Университет ИТМО

Физико-технический мегафакультет

Физический факультет

Группа P3208

Студент Ступин Тимур Русланович

Преподаватель Сорокина Е. К.

К работе допущен

Работа выполнена

Отчет принят

Рабочий протокол и отчет по лабораторной работе №1

Исследование распределения случайной величины

1. Цель работы.

Исследование распределения случайной величины на примере многократных измерений определённой длинны.

2. Задачи, решаемые при выполнении работы.

1. Провести многократные измерения определенной длинны
2. Построить гистограмму распределения результатов измерения.
3. Вычислить среднее значение и дисперсию полученной выборки.
4. Сравнить гистограмму с графиком функции Гаусса с такими же, как и у экспериментального распределения средним значением и дисперсией.

3. Объект исследования.

Случайная величина – результат измерения длинны зёрен риса из одной пачки.

4. Метод экспериментального исследования.

Многократное прямое измерение длинны зёрен риса и проверка закономерностей распределения исследуемой случайной величины.

5. Рабочие формулы и исходные данные.

- Среднее арифметическое всех результатов измерений

$$\langle d \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} d_i$$

- Дисперсия

$$D(d) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (d_i - \langle d \rangle_N)^2$$

- Выборочное среднеквадратичное отклонение

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (d_i - \langle d \rangle_N)^2}$$

- Максимальное значение плотности распределения

$$\rho_{max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

- Среднеквадратичное отклонение среднего значения

$$\sigma_{\langle d \rangle} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (d_i - \langle d \rangle_N)^2}$$

- Нормальное распределение, описываемое функцией Гаусса

$$\rho(d) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(d - \langle d \rangle)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- Доверительный интервал

$$\Delta_{\langle d \rangle} = t_{\alpha,N} \cdot \sigma_{\langle d \rangle}$$

6. Измерительные приборы.

№ п/п	*Наименование*	*Тип прибора*	*Используемый диапазон*	*Погрешность прибора*
1	*штангенциркуль*	*метрический*	*0 - 10 мм*	*0,01 мм*

7. Схема установки (*перечень схем, которые составляют Приложение 1*).

Зёрна риса из одной пачки высыпаются на стол, после чего длинна самой длинной части зерна измеряется при помощи штангенциркуля и записывается в таблицу. Всего проводится 50 измерений.

8. Результаты прямых измерений и их обработки (*таблицы, примеры расчетов*).

Таблица 1 Результаты прямых измерений.

№	d_i, мм	$d_i - \langle d \rangle_N$, мм	$(d_i - \langle d \rangle_N)^2$, мм^2
1	5,20	-0,103	0,011
2	6,02	0,717	0,514
3	5,80	0,497	0,247
4	5,56	0,257	0,066
5	5,08	-0,223	0,050
6	5,80	0,497	0,247
7	5,26	-0,043	0,002
8	5,50	0,197	0,039
9	5,28	-0,023	0,001
10	5,34	0,037	0,001
11	5,38	0,077	0,006
12	6,00	0,697	0,486
13	5,30	-0,003	0,000
14	5,28	-0,023	0,001
15	5,58	0,277	0,077
16	5,54	0,237	0,056
17	5,06	-0,243	0,059
18	5,30	-0,003	0,000
19	5,30	-0,003	0,000
20	5,92	0,617	0,380
21	5,62	0,317	0,100
22	5,70	0,397	0,157
23	5,10	-0,203	0,041
24	4,80	-0,503	0,253
25	5,00	-0,303	0,092
26	5,56	0,257	0,066
27	4,42	-0,883	0,780
28	5,30	-0,003	0,000
29	5,70	0,397	0,157
30	5,06	-0,243	0,059
31	4,78	-0,523	0,274
32	5,00	-0,303	0,092
33	5,14	-0,163	0,027
34	5,26	-0,043	0,002

35	5,40	0,097	0,009
36	4,86	-0,443	0,196
37	5,30	-0,003	0,000
38	4,88	-0,423	0,179
39	5,48	0,177	0,031
40	5,18	-0,123	0,015
41	5,20	-0,103	0,011
42	4,90	-0,403	0,163
43	5,36	0,057	0,003
44	5,42	0,117	0,014
45	4,82	-0,483	0,233
46	5,06	-0,243	0,059
47	6,08	0,777	0,603
48	5,12	-0,183	0,034
49	5,16	-0,143	0,021
50	5,00	-0,303	0,092
	$\langle d\rangle_N = 5{,}303$ мм	$\sum_{i=1}^{N}(d_i - \langle d\rangle_N) = 0$ мм	$\sigma_N = 0{,}350$ мм $\rho_{max} = 1{,}140$ мм$^{-1}$

9. Расчет результатов косвенных измерений (*таблицы, примеры расчетов*).

Заполним подвал таблицы 1

Для начала вычислим среднее арифметическое всех измерений:

$$\langle d\rangle_N = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} d_i \approx 5{,}303 \text{ мм}$$

Теперь используя $\langle d\rangle_N$ вычислим дисперсию и выборочное среднеквадратичное отклонение:

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{1}{50-1}\sum_{i=1}^{50}(d_i - 5{,}303)^2} \approx 0{,}350 \text{ мм}$$

$$D(d) = \frac{1}{50-1}\sum_{i=1}^{50}(d_i - 5{,}303)^2 \approx 0{,}123 \text{ мм}^2$$

Используя значение σ_N вычислим максимальное значение плотности распределения:

$$\rho_{max} = \frac{1}{0{,}350\sqrt{2\pi}} \approx 1{,}140 \text{ мм}^{-1}$$

Теперь заполним таблицу 2

Найдём в первом столбце таблицы 1 максимальное d_{max} и минимальное d_{min} значения результатов измерений:

$$d_{max} = 6{,}080 \text{ мм} \quad d_{min} = 4{,}420 \text{ мм}$$

Разобьём промежуток $[d_{min}, d_{max}]$ на m равных интервалов Δd. Так как $\sqrt{N} = \sqrt{50} \approx 7$ примем $m = 7$ откуда получаем:

$$\Delta d = \frac{d_{max} - d_{min}}{m} = \frac{6{,}080 - 4{,}420}{7} \approx 0{,}237 \text{ мм}$$

Выделим границы интервалов, используя Δd и занесём в первый столбец таблицы 2

В общем случае:

$$d_{\text{низ}_i} = d_{\text{низ}_{i-1}}$$

$$d_{\text{верх}_i} = d_{\text{низ}_i} + \Delta d$$

Для примера рассчитаем первый интервал:

$$d_{\text{низ}} = d_{\text{мин}} = 4{,}420 \text{ мм}$$

$$d_{\text{верх}} = d_{\text{низ}} + \Delta d = 4{,}420 + 0{,}237 = 4{,}657 \text{ мм}$$

Вычислим ΔN – количество результатов измерений, попавших в каждый из интервалов, и занесём эти значение во второй столбец таблицы 2

Для примера в первый интервал [4,420; 4,657] попадает только одно значение результатов измерение: 0,420

Для каждого из интервалов вычислим опытное значение плотности вероятности и заполним третий столбец таблицы 2:

Для первого интервала получим:

$$\frac{\Delta N}{N\Delta d} = \frac{1}{50 \cdot 0{,}237} = 0{,}084 \text{ мм}^{-1}$$

Теперь для каждого интервалов вычислим значение d, соответствующее середине данного интервала и заполним четвертый столбец таблицы 2. Вычислять d будем как среднее арифметическое верхней и нижней границы интервала

Для первого интервала получим:

$$\mathrm{d} = \frac{4{,}420 + 4{,}657}{2} = 4{,}539 \text{ мм}$$

Наконец для каждого интервала вычислим значение $\rho(d)$ нормального распределения функции Гаусса и заполним последний столбец таблицы 2.

Для первого интервала получим

$$\rho(d) = \frac{1}{0{,}350 \cdot \sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(4{,}539\ -\ 5{,}303\ )^2}{2 \cdot 0{,}350^2}\right) = 0{,}105 \text{ мм}^{-1}$$

Таблица 2 Данные для построения гистограммы

Границы интервалов, мм	ΔN	$\frac{\Delta N}{N\Delta d}$, мм$^{-1}$	d, мм	ρ, мм$^{-1}$
4,420 4,657	1	0,084	4,539	0,105
4,657 4,894	5	0,422	4,776	0,366
4,894 5,131	10	0,843	5,013	0,808
5,131 5,369	16	1,349	5,250	1,127

5,369	9	0,759	5,487	0,993
5,606				
5,606	5	0,422	5,724	0,553
5,843				
5,843	4	0,337	5,961	0,195
6,080				

Заполним таблицу 3

Вычислим границы стандартных интервалов

Для первого интервала получим:

От: $\langle d\rangle_N - \sigma = 5{,}303 - 0{,}350 = 4{,}953$ мм

До: $\langle d\rangle_N + \sigma = 5{,}303 + 0{,}350 = 5{,}653$ мм

Теперь определим количество результатов измерений попавших в каждый из интервалов

Например, для первого интервала получим $\Delta N = 34$

Наконец вычислим вероятность попадания в каждый из интервалов.

Для первого интервала получим:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{34}{50} \approx 0{,}680$$

Таблица 3 Стандартные доверительные интервалы

	Интервал, мм		ΔN	$\frac{\Delta N}{N}$	P
	от	до			
$\langle d\rangle_N \pm \sigma$	4,953	5,653	34	0,680	0,683
$\langle d\rangle_N \pm 2\sigma$	4,603	6,003	46	0,920	0,954
$\langle d\rangle_N \pm 3\sigma$	4,253	6,353	49	0,980	0,997

10. Расчет погрешностей измерений (*для прямых и косвенных измерений*).

Рассчитаем среднеквадратичное отклонение среднего значения:

$$\sigma_{\langle d\rangle} = \sqrt{\frac{1}{50(50-1)}\sum_{i=1}^{50}(d_i - 5{,}303)^2} = 0{,}0495 \text{ мм}$$

Табличное значение коэффициента Стьюдента $t_{\alpha,N}$ для доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$:

$$t_{\alpha,N} = 2.0096$$

Рассчитаем доверительный интервал:

$$\Delta_{\langle d\rangle} = t_{\alpha,N} \cdot \sigma_{\langle d\rangle} = 2.0096 \cdot 0{,}0495 = 0{,}0995 \text{ мм}$$

Определим абсолютную погрешность измерения с учетом доверительного интервала $\Delta_{\langle d\rangle}$ и инструментальной погрешности $\Delta_{ид}= 0{,}01$ мм:

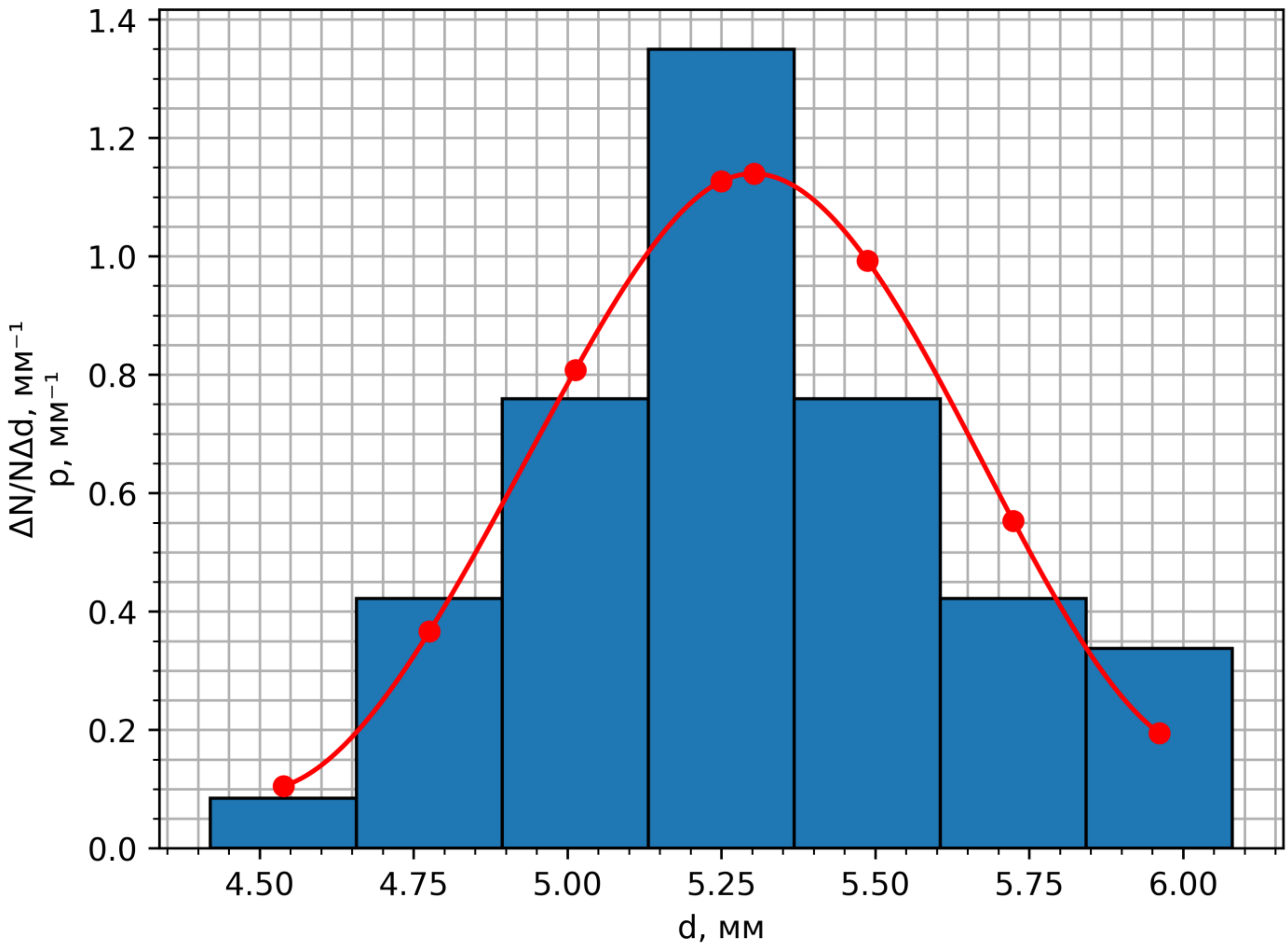
$$\Delta_d = \sqrt{\Delta_{\langle d \rangle}{}^2 + \left(\frac{2}{3}\cdot\Delta_{ид}\right)^2} = \sqrt{0{,}0995\ ^2 + \left(\frac{2}{3}\cdot 0{,}01\right)^2} \approx 0{,}0997 \text{ мм}$$

Вычислим относительную погрешность измерения:

$$\varepsilon_d = \frac{\Delta_d}{\langle d \rangle_N}\cdot 100\% = \frac{0{,}0997}{5{,}303}\cdot 100\% \approx 1{,}88\%$$

11. Графики (*перечень графиков, которые составляют Приложение 2*).

График 1 Гистограмма и функция плотности распределения



12. Окончательные результаты.

Среднее арифметическое всех результатов измерений с учетом погрешности:

$$d = (5{,}3032 \pm 0{,}0997)\text{мм}; \quad \varepsilon_d = 1{,}88\% \quad \alpha = 0{,}95$$

13. Выводы и анализ результатов работы.

В ходе работы я исследовал распределение случайной величины на примере многократных измерений определённой длинны. Я провёл многократные измерения длинны зёрен риса, вычислил среднее значение, среднеквадратичное отклонение и дисперсию полученной выборки. Разделив полученную выборку на диапазоны, я построил гистограмму плотности распределения данной выборки, после чего сравнил её с графиком функции Гаусса с таким же средним значением и дисперсией обнаружив сходство этих графиков. После этого я сравнил полученные вероятности для стандартных интервалов с табличными значениями для нормального распределения и обнаружил приближенное совпадение данных величин что подтверждает случайность измеряемой мною величины. Также я вычислил среднеквадратичное отклонение среднего значения, определил значение коэффициента Стьюдента для доверительной вероятности $\alpha = 0,95$ и рассчитал доверительный интервал, после чего на основании этих данных произвёл вычисление абсолютной и относительной погрешности измерений. Относительная погрешность составила 1,88% что говорит о достаточно высокой точности произведённых измерений.