V103 Biegung elastischer Staebe

Connor Magnus Böckmann
email: connormagnus.boeckmann@tu-dortmund.de

Tim Theissel
email: tim.theissel@tu-dortmund.de

15. Juni 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Im folgenden Versuch soll an Hand der Biegung von Metallstaeben die Materialkonstante des Elastizitaetsmoduls ermittelt werden. Dies wird jeweils mit einseitiger, sowie mit beidseitiger Auflage erfolgen.

2 Theoretische Grundlagen

Kraefte an einem Koerper fuehren zu Volumen- und Gestaltsveraenderungen. Bezogen auf eine Flaeche wird diese physikalische Groesse Spannung genannt. Unterschieden wird dabei in die Normalspannung σ und die parallel zur Oberflaeche stehende Tangentialspannung bzw. Schubspannung. Bei kleiner Gestaltaenderung $\Delta L/L$ so kann ein linearer Zusammenhang zwischen der angreifenden Spannung σ und der Deformation $\Delta L/L$ erkannt werden. Dieser Zusammenhang wird als Hooksches Gesetz bezeichnet:

$$\sigma = E\frac{\Delta L}{L}. \tag{1}$$

Der Faktor E wird als Elastizitaetsmoduls bezeichnet und stellt einen Proportionalitaetsfaktor dar. Hierbei handelt es sich um eine Materialkonstante. Dieses koennte durch Stauchung oder Dehnung ermittelt werden, was jedoch sehr praezise Messapparaturen voraussetzen wuerden, da ΔL dort sehr klein ist. Dieses Problem laesst sich umgehen, wenn statt einer Dehnung oder Stauchung, die Biegung betrachtet wird. Hier ist die Verformung bei gleicher Kraft und gleichem Stab deutlich groesser.

2.1 Biegung eines einseitig eingespannten Stabes

Bei der Biegung laesst sich die Verformung auf eine Dehnung zurueckfuehren, welche jedoch nicht ueber den Querschnitt des Stabes konstant ist.

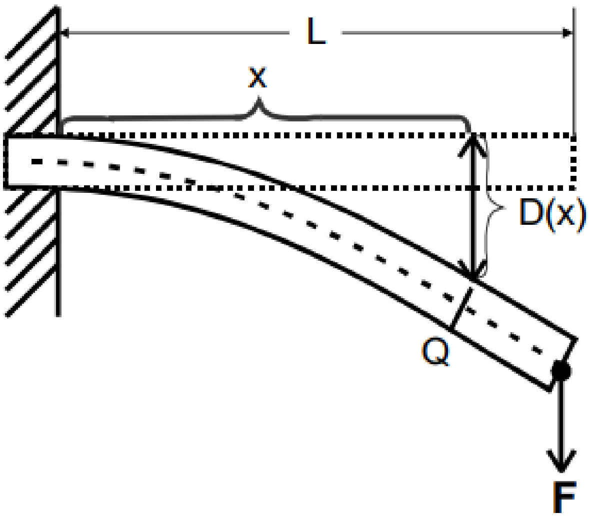

Abbildung 1: Biegung bei einseitiger Einspannung
Aus: Anleitung V103 Seite 107.

Die Formel der Durchbiegung D(x), also die Verschiebung des Oberflaechenpunktes an der Stelle x zwischen unbelastetem und belastetem Zustand, enthaelt das Elastizitaetsmodul. Somit kann dieses berechnet werden, wenn D(x) bekannt ist. Die aufgebrachte Kraft F uebt auf den Querschnitt Q mit Abstand x das Drehmoment M_F aus, welches den Querschnitt Q aus einer vertikalen Lage verdreht. Die oberen Schichten werden hierbei gedehnt und die unteren Schichten gestaucht. Durch die elastischen Eigenschaften des Stabes widersteht der Stab der Verformung durch die in ihm auftretenden Normalspannungen. Es stellt sich ein Gleichgewichtszustand ein. Bei dieser ist dann die bei der angelegten Kraft maximale Auslenkung erreicht. Die Schicht des Stabes in der weder Zugspannungen, noch Druckspannungen auftreten, welche also ihre vorherige Lage beibehaelt, nennt sich die neutrale Faser. Diese ist in 1 gestrichelt eingezeichnet. Durch die Zug- und Druckspannungen ensteht ein Drehmoment, welches durch Integration ueber den Querschnitt berechnet werden kann:

$$M_\sigma = \int_Q y\sigma(y)dq \tag{2}$$

Der Wert y ist dabei der Abstand von der neutralen Faser. Die Drehmomente gleichen sich bei der Deformation also aus ($M_F = M_\sigma$). Das Drehmoment M_F entspricht dabei $M_F = F(L-x)$, da die Kraft F am Hebel der Laenge L-x angreift. Nach Einsetzen des Hookschen Gesetzes fuer ein kleines Stabstueck der Laenge Δx, also $\sigma(y) = E\frac{\delta x}{\Delta x}$, und Ausnutzung der Geometrie fuer geringe Verkruemmungen des Stabes, ergibt sich die Momentengleichung zu

$$E\frac{d^2D}{dx^2}\int_Q y^2dq = F(L-x). \tag{3}$$

Der hier verwendete Ausdruck $\int_Q y^2dq$ wird, in Analogie zum Massentraegheitsmoment, Flaechentraegheitsmoment I genannt. Nach Durchfuehrung der Integration wird die Beziehung

$$D(x) = \frac{F}{2EI}(Lx^2 - \frac{x^3}{3}) \tag{4}$$

erhalten. Die Integrationskonstanten entfallen, da $D(0) = 0$, also der Stab horizontal eingespannt ist, und da $\frac{dD}{dx}(0) = 0$, also die Durchbiegung an der Einspannstelle null ist.

2.2 Biegung eines beidseitig eingespannten Stabes

Eine Biegung kann auch, wie in **??** zu sehen, erzeugt werden.

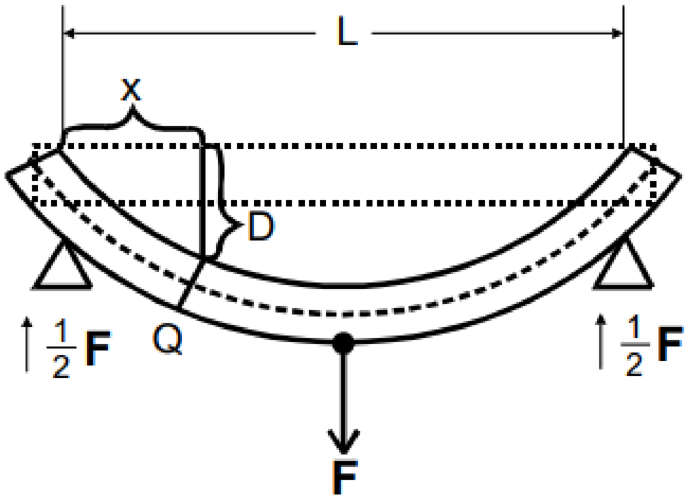

Abbildung 2: Biegung bei beidseitiger Einspannung
Aus: Anleitung V103 Seite 110.

Dabei greift die Kraft an der Stabmitte an. Die Momentengleichungen sind also

$$\frac{d^2D}{dx^2} = -\frac{F}{EI}\frac{x}{2},$$

bzw.

$$\frac{d^2D}{dx^2} = -\frac{F}{EI}(L - x).$$

Integration dieser Gleichung liefert

$$\frac{dD}{dx} = -\frac{F}{EI}\frac{x^2}{4} + C \text{ fuer bzw.}$$

$$\frac{dD}{dx} = -\frac{F}{2EI}(Lx - \frac{x^2}{2}) = C' \text{ fuer } \frac{L}{2}$$