Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Лабораторная работа №3

По Вычислительной математике

Вариант №10

Выполнил:

Ступин Тимур Русланович

Группа № P3108

Поток № 1.3

Преподаватель:

Санкт-Петербург 2025

Содержание

1 Цель работы

Найти приближенное значение определенного интеграла с требуе- мой точностью различными численными методами.

2 Порядок выполнения работы

2.1 Вычислительная реализация задачи

Интеграл в соответствии с вариантом:

$$\int_2^4 (x^3 - 3x^2 + 7x - 10)dx$$

1. Вычислим интеграл, приведенный в таблице 1 точно

   Для начала вычислим первообразную

   $$F(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{7x^2}{2} - 10x$$

   Далее применим формулу Ньютона-Лейбница

   $$I_{\text{точн}} = F(4) - F(2) = 16 - (-10) = \mathbf{26}$$

2. Вычислим интеграл по формуле Ньютона-Котеса при $n = 6$

   Для начала рассчитаем величину частичного отрезка

   $$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}$$

   Запишем общую формулу

   $$\int_a^b f(x)dx \approx c_6^0 f(a) + c_6^1 f(a+h) + c_6^2 f(a+2h) + c_6^3 f(a+3h) + c_6^4 f(a+4h)+$$

   $$+c_6^5 f(a+5h) + c_6^6 f(b)$$

Определим значения коэффициентов

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx (b-a)\cdot\left[\frac{41}{840}f(a)+\frac{216}{840}f(a+h)+\frac{27}{840}f(a+2h)+\frac{272}{840}f(a+3h)+\right.$$
$$\left.+\frac{27}{840}f(a+4h)+\frac{216}{840}f(a+5h)+\frac{41}{840}f(b)\right]$$

Подставив значения получим

$$I_{\text{котес}} = (4-2)\cdot\left[\frac{41}{840}f(2)+\frac{216}{840}f\left(2+\frac{1}{3}\right)+\frac{27}{840}f\left(2+\frac{2}{3}\right)+\frac{272}{840}f\left(2+\frac{3}{3}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{27}{840}f\left(2+\frac{4}{3}\right)+\frac{216}{840}f\left(2+\frac{5}{3}\right)+\frac{41}{840}f(4)\right] = \mathbf{26}$$

3. Вычислим интеграл по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона при $n = 10$.

   Для начала рассчитаем величину частичного отрезка

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-2}{10} = \frac{1}{5}$$

   (a) Метод средних прямоугольников

   Запишем общую формулу

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} y_{i-\frac{1}{2}} =$$
$$= h\cdot\left[f\left(a+\frac{h}{2}\right)+f\left(a+\frac{3h}{2}\right)+f\left(a+\frac{5h}{2}\right)+f\left(a+\frac{7h}{2}\right)+\right.$$
$$+f\left(a+\frac{9h}{2}\right)+f\left(a+\frac{11h}{2}\right)+f\left(a+\frac{13h}{2}\right)+f\left(a+\frac{15h}{2}\right)+f\left(a+\frac{17h}{2}\right)+$$
$$\left.+f\left(a+\frac{19h}{2}\right)\right]$$

Подставив значения получим

$$I_{\text{ср.прям}} = \frac{1}{5}\cdot\left[f\left(2+\frac{1}{10}\right)+f\left(2+\frac{3}{10}\right)+f\left(2+\frac{5}{10}\right)+f\left(2+\frac{7}{10}\right)+\right.$$
$$+f\left(2+\frac{9}{10}\right)+f\left(2+\frac{11}{10}\right)+f\left(2+\frac{13}{10}\right)+f\left(2+\frac{15}{10}\right)+f\left(2+\frac{17}{10}\right)+$$
$$\left.+f\left(2+\frac{19}{10}\right)\right] = \frac{649}{25} = \mathbf{25.96}$$

(b) Метод трапеций

Запишем общую формулу

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx h\cdot\left(\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) =$$
$$= h\cdot\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+f(a+h)+f(a+2h)+f(a+3h)+f(a+4h)+\right.$$
$$\left.+f(a+5h)+f(a+6h)+f(a+7h)+f(a+8h)+f(a+9h)\right]$$

Подставив значения получим

$$I_{\text{трапец}} = \frac{1}{5}\left[\frac{f(2)+f(4)}{2}+f\left(2+\frac{1}{5}\right)+f\left(2+\frac{2}{5}\right)+f\left(2+\frac{3}{5}\right)+\right.$$
$$+f\left(2+\frac{4}{5}\right)+f\left(2+\frac{5}{5}\right)+f\left(2+\frac{6}{5}\right)+f\left(2+\frac{7}{5}\right)+f\left(2+\frac{8}{5}\right)+$$
$$\left.+f\left(2+\frac{9}{5}\right)\right] = \frac{652}{25} = \mathbf{26.08}$$

(c) Метод Симпсона

Запишем общую формулу

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\cdot\left(y_0+4\sum_{i=1}^{n-1} y_{\text{нечет}}+2\sum_{i=2}^{n-2} y_{\text{чет}}+y_n\right) =$$
$$= \frac{h}{3}\cdot\Big[f(a)+4\Big(f(a+h)+f(a+3h)+f(a+5h)+f(a+7h)+f(a+9h)\Big)+$$
$$+2\Big(f(a+2h)+f(a+4h)+f(a+6h)+f(a+8h)\Big)+f(b)\Big]$$

Подставив значения получим

$$I_{\text{симпс}} = \frac{1}{15}\Bigg[f\left(a\right) + 4\Bigg(f\left(2+\frac{1}{5}\right) + f\left(2+\frac{3}{5}\right) + f\left(2+\frac{5}{5}\right) + \\ + f\left(2+\frac{7}{5}\right) + f\left(2+\frac{9}{5}\right)\Bigg) + 2\Bigg(f\left(2+\frac{2}{5}\right) + f\left(2+\frac{4}{5}\right) + \\ + f\left(2+\frac{6}{5}\right) + f\left(2+\frac{8}{5}\right)\Bigg) + f(4)\Bigg] = \mathbf{26}$$

4. Сравним результаты с точным значением интеграла Точное значение: $I_{\text{точн}} = 26$

   (a) Для метода Ньютона-Котеса при $n = 6$: $I_{\text{котес}} = 26$

   $$R_{\text{котес}} = |I_{\text{точн}} - I_{\text{котес}}| = |26 - 26| = 0$$

   (b) Для метода средних прямоугольников при $n = 10$: $I_{\text{ср.прям}} = 25.96$

   $$R_{\text{ср.прям}} = |I_{\text{точн}} - I_{\text{ср.прям}}| = |26 - 25.96| = 0.04$$

   (c) Для метода трапеций при $n = 10$: $I_{\text{трапец}} = 26.08$

   $$R_{\text{трапец}} = |I_{\text{точн}} - I_{\text{трапец}}| = |26 - 26.08| = 0.08$$

   (d) Для метода Симпсона при $n = 10$: $I_{\text{симпс}} = 26$

   $$R_{\text{симпс}} = |I_{\text{точн}} - I_{\text{симпс}}| = |26 - 26| = 0$$

5. Определим относительную погрешность для каждого метода

   (a) Для метода Ньютона-Котеса при $n = 6$:

   $$\Delta_{\text{котес}} = \frac{R_{\text{котес}}}{|I_{\text{точн}}|} = \frac{0}{26} = 0\%$$

   (b) Для метода средних прямоугольников при $n = 10$:

   $$\Delta_{\text{ср.прям}} = \frac{R_{\text{ср.прям}}}{|I_{\text{точн}}|} = \frac{0.04}{26} \approx 0.15\%$$

(c) Для метода трапеций при $n = 10$:

$$\Delta_{\text{трапец}} = \frac{R_{\text{трапец}}}{|I_{\text{точн}}|} = \frac{0.08}{26} \approx 0.31\%$$

(d) Для метода Симпсона при $n = 10$:

$$\Delta_{\text{симпс}} = \frac{R_{\text{симпс}}}{|I_{\text{точн}}|} = \frac{0}{26} = 0\%$$

Все методы дали небольшую погрешность, что говорит об их точности. Наилучший результат дали метод Ньютона-Котеса при $n = 6$ и метод Симпсона при $n = 10$, так как значение полностью совпало с точным.

2.2 Программная реализация задачи

2.2.1 Листинг программы

```
def rectangles_method_right(function: Function, a: float, b: float, n:
↪ int):
    h = (b - a) / n

    result = 0
    for i in range(1, n + 1):
        result += function.compute(a + i * h)
    result *= h

    return result


def rectangles_method_left(function: Function, a: float, b: float, n:
↪ int):
    h = (b - a) / n

    result = 0
    for i in range(n):
        result += function.compute(a + i * h)
    result *= h

    return result


def rectangles_method_middle(function: Function, a: float, b: float, n:
↪ int):
    h = (b - a) / n

    result = 0
```

```
    for i in range(1, n + 1):
        x_prev = a + (i - 1) * h
        x_i = a + i * h
        x_h = (x_prev + x_i) / 2
        result += function.compute(x_h)
    result *= h

    return result


def trapezoid_method(function: Function, a: float, b: float, n: int):
    h = (b - a) / n

    result = (function.compute(a) + function.compute(b)) / 2
    for i in range(1, n):
        result += function.compute(a + i * h)
    result *= h

    return result


def simpson_method(function: Function, a: float, b: float, n: int):
    h = (b - a) / n

    result = function.compute(a) + function.compute(b)
    for i in range(1, n):
        k = 2 if i % 2 == 0 else 4
        result += k * function.compute(a + i * h)
    result *= h / 3

    return result
```

2.2.2 Результат выполнения программы

```
Выберите функцию для интегрирования:
1 -> x^2
2 -> sin(x)
3 -> x^3 - 3x^2 + 7x - 10
4 -> 5
5 -> 1 / sqrt(x)
6 -> 1 / (1 - x)
7 -> 1 / x
8 -> 1 / x^2
3
Введите нижний предел интегрирования: 2
Введите верхний предел интегрирования: 4
Выберите метод для интегрирования:
1 -> Метод прямоугольников (левый)
2 -> Метод прямоугольников (правый)
```

```
3 -> Метод прямоугольников (средний)
4 -> Метод трапеций
5 -> Метод Симпсона
3
Введите точность: 0.001
Найденное значение интеграла: 25.9990234375
Число разбиения интервала интегрирования для достижения требуемой
↪  точности: 64
```

```
Выберите функцию для интегрирования:
1 -> x^2
2 -> sin(x)
3 -> x^3 - 3x^2 + 7x - 10
4 -> 5
5 -> 1 / sqrt(x)
6 -> 1 / (1 - x)
6
Введите нижний предел интегрирования: 0
Введите верхний предел интегрирования: 1
Функция терпит разрыв в точках: [1.0]
Интеграл расходится
```

```
Выберите функцию для интегрирования:
1 -> x^2
2 -> sin(x)
3 -> x^3 - 3x^2 + 7x - 10
4 -> 5
5 -> 1 / sqrt(x)
6 -> 1 / (1 - x)
7 -> 1 / x
8 -> 1 / x^2
4
Введите нижний предел интегрирования: 0
Введите верхний предел интегрирования: 1
Выберите метод для интегрирования:
1 -> Метод прямоугольников (левый)
2 -> Метод прямоугольников (правый)
3 -> Метод прямоугольников (средний)
4 -> Метод трапеций
5 -> Метод Симпсона
5
Введите точность: 0.001
Найденное значение интеграла: 5.0
Число разбиения интервала интегрирования для достижения требуемой
↪  точности: 8
```

3 Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены численные методы интегрирования с использованием Python. В результате работы были рассмотрены различные численные методы вычисления определенных интегралов: метод прямоугольников (левых, правых, средних), метод трапеций, метод Ньютона-Котеса и метод Симпсона.

Была реализована программа, позволяющая выбрать одну из предложенных функций, задать пределы интегрирования, точность и начальное значение числа разбиения интервала интегрирования. Написав реализации всех трех методов решения интегралов, можно сделать вывод, что самым точным и быстрым является метод Симпсона.

В ходе вычислительной реализации задачи были рассчитаны интегралы различными методами и проведено сравнение результатов с точными значениями интегралов.

Также была выполнена дополнительная задача по установлению сходимости рассматриваемых несобственных интегралов 2 рода и их вычислению заданными численными методами в случаях, когда подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв в точке a, в точке b или на отрезке интегрирования.