

---

Группа Р3208

К работе допущен \_\_\_\_\_

Студенты Ступин Т.Р. Петров В.М. Есоян В.С.

Работа выполнена \_\_\_\_\_

Преподаватель Сорокина Е. К.

Отчет принят \_\_\_\_\_

## **Рабочий протокол и отчет по лабораторной работе №5**

---

Исследование колебаний физического  
маятника

---

## 1. Цель работы.

1. Изучение характеристик затухающих колебаний физического маятника.

## 2. Задачи, решаемые при выполнении работы.

1. Измерение периода затухающих колебаний.
2. Определение зависимости амплитуды затухающих колебаний физического маятника от времени.
3. Определение зависимости периода колебаний от момента инерции физического маятника.
4. Определение преобладающего типа трения.
5. Определение экспериментальной и теоретической приведенных длин маятника при его разных конфигурациях.

## 3. Объект исследования.

Физический маятник

## 4. Метод экспериментального исследования.

- Измерение времени 10 полных колебаний маятника при различных положениях утяжелителей
- Измерение времени достижения отклонения от положения равновесия в 25°, 20°, 15°, 10°, 5°.

## 5. Рабочие формулы и исходные данные.

- Среднее время колебаний

$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n}$$

- Период колебаний

$$T = \frac{\bar{t}}{N}$$

- Закон изменения амплитуда при сухом трении

$$A(t = nT) = A_0 - 4n\Delta\varphi_3$$

- Угловой коэффициент в зависимости  $A(t)$

$$k = \frac{\sum_{i=1}^5 (\bar{t}_i - \bar{\bar{t}}) (A_i - \bar{A})}{\sum_{i=1}^5 (\bar{t}_i - \bar{\bar{t}})^2}$$

- Расстояние между осью вращения и центром утяжелителя

$$R = l_1 + (n - 1)l_0 + \frac{1}{2}b$$

- Момент инерции грузов

$$I_{\text{гр}} = m_{\text{гр}}(R_{\text{верх}}^2 + R_{\text{ниж}}^2 + 2R_{\text{бок}}^2)$$

- Момент инерции ступицы и крестовины

$$I_0 = 8 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

- Полный момент инерции физического маятника

$$I = I_{\text{гр}} + I_0$$

- Коэффициент  $b$  в аппроксимированной линейной зависимости  $T^2 = a + b \cdot I$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^6 (I_i - \bar{I}) (T_i^2 - \overline{T^2})}{\sum_{i=1}^6 (I_i - \bar{I})^2}$$

- Коэффициент  $a$  в аппроксимированной линейной зависимости  $T^2 = a + b \cdot I$

$$a = \overline{T^2} - b \cdot \bar{I}$$

- Период колебаний маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_{\text{пр}}}{g}}$$

- Приведённая длина маятника

$$l_{\text{пр}} = \frac{I}{ml}$$

- Ускорение свободного падения

$$g = 9,82 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

- Среднеквадратичное отклонение среднего значения времени

$$S_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}{n(n-1)}}$$

- Доверительный интервал для времени

$$\Delta_{\bar{t}} = t_{\alpha, N} \cdot S_{\bar{t}}$$

- Относительная погрешность измерения времени

$$\Delta_t = \sqrt{\Delta_{\bar{t}}^2 + \left(\frac{2}{3} \Delta_{\text{и}}\right)^2}$$

- Относительная погрешность измерения времени

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta_t}{\bar{t}} \cdot 100\%$$

- Абсолютная погрешность измерения периода

$$\Delta_T = \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial \bar{t}} \cdot \Delta_t\right)^2}$$

- Относительная погрешность измерения периода

$$\varepsilon_T = \frac{\Delta_T}{T} \cdot 100\%$$

- Среднеквадратичное отклонение коэффициента  $k$

$$S_k = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n (\bar{t}_i - \bar{\bar{t}})^2} \frac{\sum_{i=1}^n (A_i - (a + k \cdot \bar{t}_i))^2}{n - 2}}$$

- Относительная погрешность коэффициента  $k$

$$\Delta_k = t_{\alpha, N} \cdot S_k$$

## 6. Измерительные приборы.

Таблица 1. Характеристики средств измерения

№ п/п	Наименование средства измерения	Предел измерений	Цена деления	Погрешность $\Delta_{\text{и}}$
1	Секундомер	200 с	0,01 с	0,01 с
2	Шкала	60°	1°/дел.	1°

## 7. Схема установки (перечень схем, которые составляют Приложение 1).

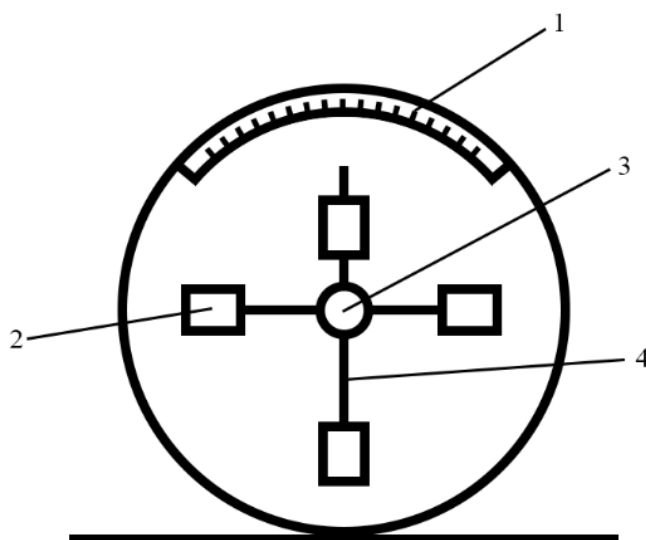


Рис. 1. Стенд лаборатории механики (общий вид)

Общий вид экспериментальной установки изображен на Рис. 1. В состав установки входят:

1. Шкала
2. Груз
3. Рукоятка сцепления
4. Передняя крестовина

Таблица 2 Параметры установки

Параметры установки		
1.	Масса каретки ( $m_k$ )	$(47,0 \pm 0,5)$ г
2.	Масса шайбы ( $m_{\text{ш}}$ )	$(220,0 \pm 0,5)$ г
3.	Масса грузов на крестовине ( $m_{\text{гр}}$ )	$(408,0 \pm 0,5)$ г
4.	Расстояние от оси до первой риски ( $l_1$ )	$(57,0 \pm 0,5)$ мм
5.	Расстояние между рисками ( $l_0$ )	$(25,0 \pm 0,2)$ мм

6.	Диаметр ступицы ( $d$ )	$(46,0 \pm 0,5)$ мм
7.	Диаметр груза на крестовине	$(40,0 \pm 0,5)$ мм
8.	Высота груза на крестовине ( $b$ )	$(40,0 \pm 0,5)$ мм
9.	Расстояние, проходимое грузом ( $h$ )	$(700,0 \pm 0,5)$ мм

## 8. Результаты прямых измерений и их обработки (таблицы, примеры расчетов).

Таблица 3 Время десяти колебаний

$t_1, c$	$t_2, c$	$t_3, c$	$\bar{t}, c$	$T, c$
18,20	18,01	18,26	18,16	1,816

Таблица 4 Время отклонения до определённой амплитуды

Амплитуда отклонения Время, с.	25°	20°	15°	10°	5°
$t_1$	16,70	33,02	47,56	65,56	87,45
$t_2$	16,82	33,05	49,29	67,64	85,52
$t_3$	16,55	32,99	47,71	67,60	85,75
$\bar{t}$	16,69	33,02	48,19	66,93	86,24

Таблица 5 Время 10 колебаний при различных положениях грузов

Положение боковых грузов	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$\bar{t}$	$T$
1 риска	16,15	16,06	16,4	16,20	1,62
2 риски	17,31	17,33	17,16	17,27	1,73
3 риски	18,37	17,92	18,03	18,11	1,81
4 риски	19,56	19,5	19,47	19,51	1,95
5 рисок	20,97	21,08	21,06	21,04	2,10
6 рисок	22,33	22,47	22,15	22,32	2,23

## 9. Расчет результатов косвенных измерений (таблицы, примеры расчетов).

Для начала рассчитаем среднее время 10 колебаний и период колебаний, заполнив таблицу 3

$$\bar{t} = \frac{t_1 + t_2 + t_3}{3} = \frac{18,20 + 18,01 + 18,26}{3} = 18,16 \text{ с}$$

$$T = \frac{\bar{t}}{10} = \frac{18,16}{10} = 1,816 \text{ с}$$

Аналогичным образом вычислим среднее время в таблицах 4 и 5, а также период в таблице 5

По данным из таблицы 4 построим график зависимости амплитуды колебаний от времени (рис 2)

Из графика видно, что в системе преобладает сухое трение

Вычислим ширину зоны застоя  $\Delta\varphi_3$

Для этого используя метод наименьших квадратов, вычислим угловой коэффициент в зависимости

$A(t)$

Для начала вычислим средние значения измеренных величин  $A$  и  $t$

$$\bar{A} = \frac{\sum_{i=1}^5 A_i}{5} = 0,262 \text{ рад}$$

$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^5 \bar{t}_i}{5} = 50,214 \text{ с}$$

Теперь вычислим сам коэффициент

$$k = \frac{\sum_{i=1}^5 (\bar{t}_i - 50,214)(A_i - 0,262)}{\sum_{i=1}^5 (\bar{t}_i - 50,214)^2} = -0,005$$

Выразим значение  $\Delta\varphi_3$  через найденный угловой коэффициент:

$$A(t = nT) = A_0 - 4n\Delta\varphi_3 \Rightarrow A(t) = A_0 - \frac{4\Delta\varphi_3}{T} \cdot t$$

Откуда

$$k = -\frac{4\Delta\varphi_3}{T} \Rightarrow \Delta\varphi_3 = -\frac{kT}{4} =$$

Подставив значения получим:

$$\Delta\varphi_3 = -\frac{-0,005 \cdot 1,816}{4} = 0,002 \text{ рад}$$

Найдем количество колебаний  $n$ , после которого колебания прекратятся

$$0 = A_0 - 4n\Delta\varphi_3 \Rightarrow \Delta\varphi_3 = \frac{A_0 - A}{4n} \Rightarrow n = \frac{A_0 - A}{4\Delta\varphi_3}$$

Подставив значения получим:

$$n = \frac{\frac{\pi}{6} - 0}{4 \cdot 0,002} = 66$$

Приступим к заполнению таблицы 6

Для каждого положения грузов вычислить расстояния центров верхнего ( $R_{\text{верх}}$ ), нижнего ( $R_{\text{нижн}}$ ) и боковых ( $R_{\text{бок}}$ ) грузов от оси вращения:

По условию верхний груз расположен на первой риске, значит  $n = 1$ . Подставляя значения в формулу, получаем:

$$R_{\text{верх}} = 57,0 \cdot 10^{-3} + (1 - 1) \cdot 25,0 \cdot 10^{-3} + \frac{1}{2} \cdot 40,0 \cdot 10^{-3} = 0,077 \text{ м}$$

Для нижнего груза  $n = 6$ , так что получаем:

$$R_{\text{нижн}} = 57,0 \cdot 10^{-3} + (6 - 1) \cdot 25,0 \cdot 10^{-3} + \frac{1}{2} \cdot 40,0 \cdot 10^{-3} = 0,202 \text{ м}$$

Расчёты для боковых рисков проводятся аналогично, посредством смены значения  $n$  от 1 до 6

Теперь вычислим моменты инерции грузов.

Для примера проведём расчёты для первой риски:

$$I_{\text{гр}} = 408,0 \cdot 10^{-3} \cdot (0,077^2 + 0,202^2 + 2 \cdot 0,077^2) = 0,024 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Дальше для каждого положения грузов вычислим полный момент инерции физического маятника.

Для примера проведём расчёты для первой риски:

$$I = 0,024 + 8 \cdot 10^{-3} = 0,032 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Построим график зависимости  $T^2(I)$  (рис 3)

Вычислим коэффициенты в аппроксимированной линейной зависимости  $T^2 = a + bI$  методом наименьших квадратов:

Найдём средние значения  $T^2$  и  $I$ :

$$\overline{T^2} = \frac{\sum_{i=1}^6 T_i^2}{6} = 3,683 \text{ с}^2$$

$$\bar{I} = \frac{\sum_{i=1}^6 I_i}{6} = 0,044 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Теперь вычислим коэффициенты:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^6 (I_i - 0,044)(T_i^2 - 3,683)}{\sum_{i=1}^6 (I_i - 0,044)^2} = 83,443$$

$$a = 3,683 - 83,443 \cdot 0,044 = -0,025$$

Найдём величину  $ml$  используя формулу периода колебаний и найденный коэффициент  $b$ :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{mgl} \cdot I \Rightarrow b = \frac{4\pi^2}{mgl} \Rightarrow ml = \frac{4\pi^2}{gb}$$

Подставив значения получим:

$$ml = \frac{4\pi^2}{9,82 \cdot 83,443} = 0,048 \text{ кг} \cdot \text{м}$$

Предполагая, что основная масса маятника сосредоточена в грузах на спицах, вычислим расстояние  $l_{\text{теор}}$  от оси вращения до центра масс

Для этого примем массу  $m = 4m_{\text{гр}}$  и выразим  $l$  из выведенной выше формулы:

$$l_{\text{теор}} = \frac{4 \cdot \pi^2}{gb \cdot 4 \cdot m_{\text{гр}}} = \frac{\pi^2}{gbm_{\text{гр}}} = \frac{\pi^2}{9,82 \cdot 83,443 \cdot 0,408} = 0,0295 \text{ м}$$

На основании периодов из таблицы 5 рассчитаем экспериментальную приведённую длину  $l_{\text{прэксп}}$  маятника и занесём её в таблицу 6

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_{\text{пр}}}{g}} \Rightarrow l_{\text{прэксп}} = \frac{T^2 g}{4\pi^2}$$

Для примера проведём расчёты для первой риски

$$l_{\text{прэксп}} = \frac{1,62^2 \cdot 9,82}{4\pi^2} = 0,653 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Наконец вычислим теоретическое значение  $l_{\text{пртеор}}$  приведённой длинны для каждого значения  $I$  и занесём результаты в таблицу 6

Для примера проведём вычисления для первой риски:

$$l_{\text{пртеор}} = \frac{I}{ml} = \frac{0,032}{0,048} = 0,662 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Таблица 6 Результаты расчётов

Риски	1	2	3	4	5	6
$R_{\text{верх}}, \text{м}$	0,077					
$R_{\text{нижн}}, \text{м}$	0,202					
$R_{\text{бок}}, \text{м}$	0,077	0,102	0,127	0,152	0,177	0,202
$I_{\text{гр}}, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	0,024	0,028	0,032	0,038	0,045	0,052
$I, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	0,032	0,036	0,040	0,046	0,053	0,060
$l_{\text{прэксп}}, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	0,653	0,742	0,816	0,947	1,101	1,239
$l_{\text{пртеор}}, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	0,662	0,738	0,835	0,953	1,092	1,253

## 10. Расчет погрешностей измерений (для прямых и косвенных измерений).

Вычислим погрешность измерения времени  $t$ , как результата прямых многократных измерений

Для начала вычислим оценку среднеквадратичного отклонения

$$S_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^3 (t_i - 18,16)^2}{3(3-1)}} = 0,075 \text{ с}$$

Теперь определим доверительный интервал случайной погрешности. Для этого возьмём табличное значение коэффициента Стьюдента для  $n = 3$  и доверительной вероятности  $\alpha = 0,95$ :

$$t_{\alpha, N} = 4,30$$

Подставив значения получаем

$$\Delta_{\bar{t}} = 4,30 \cdot 0,075 = 0,324 \text{ с}$$

Наконец вычислим абсолютную и относительную погрешности, используя инструментальную погрешность  $\Delta_{\text{и}}$  измерения времени из таблицы 1

$$\Delta_t = \sqrt{0,324^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot 0,01\right)^2} = 0,334 \text{ с}$$

$$\varepsilon_t = \frac{0,334}{18,16} \cdot 100\% = 1,85\%$$

Рассчитаем погрешность вычисления периода  $T$  как погрешность косвенного измерения

$$\Delta_T = \sqrt{\left(\frac{1}{10} \cdot 0,334\right)^2} = 0,033 \text{ с}$$

$$\varepsilon_T = \frac{0,033}{1,816} \cdot 100\% = 1,82\%$$

Рассчитаем погрешность вычисления углового коэффициента  $k$

Начнём с вычисления среднеквадратичного отклонения



$$S_k = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^5 (\bar{t}_i - 50,214)^2} \frac{\sum_{i=1}^5 (A_i - (0,514 - 0,005 \cdot \bar{t}_i))^2}{5 - 2}} = 0,0001$$

Теперь рассчитаем относительную погрешность, используя табличное значение коэффициента Стьюдента для  $n = 5$  измерений и доверительной вероятности  $\alpha = 0,95$ :

$$t_{\alpha, N} = 2,78$$

Подставив значения получаем

$$\Delta_k = 2,78 \cdot 0,0001 = 0,0004$$

Вычислим погрешность измерения зоны застоя  $\Delta\varphi_3$  как погрешность косвенного измерения

$$\Delta_{\Delta\varphi_3} = \sqrt{\left(-\frac{T}{4} \cdot \Delta_k\right)^2 + \left(-\frac{k}{4} \cdot \Delta_T\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1,816}{4} \cdot 0,0004\right)^2 + \left(-\frac{-0,005}{4} \cdot 0,033\right)^2} = 0,0002 \text{ рад}$$

$$\varepsilon_{\Delta\varphi_3} = \frac{0,0002}{0,002} \cdot 100\% = 10\%$$

#### 11. Графики (перечень графиков, которые составляют Приложение 2).

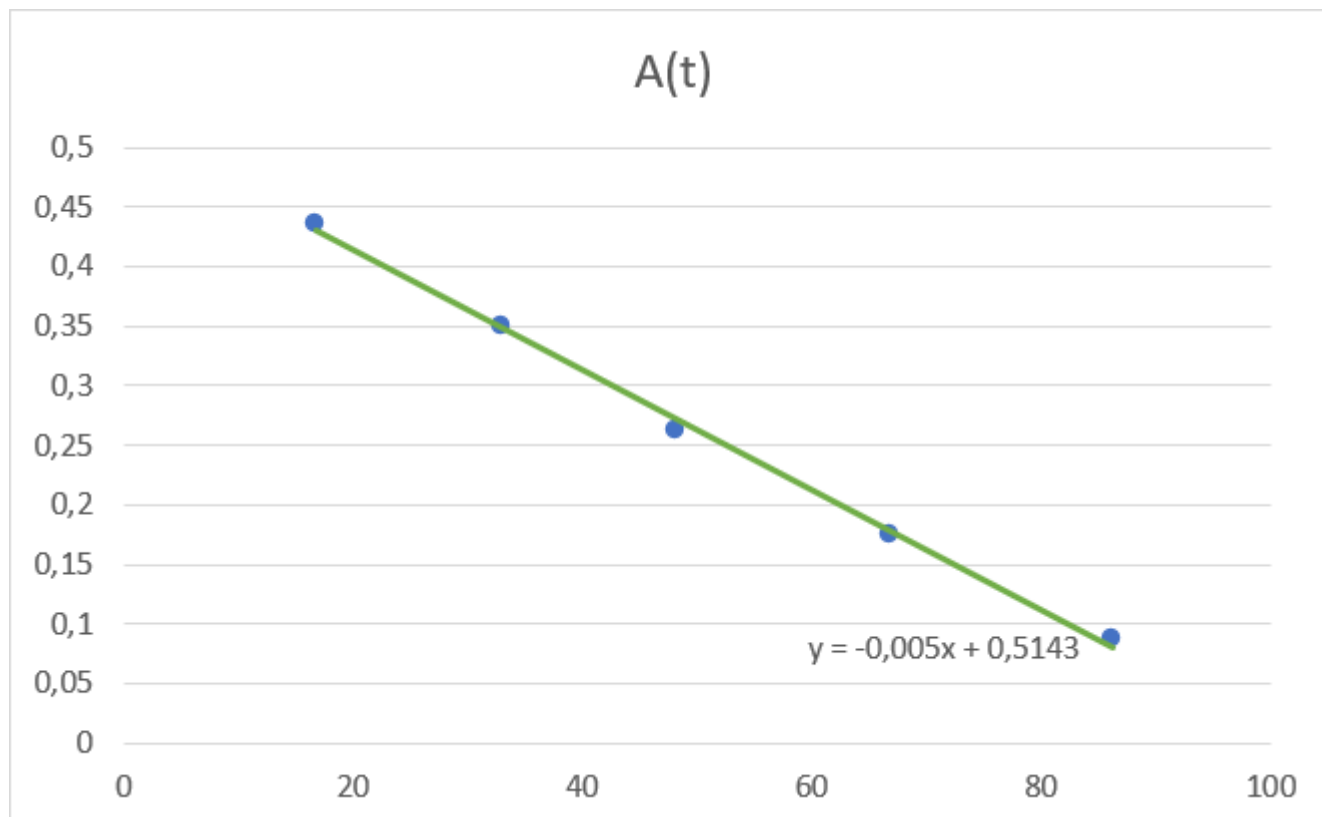


Рис. 2. График зависимости амплитуды колебаний от времени

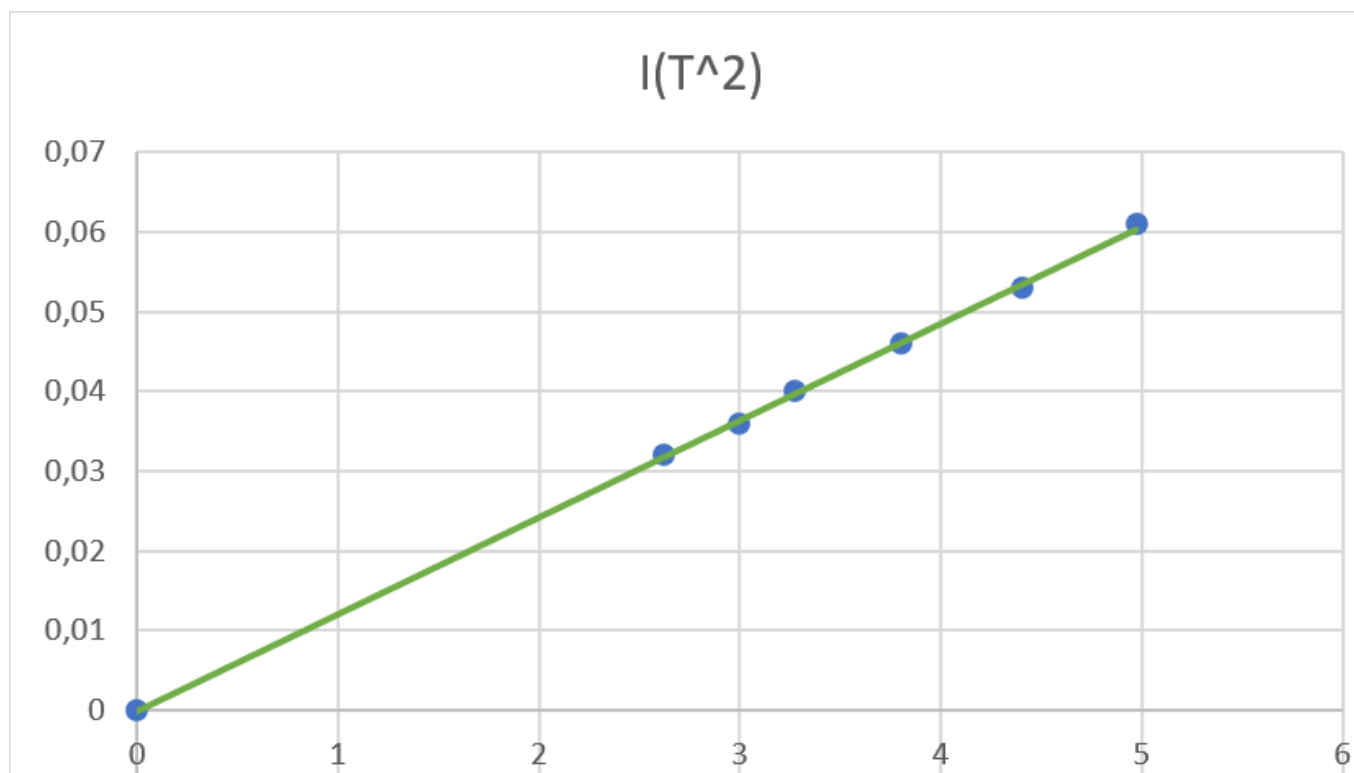


Рис. 3. График зависимости момента инерции от периода колебаний

## 12. Окончательные результаты.

- Преобладающий тип трения – сухое.
- Ширина зоны застоя

$$\Delta\varphi_3 = (0,0020 \pm 0,0002) \text{ рад} \quad \varepsilon_{\Delta\varphi_3} = 10\% \quad \alpha = 0,95$$

## 13. Выводы и анализ результатов работы

В ходе работы были изучены характеристики физического маятника. Мы измерили период затухающих колебаний и определили зависимость амплитуды затухающих колебаний от времени. На основании построенного графика этой зависимости было установлено, что преобладающий тип трения в нашей модели маятника – сухое. В ходе дальнейшего выполнения работы мы определили и построили график зависимости момента инерции физического маятника от квадрата периода колебаний, а также рассчитали экспериментальную и теоретическую приведённые длины маятника при его различных конфигурациях.