

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего  
образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»**

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

**Учебно исследовательская работа №2**

По Моделированию

Вариант №1/8/8

Выполнил:

**Ступин Тимур Русланович**

Группа № Р3308

Поток № 1.3

Преподаватель:

**Авксентьева Елена Юрьевна**

Санкт-Петербург 2025

# **Содержание**

Цель работы .....	3
Исходные данные .....	3
Порядок выполнения работы .....	3
Система 1 .....	3
Описание исследуемой системы .....	3
Перечень состояний .....	5
Матрица интенсивности переходов .....	6
Характеристики системы .....	7
Система 2 .....	10
Описание исследуемой системы .....	10
Описание исследуемой системы .....	11
Матрица интенсивности переходов .....	12
Характеристики системы .....	13
Результаты .....	13
Вывод .....	14

## Цель работы

Изучение метода марковских случайных процессов и его применение для исследования простейших моделей – систем массового обслуживания (СМО) с однородным потоком заявок.

## Исходные данные

Таблица 1. Параметры структурной и функциональной организации исследуемых систем

Вариант	Система 1		Система 2	
	Приборы	Емкость накопителей	Приборы	Емкость накопителей
1/8	3	2/0/0	1 ( $H_{2,4}$ )	3

Критерий эффективности: (в) – максимальная производительность системы

Таблица 2. Параметры нагрузки

Вариант	Интенс. потока	Ср. длит. обслуж.	Вероятности занятия прибора		
	$\lambda$ , 1/с	$b$ , с	П1	П2	П3
8	0.3	15	0.5	0.15	0.35

## Порядок выполнения работы

### Система 1

#### Описание исследуемой системы

- Система содержит 3 обслуживающих прибора
- Поток поступающих в систему заявок однородный
- Длительность обслуживания заявок в приборе – случайная величина
- Перед первым прибором имеется 2 места для заявок, ожидающих обслуживания и образующих очередь. Перед вторым и третьим приборами мест для ожидания нет – заявка поступает на обслуживание непосредственно, если прибор свободен, иначе теряется.
- Поступающие в систему заявки образуют простейший поток с интенсивностью  $\lambda$
- Длительность обслуживания заявок в каждом приборе распределена по экспоненциальному закону с интенсивностью  $\mu = \frac{1}{b}$ , где  $b$  – средняя длительность обслуживания
- Дисциплина буферизации – с потерями: заявка, поступившая в систему и заставшая накопитель перед выбранным прибором заполненным, теряется

- Дисциплина обслуживания – в порядке поступления по правилу «first come – first served»
- Заявка, поступившая в систему, с заданной вероятностью занятия прибора направляется к соответствующему прибору и ставится в очередь, либо теряется, если накопитель заполнен или отсутствует
- Интенсивность входного потока:  $\lambda = 0.3 \text{ 1/c}$
- Средняя длительность обслуживания  $b = 15 \text{ с}$
- Интенсивность обслуживания прибора:  $\mu = 1/b = 1/15 \approx 0.067 \text{ 1/c}$

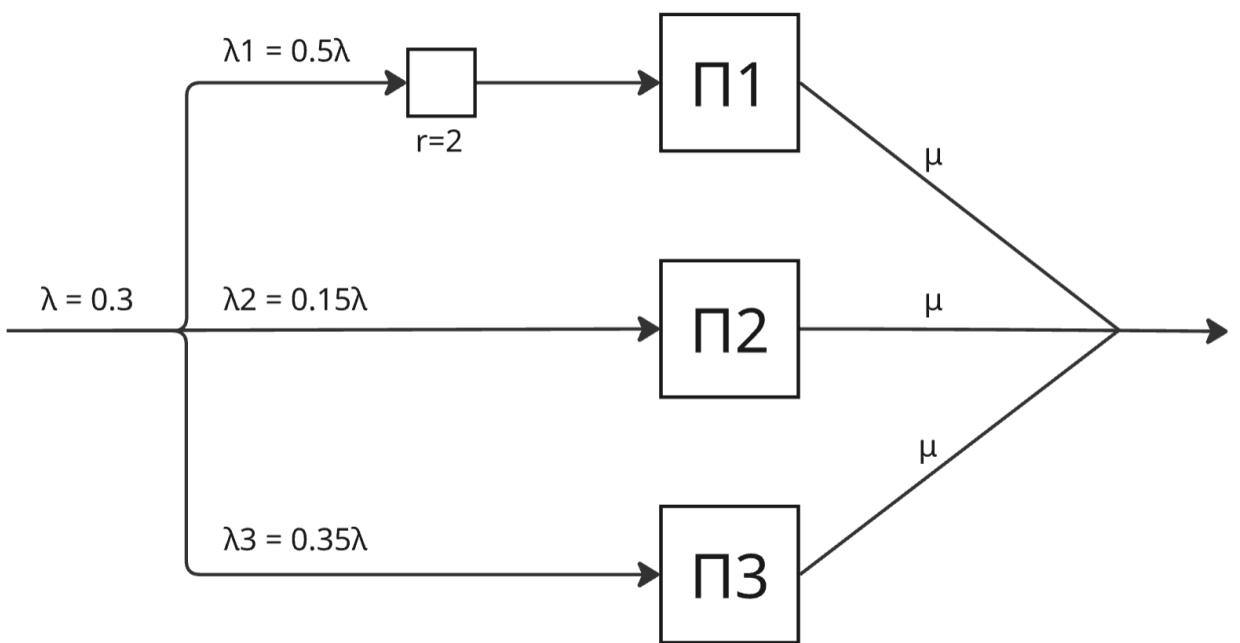


Рисунок 1. Схема системы 1

Классификация каждого из приборов по Кендаллу

Классификация систем массового обслуживания по Кендаллу имеет вид:

A / B / c / K

где:

- A – тип входного потока заявок:
  - M – марковский (пуассоновский, экспоненциальный интервал между заявками)
  - G – общий (произвольное распределение)
  - D – детерминированный (фиксированный интервал)
  - H – гиперэкспоненциальный

- $E$  – эрланговский
- $B$  – тип распределения времени обслуживания:
  - те же обозначения:  $M, G, D, H, E$
  - $c$  – число обслуживающих приборов (каналов)
  - $K$  – общая ёмкость системы (на обслуживании + в очереди).

Для данной системы получаем:

1.  $M/M/1/3$
2.  $M/M/1/1$
3.  $M/M/1/1$

### **Перечень состояний**

Обозначим состояние системы как  $n_1/q_1/n_2/n_3$ , где:

- $n_1$  – число заявок на П1 (0 или 1),
- $q_1$  – число заявок в очереди перед П1 (0, 1 или 2),
- $n_2$  – число заявок на П2 (0 или 1),
- $n_3$  – число заявок на П3 (0 или 1).

Так как П2 и П3 не имеют накопителей, то заявка может быть только на обслуживании ( $n_2=1$  или  $n_3=1$ ) или отсутствовать ( $n_2=0$  или  $n_3=0$ ). В очередях перед ними ( $q_2, q_3$ ) заявок быть не может.

№ состояния	Обозначение	Описание
S0	0/0/0/0	В системе нет заявок
S1	1/0/0/0	В системе 1 заявка: на П1
S2	0/0/1/0	В системе 1 заявка: на П2
S3	0/0/0/1	В системе 1 заявка: на П3
S4	1/0/1/0	В системе 2 заявки: на П1, П2
S5	1/0/0/1	В системе 2 заявки: на П1, П3
S6	0/0/1/1	В системе 2 заявки: на П2, П3
S7	1/1/0/0	В системе 2 заявки: на П1, в очереди перед П1
S8	1/0/1/1	В системе 3 заявки: на П1, П2, П3
S9	1/1/1/0	В системе 3 заявки: на П1, П2, в очереди перед П1
S10	1/1/0/1	В системе 3 заявки: на П1, П3, в очереди перед П1
S11	1/2/0/0	В системе 3 заявки: на П1, в очереди перед П1 (2)
S12	1/1/1/1	В системе 4 заявки: на П1, П2, П3, в очереди перед П1
S13	1/2/1/0	В системе 4 заявки: на П1, П2, в очереди перед П1 (2)
S14	1/2/0/1	В системе 4 заявки: на П1, П3, в очереди перед П1 (2)
S15	1/2/1/1	В системе 5 заявок: на П1, П2, П3, в очереди перед П1 (2)

Таблица 3. Перечень возможных состояний Системы 1

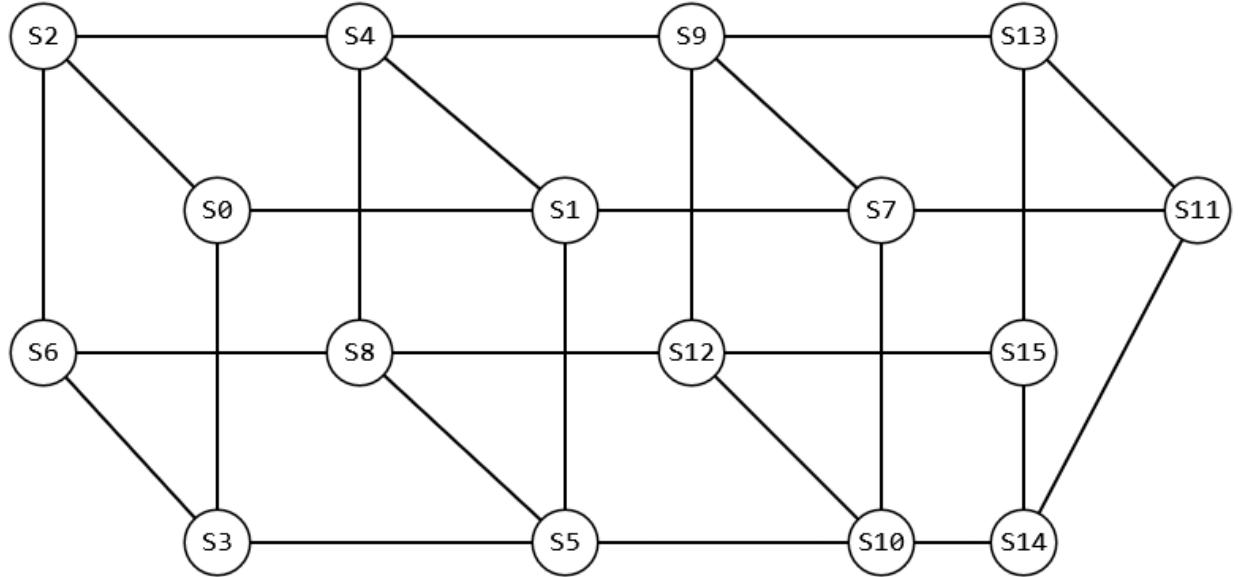


Рисунок 2. Граф переходов Системы 1

#### Матрица интенсивности переходов

Интенсивности переходов:

$$\lambda_1 = 0.3 \cdot 0.5 = 0.15$$

$$\lambda_2 = 0.3 \cdot 0.15 = 0.045$$

$$\lambda_3 = 0.3 \cdot 0.35 = 0.105$$

$$\mu = \frac{1}{b} = 0.067$$

C1	S0	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15
S0	-0.300	0.150	0.045	0.105												
S1	0.067	-0.367			0.045	0.105		0.150								
S2	0.067		-0.322		0.150		0.105									
S3	0.067			-0.262		0.150	0.045									
S4		0.067	0.067		-0.388				0.105	0.150						
S5		0.067		0.067		-0.328			0.045		0.150					
S6			0.067	0.067			-0.283		0.150							
S7		0.067						-0.367		0.045	0.105	0.150				
S8					0.067	0.067	0.067		-0.350					0.150		
S9						0.067		0.067		-0.388				0.105	0.150	
S10							0.067	0.067			-0.328		0.045		0.150	
S11								0.067				-0.217		0.045	0.105	
S12									0.067	0.067	0.067		-0.350			0.150
S13										0.067		0.067		-0.238		0.105
S14											0.067	0.067			-0.178	0.045
S15													0.067	0.067	0.067	-0.200

Таблица 4. Матрица интенсивностей переходов Системы 1

$p_0$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$	$p_7$
0.0149	0.0319	0.0085	0.0213	0.0183	0.0456	0.0122	0.0685
$p_8$	$p_9$	$p_{10}$	$p_{11}$	$p_{12}$	$p_{13}$	$p_{14}$	$p_{15}$
0.0261	0.0391	0.0978	0.1467	0.0559	0.0838	0.2096	0.1198

Таблица 5. Значения стационарных вероятностей в точках Системы 1

### Характеристики системы

- **Нагрузка**

Среднее число заявок за время обслуживания одной заявки

$$y_i = \lambda_i \cdot b$$

- **Загрузка**

Вероятность того что прибор занят

$$\rho_i = 1 - \sum p_j$$

где  $p_j$  – вероятность того что прибор простояивает

- **Вероятность потери**

Вероятность того что заявка будет отброшена

$$\pi_i = \sum p_j$$

где  $p_j$  – вероятность того что прибор занят и его очередь полная

- **Длина очереди**

Среднее число заявок ожидающих обслуживания

$$l_i = \sum q_j \cdot p_j$$

где  $q_j$  – число заявок в очереди в состоянии  $j$  а  $p_j$  – вероятность этого состояния

- **Число заявок в системе**

Среднее общее число заявок в системе

$$m_i = l_i + \rho_i$$

- **Производительность**

Интенсивность обслуженных заявок (входной поток минус потери)

$$\lambda'_i = (i - \pi_i) \cdot \lambda_i$$

- **Коэффициент простоя**

Буквально противоположность загруженности

$$\eta_i = 1 - \rho_i$$

- **Время ожидания**

Среднее время ожидания в очереди

$$w_i = \frac{l_i}{\lambda'_i}$$

- **Время пребывания**

Общее время пребывания в системе (ожидание + обслуживание)

$$u_i = w_i + b$$

Хар-ка	Прибор	Расчетная формула	Сист.1
Нагрузка	П1	$y_1 = \lambda_1 \cdot b$	2.2
	П2	$y_2 = \lambda_2 \cdot b$	0.7
	П3	$y_3 = \lambda_3 \cdot b$	1.6
	Сумм	$Y = y_1 + y_2 + y_3$	4.5
Загрузка	П1	$\rho_1 = 1 - (p_0 + p_2 + p_3 + p_6)$	0.943100
	П2	$\rho_2 = 1 - (p_0 + p_1 + p_3 + p_5 + p_7 + p_{10} + p_{11} + p_{14})$	0.363700
	П3	$\rho_3 = 1 - (p_0 + p_1 + p_2 + p_4 + p_7 + p_9 + p_{11} + p_{13})$	0.588300
	Сумм	$\rho = (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)/3$	0.631700
Вероятность потери	П1	$\pi_1 = p_{11} + p_{13} + p_{14} + p_{15}$	0.559900
	П2	$\pi_2 = p_2 + p_4 + p_6 + p_8 + p_9 + p_{12} + p_{13} + p_{15}$	0.363700
	П3	$\pi_3 = p_3 + p_5 + p_6 + p_8 + p_{10} + p_{12} + p_{14} + p_{15}$	0.588300
	Сумм	$\pi = \lambda_1 \cdot \pi_1 + \lambda_2 \cdot \pi_2 + \lambda_3 \cdot \pi_3$	0.540410
Длина очереди	П1	$l_1 = p_7 + p_9 + p_{10} + p_{12} + 2 \cdot (p_{11} + p_{13} + p_{14} + p_{15})$	1.381100
	П2	$l_2 = 0$	0.0
	П3	$l_3 = 0$	0.0
	Сумм	$l = l_1 + l_2 + l_3$	1.381100
Число заявок в системе	П1	$m_1 = l_1 + \rho_1$	2.324200
	П2	$m_2 = l_2 + \rho_2$	0.363700
	П3	$m_3 = l_3 + \rho_3$	0.588300
	Сумм	$m = m_1 + m_2 + m_3$	3.276200
Производительность	П1	$\lambda'_1 = (1 - \pi_1) \cdot \lambda_1$	0.066015
	П2	$\lambda'_2 = (1 - \pi_2) \cdot \lambda_2$	0.028633
	П3	$\lambda'_3 = (1 - \pi_3) \cdot \lambda_3$	0.043228
	Сумм	$\lambda' = \lambda'_1 + \lambda'_2 + \lambda'_3$	0.137877
Коэффициент простоев системы	П1	$\eta_1 = 1 - \rho_1$	0.056900
	П2	$\eta_2 = 1 - \rho_2$	0.636300
	П3	$\eta_3 = 1 - \rho_3$	0.411700
	Сумм	$\eta = 1 - \rho$	0.368300
Время ожидания	П1	$w_1 = l_1 / \lambda'_1$	20.921003
	П2	$w_2 = l_2 / \lambda'_2$	0.0
	П3	$w_3 = l_3 / \lambda'_3$	0.0
	Сумм	$w = l / \lambda'$	10.016899
Время пребывания	П1	$u_1 = w_1 + b$	35.921003
	П2	$u_2 = w_2 + b$	15.000000
	П3	$u_3 = w_3 + b$	15.0
	Сумм	$u = w + b$	25.016899

Таблица 6. Характеристики Системы 1

## Система 2

### Описание исследуемой системы

- Система содержит 1 обслуживающий прибор
- Поток поступающих в систему заявок однородный
- Длительность обслуживания заявок в приборе – случайная величина, распределённая по гиперэкспоненциальному закону с коэффициентом вариации  $\nu = 2.4$

Вычислим вероятность обработки заявок в  $\Phi_1(q)$  и  $\Phi_2(1-q)$

$$q \leq \frac{2}{1 + \nu^2} = 0.3$$

Выбираем  $q = 1/7$

Теперь вычислим интенсивности фаз:

$$b'_1 = \left[ 1 + \sqrt{\frac{1-q}{2q}(\nu^2 - 1)} \right] b = 71.68$$

$$\mu_1 = \frac{1}{b'_1} = 0.014$$

$$b'_2 = \left[ 1 - \sqrt{\frac{q}{2(1-q)}(\nu^2 - 1)} \right] b = 5.55$$

$$\mu_2 = \frac{1}{b'_2} = 0.18$$

- Перед прибором имеется общий накопитель на 3 места для заявок, ожидающих обслуживания и образующих очередь
- Поступающие в систему заявки образуют простейший поток с интенсивностью  $\lambda$
- Дисциплина буферизации – с потерями: заявка, поступившая в систему и заставшая накопитель полностью заполненным, теряется
- Дисциплина обслуживания – в порядке поступления по правилу «first come – first served»
- Заявка, поступившая в систему, направляется к единственному прибору и ставится в очередь, либо теряется, если накопитель заполнен
- Интенсивность входного потока:  $\lambda = 0.3 \text{ 1/c}$
- Средняя длительность обслуживания заявки  $b = 15 \text{ с}$

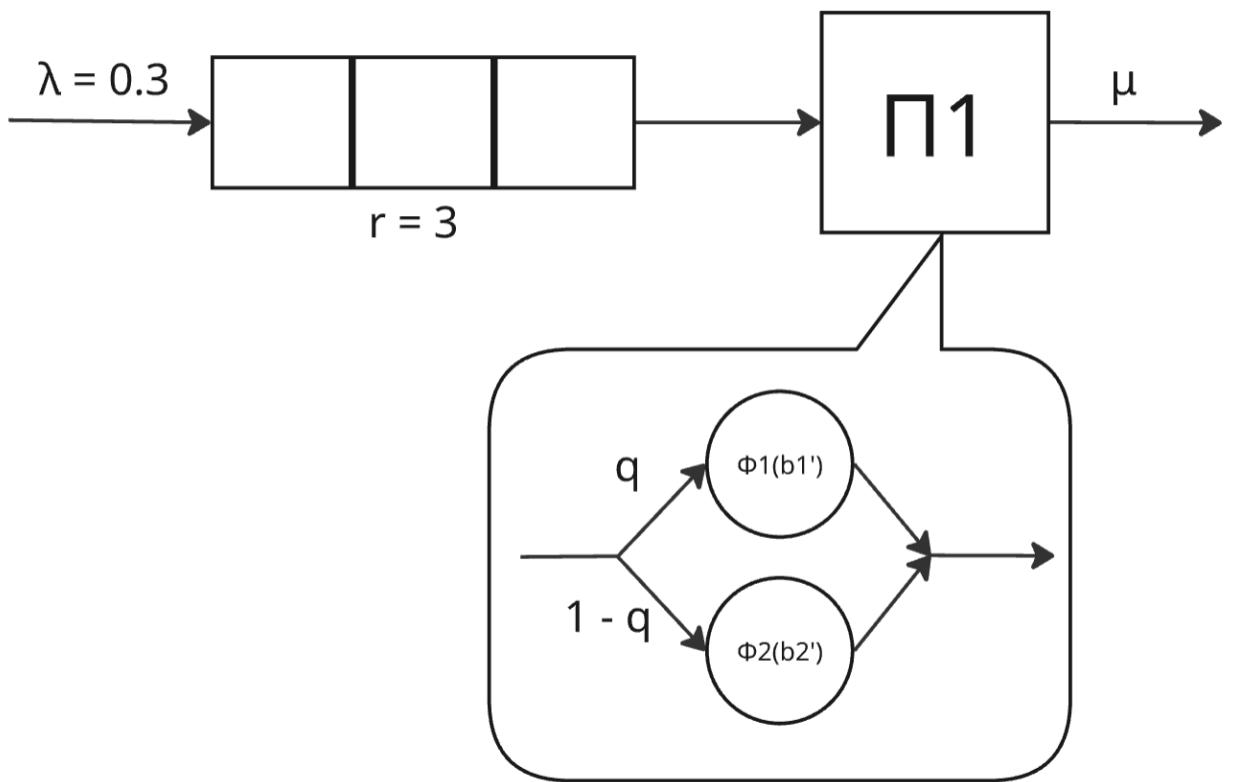


Рисунок 3. Граф переходов Системы 2

Классификация приборов по Кендаллу

1. M/H/1/4

#### Описание исследуемой системы

Обозначим состояние системы как  $n/f/q$ , где:

- $n$  – занят ли прибор (0 или 1)
- $f$  – фаза обслуживания (1 или 2)
- $q$  – число заявок в очереди (0, 1, 2 или 3)

№ состояния	Обозначение	Описание
S0	0/0/0	В системе нет заявок
S1	1/1/0	В системе 1 заявка: в фазе 1
S2	1/2/0	В системе 1 заявка: в фазе 2
S3	1/1/1	В системе 2 заявки: в фазе 1, в очереди
S4	1/2/1	В системе 2 заявки: в фазе 2, в очереди
S5	1/1/2	В системе 3 заявки: в фазе 1, в очереди (2)
S6	1/2/2	В системе 3 заявки: в фазе 2, в очереди (2)
S7	1/1/3	В системе 4 заявки: в фазе 1, в очереди (3)
S8	1/2/3	В системе 4 заявки: в фазе 2, в очереди (3)

Таблица 7. Перечень возможных состояний Системы 2

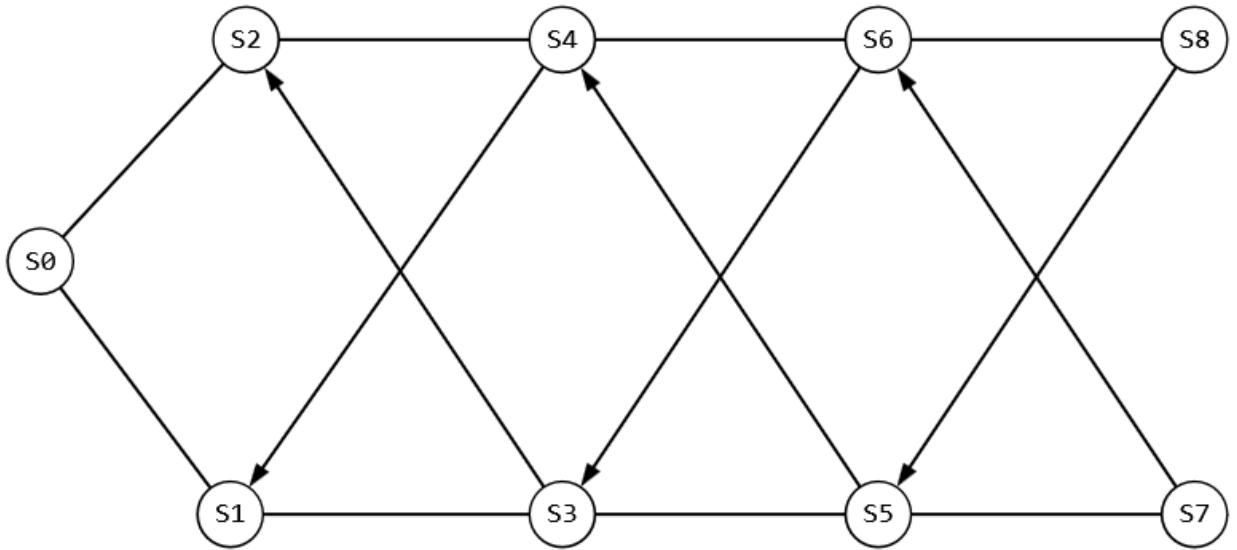


Рисунок 2. Граф переходов Системы 2

### Матрица интенсивности переходов

Интенсивности переходов:

$$\lambda = 0.3 \quad \lambda q = 0.043 \quad \lambda(1 - q) = 0.257$$

$$\mu_1 = 0.014 \quad \mu_1 q = 0.002 \quad \mu_1(1 - q) = 0.012$$

$$\mu_2 = 0.18 \quad \mu_2 q = 0.026 \quad \mu_2(1 - q) = 0.154$$

C1	S0	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8
S0	-0.300	0.043	0.257						
S1	0.014	-0.314		0.300					
S2	0.180		-0.480		0.300				
S3		0.002	0.012	-0.314		0.300			
S4		0.026	0.154		-0.480		0.300		
S5				0.002	0.012	-0.314		0.300	
S6				0.026	0.154		-0.480		0.300
S7						0.002	0.012	-0.014	
S8						0.026	0.154		-0.180

Таблица 8. Матрица интенсивностей переходов Системы 2

$p_0$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$	$p_7$	$p_8$
0.0131	0.0055	0.0214	0.0131	0.0438	0.0293	0.0925	0.6273	0.1541

Таблица 9. Значения стационарных вероятностей в точках Системы 2

## Характеристики системы

Хар-ка	Прибор	Расчетная формула	Сист.1
Нагрузка	П1	$y_1 = \lambda_1 \cdot b$	4.5
	Сумм	$Y = y_1$	4.5
Загрузка	П1	$\rho_1 = 1 - p_0$	0.986900
	Сумм	$\rho = \rho_1$	0.986900
Вероятность потери	П1	$\pi_1 = p_7 + p_8$	0.781400
	Сумм	$\pi = \lambda \cdot \pi_1$	0.234420
Длина очереди	П1	$l_1 = p_3 + p_4 + 2 \cdot (p_5 + p_6) + 3 \cdot (p_7 + p_8)$	2.644700
	Сумм	$l = l_1$	2.644700
Число заявок в системе	П1	$m_1 = l_1 + \rho_1$	3.631600
	Сумм	$m = m_1$	3.631600
Производительность	П1	$\lambda_{1'} = (1 - \pi_1) \cdot \lambda$	0.065580
	Сумм	$\lambda' = \lambda_{1'}$	0.065580
Коэффициент простого состояния	П1	$\eta_1 = 1 - \rho_1$	0.013100
	Сумм	$\eta = 1 - \rho$	0.013100
Время ожидания	П1	$w_1 = l_1 / \lambda_{1'}$	40.327844
	Сумм	$w = l / \lambda'$	40.327844
Время пребывания	П1	$u_1 = w_1 + b$	55.327844
	Сумм	$u = w + b$	55.327844

Таблица 10. Характеристики Системы 2

## Результаты

	Система 1	Система 2
Нагрузка	4.5	4.5
Загрузка	0.631700	0.986900
Вероятность потери	0.540410	0.234420
Длина очереди	1.381100	2.644700
Число заявок в системе	3.276200	3.631600
Производительность	0.137877	0.065580
Коэффициент простого состояния	0.368300	0.013100
Время ожидания	10.016899	40.327844
Время пребывания	25.016899	55.327844

## **Вывод**

В процессе выполнения учебно-исследовательской работы нами были рассмотрены две системы. Для каждой из систем был составлен перечень состояний, граф переходов между ними и матрица интенсивности переходов, на основе которой были получены стационарные вероятности, с помощью которых были найдены и проверены характеристики систем. Согласно заданному критерию эффективности (максимальная производительность системы) лучший результат был определен у Системы 1, так как ее производительность выше.