. Eine Lineare Regression mit der polyfit Funktion von numpy liefert die folgenden Werte für die Parameter der Ausgleichsfunktion:

Steigung ± Fehler	Y-Achsenabschnitt ± Fehler
-1713.315 ± 88.019	7.303 ± 0.308

Mit der Gleichung

$$L = -m * R,$$

wobei m die Steigung der Ausgleichsfunktion und R die universelle Gaskonstante ist, lässt sich die Verdampfungswärme L bestimmen als 118,2639 J/g. Für den Massendurchsatz dm/dt ergibt sich nach (5) mit dem Gauß-Fehler nach (7):

Zeit t (s)	dQ_2/dt	dm/dt (g/s)	Gauß-Fehler
300	-183.603	-1.5525	0.1654
600	-174.021	-1.4715	0.1787
900	-163.996	-1.3867	0.199
1200	-153.962	-1.3019	0.2269

5.5 Aufgabe 5f)

Nun wird für die vier Temperaturen die Kompressorleistung berechnet, wennn er zwischen den Dürcken arbeitet, die bei den verschiedenen Temperaturen herrschen. Um dies zu erreichen wird Gleichung (6) mit den Parametern ρ= 5,51 kg/m³ als Dichte des Mediums, κ= 1,14 dem Umgebungsdruck p_0 = 1 bar, der auf die gemessenen Drücke noch addiert werden muss. Der Gauß-Fehler berechnet sich mit 7.

Zeit t (s)	Leistung (W)
300	$1.1967 * 10^{-4}$
600	$1.6477 * 10^{-4}$
900	$2.0028 * 10^{-4}$
1200	$2.1723 * 10^{-4}$

6 Diskussion

6.1 Aufgabe 5g)

Die, im Vergleich zur idealen Wärmepumpe, relativ schlechte Güteziffer liegt an der nicht idealen Isolation. Deshalb geht Wärme während des Prozesses verloren. Dies hat zur Folge, dass der Prozess nicht reversibel ist. Außerdem funktioniert der Kompressor nicht adiabatisch.

7 Literatur

TU Dortmund.Versuchsanleitung zum Experiment V206 - Die Wärmepumpe.
TU Dortmund.Daten und Hinweise zum Experiment V206 - Die Wärmepumpe.
PeP et al. Toolbox Workshop. Material zu SciPy. Aufruf vom 14.11.2020.
URL: https://toolbox.pep-dortmund.org/files/archive/2020/scientific-python.html