

V354 Gekoppelte und erzwungene Schwingungen

Connor Magnus Böckmann

email: connormagnus.boeckmann@tu-dortmund.de

Tim Theissel

email: tim.theissel@tu-dortmund.de

11. Januar 2021

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	3
2	Theoretische Grundlagen	3
2.1	Differentialgleichung für eine gedämpfte Schwingung-Herleitung und Lösung	3
2.2	1. Fall: $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$	5
2.3	2. Fall: Aperiodische Daempfung fuer $\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$	5
2.4	Differentialgleichung fuer erzwungene Schwingungen	6
2.5	Impedanz eines Schwingkreises	8
2.6	Parallelschwingkreis als Zweipol	9

1 Zielsetzung

Das Ziel des Versuchs ist die Untersuchung eines RCL-Schwingkreises. Dabei soll der reale gedämpfte Schwingkreis anhand der Zeitabhängigkeit der Amplituden, des effektiven Widerstandes, dem aperiodischen Grenzfall und die Frequenzabhängigkeiten der Kondensatorspannung und ihrer Phase zur Erregerspannung.

2 Theoretische Grundlagen

Beim in diesem Versuch untersuchten Schwingkreis handelt es sich um einen RCL-Schwingkreis. Dieser enthält, verglichen mit dem RC-Kreis, neben dem Kondensator und dem Widerstand noch eine Spule mit Induktivität L . Dadurch ergibt sich ein zweiter Energiespeicher in Form der Spule. Diese ermöglicht ein Pendeln der Energie zwischen den beiden Energiespeichern, Spule und Kondensator. Das RCL-System schwingt also periodisch hin und her. Ohne Energieverbraucher, zum Beispiel den Widerstand, würde das System unendlich lange ungedämpft schwingen. Da der Widerstand aber elektrische Energie in Wärme umwandelt, geht darüber Energie verloren und der Schwingkreis wird gedämpft. Besonders von Interesse ist dabei das Zeitgesetz.

2.1 Differentialgleichung für eine gedämpfte Schwingung-Herleitung und Lösung

Vereinfacht lässt sich der RCL-Schwingkreis darstellen wie in Abb. 1. Daraus lässt sich erkennen, dass die zweite Kirchhoffsche Regel hier verwendet werden kann.

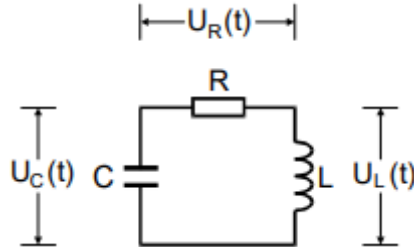


Abbildung 1: RCL-Schwingkreis

Mit der zweiten Kirchhoffschen Regel lässt sich die Spannung im System darstellen:

$$U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = 0$$

$$U_R(t) = R \cdot I(t)$$

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} \quad (Q(t) = \text{Ladung des Kondensators})$$

$$U_L(t) = L \frac{dI}{dt} \quad (\text{Induktionsgesetz})$$

Es folgt also daraus:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + Q \frac{Q}{C} = 0$$

Die gesuchte Schwingungsgleichung ergibt sich dann mit

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

aus der ersten Ableitung zu

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{RdI}{Ldt} + \frac{I}{LC} = 0 \quad (1)$$

Geloest wird diese lineare, homogene DGL mit dem Ansatz

$$\tau(t) = \xi e^{j\omega t}$$

Dabei sind ξ und ω komplexe Zahlen und $j = \sqrt{-1}$. Daraus erhaelt man

$$(-\omega^2 + j \frac{R}{L} \omega + \frac{1}{LC}) \xi e^{j\omega t}$$

Die DGL wird nun fuer beliebige ξ und beliebige t erfuehrt, solange ω die charakteristische Gleichung

$$\omega^2 - j \frac{R\omega}{L} - \frac{1}{LC} = 0$$

Daher muss ω einen der beiden Werte

$$\omega = j \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Alle Loesungen der DGL lassen sich dann ausdruecken als

$$\tau = \xi_1 e^{j\omega_1 t} + \xi_2 e^{j\omega_2 t}$$

Ausserdem werden die Abkuerzungen

$$\begin{aligned} 2\pi\mu &:= \frac{R}{2L} \\ 2\pi v &:= \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \end{aligned} \quad (2)$$

$\tau(t)$ laest sich dann schreiben als

$$\tau(t) = e^{-2\pi\mu t} (\xi_1 e^{j2\pi v t} + \xi_2 e^{-j2\pi v t}) \quad (3)$$

Die Loesung haengt nun massgebend davon ab, ob $\frac{1}{LC}$ groesser oder kleiner als $\frac{R^2}{4L^2}$. Dieser Umstand entscheide nun, ob v reell oder imaginaer ist. Daher ist eine Fallunterscheidung notwendig.

2.2 1. Fall: $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$

Unter diesen Bedingungen ist dann $\xi_1 = \bar{\xi}_2$, damit die Lösung $\tau(t)$ reell wird. Das lässt sich ausdrücken durch den Ansatz

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{1}{2}A_0 e^{j\eta} \\ \xi_2 &= \frac{1}{2}A_0 e^{-j\eta}\end{aligned}$$

Für $\tau(t)$ unter Benutzung der Euler-Identität gilt

$$\frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2} = \cos \varphi$$

Daher ergibt sich für den geklammerten Ausdruck aus 3 eine reine oszillatorische Funktion.

$$I(t) = A_0 e^{-2\pi\mu t} \cos(2\pi\nu t + \eta)$$

Diese Gleichung stellt eine gedämpfte Schwingung dar. Die Schwingung ist also harmonisch, geht aber mit fortschreitender Zeit exponentiell gegen null. Die Schwingungsdauer lässt sich dabei ausdrücken als:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$

Sie nähert sich dem Wert

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$

der ungedämpften Schwingung an, wenn $\frac{R^2}{4L^2}$ klein gegen $\frac{1}{LC}$. Die Amplitudenabnahmegeschwindigkeit wird charakterisiert durch $2\pi\mu = \frac{R}{2L}$. Die Amplitude geht dabei nach der Zeit

$$T_{ex} = \frac{1}{2\pi\mu} = 2\pi\sqrt{LC}$$

auf den e-ten Teil des Startwerts zurück. T_{ex} wird Abklingdauer genannt.

2.3 2. Fall: Aperiodische Dämpfung für $\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$

Die Lösung $I(t)$ enthält für diesen Fall keinen oszillatorischen Anteil mehr. Dieser Fall nennt sich aperiodische Dämpfung. Von besonderer Bedeutung ist der Spezialfall des aperiodischen Grenzfalls.

$$\frac{1}{LC} = \frac{R_a^2}{4L^2}$$

Dadurch ist $\nu = 0$ und $I(t) = A e^{-\frac{Rt}{2L}} = A e^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}}$. Der aperiodische Grenzfall stellt einen Fall ohne Ueberschwingen dar für den die Schwingung am schnellsten gegen null geht.

2.4 Differentialgleichung fuer erzwungene Schwingungen

Im Folgenden wird das schwingfaehige System durch eine aeussere, periodische Kraft ausgelenkt. Im Fall des RCL-Schwingkreises handelt es sich dabei um eine sinusfoermige Wechselspannung $u(t)$.

$$u(t) = U_0 e^{j\omega t}$$

Die in den vorigen Abschnitten beschriebene Differentialgleichung 1 nimmt hier somit die Form

$$L \frac{d\xi}{dt} + R\xi + \frac{Q}{C} = U_0 e^{j\omega t}$$

oder

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_0 e^{j\omega t} \quad (4)$$

an. $Q(t)$ stellt hierbei die Ladung auf dem Kondensator dar, weshalb damit die Spannung folgende ist:

$$u_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

Betrachtet wird im Folgenden vorallem die Amplitude der Kondensatorspannung $u_C(t)$ mit ihrem Phasenunterschied gegenueber der Erregerspannung $u(t)$. Besonderes Augenmerk wird dabei auf ihre Frequenzabhaengigkeit gelegt.

Der Ansatz ist

$$u_C(\omega, t) = \xi(\omega) e^{j\omega t} (\xi \text{ komplex}) \quad (5)$$

Nun wird 5 in 4 eingesetzt und die Bestimmungsgleichung $-LC\omega^2\xi + j\omega RC\xi + \xi = U_0$ nach ξ aufgeloesst.

$$\xi = \frac{U_0}{1 - LC\omega^2 + j\omega RC} = \frac{U_0(1 - LC\omega^2 - j\omega RC)}{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}$$

Der Betrag betraegt dann

$$|\xi| = \sqrt{Re^2(\xi) + Im^2(\xi)} = U_0 \sqrt{\frac{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}{((1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2)^2}} \quad (6)$$

mit der Phase

$$\tan \varphi(\omega) = \frac{Im(\xi)}{Re(\xi)} = \frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2}$$

beziehungsweise

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2}\right) \quad (7)$$

Der Betrag der Loesungsfunktion nach 5 entspricht dabei dem Betrag von ξ . Somit erhaelt man aus 6 als Ergebnis

$$U_C(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (8)$$

Durch diese Beziehung lässt sich also nun die gesuchte Frequenzabhängigkeit zwischen der Kondensatorspannung und der Frequenz ω . Dieser Zusammenhang nennt sich Resonanzkurve. Für $\omega \rightarrow \infty$ geht $U_C \rightarrow 0$ und für $\omega \rightarrow 0$ geht $U_C \rightarrow U_0$. Bei einer bestimmten Frequenz gibt es ein U_C , welches grösser als die ursprüngliche Erregeramplitude U_0 ist. Diese Frequenz nennt sich Resonanzfrequenz und das zugehörige Phänomen nennt sich Resonanz. Gegeben wird die Resonanzfrequenz durch

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$$

Besonderer Betrachtung wird der Fall der schwachen Dämpfung, also $\frac{R^2}{2L^2} \ll \frac{1}{LC}$, unterzogen. Dort nähert sich die Resonanzfrequenz nämlich der Kreisfrequenz des ungedämpften Schwingkreises an. Die Kondensatorspannung übertrifft die Erregerspannung um den Faktor $\frac{1}{\omega_0 RC}$, die so genannte Resonanzüberhöhung oder Güte q eines Schwingkreises.

$$U_{c,max} = \frac{1}{\omega_0 RC} U_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_0 \quad (9)$$

Es lässt sich bereits erkennen, dass die Kondensatorspannung für $R \rightarrow 0$ gegen ∞ geht. Es handelt sich dabei um die so genannte Resonanzkatastrophe. Ausserdem ist die Breite der Resonanzkurve in 8 ein Mass für die Schärfe eines Schwingkreises. Charakterisiert wird sie durch die Frequenzen bei denen U_C auf den $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -sten Bruchteil seines Maximums 9 abgefallen ist. Diese werden ω_+ und ω_- genannt und werden durch

$$U_{c,max} = \frac{1}{\omega_0 RC} U_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_0$$

gegeben. Unter Beachtung, dass $\frac{R^2}{L^2} \ll \omega_0^2$ ist, folgt für die Breite der Resonanzkurve

$$\omega_+ - \omega_- \approx \frac{R}{L}$$

Somit besteht zwischen der Güte q und der Breite der Resonanzkurve die folgende Beziehung:

$$q = \frac{\omega_0}{\omega_+ - \omega_-}$$

Das Verhalten ändert sich für starke Dämpfung, also $\frac{R^2}{2L^2} \gg \frac{1}{LC}$, grundlegend. Es existiert keine Frequenzüberhöhung mehr. Stattdessen geht U_C von U_0 aus mit wachsender Frequenz monoton gegen 0. Bei hinreichend hohen Frequenzen fällt U_C proportional zu $\frac{1}{\omega^2}$.

Im Folgenden soll ausserdem noch die Frequenzabhängigkeit der Phase zwischen Erreger- und Kondensatorspannung untersucht werden. Nach dem Ansatz aus 5 gibt Gleichung 7 den Zusammenhang zwischen φ und ω wieder. Gleichung 7 sagt dabei aus, dass bei kleinen Frequenzen Kondensator- und Erregerspannung praktisch in Phase sind. Im Gegensatz dazu verschiebt sich die Kondensatorspannung bei sehr grossen Frequenzen um π und hinkt dadurch der Erregerspannung hinterher.

2.5 Impedanz eines Schwingkreises

Ein RCL-Serienschwingkreis kann auch als ein Zweipol aufgefasst werden.

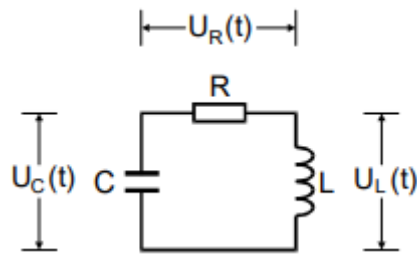


Abbildung 2: Serienschwingkreis als Zweipol

An den Enden des Zweipols lässt sich ein Widerstand feststellen. Dieser ist frequenzabhängig und wird Impedanz. Sie wird auf Grund der häufig vorhandenen Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung als komplexe Zahl definiert.

$$z = x + iy$$

Dabei sind x und y reelle Widerstände. Sie werden Blindwiderstand (Reaktanz) und Wirkwiderstand genannt. Der Betrag der Impedanz

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

nennt sich Scheinwiderstand. Die Darstellung der Impedanz $z(\omega)$ in der komplexen Zahlenebene wird Ortskurve genannt und lässt sich durch einen Vektor aus dem Ursprung darstellen. Die Länge des Vektors entspricht dem Scheinwiderstand. Der Winkel α zwischen dem Vektor und der reellen Achse ist genauso groß wie die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom im Serienschwingkreis als Zweipol.

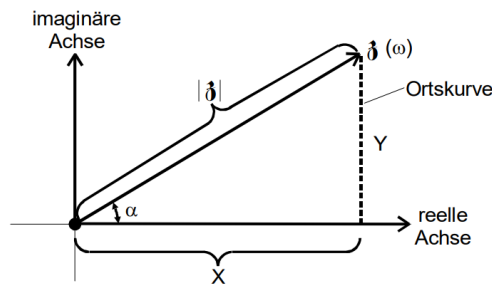


Abbildung 3: Darstellung der Impedanz des Serienschwingkreises als Zweipol in der komplexen Zahlenebene

Die Impedanz z errechnet sich nun folgendermassen mit den Widerstandsoperatoren

$$\begin{aligned} z_C &= -i \frac{1}{C\omega} \text{ (Widerstand der Kapazitaet)} \\ z_L &= iL\omega \text{ (Widerstand der Induktivitaet)} \\ z_R &= R_S \text{ (ohmscher Widerstand)} \end{aligned} \quad (10)$$

zu

$$z_S = R_S + i\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

x_S und y_S sind dann

$$\begin{aligned} x_S &= R_S \\ y_S &= iL\omega - \frac{1}{C\omega} \\ |z_S| &= \sqrt{R_S^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \end{aligned} \quad (11)$$

Die Frequenzunabhaengigkeit von x_S sorgt fuer eine Ortskurve, welche immer parallel zur imaginaeren Achse verlaeuft und an der Stelle R_S die reelle Achse schneidet. Der Scheinwiderstand erreicht auf Grund von 11 an der Stelle $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ sein Minimum R_S . Fuer $\omega \rightarrow 0$ und $\omega \rightarrow \infty$ geht der Widerstand gegen ∞ .

2.6 Parallelschwingkreis als Zweipol

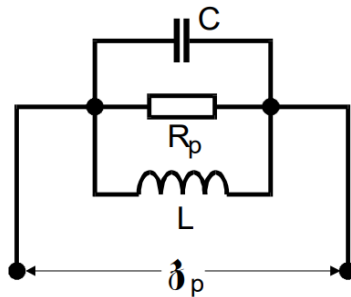


Abbildung 4: Parallelschwingkreis als Zweipol

Die Impedanz eines Parallelschwingkreises soll der Vollstaendigkeit halber auch noch kurz erwaeht werden. Diese errechnet sich dann zu

$$z_p = \frac{\frac{1}{R_p} + i\left(\frac{1}{\omega L} - C\omega\right)}{\frac{1}{R_p^2} + \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)^2} \quad (12)$$

und der Scheinwiderstand dementsprechend zu

$$|z_p| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R_p^2} + \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)^2}} \quad (13)$$

$|z_p|$ durchläuft also nun bei $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ein Maximum mit dem Wert R_p . $|z_p|$ geht fuer $\omega \rightarrow 0$ gegen ∞ . Die Abhaengigkeit des Scheinwiderstandes von der Frequenz laesst sich wie folgt darstellen:

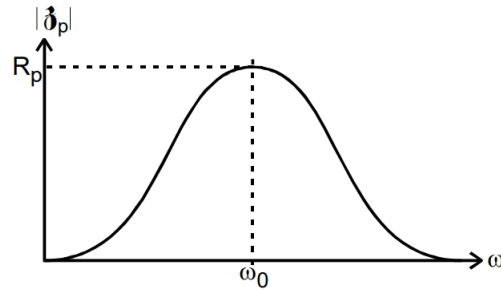


Abbildung 5: Abhaengigkeit des Scheinwiderstandes von der Frequenz im Parallelschwingkreis

Aus 12 ergibt sich fuer die Ortskurve des parallel geschalteten RCL-Schwingkreises ein Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2}R_p$. Der Mittelpunkt ist dabei der Punkt $(0, \frac{1}{2}R_p)$, siehe 6.

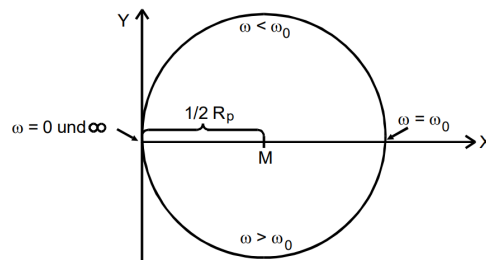


Abbildung 6: Ortskurve eines Parallelschwingkreis