

---

Группа Р3208

К работе допущен \_\_\_\_\_

Студенты Ступин Т.Р. Петров В.М. Есоян В.С.

Работа выполнена \_\_\_\_\_

Преподаватель Сорокина Е. К.

Отчет принят \_\_\_\_\_

## **Рабочий протокол и отчет по лабораторной работе №2**

---

Исследование скольжения тележки по наклонной плоскости

---

## 1. Цель работы.

1. Эксперимент по проверке равноускоренного движения тележки по наклонной плоскости
2. Измерение модуля ускорения свободного падения

## 2. Задачи, решаемые при выполнении работы.

1. Измерение времени движения тележки по рельсу с фиксированным углом наклона
2. Измерение времени движения тележки по рельсу при разных углах наклона рельса к горизонту
3. Исследование движения тележки при фиксированном угле наклона рельса. Проверка равноускоренного движения тележки
4. Исследование зависимости ускорения тележки от угла наклона рельса к горизонту. Определение ускорения свободного падения

## 3. Объект исследования.

Ускорение тележки при различных углах наклона

## 4. Метод экспериментального исследования.

Многократное измерение промежутков времени, за которое тележка проходит заданное расстояние по наклонной плоскости при разных углах наклона

## 5. Рабочие формулы и исходные данные.

- Перемещение

$$Y = x_2 - x_1$$

- Полуразность квадратов значений времени

$$Z = \frac{t_2^2 - t_1^2}{2}$$

- Абсолютная погрешность  $Y$

$$\Delta_Y = \sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2\right)^2}$$

- Абсолютная погрешность  $Z$

$$\Delta_Z = \sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial t_1} \cdot \Delta t_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial t_2} \cdot \Delta t_2\right)^2}$$

- Относительная погрешность  $Y$

$$\varepsilon_Y = \frac{\Delta_Y}{Y} \cdot 100\%$$

- Относительная погрешность  $Z$

$$\varepsilon_Z = \frac{\Delta_Z}{Z} \cdot 100\%$$

- Коэффициент  $\alpha$  в зависимости  $Y = \alpha Z$

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^N Z_i Y_i}{\sum_{i=1}^N Z_i^2}$$

- Среднеквадратичное отклонение коэффициента  $\alpha$

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - a \cdot Z_i)^2}{(N-1) \cdot \sum_{i=1}^N Z_i^2}}$$

- Абсолютная погрешность коэффициента  $a$

$$\Delta_a = 2\sigma_a$$

- Относительная погрешность ускорения

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta_a}{a} \cdot 100\%$$

- Синуса угла наклона рельса к горизонту

$$\sin \alpha = \frac{(h_0 - h) - (h'_0 - h')}{x' - x}$$

- Среднее значение ускорения

$$\langle a \rangle = \frac{2(x_2 - x_1)}{\langle t_2 \rangle^2 - \langle t_1 \rangle^2}$$

- Погрешность значения ускорения для каждой серии измерений

$$\Delta a = \langle a \rangle \cdot \sqrt{\frac{(\Delta x_{i2})^2 + (\Delta x_{i1})^2}{(x_2 - x_1)^2} + 4 \cdot \frac{(\langle t_1 \rangle \Delta t_1)^2 + (\langle t_2 \rangle \Delta t_2)^2}{(\langle t_2 \rangle^2 - \langle t_1 \rangle^2)^2}}$$

- Коэффициент из теоретической линейной зависимости  $a = A + B \sin \alpha$

$$B \equiv g = \frac{\sum_{i=1}^N (a_i \cdot \sin \alpha_i) - \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N a_i \cdot \sum_{i=1}^N \sin \alpha_i}{\sum_{i=1}^N \sin^2 \alpha_i - \frac{1}{N} \cdot (\sum_{i=1}^N \sin \alpha_i)^2}$$

- Коэффициент из теоретической линейной зависимости  $a = A + B \sin \alpha$

$$A = \frac{1}{N} \cdot \left( \sum_{i=1}^N a_i - B \cdot \sum_{i=1}^N \sin \alpha_i \right)$$

- Среднеквадратичное отклонение ускорения свободного падения

$$\sigma_g = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (a_i - (A + B \cdot \sin \alpha_i))^2}{(\sum_{i=1}^N \sin^2 \alpha_i - \frac{1}{N} \cdot (\sum_{i=1}^N \sin \alpha_i)^2) \cdot (N-2)}}$$

- Абсолютная погрешность коэффициента  $g$

$$\Delta_g = 2\sigma_g$$

- Относительная погрешность  $g$

$$\varepsilon_g = \frac{\Delta_g}{g} \cdot 100\%$$

- Среднее значение времени

$$\langle t \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N t_i}{N}$$

- Среднеквадратичное отклонение  $\langle t \rangle$

$$\sigma_{\langle t \rangle} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (t_i - \langle t \rangle_N)^2}$$

- Доверительный интервал для  $\langle t \rangle$

$$\Delta_{\langle t \rangle} = t_{\alpha, N} \cdot \sigma_{\langle t \rangle}$$

- Количество измерений

$$N = 5$$

- Табличное значение ускорения свободного падения

$$g_{\text{табл}} = 9,8195 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

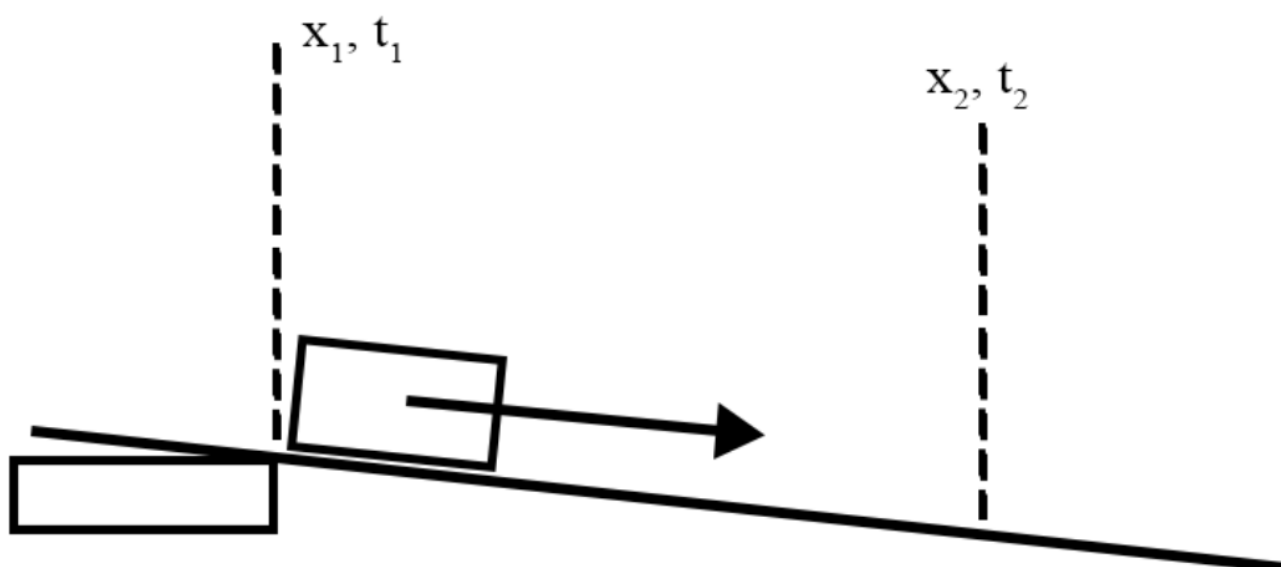
## 6. Измерительные приборы.

Таблица 1 Измерительные приборы

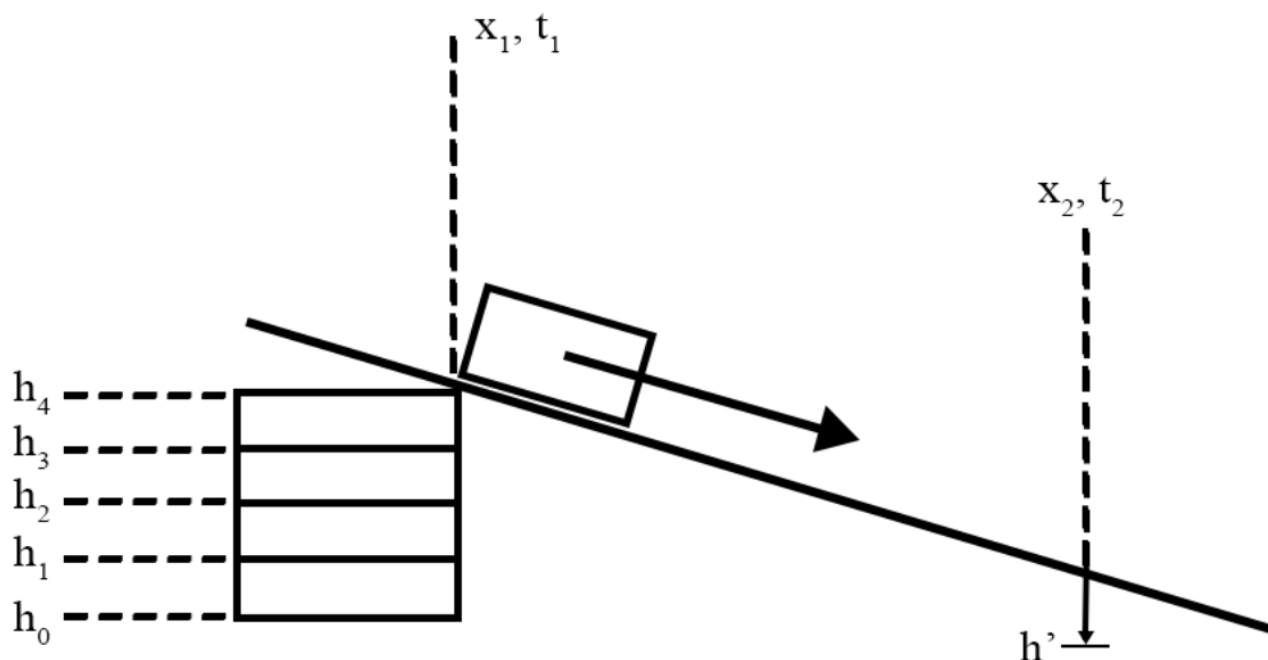
Наименование	Предел измерений	Цена деления	Класс точности	Погрешность
Линейка на рельсе	1,3 м	1 см/дел	-	5,0 мм
Линейка на угольнике	250 мм	1 мм/дел	-	0,5 мм
ПКЦ-3 в режиме секундомера	100 с	0,1 с	-	0,1 с

## 7. Схема установки (перечень схем, которые составляют Приложение 1).

### Схема для задания 1



## Схема для задания 2



### 8. Результаты прямых измерений и их обработки (таблицы, примеры расчетов).

**Задание 1.** Исследование движения тележки при фиксированном угле наклона рельса. Проверка равноускоренного движения тележки

Таблица 2

$x, \text{ м}$	$x', \text{ м}$	$h_0, \text{ мм}$	$h'_0, \text{ мм}$
$0,220 \pm 0,005$	$1,000 \pm 0,005$	$222,0 \pm 0,5$	$222,0 \pm 0,5$

Таблица 3 Результаты прямых измерений (Задание 1)

№	Измеренные величины				Рассчитанные величины	
	$x_1, \text{ м}$	$x_2, \text{ м}$	$t_1, \text{ с}$	$t_2, \text{ с}$	$x_2 - x_1, \text{ м}$	$\frac{t_2^2 - t_1^2}{2}, \text{ с}^2$
1	0,15	0,40	1,1	2,2	$0,250 \pm 0,004$	$1,815 \pm 0,164$
2	0,15	0,50	1,1	2,6	$0,350 \pm 0,004$	$2,775 \pm 0,188$
3	0,15	0,70	1,1	3,1	$0,550 \pm 0,004$	$4,200 \pm 0,219$
4	0,15	0,90	1,1	3,6	$0,750 \pm 0,004$	$5,875 \pm 0,251$
5	0,15	1,10	1,0	4,0	$0,950 \pm 0,004$	$7,500 \pm 0,275$

**Задание 2.** Исследование зависимости ускорения тележки от угла наклона рельса к горизонту.

Определение ускорения свободного падения

Таблица 4 Результаты прямых измерений (Задание 2)

$n_p$	$h$ , мм	$h'$ , мм	№	$t_1$ , с	$t_2$ , с
1	213	221	1	1,1	4,0
			2	1,1	4,0
			3	1,1	4,0
			4	1,1	4,0
			5	1,1	4,0
2	203	220	1	0,8	2,9
			2	0,8	2,9
			3	0,8	2,9
			4	0,8	2,9
			5	0,9	3,0
3	193	219	1	0,7	2,4
			2	0,7	2,4
			3	0,7	2,4
			4	0,7	2,5
			5	0,7	2,4
4	183	218	1	0,6	2,1
			2	0,6	2,1
			3	0,6	2,1
			4	0,6	2,1
			5	0,6	2,1

5	173	217	1	0,6	1,8
			2	0,6	1,8
			3	0,5	1,8
			4	0,6	1,9
			5	0,5	1,8

## 9. Расчет результатов косвенных измерений (таблицы, примеры расчетов).

**Задание 1.** Исследование движения тележки при фиксированном угле наклона рельса. Проверка равноускоренного движения тележки.

Заполним таблицу 3

По результатам прямых измерений рассчитаем величины:

$$Y = x_2 - x_1$$

$$Z = \frac{(t_2^2 - t_1^2)}{2}$$

и заполним последние два столбца таблицы 3

Для примера рассчитаем для первой строки

$$Y = 0,40 - 0,15 = 0,25 \text{ м}$$

$$Z = \frac{(2,2^2 - 1,1^2)}{2} = 1,815 \text{ с}^2$$

Теперь вычислим ускорение тележки методом наименьших квадратов

Вычислим коэффициент  $a$  в теоретической зависимости  $Y = aZ$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^5 Z_i Y_i}{\sum_{i=1}^5 Z_i^2} = 0,129 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

**Задание 2.** Исследование зависимости ускорения тележки от угла наклона рельса к горизонту.

Определение ускорения свободного падения

Заполним таблицу 5

Для каждой серии измерений вычислим  $\sin \alpha$  и занесём результаты во второй столбец

В качестве примера вычислим  $\sin \alpha$  для первой серии измерений

$$\sin \alpha = \frac{(222,0 - 213,0) - (222,0 - 221,0)}{1,0 \cdot 10^3 - 0,22 \cdot 10^3} = 0,012$$

Теперь вычислим средние значения времени  $\langle t_1 \rangle$  и  $\langle t_2 \rangle$ , заполнив третий и четвёртый столбцы

Для первой серии измерений получим

$$\langle t_1 \rangle = \frac{\sum_{i=1}^5 t_{1i}}{5} = 1,1 \text{ с} \quad \langle t_2 \rangle = \frac{\sum_{i=1}^5 t_{2i}}{5} = 4,0 \text{ с}$$

Вычислим среднее значение ускорения  $\langle a \rangle$  и его погрешность  $\Delta a$ , заполнив последний столбец

Для примера вычислим значения в первой строке

$$\langle a \rangle = \frac{2(1,1 - 0,15)}{4,0^2 - 1,1^2} = 0,128 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$\Delta a = 0,128 \cdot \sqrt{\frac{0,005^2 + 0,005^2}{(1,1 - 0,15)^2} + 4 \cdot \frac{(1,1 \cdot 0,082)^2 + (4,0 \cdot 0,082)^2}{(4,0^2 - 1,1^2)^2}} = 0,006 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Теперь для теоретической линейной зависимости  $a = A + B \sin \alpha$  вычислим коэффициенты А и В

$$B \equiv g = \frac{\sum_{i=1}^5 (a_i \cdot \sin \alpha_i) - \frac{1}{5} \cdot \sum_{i=1}^5 a_i \cdot \sum_{i=1}^5 \sin \alpha_i}{\sum_{i=1}^5 \sin^2 \alpha_i - \frac{1}{5} \cdot (\sum_{i=1}^5 \sin \alpha_i)^2} = 10,7247 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$A = \frac{1}{5} \cdot \left( \sum_{i=1}^5 a_i - 10,7247 \cdot \sum_{i=1}^5 \sin \alpha_i \right) = -0,0058$$

Таблица 5 Результаты расчетов (Задание 2)

$N_{\text{пл}}$	$\sin \alpha$	$\langle t_1 \rangle \pm \Delta_{t_1}, \text{с}$	$\langle t_2 \rangle \pm \Delta_{t_2}, \text{с}$	$\langle a \rangle \pm \Delta a, \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
1	0,012	$1,100 \pm 0,082$	$4,000 \pm 0,082$	$0,128 \pm 0,006$
2	0,023	$0,820 \pm 0,085$	$2,920 \pm 0,085$	$0,242 \pm 0,016$
3	0,035	$0,700 \pm 0,082$	$2,420 \pm 0,085$	$0,354 \pm 0,028$
4	0,046	$0,600 \pm 0,082$	$2,100 \pm 0,082$	$0,469 \pm 0,041$
5	0,058	$0,560 \pm 0,087$	$1,820 \pm 0,085$	$0,634 \pm 0,069$
$N_{\text{пл}}$ – количество пластин $\langle t_{1,2} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_{1i,2i}$				

## 10. Расчет погрешностей измерений (для прямых и косвенных измерений).

### Задание 1

Вычислим погрешность для косвенных измерений Y и Z

Начнём с относительной погрешности  $\Delta_Y$

В формуле  $f_1$  это функция двух переменных  $x_1$  и  $x_2$  определяющая значение Y, таким образом

$$f_1 = x_2 - x_1$$

Вычисляя частные производные по переменным  $x_1$  и  $x_2$  получаем:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -1 \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1$$

Абсолютную погрешность  $\Delta x_1$  и  $\Delta x_2$  вычислим, используя инструментальную погрешность  $\Delta_{\text{и}}$  линейки на рельсе из таблицы 1 и пересчитав её для доверительной вероятности  $\alpha = 0,95$

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \frac{2}{3} \cdot 0,005 = 0,003 \text{ м}$$



Получаем итоговую формулу для относительной погрешности  $Y$

$$\Delta_Y = 0,003 \cdot \sqrt{1 + 1} = 0,004 \text{ м}$$

Аналогично рассчитываем относительную погрешность  $\Delta_Z$

$$f_2 = \frac{t_2^2 - t_1^2}{2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t_1} = -t_1 \quad \frac{\partial f_2}{\partial t_2} = t_2$$

$$\Delta t_1 = \Delta t_2 = \frac{2}{3} \cdot 0,1 = 0,07 \text{ с}$$

$$\Delta_Z = 0,07 \cdot \sqrt{t_1^2 + t_2^2}$$

Для примера, в первой строке получим

$$\Delta_Z = 0,07 \cdot \sqrt{1,1^2 + 2,2^2} = 0,17 \text{ с}$$

Теперь найдём среднеквадратичное отклонение  $\sigma_a$  для коэффициента  $a$  в теоретической зависимости  $Y = aZ$

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (Y_i - 0,129 \cdot Z_i)^2}{(5 - 1) \cdot \sum_{i=1}^5 Z_i^2}} = 0,001 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Рассчитаем абсолютную погрешность коэффициента  $a$  для доверительной вероятности  $\alpha = 0,90$

$$\Delta_a = 2 \cdot 0,001 = 0,002 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Наконец найдём относительную погрешность ускорения

$$\varepsilon_a = \frac{0,002}{0,129} \cdot 100\% = 1,746\%$$

## Задание 2

Опишем процесс вычисления погрешности для  $\langle t_1 \rangle$  и  $\langle t_2 \rangle$  на примере первой серии измерений

Начнём с  $\langle t_1 \rangle$

Рассчитаем среднеквадратичное отклонение среднего значения:

$$\sigma_{\langle t_1 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{5(5 - 1)} \sum_{i=1}^5 (t_{1i} - 1,1)^2} = 0 \text{ с}$$

Табличное значение коэффициента Стьюдента  $t_{\alpha, N}$  для доверительной вероятности  $\alpha = 0,90$ :

$$t_{\alpha, N} = 2.132$$

Рассчитаем доверительный интервал:

$$\Delta_{\langle t_1 \rangle} = t_{\alpha, N} \cdot \sigma_{\langle t_1 \rangle} = 2.132 \cdot 0 = 0 \text{ с}$$

Определим абсолютную погрешность измерения с учетом доверительного интервала  $\Delta_{\langle t_1 \rangle}$  и инструментальной погрешности  $\Delta_{\text{ит}} = 0,1 \text{ с}$ :

$$\Delta_{t_1} = \sqrt{\Delta_{\langle t_1 \rangle}^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot \Delta_{ит}\right)^2} = \sqrt{0^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot 0,1\right)^2} = 0,082 \text{ с}$$

Расчёты для  $\langle t_2 \rangle$  аналогичны

Наконец вычислим среднеквадратичное отклонения ускорения свободного падения  $g$  (коэффициента  $B$ )

$$\sigma_g = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (a_i - (-0,0058 + 10,7247 \cdot \sin \alpha_i))^2}{(\sum_{i=1}^5 \sin^2 \alpha_i - \frac{1}{5} \cdot (\sum_{i=1}^5 \sin \alpha_i)^2) \cdot (5 - 2)}} = 0,5173 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Определим абсолютную погрешность коэффициента  $g$  для доверительной вероятности  $\alpha = 0,90$

$$\Delta_g = 2 \cdot 0,5173 = 1,0346 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Также вычислим относительную погрешность  $g$

$$\varepsilon_g = \frac{1,0346}{10,7247} \cdot 100\% = 9,65\%$$

Вычислим абсолютное отклонение экспериментального значения ускорения свободного падения  $g$  от его табличного значения  $g_{\text{табл}}$  для Санкт-Петербурга

$$\Delta_{g_{\text{табл}}} = |g - g_{\text{табл}}| = |10,7247 - 9,8195| = 0,9052 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

А также относительное отклонение от табличного значения

$$\varepsilon_{g_{\text{табл}}} = \frac{\Delta_{g_{\text{табл}}}}{g_{\text{табл}}} \cdot 100\% = \frac{0,9052}{9,8195} \cdot 100\% = 9,22\%$$

## 11. Графики (перечень графиков, которые составляют Приложение 2).

График 1. Зависимость  $Y$  от  $Z$

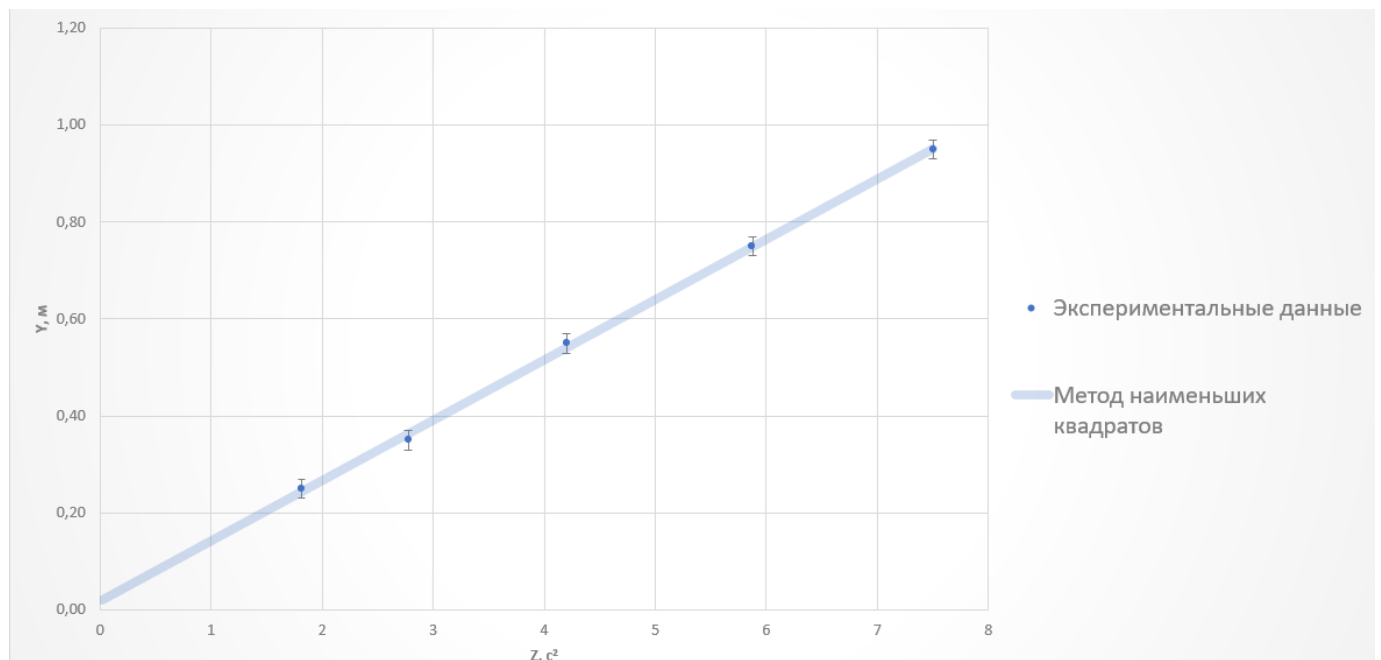
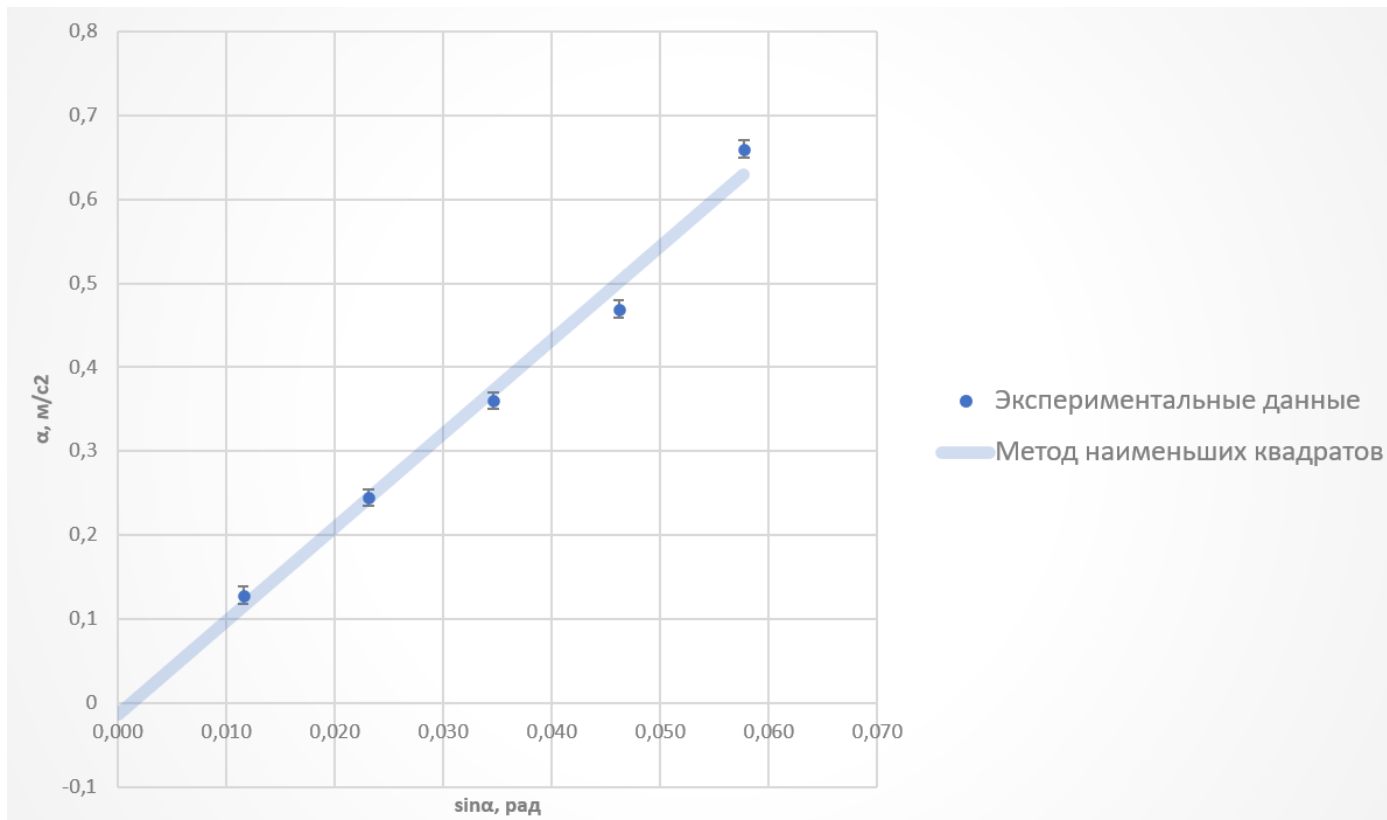


График 2. Зависимость  $\alpha$  от  $\sin\alpha$



## 12. Окончательные результаты.

- Ускорение из задания 1

$$a = (0,129 \pm 0,002) \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \quad \varepsilon_a = 1,746\% \quad \alpha = 0,90$$

- Вычисленное значение ускорения свободного падения

$$g = (10,7247 \pm 1,0346) \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \quad \varepsilon_g = 9,65\% \quad \alpha = 0,90$$

- Абсолютное и относительное отклонение измеренного ускорения свободного падения от его табличного значения

$$\Delta_{g_{\text{табл}}} = 0,9052 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \quad \varepsilon_{g_{\text{табл}}} = 9,22\%$$

## 13. Выводы и анализ результатов работы

Во время выполнения лабораторной работы были проведены необходимые измерения. Таким образом, мы исследовали движение тележки по наклонной плоскости, проверили, что оно равноускоренное (на основе графика №2, т. к. с учётом погрешности ускорения, зависимость получилась линейной), а также определили величину ускорения свободного падения.

Абсолютная погрешность полученного ускорения свободного падения примерно равна абсолютному отклонению относительно табличного значения  $g_{\text{табл}}$  для Санкт-Петербурга. Поэтому можно считать, что полученная величина — достоверная.