V504 Thermische Elektronen-Emission

Connor Magnus Böckmann
email: connormagnus.boeckmann@tu-dortmund.de

Tim Theissel
email: tim.theissel@tu-dortmund.de

15.Mai 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

In diesem Versuch sollen freie Elektronen an einer Metalloberflaeche erzeugt werden durch Erwaermung des Metalls. Dieser so genannte gluehelektrische Effekt soll auf seine Temperaturabhaengigkeit untersucht werden. Ermittelt werden soll dabei die Austrittsarbeit der Elektronen, eine Materialkonstante. Diese soll hier fuer Wolfram bestimmt werden. Notwendig ist dafuer eine Hochvakuumdiode. Die Beschreibung ihres Verhaltens ist ebenfalls Teil dieses Experiments.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Austrittsarbeit und die Energieverteilung der Leitungselektronen

Metalle sind sehr gute elektrische Leiter. Diese kommt von dem Umstand, dass quasi alle Atome ionisiert. Diese bilden ein periodisches raeumliches Gitter, welches von freigesetzten Elektronen umhuellt ist. Diese werden Leitungselektronen genannt und gehoeren zu keinem bestimmten Atom, sondern befinden sich in dem Kraftfeld aller Ionen. Das Gitterpotential kann grob genaehert als konstant angenommen werden und muss periodisch abhaengig vom Ort sein. Nah an den Gitterpunkten muss sie hohe positive Werte erreichen, weit entfernt aber wenig veraenderlich ist. Das Innere des Metalls kann als Gebiet positiven Potentials angenommen werden, welches um ϕ vom Aeusseren verschieden ist. Im Inneren koennen sich die Elektronen frei bewegen, muessen aber das Potential ξ ueberwinden, um den so genannten Potentialtopf zu verlassen.

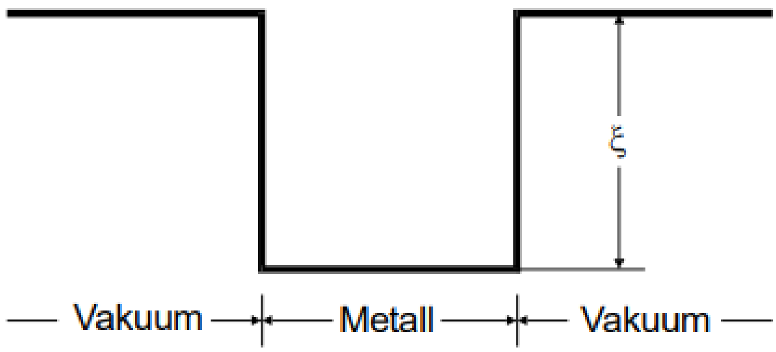


Abbildung 1: Potentialtopfmodell eines Metalls
Aus: Anleitung V504 Seite 93

Die aufzuwendende Energie nennt sich Austrittsarbeit $e_0\xi$ mit der Elektronenladung e_0. So tut sich die Frage auf, ob Elektronen das Metall spontan verlassen koennen.
Nach dem Pauli-Verbot fuer Fermionen duerfen keine zwei Elektronen in allen Quantenzahlen uebereinstimmen, was dazu fuehrt, dass ein Energieniveau nur von zwei Elektronen mit entgegengesetztem Spin besetzt werden kann. Dieser Umstand sorgt fuer eine endliche Energie der Elektronen am absoluten Nullpunkt. Diese Energie bei T=0 bezeichnet man

als Fermische Grenzenergie ζ. Bei Zimmertemperatur ist $\zeta >> kT$ fuer alle Metalle. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Elektron die Energie E besitzt im thermischen Gleichgewicht, ist gegeben durch die so genannte Fermi-Diracsche Verteilung. Sie hat die Funktion

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-\zeta}{kT}} + 1}$$

Der Verlauf dieser Funktion ist in 2 zu sehen. Das Elektron muss also die Energie $\zeta + e_0\phi$ haben, um das Metall zu verlassen. Mit der Naeherung

$$f(E) \approx e^{\frac{\zeta-E}{kT}} \tag{1}$$

kann fuer die Elektronen gerechnet werden, welche die Metalloberflaeche spontan verlassen koennen auf Grund ihrer hohen Energie.

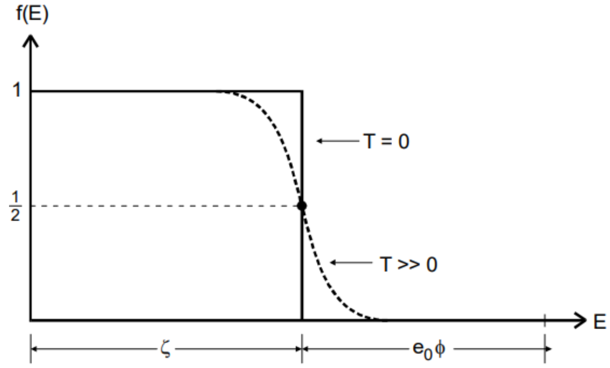


Abbildung 2: Verlauf der Fermi-Diracschen Verteilung bei T=0 (durchgezogene Linie) und bei T»0 (gestrichelte Linie)
Aus: Anleitung V504 Seite 94

2.2 Die Saettigungsstromdichte

Im Folgenden soll die Saettigungsstromdichte $j_s(T)$ bestimmt werden. Grundlage dafuer liefert Gleichung 1. Die Saettigungsstromdichte stellt die Anzahl der Elektronen, die pro Zeit- und Flaecheneinheit aus dem Metall austreten, dar. Es wird ein Koordinatensystem geschaffen, dessen Z-Achse senkrecht zur Oberflaeche des Metalls steht. Die Zahl der Elektronen $d\alpha$ die aus dem Volumenelement $dp_x dp_y dp_z$ des Impulsraumes pro Zeit- und Flaecheneinheit aus der Oberflaeche austreten, wird beschrieben durch:

$$d\alpha = v_z n(E) dp_x dp_y dp_z \tag{2}$$

Die Energie E laesst sich schreiben als:

$$E = \frac{1}{2m_0}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = \frac{m_{e,0}}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \tag{3}$$

Daraus ergibt sich mit 2:

$$d\alpha = \frac{\partial E}{\partial p_z} n(E) dp_x dp_y dp_z = n(E) dE dp_x dp_y \tag{4}$$

Fuer n(E) ergibt sich aufgrund des Volumens h^3 eines Quantenzustandes im sechsdimensionalen Phasenraum mit Hilfe von Gleichung 1:

$$n(E) = \frac{2}{h^3} f(E) \tag{5}$$

h=Planksches Wirkungsquantum

Damit ist mit 4 und 5:

$$d\alpha = \frac{2}{h^3} e^{\frac{\zeta - E}{kT}} dp_x dp_y dE$$

Von dieser Anzahl an Elektronen koennen nun schliesslich alle Elektronen die Metalloberflaeche verlassen, welche diese Ungleichung erfuellen, also in z-Richtung eine genuegend grosse Geschwindigkeit haben.

$$\frac{p_z^2}{2m_0} > \zeta + e_0\phi \tag{6}$$

Die also zu Anfang gewuenschte Stromdicht $j_s(T)$ wird erhalten, wenn alle Elektronen, welche 6 erfuellen, abzaehlt und mit der Elementarladung e_0 multipliziert.

$$\begin{aligned} j_s(T) &= \frac{2e_0}{h^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dp_x dp_y \int_{\zeta + e_0\phi}^{\infty} e^{\frac{\zeta - \left(\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m_0}\right)}{kT}} d\left(\frac{p_z^2}{2m_0}\right) \\ &= \frac{2e_0}{h^3} kT e^{\frac{-e_0\phi}{kT}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(p_x^2 + p_y^2)}{2m_0 kT}} dp_x dp_y \end{aligned}$$

Weil

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

folgt nun

$$j_s(T) = 4\pi \frac{e_0 m_0 k^2}{h^3} T^2 e^{\frac{-e_0\phi}{kT}} \tag{7}$$

Diese Gleichung wird **Richardson-Gleichung** genannt und ist fuer dieses Experiment von zentraler Bedeutung.

3 Die Hochvakuum-Diode

Der Saettigungsstrom einer Metalloberflaeche wird aussschliesslich unter Hochvakuum gemessen, um Wechselwirkungen der Elektronen mit der Luft zu verhindern. Diese Apparatur nennt sich Hochvakuumdiode und besteht aus dem genannten vakuumierten Glasgefaess, in das ein Draht (Gluehkathode) eingeschmolzen ist, welcher durch eine angelegte Gleichspannung erhitzt werden kann. Die freie Elektronenwolke wird durch eine gegenueberliegende Anode beziehungsweise das angelegte elektrische Feld abgesaugt.

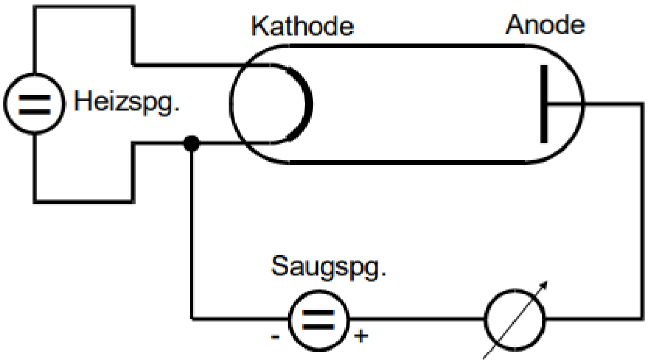


Abbildung 3: Schematischer Plan einer Hochvakuumdiode und ihrer Beschaltung
Aus: Anleitung V504 Seite 96

3.1 Langmuir-Schottkysche Raumladungsgesetz

Bei der Messung haengt der gemessene Anodenstrom bei gegebener Kathodentemperatur ausserdem von der Anodenspannung ab. Ist diese zu klein, erreichen einige emittierten Elektronen die Anode nicht. Erst durch ausreichend grosse Anodenspannung wird ein von der Spannung unabhaengiger Strom gemessen. Das ohmsche Gesetz ist hier aber nicht gültig, da die Elektronen in Richtung der Anode hin beschleunigt werden, was zu einer Verringerung der Raumladungsdicht ρ in Richtung der Anode fuehrt. Da die Stromdicht j an jeder Stelle konstant sein muss, stellt sich dieser Umstand ein.

$$j = -\rho \tag{8}$$

Die Feldstaerke des E-Feldes wird durch die Raumladungsdichte von der Anode abgeschirmt, was zur Folge hat, dass manche emittierte Elektronen nicht vom Anodenfeld erfasst werden. Daher ist der Anodenstrom kleiner als nach der Richardson-Gleichung (7) zu erwarten waere. Zur Bestimmung des quantitativen Umfangs dieser Beeinflussung im Raumladungsbereich, wird mit der Poisson-Gleichung gestartet.

$$\nabla V = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

Fuer diese Erlaeuterungen seien sowohl die Anode, als auch die Kathode unendlich ausgedehnte Platten, welche den konstanten Abstand a von einander haben. Dafuer hat die Poisson-Gleichung die Formulierung

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0} \tag{9}$$

Dies laesst sich mit 8 vereinfachen:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{j}{\epsilon_0 v(x)} \tag{10}$$

Nun wird die Geschwindigkeit v(x) mit Hilfe der Energie $e_0 V = \frac{m_0}{2} v^2$ substituiert:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{j}{\epsilon_0 \sqrt{2e_0 \frac{V}{m_0}}} \tag{11}$$

Bei Integration dieses Ausdrucks ergibt sich

$$\sqrt[4]{V^3(x)} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{4j}{\epsilon_0 \sqrt{\frac{2e_0}{m_0}}}} x \tag{12}$$

Abzulesen ist hier, dass das Potential nicht in linearem Zusammenhang mit dem Abstand x steht, sondern einem $\sqrt[3]{x^4}$-Gesetz folgt. Die nach $\vec{E} = -\nabla V$ aus dem Potential zu berechnende Feldstaerke, ist proportional zu $x^{\frac{1}{3}}$. Bei Erreichen der Anode, also $x = a$ hat E den Wert $\frac{4V(a)}{3a}$. Die Raumladungsdicht ρ folgt letztlich einem $x^{-\frac{2}{3}}$-Gesetz. Veranschaulicht wird dies in 4. Ausserdem laesst sich der Zusammenhang aus Stromdicht j und Anodenspannung V in 12 ablesen.

$$j = \frac{4}{9}\epsilon_0 \sqrt{\frac{2e_0}{m_0}} \frac{V^{\frac{3}{2}}}{a^2} \tag{13}$$

Diese Gleichung nennt sich **Langmuir-Schottkysches Raumladungsgesetz** und beinhaltet, dass j mit $V^{\frac{3}{2}}$ ansteigt, nicht wie beim ohmschen Gesetz proportional zu V. Der Bereich in dem dieses Gesetz gueltig ist nennt sich **Raumladungsgebiet**.

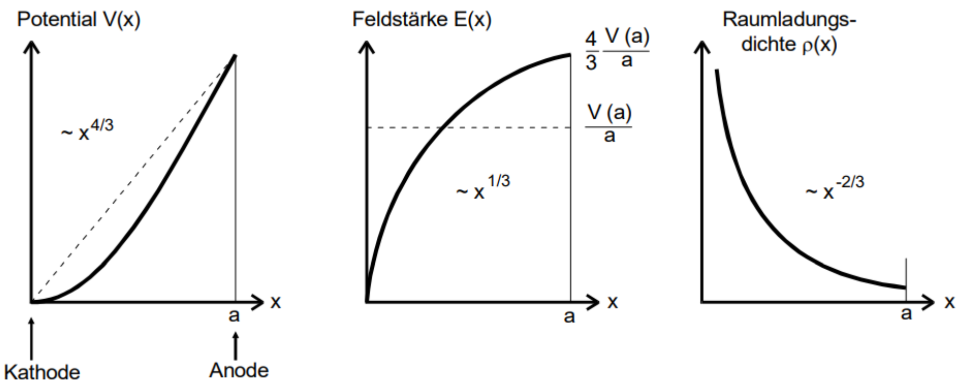


Abbildung 4: Ortsabhaengigkeiten des Potentials V, der Feldstaerke E und der Raumladungsdichte ρim Raumladungsgebiet
Aus: Anleitung V504 Seite 98

3.2 Das Anlaufstromgebiet

Aus der Gleichung des Langmuir-Schottkyschen Raumladungsgesetzes 13 laesst sich erkennen, dass $j = 0$ ist, wenn $V = 0$ ist. Dem ist aber in der Realitaet nicht so und es laesst sich ein geringer Anodenstrom messen. Das ruehrt von der Eigengeschwindigkeit der

Elektronen beim Verlassen der Metalloberflaeche her. Nach der Fermi-Dirac-Verteilung gibt es eine gewisse Anzahl an Elektronen, dessen Energie E gross genug ist, um das Metall zu verlassen. Der Energieueberschuss ist dann als kinetische Energie der Elektronen vorhanden.

$$\Delta E = E - (\zeta + e_{0\phi}) \tag{14}$$

Da sie mit dieser Energie auch gegen ein geringes Gegenfeld anlaufen koennen, nennt sich dieser Anlaufstrom. Das Anodenmaterial besitzt dabei meist eine groessere Austrittsarbeit $e_0\phi_A$ als das Kathodenmaterial $e_0\phi_K$. Durch die leitende Verbindung von Kathode und Anode ausserhalb der Diode, werden die Fermi-Oberflaechen auf die selbe Hoehe gebracht, jedoch bei Anlegen eines aeusseren Potentials V um e_0V gegeneinander verschoben. Um also die Anode zu erreichen muss die Elektronenenergie groesser als $e_0\phi_A + e_0V$ sein. Die Abhaengigkeit der Anlaufstromstaerke vom aeusseren Potential ist folgender Natur:

$$j(V) = j_0 e^{-\frac{e_0\phi_A + e_0V}{kT}} = const e^{-\frac{e_0V}{kT}} \tag{15}$$

4 Kennlinie einer Hochvakuumdiode

Als Kennlinie der Hochvakuumdiode bezeichnet man den Zusammenhang von Stromdichte j bzw. dem Anodenstrom I_A und dem von Aussen angelegten Potential. Nach den bereits erlaeuterten Umstaenden laesst sich die Kennlinie in drei Bereiche teilen: Anlaufstrom-, Raumladungs- und Saettigungsstromgebiet.
Ersteres wird durch den exponentiellen Zusammenhang von I und V bezeichnet und ist im Bereich $V < 0$. Daraufhin folgt das Raumladungsgebiet, wo eine $\sqrt{V^3}$-Abhaengigkeit beobachtet werden kann. Darueber hinaus naehert sich der Anodenstrom einem Saettigungswert asymptotischen an. Das Raumladungsgebiet wird vom Saettigungsstromgebiet abgeloest. Typischerweise sieht eine Kennlinie wie in Abbildung 5 dargestellt aus.

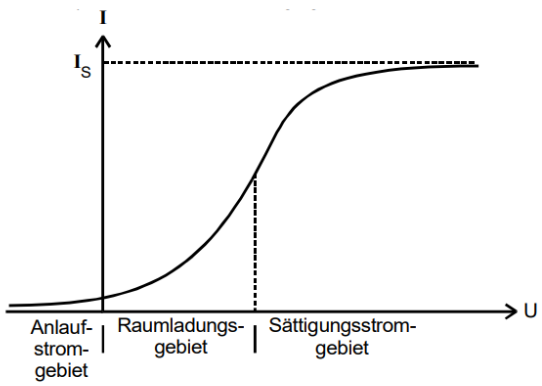


Abbildung 5: Typische Kennlinie einer Hochvakuumdiode
Aus: Anleitung V504 Seite 100

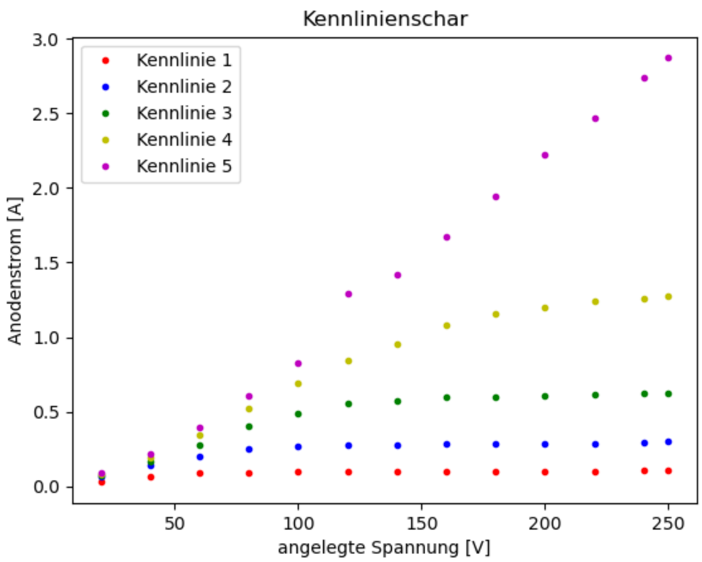
5 Auswertung

5.1 Sättigungsstrom

Um den Sättigungsstrom zu bestimmen wird die Kennlinie der Hochvakuumdiode betrachtet. Es wird also der Anodenstrom gegen die angelegte Spannung geplottet. Dafür wurden bei verschiedenen Heizspannungen Wertepaare, bestehend aus einem Wert für den Anodenstrom und einem für die angelegte Spannung, genommen. Das Sättigungsstromgebiet ist dann das Gebiet, in dem die Steigung der Kennlinie kleiner wird. Die Kennlinie verläuft dann irgendwann asymptotisch zum Sättigungsstrom.
Die Sättigungsströme sind nachfolgend in einer Tabelle dargestellt. Sie können aus den Graphen für die Kennlinien abgeschätzt werden.

Heizstrom [A]	Sättigungsstrom [mA]
2	0.11
2.1	0.3
2.2	0.63
2.3	1.3
2.5	3.2

Tabelle 1: Sättigungsströme bei verschiedenen Heizströmen

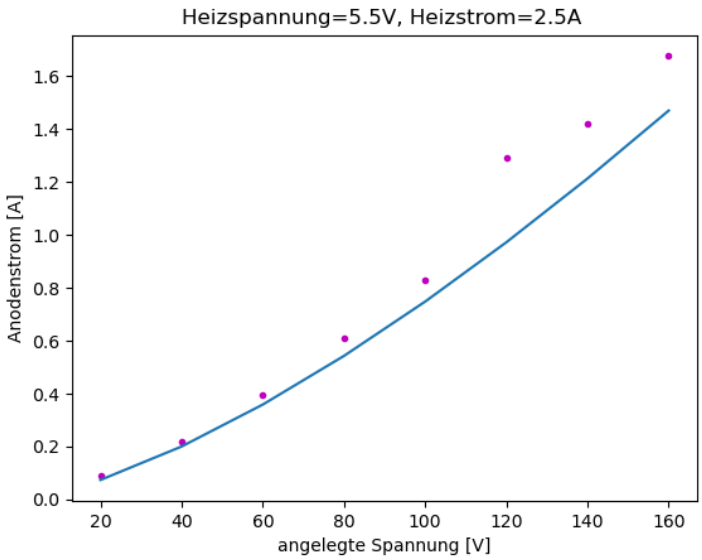


5.2 Exponent des Langmuir-Schottkyschen Raumladungsgesetzes

Zur Bestimmung des Exponenten wird die Kennlinie bei maximaler Heizleistung betrachtet. Diese Kennlinie bildet das gesamte Raumladungsgebiet ab ohne am ende bis in das

Sättigungsgebiet vorzudringen. Deshalb kann zur Berstimmung des Exponenten einfach ein fit mit der Formel des Langmuir-Schottkyschen Raumladungsgesetzes 12(LS-Gesetz) verwendet werden. Dabei werden der Einachheit halber alle konstanten Faktoren zu einem (b) zusammengefasst. Es ensteht folgende Gleichung für den fit:

$$y = b * V^a$$



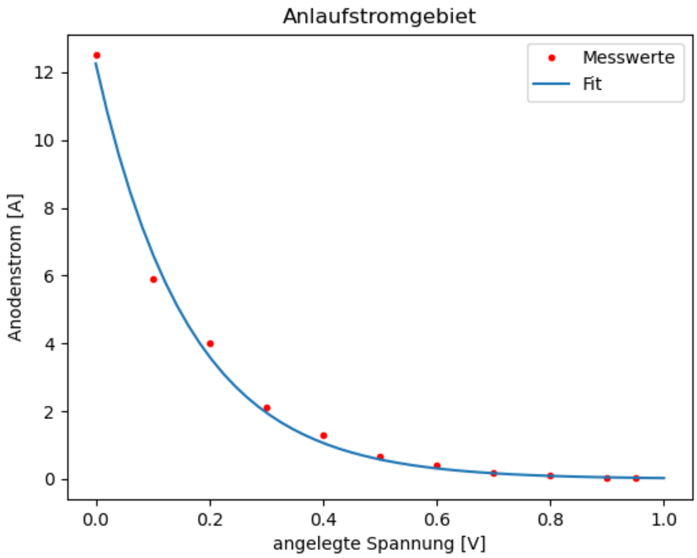
Diese Ausgleichsrechnung liefert als Exponenten für das LS-Gesetz a = 1.437±0.098.

5.3 Anlaufstromgebiet und Kathodentemperatur

Für das Anlaufstromgebiet wurde die angelegte Spannung umgepolt. Dann wird die angelegte Spannung langsam erhöht und der Strom wird gemessen. Wenn diese Werte in einem Diagramm aufgetragen werden kann durch eine Ausgleichsrechnung mit:

$$j(V) = a * exp\left(-\frac{e_0 V}{kT}\right)$$

die Kathodentemperatur bestimmt werden. Dabei ist e_0 die Elementarladung, k die Boltzmann-Konstante, V die spannung und T der zu bestimmende Parameter, die Kathodentemperatur. Es entsteht folgender Graph.



Die Ausgleichsrechnung liefert eine Temperatur von 1900.685±85.927 K.

5.4 Kathodentemperaturen aus Heizleistung

Die Formel für die Temperatur abhängig von der Heizleistung lautet:

$$T = \sqrt[4]{\frac{I_f U_f - N_{WL}}{f \eta \sigma}}$$

Dabei ist N_{WL} eine Schätzung für die Wärmeleitung und hat den Wert (0.95±0.05)W, $\sigma = 5.7 \cdot 10^{-12} \frac{W}{cm^2 K^4}$ ist die Stefan-Boltzmannsche Strahlungskonstante, $\eta = 0.28$ ist der Emissionsgrad der Oberfläche und f = 0.35cm^2 ist die Kathodenoberfläche. Eine Rechnung ergibt folgende Werte für die Kathodentemperaturen:

Heizstrom [A]	Kathodentemperatur [K]
2	1884.82±3.34
2.1	1937.40±3.08
2.2	2000.69±2.79
2.3	2061.57±2.55
2.5	2187.90±2.14

Tabelle 2: Kathodentemperaturen

5.5 Austrittsarbeit

Die Austrittsarbeit lässt sich mit der Richardson-Gleichung berechnen, indem diese wie folgt umgestellt wird.

$$W = \frac{-kT}{e_0} \ln\left(\frac{h^3 I}{4\pi e_0 m_0 k^2 T^2}\right)$$

Die Ergebnisse lauten:

Kathodentemperatur [K]	Austrittsarbeit [eV]
1884.82±3.34	4.61±0.009
1937.40±3.08	4.74±0.008
2000.69±2.79	4.90±0.007
2061.57±2.55	5.05±0.007
2187.90±2.14	5.36±0.006
Mittelwert	4.932±0.007

Tabelle 3: Austrittsarbeit

6 Diskussion

Bei diesem Versuch gab es ein paar Schwierigkeiten. Eine davon war beispielsweise ein Nanovoltmeter, welches so empfindlich war, dass kleinste Bewegungen oder Vibrationen in der Nähe einen Ausschlag verursachten.

6.1 Langmuir-Schottkysches Gesetz

Ab ungefähr 160V ist ein Wendepunkt in dem Graphen zu erkennen, deshalb ist der Bereich für die Gültigkeit des LS-Gesetzes dort begrenzt. Die Ausgleichsrechnugn liefert einen Wert der mit 1.437 sehr nah an den tatsächlichen 1.5 liegt. Die Abweichung lässt sich erklären durch gängige Messungenauigkeiten und einen zusätlichen Fehler, der durch graphisches Ablesen entsteht. Unter dieser Betrachtung liegt der berechnete Wert im akzeptablen Bereich. Der Fehler liegt hier nämlich gerade mal bei 4.2%.

6.2 Kathodentemperaturen

Die Kathodentemperaturen liegen alle insofern in realistischen Bereichen, dass sie den Schmelzpunkt von Wolfram nicht übersteigen. Allerdings ist zwischen Methoden der Berechnung der Kathodentemperaturen ein Unterschied zu erkennen. Bei der Kathodentemperatur bei maximaler Heizleistung ist ein Unterschied von fast 200K zu erkennen. Auch die entstehende Unsicherheit ist bei der ersten Methode geringer. Dies liegt vermutlich daran, dass bei der ersten Methode der Bestimmung der Kathodentemperatur diese über einen rechnerischen Ansatz bestimmt wurden. Es gibt zwar Ungenauigkeiten bei den benötigten Messwerten allerdings sind Rechnungen bis auf die Fortpflanzung des Fehlers exakt. Bei der zweiten Methode ist die Kathodentemperatur auch noch abhängig von einer Schätzung und dann wird durch weitere Rechnung noch ein Messfehler durchgezogen. Dies könnte die hohe Abweichung erklären.

6.3 Austrittsarbeit

Die Austrittsarbeit von Wolfram beträgt ungefähr 4.5eV. Der berechnete Wert liegt bei 4.932 ± 0.007 eV. Damit ergibt sich eine Abweichung von 9.6%. Das ist eine Abweichung die durch die bereits beschriebene Abweichung der Kathodentemperatur zu erklären ist. Der bereits entstandene Fehler pflanzt sich hier weiter fort. Unter diesen Umständen sind knapp 10% Abweichung ein Wert, der gut erklärbar und damit nicht außergewöhnlich ist.