V353 Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises

Connor Magnus Böckmann
email: connormagnus.boeckmann@tu-dortmund.de

Tim Theissel
email: tim.theissel@tu-dortmund.de

25. Mai 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

In diesem Versuch wird das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises untersucht. Es soll eine Relaxationsgleich hergeleitet und untersucht werden. Ausserdem wird die Funktion eines RC-Kreises als Integrator betrachtet.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Die Relaxationsgleichung

Relaxation bezeichnet das Zurueckkehren von einem angeregten Zustand in den Ausgangszustand unter nicht-oszillatorischen Umstaenden. Die Aenderung der Groesse A ist dabei in den meisten Faellen im Punkt t abhaengig von einer Abweichung von A zum Grundzustand A(∞). Dieser ist haeufig nur asymptotisch erreichbar.

$$\frac{dA}{dt} = c[A(t) - A(\infty)] \tag{1}$$

Aufloesen durch Integration dieser Gleichung liefert somit schliesslich:

$$A(t) = A(\infty) + [A(0) - A(\infty)]e^{ct} \tag{2}$$

Die hier betrachtete Relaxation ist gegeben durch den Auf- bzw. Entladevorgang eines Kondensator C ueber einen Widerstandes R.

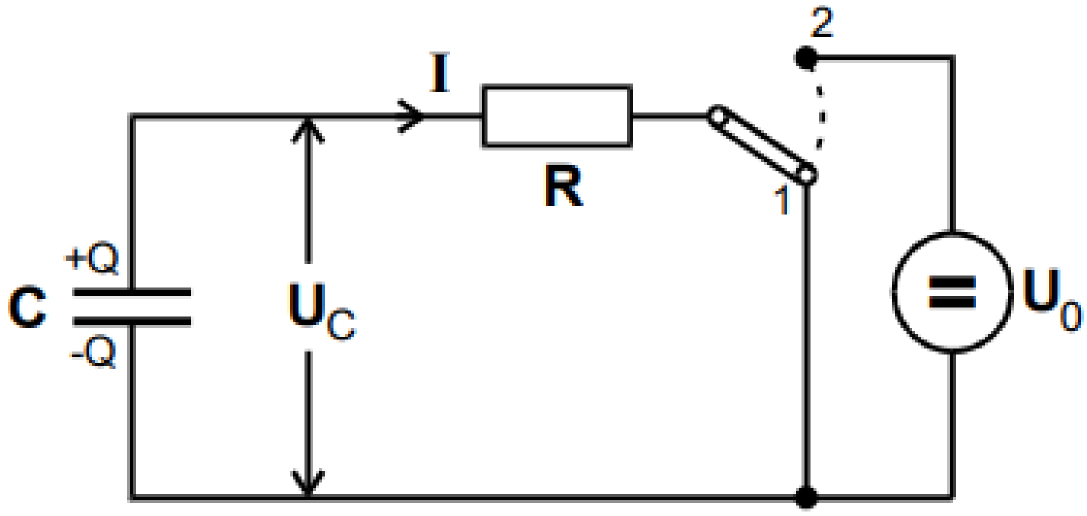


Abbildung 1: Schematische Darstellung des Aufbaus eines RC-Kreises
Aus: Anleitung V353 Seite 276

2.1.1 Entladevorgang

Mit einem Kondensator der Kapazitaet C und der sich darauf befindlichen Ladung Q, liegt zwischen den Platten die Spannung $U_C = \frac{Q}{C}$. Das ohmsche Gesetz liefert fuer diese

Spannung den Strom $I = \frac{U_C}{R}$ am Widerstand R. Dieser sorgt fuer einen Ladungsausgleich. Die Ladung aendert sich dabei mit Idt im Zeitintervall dt.

$$dQ = -Idt \tag{3}$$

Es ergibt sich die Differentialgleichung fuer den zeitlichen Verlauf der Ladung:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC}Q(t) \tag{4}$$

Mit der Randbedingung, dass $Q(\infty) = 0$ ist, ergibt sich fuer die Loesung

$$Q(t) = Q(0)e^{-\frac{t}{RC}} \tag{5}$$

2.1.2 Aufladevorgang

Auch der Aufladevorgang laesst sich dementsprechend beschreiben. Unterschiedlich sind dabei jedoch die Randbedingungen $Q(0) = 0$ und $Q(\infty) = CU_0$. Hierbei ist U_0 die angelegte Ladespannung. Der Aufladevorgang wird also durch die Gleichung

$$Q(t) = CU_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \tag{6}$$

beschreiben.
RC wird dabei Zeitkonstante genannt und ist ein Mass fuer die Geschwindigkeit der Relaxation des RC-Kreises. Waehrend des Zeitraums $\Delta T = RC$ veraendert sich die Ladung um den Faktor $\frac{Q(t=RC)}{Q(0)} = \frac{1}{e} \approx 0.368$.

2.2 Relaxation bei Anregung mit einer periodischen Auslenkung

Analog zur Mechanik laesst sich auch die Relaxation nach periodischer Auslenkung beschreiben. Wenn die Kreisfrequenz ω der Spannung U(t) mit $U(t) = U_0 cos(\omega t)$ gering genug ist, also $\omega << \frac{1}{RC}$, ist die Spannung $U_C(t)$ am Kondensator gleich $U(t)$. Bei Erhoehung der Frequenz der Anregungsspannung haengt das Auf- und Entladen jedoch immer weiter hinter der Anregung hinterher. Es stellt sich eine Phasenverschiebung ϕ zwischen den beiden Spannungen ein. Ausserdem wird die Amplitude A der Kondensatorspannung verringert.

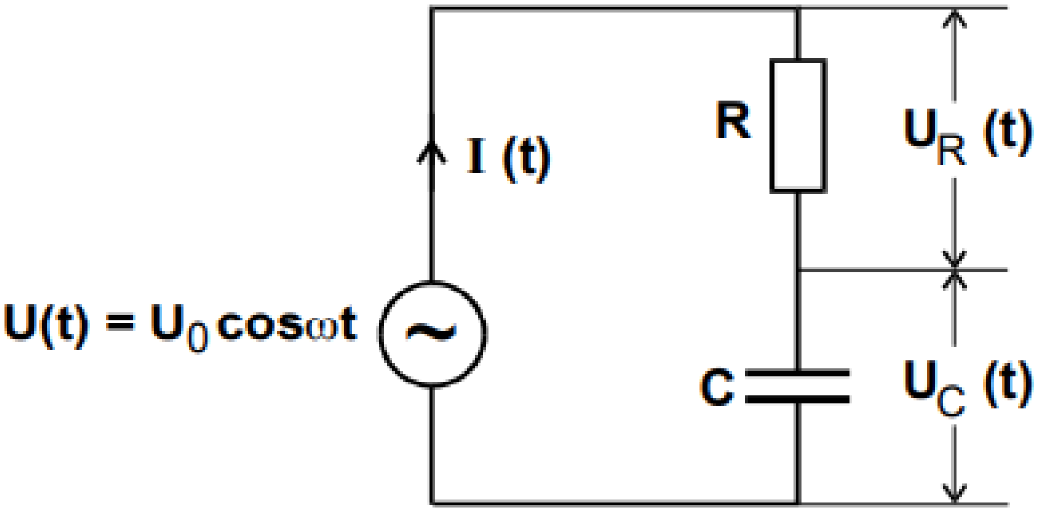


Abbildung 2: Schaltungsbeispiel mit periodischer Auslenkung
Aus: Anleitung V353 Seite 276

Es wird der Ansatz

$$U_C(t) = A(\omega)cos(\omega t + \phi(\omega)) \tag{7}$$

verwendet. Das zweite Kirchhoff'sche Gesetz liefert fuer den Stromkreis $U(t) = U_R(t) + U_C(t)$ bzw. $U_0 cos(\omega t) = I(t)R + A(\omega)cos(\omega t + \phi)$ in ausfuehrlicherer Schreibweise. Mit $I(t) = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dU_C}{dt}$ folgt

$$U_0 cos(\omega t) = -A\omega RCsin(\omega t + \phi) + A(\omega)cos(\omega t + \phi) \tag{8}$$

Da diese Gleichung fuer alle t gilt, folgt zum Beispiel fuer $\omega t = 2\pi$

$$0 = -\omega RCsin(\frac{\pi}{2} + \phi) + cos(\frac{\pi}{2} + \phi) \tag{9}$$

Es folgt fuer die Phasenverschiebung in Abhaengigkeit von der Frequenz:

$$\phi(\omega) = arctan(-\omega RC) \tag{10}$$

Fuer die Amplitude in Abhaengigkeit von der Frequenz stellt sich die Beziehung

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \tag{11}$$

Auf Grund ihrer Eigenchaften werden RC-Kreise als Tiefpaesse verwendet, da sie niedrige Frequenzen durchlassen und bei Frequenzen $\omega >> \frac{1}{RC}$ wird die Amplitude immer weiter heruntergeteilt.

2.3 RC-Kreis als Integrator

Unter bestimmten Vorraussetzungen kann der RC-Kreis als Integrator fungieren, also eine zeitlich veraenderliche Spannung U(t) zu integrieren. Die Spannung am Kondensator ist proportional zu $\int U(t)dt$, falls $\omega >> \frac{1}{RC}$. Wird in $U(t) = U_R(t) + U_C(t) = I(t) \cdot R + U_C(t)$ mit $I(t) = C\frac{dU_C}{dt}$ ersetzt, ergibt sich $U(t) = RC\frac{dU_C}{dt} + U_C(t)$. Schliesslich ergibt sich:

$$U_C(t) = \frac{1}{RC}\int_0^t U(t')\,dt' \tag{12}$$

3 Durchfuehrung

3.1 Ermittlung der Zeitkonstante

Zur Ermittlung der Zeitkonstante RC genuegt die in 3 dargestellte Schaltung.Beobachtet wird dabei die Spannung am Kondensator $U_C(t)$ in Abhaengigkeit von der Zeit. Wenn die angelegte Spannung von 0 unstetig auf ihren Maximalwert ansteigt, beginnt der Ladevorgang des Kondensators. Der Aufladevorgang endet, durchs Verharren auf dem Maximalwert der Spannung. Beim unstetigen Abfall in ihren Ausgangszustand beginnt der Entladeprozess, welcher so lange anhaelt, wie die Rechtecksspannung auf 0 bleibt.

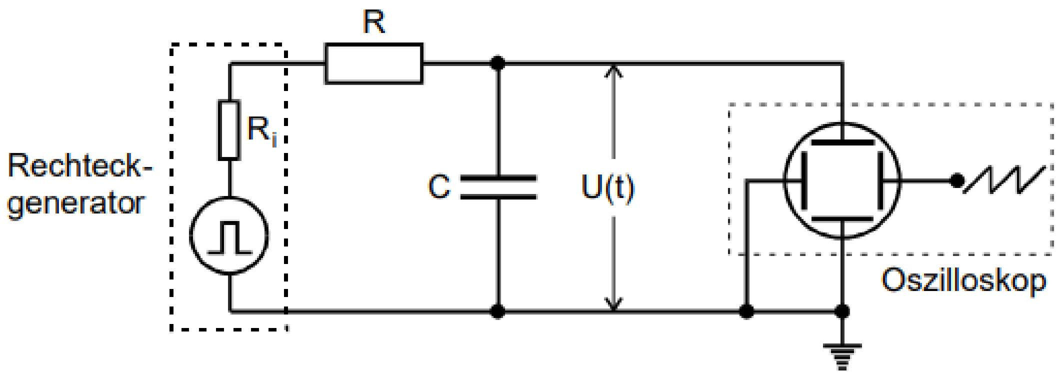


Abbildung 3: Schaltungsbeispiel zur Bestimmung der Zeitkonstante
Aus: Anleitung V353 Seite 281

Das Oszilloskop sollte dabei so eingestellt werden, dass der gesamte Auf- oder Entladeprozess zu sehen ist und moeglichst praezise abgelesen werden kann. Die Einstellung erfolgt ueber die Drehregler direkt am Oszilloskop.

3.2 Kondensatorspannung in Abhaengigkeit von der Frequenz

Zur Bestimmung der Kondensatorspannung in Abhaengigkeit von der Frequenz wird die in 4 dargestellte Zeichnung verwendet. Gemessen werden soll dabei die Kondensatorspannungsamplitude in Abhaengigkeit von der Frequenz bis 10000Hz.

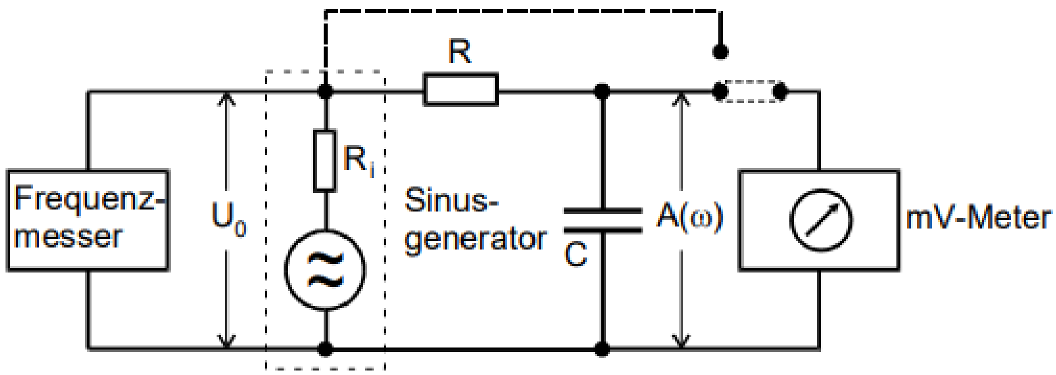


Abbildung 4: Schaltungsbeispiel zur Bestimmung der Frequenzabhaengigkeit
Aus: Anleitung V353 Seite 282

3.3 Bestimmung der Phasenverschiebung

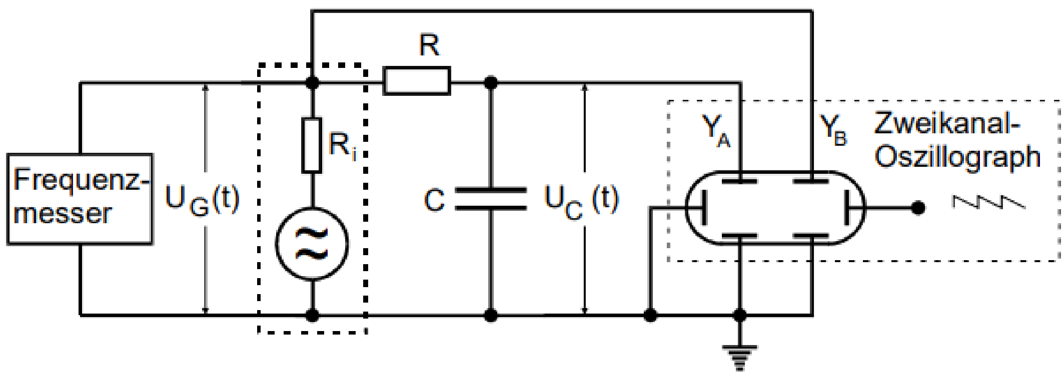


Abbildung 5: Schaltungsbeispiel zur Bestimmung der Phasenverschiebung
Aus: Anleitung V353 Seite 282

Diese Schaltung wird zur Bestimmung der Phasenverschiebung genutzt. Dabei gibt man die Kondensatorspannung $U_C(t)$ an den Y_B-Eingang und die Generatorspannung $U_G(t)$ an den Y_A-Eingang des Zwei-Eingang-Oszilloskops. Bei einer Phase $\phi > 0$, sieht das Bild auf dem Schirm in etwa aus wie in 6. Zu Messen sind hierbei die Zeiten a und b. Die Phase errechnet sich dann nach:

$$\phi = \frac{a}{b} \cdot 360 \tag{13}$$

$$\phi = \frac{a}{b} \cdot 2\pi \tag{14}$$

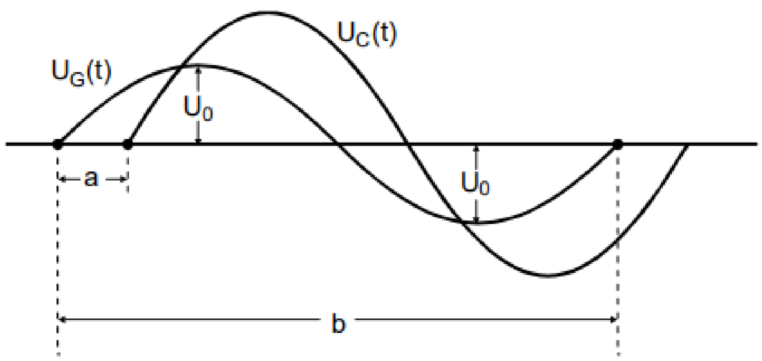
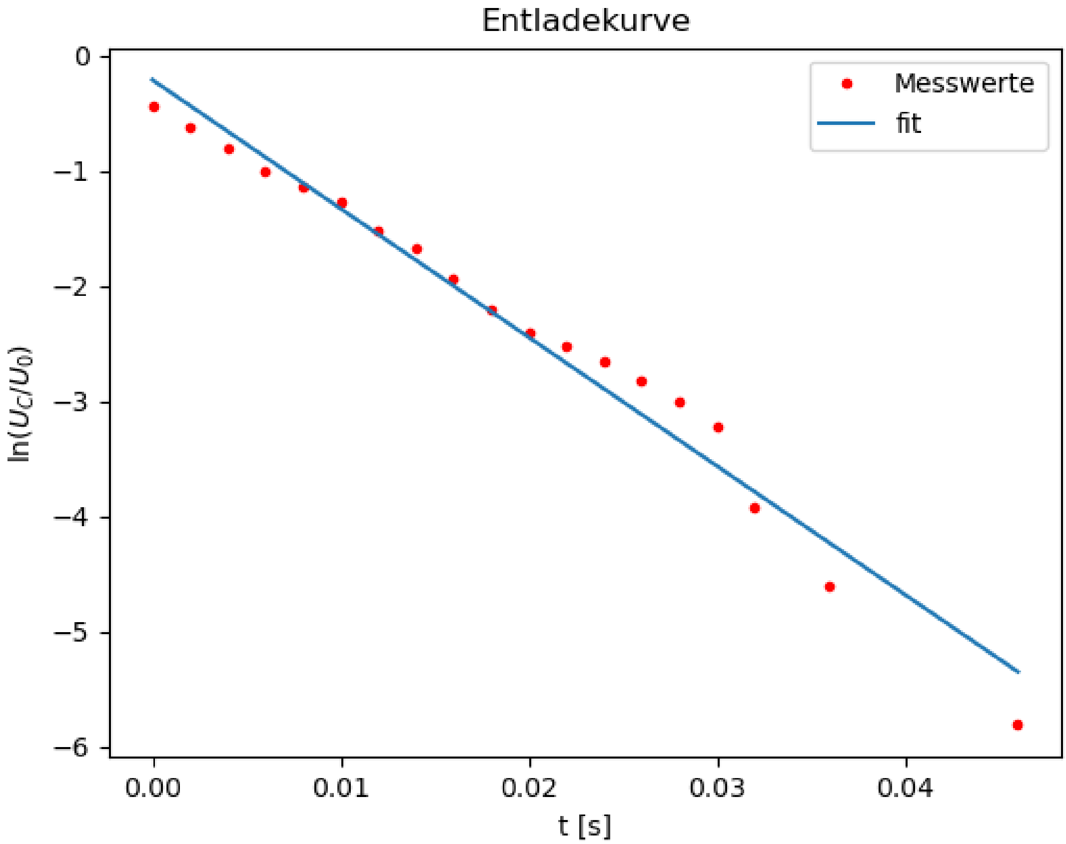


Abbildung 6: Beispielbild zur Messung der Phasenverschiebung
Aus: Anleitung V353 Seite 282

4 Auswertung

4.1 Bestimmung von RC anhand einer Entladekurve

Um RC anhand einer Entladekurve zu bestimmen, wurden am Oszilliskop die Werte in 1 abgelesen. Diese Werte sind auch in graphisch **??** dargestellt.



Anschließend wurde eine lineare Ausgleichsrechnung durchgeführt. Dafür wurde eine Formel der folgenden Form verwendet:

$$\ln(\frac{U_C}{U_0}) = -\frac{1}{RC} * t + n$$

Bei dieser Ausgleichsrechnung ergeben sich für folgende Werte für RC und n:

$$RC = 0.00895 \pm 0.00035$$

$$n = -0.2083 \pm 0.09702$$

4.2 Bestimmung von RC mithilfe der Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung

Eine weitere Möglichkeit die Zeitkonstante zu bestimmen ist die Frequenzabhängigkeit der Amplitude. Dazu wurde die Ampltude bei verschiedenen Frequenzen abgelesen und wird nun in einem halblogarithmischen Diagramm aufgetragen. Anschließend wird eine nicht lineare Ausgleichsrechnung durchgeführt. Die Formel für diese Ausgleichsrechnung lautet:

$$U_C(\nu) = \frac{a}{\sqrt{1 + (RC_2)^2 * \nu^2}}$$

Dabei ergibt die Ausgleichsrechnung für $RC_2 = 0.01453 \pm 0.00312$.

4.3 Bestimmung der Zeitkonstante durch die Phasenverschiebung

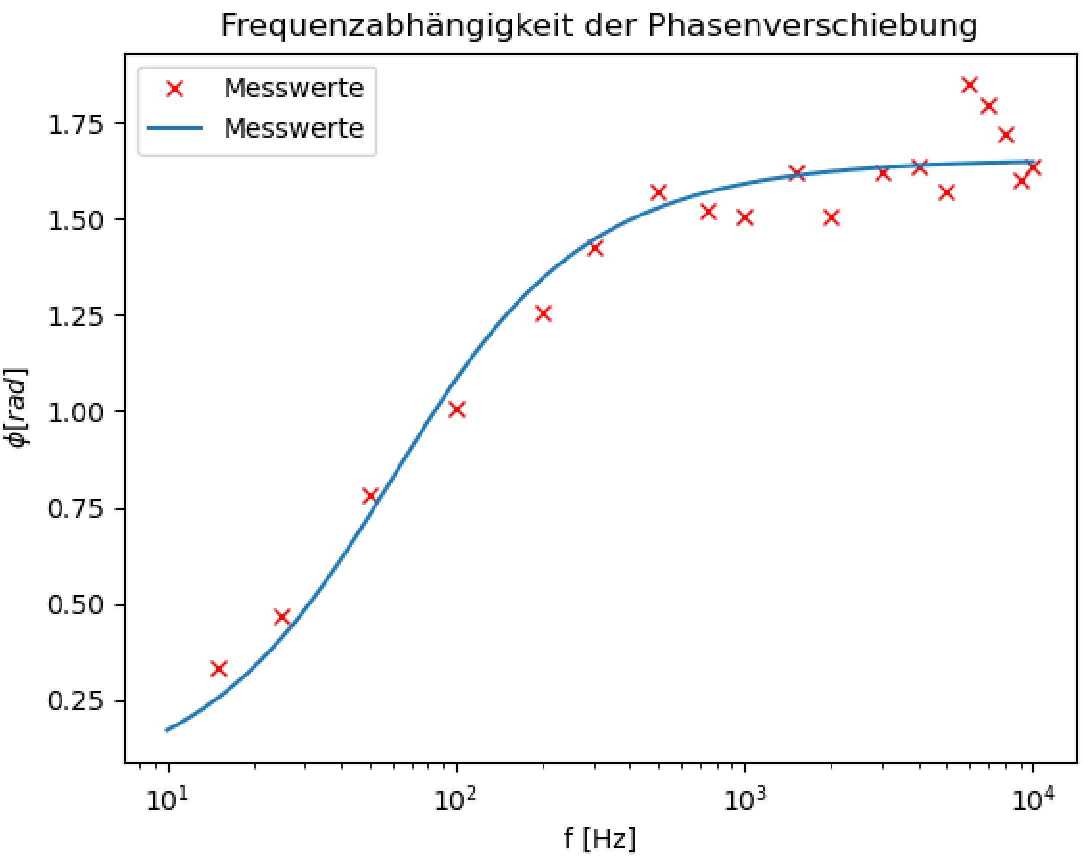
Für die dritte und letzte Methode der Bestimmung der Zeitkonstante wird die Phasenverschiebung verwendet. Dabei wurde der Laufzeitunterschied a gemessen. Mit der Formel:

$$\phi = a * \nu * 2 * \pi$$

wird dieser Laufzeitunterschied in die Phasenverschiebung umgerechnet. Anschließend kann erneut mit einer Ausgleichsrechnung die Zeitkonstnate RC bestimmt werden. Die Ausgleichsrechnung erfolgt mit der Formel:

$$\phi(\nu) = B * \arctan(RC_3 * \nu)$$

Diese Ausgleichsrechnung liefert $RC_3 = 0.01656 \pm 0.00174$.
Die Werte wurden außerdem nocheinmal graphisch veranschaulicht.



5 Diskussion

Auf drei verschieden Weisen wurde die gleiche Zeitkonstante bestimmt. Dabei sind die folgenden Ergebnisse entstanden.

$$RC_1 = 0.00895 \pm 0.00035$$
$$RC_2 = 0.01453 \pm 0.00312$$
$$RC_3 = 0.01656 \pm 0.00174$$

Dabei ist zu erkennen, dass RC_2 und RC_3 relativ nah beieinander liegen während RC_1 weiter von den anderen entfernt liegt. Konkreter weichen RC_2 und RC_3 um 12.25% voneinander ab. RC_1 weicht allerdings um 45.95% von RC_3 und um 38,40% von RC_2 ab. Dies ist damit zu erklären, dass für den Wert, der über die Entladekurve bestimmt worden ist, alle Werte vom Oszilloskop abgelesen werden mussten. Bei der Frequenzabhängigkeit und der Phasenverschiebung wurde immerhin mit der Frequenz gearbeitet. Diese lies sich sehr genau einstellen, sodass der Ablesefehler, welcher durch das Ablesen der Werte am Oszilloskop entsteht, in einem Wert weniger auftaucht. Der Am Oszilloskop entstehende

Ablesefehler ist dabei sehr groß. Dies liegt daran, dass am Oszilloskop keine feine Auflösung einstellbar ist. Außerdem ist die zu sehende Linie relativ breit. Dieser Umstande erschwert das Ablesen zusätzlich. Unter Betrachtung dieser Ableseungenauigkeit sind RC_2 und RC_3 gut bestimmt. Der Wert für RC_1 allerdings lässt nur die Vermutung auf einen systematischen Fehler zu. Es muss bei der Messung ein Fehler wie eine falsche Eichung des Oszilloskops entstanden sein, denn reine Ableseungenauigkeiten und andere gewöhnliche Messungenauigkeiten erklären eine so große Abweichung nicht.

6 Tabellen

Tabelle 1: Wertepaare aus der Entladekurve

Zeit [ms]	Spannung [V]
0	0.65
2	0.54
4	0.45
6	0.37
8	0.32
10	0.28
12	0.22
14	0.19
16	0.145
18	0.11
20	0.09
22	0.08
24	0.07
26	0.06
28	0.05
30	0.04
32	0.02
36	0.01
46	0.003