**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»**

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

**Лабораторная работа №6**

По информатике

Работа с системой компьютерной вёрстки TEX

Вариант №96

Выполнил:

Ступин Тимур Русланович

Группа № P3108

Проверил:

Балакшин Павел Валерьевич

Кандидат технических наук

Доцент факультета ПИиКТ

Санкт-Петербург 2023

*б) Пусть $K_0$ состоит из трех вершин правильного треугольника площади 1. Найдите площадь наименьшего выпуклого многоугольника, содержащего множество $K_n (n = 1, 2, ...)$.*

*В следующих трех пунктах $K_0$ - множество четырех вершин правильного тетраэдра объема 1.*

*в)Рассмотрим наименьший выпуклый многогранник, содержащий все точки множества $K_1$. Сколько и каких граней у этого многогранника?*

*г)Чему равен объем этого многогранника?*

*д)Найдите объем наименьшего ввыпуклого многогранника, содержащего множество $K_n (n = 2, 3, ...)$.*

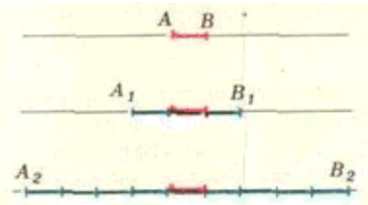


Рис. 1:

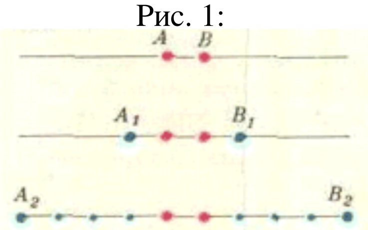


Рис. 2:

| $n$ | $3^n$ |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 9 |
| 3 | 27 |
| 4 | 81 |
| 5 | 243 |
| 6 | 729 |
| 7 | 2187 |
| 8 | 6561 |
| 9 | 19683 |

Таблица 1:

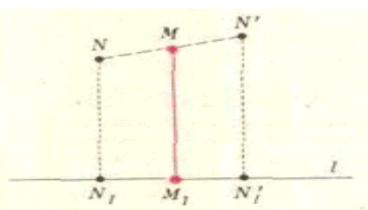


Рис. 3:

Прежде чем читать решение дальше, нарисуйте фигуры $W(\Phi)$ и $W^2(\Phi)$, если $\Phi$ - пара точек; отрезок; прямоугольник; четыре вершины прямоугольника; три вершины треугольника. А каково $W(\Phi)$, если $\Phi$ - куб? восемь вершин куба?

Найчем с «одномерного» случая, когда фигура $\Phi$ лежит на прямой. Этот случай нужен для решения задачи а), но, как мы увидим, он пригодиться и в более трудных задачах.

Пусть наша фигура - это отрезок $\Pi = [AB]$ длинны $d$ с серединой в точке $O$. Тогда $\Phi(\Pi) = [A_1B_1]$ - отрезок длинны $3d$ с серединой в той же точке $O$. Отсюда сразу следует, что $\Phi^2(\Pi) = A_2B_2$, где $|A_2B_2| = 9d$, и вообще $\Phi^n(\Pi) = A_nB_n$, где $|A_nB_n| = 3^n d$, причем все отрезки $[A_nB_n]$ имеют середину в той же точке $O$ (рис. 1).

Будем в дальнейшем образ фигуры $\Phi$, имеющей центр симметрии $O$, при гомотетии с коэффициентом $k$ и центром $O$ обозначать через $k\Phi$. Мы выяснили, сто если $\Pi$ - отрезок, то $W(\Pi) = 3\Pi$ и вообще

$$W^n(\Pi) = 3^n\Pi. \tag{3}$$

Забегая вперед, заметим, что это верно для любой *центрированно-симмметричной выпуклой* фигуры $\Pi$. Но прежде закончим с одномерным случаем - ответим на вопрос а).

а) Пусть $K_0 = (A, B), |AB| = 1$. Согласно (2), где $\Phi = (A, B), \Pi = \Phi' = [AB]$,

$$K_n = \Phi^n(K_0) \subset \Phi^n(\Pi) = 3^n\Pi. \tag{4}$$

При этом ясно, что $K_n$ содержит все точки отрезка $[A_nB_n] = 3^n\Pi$, находящиеся на целочисленном расстоянии от точки $A$, причем точки $A_n, B_n = 3^n A, B$ находятся от $A$ на расстоянии $(3^n - 1)/2$ и $(3^n + 1)/2$ (рис. 2). Поскольку эти числа (Таблица 1) больше 10 000 при $n \geqslant 10$, ответ на вопрос а): $n = 10$.

В решении плоских и пространственных задач про операцию $W$ очень полезно такое свойство: *если $\Phi_l$ - проекция фигуры $\Phi$ на прямую $l$, то*

$$W(\Phi_l) = (W(\Phi))_l \tag{5}$$

(проекция $W(\Phi)$ на прямую $l$ совпадает с результатом применения $W$ к проекции $\Phi_l$) [*)] Это сразу следует из опеределения $W$ и того факта, что при проекции точки, симметричные относительно точки $M$, попадают и точки, симметричный относительно ее проекции $M_l$ (рис. 3).

Отсюда вытекает, что если $\Pi$ - полоса, а $3^n\Pi$ - ее образ при гомотетии с коэффициентом $3^n$ относительно центра симметрии (какой-либо *точки на средней прямой*), то выполнено соотношение ( 3). Это верно и для «пространственной полосы» $\Pi$ - множества точек, заключенных между плоскостями.

Из (2), (3), (5) и решения задачи а) следует также, что если мы заключаем фигуру $\Phi$ в *опорную полосу* $\Pi$ какого-либо направления - такую полосу $\Pi \supset \Phi$, края которой содежат все точки их $\Phi$, - то *полоса* $3^n\Pi \supset W^n(\Phi)$ *будет опорной для* $W^n(\Phi)$ (рис. 5). Это соображение, обобщающее (4), позволяет найти выпуклую оболочку $W(\Phi)$ для любой фигуры $\Phi$.

Разберем конкретные примеры.

б) Пусть $K_0 = A, B, C$ - вершины правильного треугольника, $K_n = W^n(K_0), n = 1, 2, ...$(рис. 6). Докажем, что для любого $n \geqslant 1$ выпуклая обочка множества $K_n$ получается так: нужно взять концы отрезков $3^n[AB], 3^n[AC]$ и построить выпуклый шестиугольник Ш$_n$ с вершинами в этих точках.

[*)]Проекцией пространственной фигуры $\Phi$ на прямую $l$ называется множество точек $M \in l$ таких, что плоскость, проходящая через точку $M$ и перпендикулярная к $l$, пересекается с $\Phi$.