**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»**

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

**Лабораторная работа №6**

По Вычислительной математике

Вариант №9

Выполнил:

Ступин Тимур Русланович

Группа № P3108

Поток № 1.3

Преподаватель:

Санкт-Петербург 2025

**Содержание**

# 1 Цель работы

Решить задачу Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений численными методами

# 2 Порядок выполнения работы

## 2.1 Программная реализация задачи

### 2.1.1 Листинг программы

```
def euler_method(f, x, y0):
    n = len(x)
    y = [y0]
    for i in range(1, n):
        h = x[i] - x[i - 1]
        y.append(y[i - 1] + h * f(x[i - 1], y[i - 1]))
    return y


def improved_euler_method(f, x, y0):
    n = len(x)
    y = [y0]
    for i in range(1, n):
        h = x[i] - x[i - 1]
        y.append(y[i - 1] + (h / 2) * (f(x[i - 1], y[i - 1]) + f(x[i - 1]
        ↪  + h, y[i - 1] + h * f(x[i - 1], y[i - 1]))))
    return y


def milne_method(f, x, y0, eps):
    n = len(x)
    y = fourth_order_runge_kutta_method(f, x[:4], y0)

    for i in range(4, n):
        h = x[i] - x[i - 1]
        y_pred = y[i - 4] + (4 * h / 3) * (
                2 * f(x[i - 3], y[i - 3]) - f(x[i - 2], y[i - 2]) + 2 *
                ↪  f(x[i - 1], y[i - 1]))

        iterations = 0
        while True:
            if iterations == MAX_ITERATIONS:
                raise Exception(f"Достигнуто максимальное количество
                ↪  итераций")
            iterations += 1
            y_corr = y[i - 2] + (h / 3) * (f(x[i - 2], y[i - 2]) + 4 *
            ↪  f(x[i - 1], y[i - 1]) + f(x[i], y_pred))
```

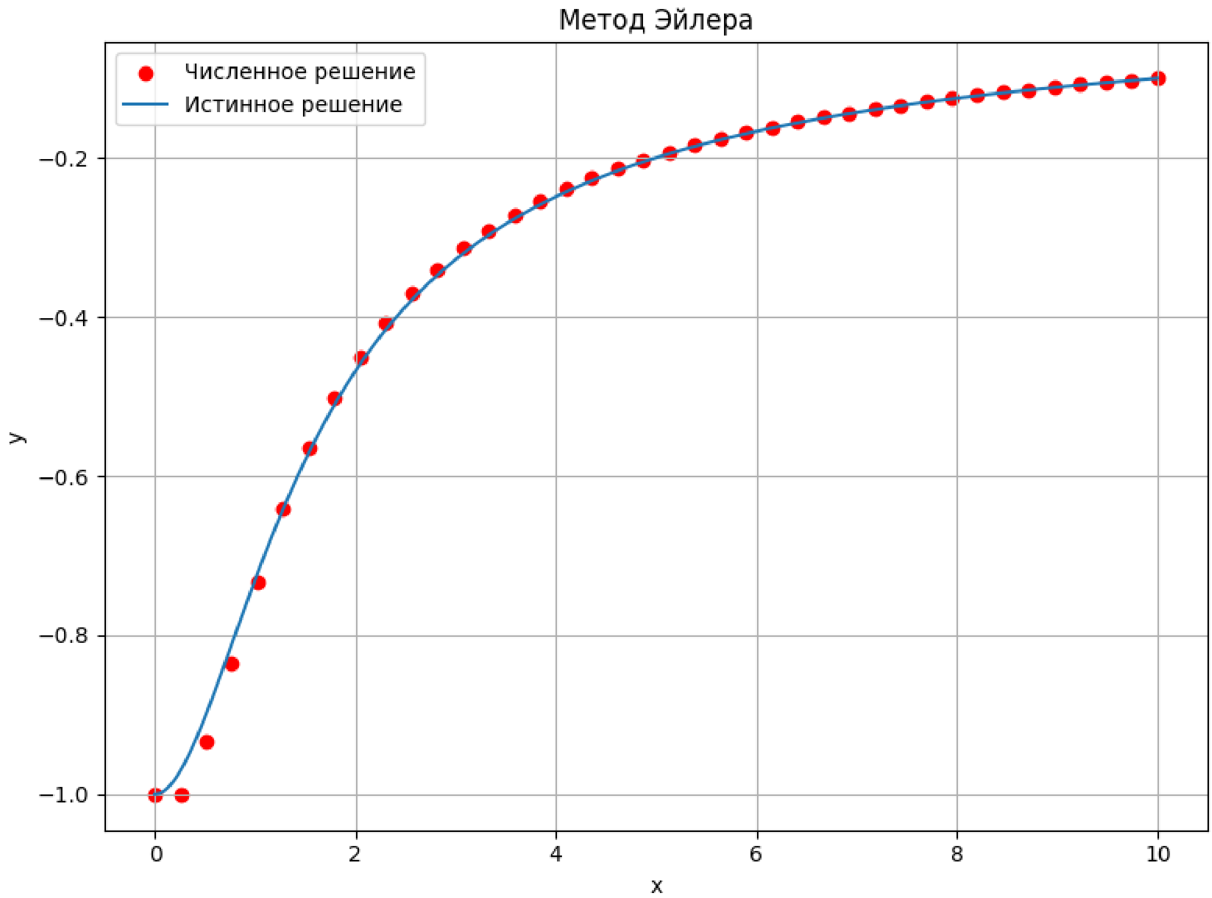
```
            if abs(y_corr - y_pred) < eps:
                y_pred = y_corr
                break
            y_pred = y_corr

        y.append(y_pred)

    return y
```

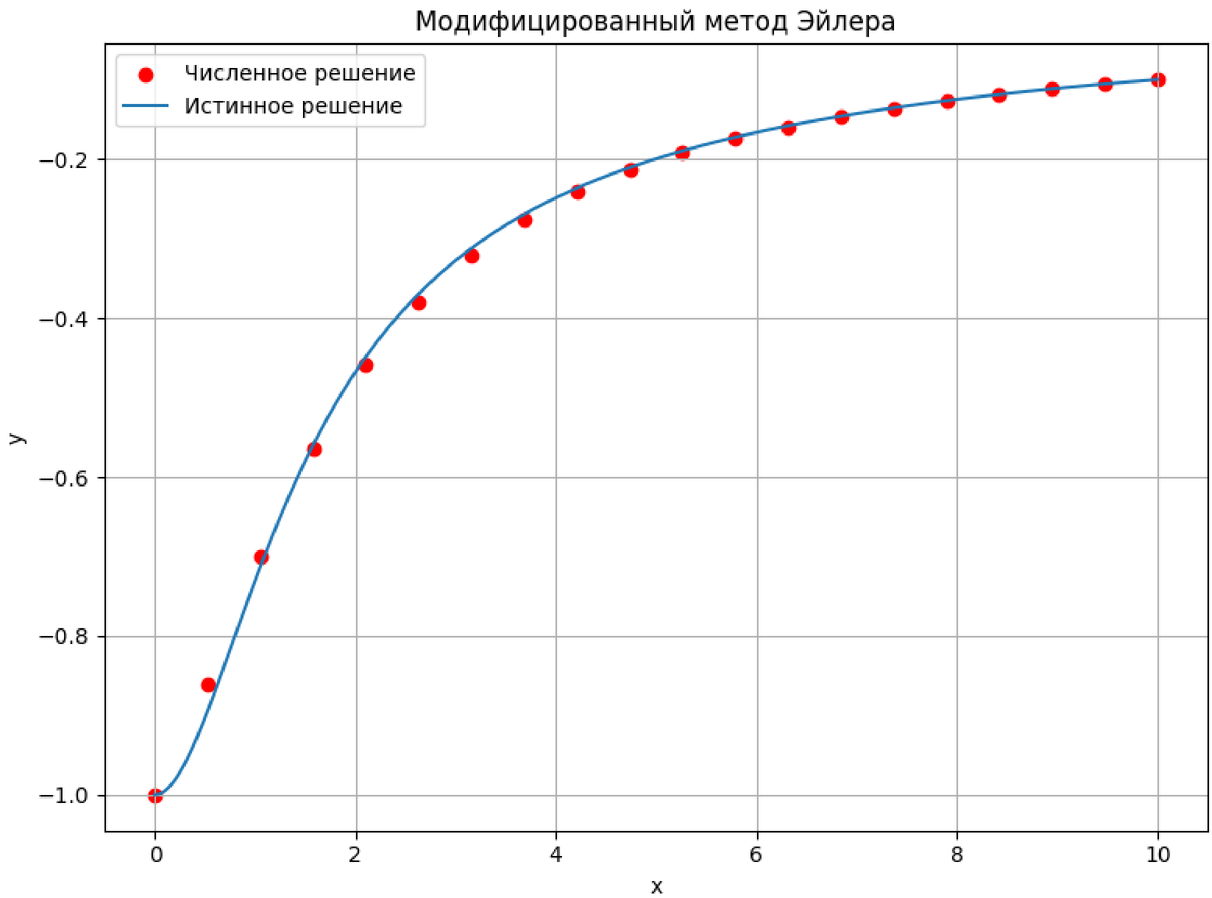
### 2.1.2 Результаты выполнения программы

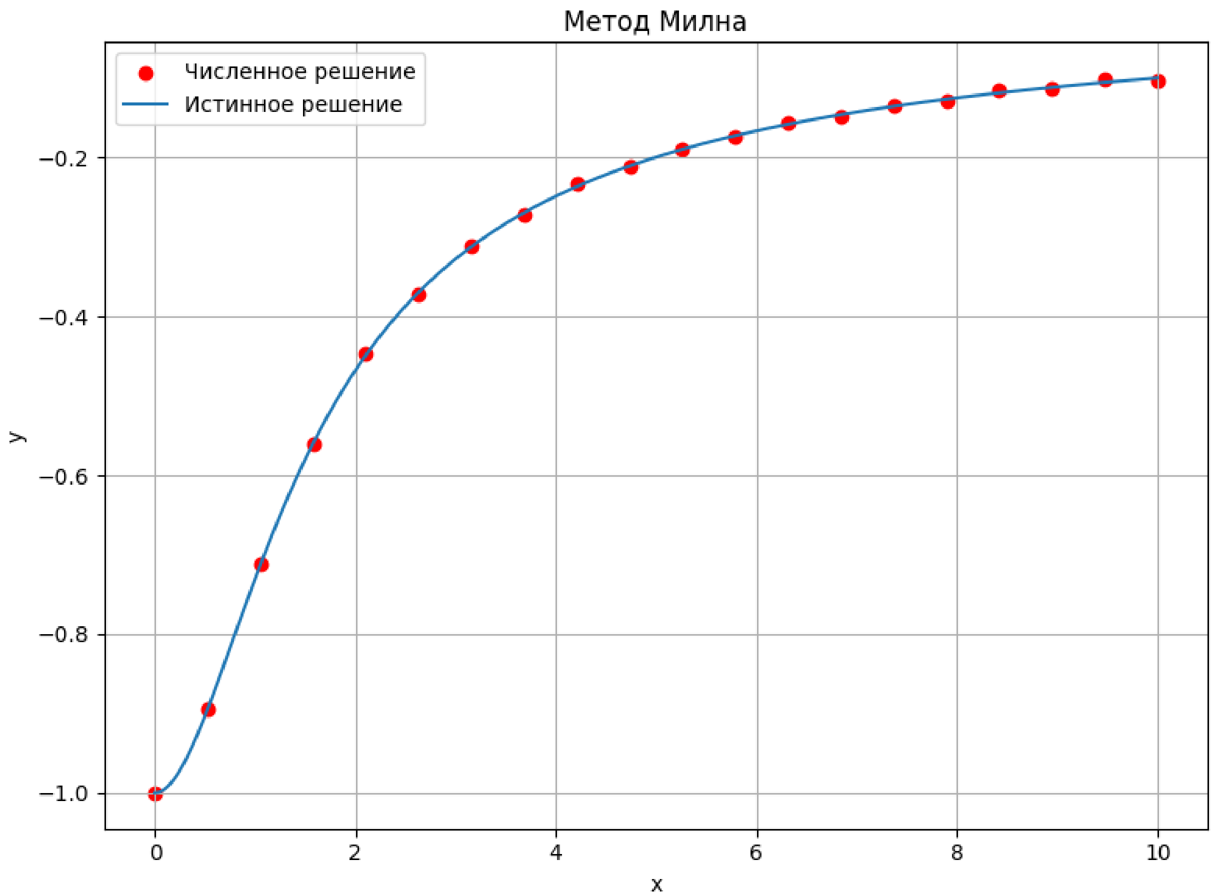
```
Выберите уравнение:
1 -> y + (1 + x) * y^2
2 -> x + y
3 -> cos(x) - y
1
Введите первый элемент интервала: 0
Введите второй элемент интервала: 10
Введите количество элементов в интервале: 10
Введите y0: -1
Введите точность: 0.01

==================================================

Метод Эйлера
+--------+----+-----------+-----------+-----------+-----------+-----------
| x      |  0 |  0.25641  |  0.512821 |  0.769231 |  1.02564  |  1.28205
 ↪  |  1.53846  |  1.79487  |  2.05128  |  2.30769  |  2.5641   |  2.82051
 ↪  |  3.07692  |  3.33333  |  3.58974  |  3.84615  |  4.10256  |  4.35897
 ↪  |  4.61538  |  4.87179  |  5.12821  |  5.38462  |  5.64103  |  5.89744
 ↪  |  6.15385  |  6.41026  |  6.66667  |  6.92308  |  7.17949  |  7.4359
 ↪  |  7.69231  |  7.94872  |  8.20513  |  8.46154  |  8.71795  |  8.97436
 ↪  |  9.23077  |  9.48718  |  9.74359  | 10         |
+--------+----+-----------+-----------+-----------+-----------+-----------
| y      | -1 | -1        | -0.934254 | -0.835233 | -0.732923 | -0.641845
 ↪  | -0.565363 | -0.502281 | -0.450274 | -0.407104 | -0.370927 |
 ↪ -0.340299 | -0.314112 | -0.291511 | -0.271837 | -0.254574 | -0.239319
 ↪  | -0.225749 | -0.213606 | -0.20268  | -0.192801 | -0.183827 |
 ↪ -0.175641 | -0.168146 | -0.161257 | -0.154906 | -0.149032 | -0.143583
 ↪  | -0.138517 | -0.133793 | -0.129379 | -0.125245 | -0.121367 |
 ↪ -0.117719 | -0.114284 | -0.111043 | -0.10798  | -0.105081 | -0.102332
 ↪  | -0.0997237 |
+--------+----+-----------+-----------+-----------+-----------+-----------
```

```
| y_real | -1 | -0.970653 | -0.899584 | -0.811293 | -0.722435 | -0.641223
↪  | -0.570394 | -0.509939 | -0.458747 | -0.415423 | -0.378631 |
↪ -0.347212 | -0.320202 | -0.296823 | -0.276446 | -0.258564 | -0.242772
↪  | -0.228741 | -0.216203 | -0.204941 | -0.194775 | -0.185556 |
↪ -0.177161 | -0.169486 | -0.162444 | -0.15596  | -0.149971 | -0.144424
↪  | -0.139271 | -0.134472 | -0.129992 | -0.125801 | -0.121871 |
↪ -0.118179 | -0.114704 | -0.111427 | -0.108332 | -0.105405 | -0.102631
↪  | -0.0999995 |
+--------+----+-----------+-----------+-----------+-----------+----------
Погрешность: 0.0002659275103588654
Для достижения необходимой точности потребовалось разбиение на 40 точек

==================================================

Модифицированный метод Эйлера
+--------+----+-----------+-----------+-----------+-----------+----------
| x      |  0 |  0.526316 |  1.05263  |  1.57895  |  2.10526  |  2.63158
↪  |  3.15789  |  3.68421  |  4.21053  |  4.73684  |  5.26316  |  5.78947
↪  |  6.31579  |  6.84211  |  7.36842  |  7.89474  |  8.42105  |  8.94737
↪  |  9.47368  | 10         |
+--------+----+-----------+-----------+-----------+-----------+----------
| y      | -1 | -0.861496 | -0.700218 | -0.564285 | -0.459148 | -0.380161
↪  | -0.320961 | -0.276091 | -0.24148  | -0.21425  | -0.192404 |
↪ -0.174553 | -0.159724 | -0.147222 | -0.136543 | -0.127319 | -0.119269
↪  | -0.112184 | -0.105898 | -0.100283  |
+--------+----+-----------+-----------+-----------+-----------+----------
| y_real | -1 | -0.89518  | -0.713445 | -0.56018  | -0.449019 | -0.369885
↪  | -0.31246  | -0.269591 | -0.236666 | -0.210721 | -0.189813 |
↪ -0.172636 | -0.158288 | -0.146131 | -0.135703 | -0.126661 | -0.118747
↪  | -0.111763 | -0.105555 | -0.0999995 |
+--------+----+-----------+-----------+-----------+-----------+----------
Погрешность: 0.0007379276243481512
Для достижения необходимой точности потребовалось разбиение на 20 точек

==================================================

Метод Милна
+--------+----+-----------+-----------+-----------+-----------+----------
| x      |  0 |  0.526316 |  1.05263  |  1.57895  |  2.10526  |  2.63158
↪  |  3.15789  |  3.68421  |  4.21053  |  4.73684  |  5.26316  |  5.78947
↪  |  6.31579  |  6.84211  |  7.36842  |  7.89474  |  8.42105  |  8.94737
↪  |  9.47368  | 10         |
+--------+----+-----------+-----------+-----------+-----------+----------
| y      | -1 | -0.893481 | -0.712636 | -0.560256 | -0.446627 | -0.371463
↪  | -0.311754 | -0.271673 | -0.233909 | -0.212118 | -0.188807 |
↪ -0.174828 | -0.155557 | -0.147771 | -0.1343   | -0.129196 | -0.115618
↪  | -0.113633 | -0.101843 | -0.104353  |
+--------+----+-----------+-----------+-----------+-----------+----------
```

```
| y_real | -1 | -0.89518  | -0.713445 | -0.56018  | -0.449019 | -0.369885
↪  | -0.31246  | -0.269591 | -0.236666 | -0.210721 | -0.189813 |
↪  -0.172636 | -0.158288 | -0.146131 | -0.135703 | -0.126661 | -0.118747
↪  | -0.111763 | -0.105555 | -0.0999995 |
+--------+----+-----------+-----------+-----------+-----------+----------
Погрешность: 0.0043532895578312775
Для достижения необходимой точности потребовалось разбиение на 20 точек

==================================================
```




Модифицированный метод Эйлера
Численное решение
Истинное решение
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1.0
y
0
2
4
6
8
10
x


Метод Милна
Численное решение
Истинное решение
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1.0
y
0
2
4
6
8
10
x

## 3 Вывод

В ходе работы я изучил различные численные методы решения дифференциальных уравнений первого порядка для задачи. Используя полученные знания я реализовал метод Эйлера, модифицированные метод Эйлера и метода Милна на языке программирования Python. Для достижения необходимой точности в одношаговых методах я использовал правило Рунге, а для многошаговых методов производил сравнение полученного решения с эталонным. В ходе исследования результатов работы программы я наглядно убедился в том, что многошаговые методы позволяются найти более точное решение за меньшее количество итераций. Также было обнаружено, что даже такая простая модификация как в случае метода Эйлера позволяет значительно улучшить точности эффективность.