Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Проектная работа

по физике

Моделирование движения небесных тел

Выполнил:

Ступин Тимур Русланович

Группа № P3208

Поток № 1.3

Преподаватель:

Сорокина Елена Константиновна

Санкт-Петербург 2024

Содержание

Введение 3

Цель 3

Задачи 3

Теоретическая часть 4

Основные понятия 4

Небесные системы координат 5

Орбитальные элементы 6

Используемые константы 7

Вычисление положения Земли 9

Суточное движения Солнца для наблюдателя на поверхности Земли 16

Вычисление положения Луны 19

Практическая часть 20

Вывода и анализ результатов 21

Приложения 21

Введение

Астрономия – один из древнейших разделов физики, изучающий движение небесных тел и их взаимодействие. Эти исследования очень важны, так как понимание принципов движения небесных тел, и в особенности Земли и Луны позволяет описать многие природные явления, такие как смена времён года, приливы и отливы, затмения. Многие великие учёные, такие как Ньютон, Кеплер, Коперник внесли свой вклад в изучение характера движения небесных тел, открыв фундаментальные законы, которые позволили описать орбиты планет и их спутников строго математически. В наше время, с появлением современных компьютеров, появилась возможность использовать эти законы и уравнения для полноценного моделирования движения небесных тел, чему и посвящена данная работа.

Цель

Математическое описание движения Земли вокруг Солнца, Луны вокруг Земли, а также движения Солнца по отношению к наблюдателю на поверхности Земли, основываясь на фундаментальных законах классической физики. В рамках работы данную математическую модель планируется использовать при разработке интерактивного сайта для визуализации движения описанных небесных тел и расчёта параметров их орбит.

Задачи

1. Используя фундаментальные законы классической физики описать:
   a. Движение Земли вокруг Солнца
   b. Суточное движения Солнца для наблюдателя на поверхности Земли
   c. Движение Луны вокруг Земли
2. Разработать интерактивный сайт, на котором будет реализована следующая функциональность:
   a. Возможность смены режимов отображения для визуализации движения Земли и Луны вокруг Солнца или суточного движения Солнца
   b. Возможность запускать симуляцию, которая заключается в анимации движения небесных тел с возможностью регулирования скорости течения времени
   c. Вывод основных орбитальных элементов описываемых небесных тел для возможности отслеживания их изменения в ходе симуляции
   d. Возможность задавать положение наблюдателя на поверхности Земли и его часового пояса при работе в режиме симуляции суточного движения Солнца

Теоретическая часть

Обычно, небесные тела вращаются вокруг Солнца по эллиптическим орбитам. Возмущения от других планет вызывают небольшие отклонения от этой эллиптической орбиты, но невозмущенная эллиптическая орбита может использоваться в качестве первого, а иногда и окончательного приближения. Если расстояние от Солнца до планеты всегда одинаково, то планета движется по круговой орбите. Ни одна планета этого не делает, но орбиты Венеры и Нептуна очень близки к окружностям. Если эллиптическая орбита очень вытянута, то она лучше аппроксимируется как парабола. Такие орбиты чаще всего бывают у комет. В случае рассматриваемой мною орбиты Земли и Луны будет достаточно эллиптического приближения.

Основные понятия

Введём основные понятия, используемые при описании движения небесного тела вокруг Солнца:

Перицентр и *апоцентр* – точки орбиты небесного тела, ближайшая к центральному телу и наиболее удалённая от него соответственно.

Перигелий и *афелий* – это точки орбиты, в которых планета находится ближе всего к Солнцу или дальше всего от него. (Рисунок 1)

Перигей и *апогей* – это точки орбиты Луны (или орбиты искусственного спутника Земли), которые находятся ближе всего к Земле и дальше всего от нее. (Рисунок 2)

Небесная сфера – воображаемая сфера произвольного радиуса вокруг наблюдателя, на которую проецируются небесные тела. (Рисунок 3)

Небесный экватор – это экваториальная плоскость Земли, спроецированная на небесную сферу. (Рисунок 3)

Эклиптика – это плоскость орбиты Земли. Эта плоскость наклонена примерно на 23.4 градуса к небесному экватору. (Рисунок 4) Она пересекает небесный экватор в двух точках: точке весеннего равноденствия и точке осеннего равноденствия (

Рисунок 5). Отмечу, что точка весеннего равноденствия часто является точкой отсчёта в различных небесных системах координат.

Звёздное время s – часовой угол точки весеннего равноденствия. Различают *местное звёздное время* – часовой угол точки весеннего равноденствия для данного места и *гринвичское звёздное время* – аналогичная величина на гринвичском меридиане.

Небесные системы координат

Экваториальная система координат – система небесных координат, в которой фундаментальной плоскостью является плоскость небесного экватора. (Рисунок 6) Положение небесного тела в данной системе координат описывается двумя углами:

В качестве первого используется *склонением* δ, которое равно углу между плоскостью экватора и направлением на светило, причём для светил в северном полушарии эта величина положительна, а в южном – отрицательна. Склонение светила лежит в диапазоне от $-90°$ до $+90°$.

Второй же угол зависит от типа экваториальной системы координат, которая бывает первой и второй.

В случае первого типа второй координатой выступает *часовой угол* t который равен длине дуги экватора от небесного меридиана до круга склонения светила и отсчитывается в направлении вращения небесной сферы.

Для второго типа используется *прямое восхождение* α, которое равно длине дуги экватора от точки весеннего равноденствия до круга склонения светила и отсчитывается против направления вращения небесной сферы.

Принципиальное отличие первой системы координат от второй в том, что первая зависит от суточного вращения Земли, в то время как вторая нет.

Горизонтальная система координат – система небесных координат, в которой основной плоскостью является плоскость математического горизонта, а полюсами — зенит и надир. (Рисунок 11)(Рисунок 12). Положение небесного тела в данном случаем описывается при помощи *высоты над горизонтом* h и *азимута* A.

Высота над горизонтом – это величина дуги от плоскости математического горизонта до направления на светило. Она изменяется от $-90°$ в направлении на надир до $+90°$ в направлении на зенит.

Азимут – это дуга математического горизонта от точки юга до вертикала светила. Азимуты отсчитываются в сторону суточного вращения небесной сферы, то есть к западу от точки юга, в пределах от $0°$ до $360°$

Данная система координат обычно используется для описания положения небесного тела по отношению к наблюдателю на поверхности Земли.

Эклиптическая система координат – это система небесных координат, в которой основной плоскостью является плоскость эклиптики, а полюсом – полюс эклиптики. (Рисунок 7). Положение светила в данном случае описывается двумя координатами: *эклиптической широтой* β и *эклиптической долготой* λ.

Эклиптическая широта – это угол между плоскостью эклиптики и направлением на светило. Она отсчитывается в пределах от $0°$ до $+90°$ к северному полюсу эклиптики и от $0°$ до $-90°$ к южному полюсу эклиптики.

Эклиптическая долгота – это угол между направлением на точку весеннего равноденствия и плоскостью круга широты светила. Она отсчитывается в сторону видимого годового движения Солнца по эклиптике, то есть к востоку от точки весеннего равноденствия в пределах от 0° до 360°.

Помимо различных систем координат выделяют также различные точки отсчёта, для каждой из которых можно определить положение небесного тела относительно неё.

Гелиоцентрическим называют положение относительно Солнца

Геоцентрическим называют положение относительно центра Земли

Топоцентрическим называют положение относительно наблюдателя на поверхности Земли

Орбитальные элементы

Большая полуось a – в случае эллиптической орбиты (который я и рассматриваю) это большая полуось эллипса

Эксцентриситет e – это параметр, характеризующий вытянутость орбиты, и вычисляющийся как:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

где b – малая полуось эллипса, a – большая полуось эллипса (Рисунок 8).

Наклонение орбиты i – угол между плоскостью орбиты и базовой плоскостью относительно которой ведётся отсчёт. (Рисунок 9)

Среднее движение – средняя угловая скорость движения тела по орбите. Одним из способов её вычисления является формула:

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$$

где μ – произведение гравитационной постоянной G на массу гравитирующего тела M, a – большая полуось

Эксцентрическая аномалия E – угловой параметр, определяющий положение тела, движущегося по эллиптической орбите. (Рисунок 10)

Средняя аномалия M – произведение среднего движения на интервал времени после прохождения перицентра. Таким образом, средняя аномалия есть угловое расстояние от перицентра гипотетического тела, движущегося с постоянной угловой скоростью, равной среднему движению.

Истинная аномалия ϑ – угол между направлениями на перицентр и текущее положение тела, измеряемый из фокуса эллипса (точки, вокруг которой движется тело). (Рисунок 13)

Долгота восходящего узла Ω – угол в базовой плоскости, образуемый между базовым направлением на нулевую точку и направлением на точку восходящего узла орбиты, в которой орбита пересекает базовую плоскость в направлении с юга на север. (Рисунок 13)

Аргумент перицентра ω – угол между направлениями из притягивающего центра на восходящий узел орбиты и на перицентр (Рисунок 13)

Долгота перицентра ϖ – угол между направлением на нулевую точку и направлением на точке перицентра (Рисунок 13)

Средняя долгота L – эклиптическая долгота, на которой бы находилось обращающееся тело, если бы оно двигалось по невозмущённой круговой орбите. Может быть вычислена как:

$$L = \varpi + M$$

Используемые константы

Все орбитальные элемента определены для 2024-го года

- Эксцентриситет орбиты Земли

$$e_З = 0.0167$$

- Эксцентриситет орбиты Луны

$$e_Л = 0.0549$$

- Большая полуось орбиты Земли

$$a_З = 149597870700 \text{ м} = 1\, а.е.$$

- Большая полуось орбиты Луны

$$a_Л = 384400000 \text{ м}$$

- Период обращения Земли вокруг Солнца

$$T_З = 31556925.2030 \text{ с}$$

- Период обращения Луны вокруг Земли

$$T_Л = 2360591.424 \text{ с}$$

- Долгота перицентра Земли

$$\overline{\omega}_З = 4.9460 \text{ рад}$$

- Аргумент перицентра Луны

$$\omega = 5.5528 \text{ рад}$$

- Долгота восходящего узла Луны

$$\Omega = 2.1831 \text{ рад}$$

- Время прохождения перигелия для Земли

$$t_{0_З} = 03.01.2024\ 00{:}39\ UT$$

- Время прохождения перигелия для Луны

$$t_{0_Л} = 21.01.2024\ 21{:}53\ UT$$

- Наклонение орбиты Луны

$$i_Л = 0.0898 \text{ рад}$$

- Угол наклона эклиптики

$$\varepsilon = 0.4091 \text{ рад}$$

Вычисление положения Земли

Приступим наконец к решению поставленной задачи. Начнём с описания движения Земли вокруг Солнца.

Эта задача представляет собой задачу двух тел, которая в классической механике состоит в определении характера движения двух материальных точек, которые взаимодействуют друг с другом. Так как масса Солнца значительно превышает массу Земли, то задача может быть упрощена и сведена к задаче одного тела, а именно её частному случаю: Кеплеровой задаче. Суть этой задачи в описании движения тела, которое взаимодействует с внешним полем посредством центральной силы F, изменяющейся обратно пропорционально квадрату расстояния между телом (Землёй) и неким центром (Солнцем). Данная сила это в нашем случаем не что иное как сила притяжения, возникающая между Землёй и Солнцем.

Приступим к решению задачи Кеплера

Для начала запишем закон сохранения момента импульса, известный нам из динамики вращательного движения:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = const$$

Перепишем его для модуля момента импульса, используя момент инерции и угловую скорость:

$$L = I\omega = mr^2\omega = const$$

Здесь m – это масса двигающегося тела (в нашем случае это масса Земли), r – расстояние от Земли до Солнца (оно меняется со временем), ω – угловая скорость.

Так как мы стремимся получить координаты Земли, то стоит перейти к зависимости момента импульса от угла поворота, который в случае перехода к полярным координатам однозначно определяет положение тела на плоскости при известном радиусе. Сделать это не трудно, так как известно, что угловая скорость это производна от угла по времени. Запишем это:

$$L = mr^2\frac{d\vartheta}{dt} = const$$

Стоит отметить, что угол ϑ в данном случае является истинной аномалией.

Найдём чему равно значение момента импульса. Для этого рассмотрим перигелий орбиты, в котором расстояние до Солнца минимально. Запишем величину момента импульса в этой точке используя линейную скорость тела:

$$\mathrm{L} = mr^2\omega = mr^2\frac{v}{r} = mrv$$

По второму закону Ньютона имеем:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Что в проекции на линию действия силы даёт:

$$ma = G\frac{mM}{r^2}$$

С учётом того, что m сокращается, а величина GM является константой и обычно обозначается как μ получаем следующую запись:

$$a = \frac{\mu}{r^2}$$

Сила притяжения направлена по оси между Солнцем и Землёй, а значит ускорение в формуле выше является центростремительным ускорением. Ну а из кинематики вращательного движения известно, что центростремительное ускорение может быть вычислено по формуле:

$$a = \frac{v^2}{R}$$

Где R – радиус кривизны в данной точке. В нашем случае движение происходит по эллипсу, причём рассматривается точка перигелия. Для этой точки радиус кривизны может быть вычислен как:

$$R = \alpha(1 - e^2)$$

Где a – большая полуось орбиты, e – эксцентриситет орбиты.

Собирая, всё вместе получаем:

$$\frac{\mu}{r^2} = \frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\sqrt{\mu R}}{r} = \frac{\sqrt{\mu\alpha(1 - e^2)}}{r}$$

Подставляя полученную скорость в выражение для момента импульса, получаем:

$$\mathrm{L} = mrv = mr\frac{\sqrt{\mu\alpha(1-e^2)}}{r} = m\sqrt{\mu\alpha(1-e^2)}$$

В ходе преобразований было получено вполне конкретное значение момента импульса, зависящее только от параметров орбиты, которые являются стандартными.

Подставляя это значение в записанной выше равенство для момента импульса имеем:

$$mr^2\frac{d\vartheta}{dt} = m\sqrt{\mu\alpha(1-e^2)}$$

Очевидно, что масса планеты сократиться и мы получим:

$$r^2\frac{d\vartheta}{dt} = \sqrt{\mu\alpha(1-e^2)}$$

Мы получили дифференциальное уравнение, решим его используя метод разделения переменных. Для этого оставим всё что связано со временем в левой части равенства, а то, что связано с углом в правой:

$$\frac{1}{dt} = \frac{1}{r^2 d\vartheta}\sqrt{\mu\alpha(1-e^2)}$$

Для удобства перевернём обе части равенства, записав обратные величины:

$$dt = r^2\frac{1}{\sqrt{\mu\alpha(1-e^2)}}d\vartheta$$

Теперь проинтегрируем обе части по времени и углу соответственно:

$$\int_{\mathrm{t}_0}^{t} dt = \int_0^{\vartheta} r^2\frac{1}{\sqrt{\mu\alpha(1-e^2)}}d\vartheta$$

Поясняя расстановку границ интегрирования, отмечу, что в левой части за нулевой значение угла берётся положение земли в перигелии, а в правой части необходимо ввести некоторое значение времени начала отсчёта t_0 – момент времени к который Земля находится в перигелии. Определение данного момента времени будет описано позднее.

К счастью, в правой части выражение под корнем является константой, которая выносится за знак интеграла. Значение же r является функцией от угла, так что её необходимо проинтегрировать. На данный момент оставим r под интегралом, что даст нам равенство:

$$t - \mathrm{t}_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\alpha(1-e^2)}}\int_0^{\vartheta} r^2 d\vartheta$$

Перейдём к определению зависимости радиуса r от угла ϑ. Как было сказано ранее, мы считаем орбиту эллипсом, поэтому можем записать его уравнение в полярных координатах, которое по сути и является искомой зависимостью:

$$r = \frac{\alpha(1-e^2)}{1 + e\cos\vartheta}$$

Подставив данное выражение под интеграл получаем:

$$t - \mathrm{t}_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\alpha(1-e^2)}}\int_0^{\vartheta} \left(\frac{\alpha(1-e^2)}{1 + e\cos\vartheta}\right)^2 d\vartheta$$

Что после элементарных преобразований позволяет получить:

$$t - \mathrm{t}_0 = \frac{\left(\alpha(1-e^2)\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}\int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{(1 + e\cos\vartheta)^2}$$

Для того чтобы взять данный интеграл произведём следующую подстановку:

$$\tan\frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \tan\frac{E}{2}$$

После которой интеграл довольно легко берётся, что даёт нам следующее равенство:

$$t - \mathrm{t}_0 = \sqrt{\frac{\alpha^3}{\mu}}(E - e\sin E)$$

Величина $\sqrt{\frac{\mu}{\alpha^3}}$ является средней угловой скоростью движения тела по орбите, для которой в небесной механике существует специальное название: *среднее движение*

Величина E, использованная при замене, также не случайна, это *эксцентрическая аномалия*

Также можно заметить, что при переносе $\sqrt{\frac{\alpha^3}{\mu}}$ в правую часть равенства, в левой части равенства возникает произведение времени на среднее движение, которое называют средней аномалией и обозначают как M. Записав итоговое равенство получаем:

$$E - e \sin E = M$$

Которое является ничем иным как уравнением Кеплера для эллиптического движения.

Итак, теперь всё готово к вычислению положения Земли. Для этого достаточно найти значение M, для текущего момента времени, после чего решить уравнение Кеплера, найдя E, что, если вспомнить о произведённой замене даёт нам значение истинной аномалии, на основании которого легко вычислить расстояние от Солнца до Земли, что позволяет однозначно пописать положение Земли на орбите.

Для начала вычислим значение M. Для этого воспользуемся тем, что среднее движение, которое является средней угловой скоростью, можно легко выразить через период обращения Земли вокруг Солнца, который вполне известен. Получаем следующее выражение:

$$M = \frac{2\pi}{T}(t - \mathrm{t}_0)$$

Вопрос только в нахождение значения t_0, которое, как было сказано ранее является временем прохождения Земли через точку перигелия. В среднем, Земля обычно проходит точку Перигелия в период с 2-го по 5 января, но данная оценка слишком приблизительна, так что надо вычислить более точные значения. Точные расчёты данной величины довольно сложны, поэтому лучше воспользоваться готовыми таблицами, в которых можно найти рассчитанные значения.

Итак, значение M теперь может быть рассчитано для любого момента времени. Приступим к решению уравнения Кеплера. Здесь всё тоже не так просто, так как аналитического решения данное уравнение не имеет. Однако с лёгкостью можно использовать численные методы. В общем случае для этого используются разложения в ряды Фурье, однако для эллиптической орбиты можно использовать более простой метод неподвижной точки, который заключается в следующем:

1. За начальное приближение возьмём $E_0 = M$
2. Для каждой последующей итерации выполняем: $E_{n+1} = e \sin E_n + M$

При большом количестве итераций данные метод даёт более чем достаточную точность в рамках решаемой задачи.

Теперь достаточно произвести обратную замену, чтобы найти значение истинной аномалии:

$$\vartheta = 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \tan\frac{E}{2}\right)$$

Осталось найти расстояние r, формула для которого уже описывалась выше:

$$r = \frac{\alpha(1-e^2)}{1+e\cos\vartheta}$$

Итак, нами были получены координаты Земли в плоскости её орбиты (эклиптики) в полярных координатах с осью, направленной на перигелий. Для того чтобы иметь возможность проверить корректность расчётов и верно визуализировать объекты на модели, вычислим эклиптические координаты Солнца на основе полученных данных.

Расстояние r очевидно не изменится при переходе к эклиптическим координатам, так как за начало координат мы всё ещё считаем Солнце. Также легко заметить, что эклиптическая широта β будет нулевой, так как движение происходит в плоскости эклиптики. Осталось вычислить эклиптическую долготу λ которая соотноситься с истинной аномалией. Для этого достаточно изменить начала отсчёта угла, с перигелия на точку весеннего равноденствия. Чтобы это сделать нужно прибавить эклиптическую долготу, соответствующую точке перигелия к истинной аномалии. Эта величин называется *долготой перигелия ω*. Получаем итоговые эклиптические координаты Земли:

$$\begin{cases} \lambda = \vartheta + \overline{\omega} \\ \beta = 0 \\ r = r \end{cases}$$

Проверим что выведенные формулы корректны. Для этого вычислим положение Земли для тестового момента времени: $12.12.2024\ 00{:}00, UT$, после чего сравним его с эталонным значением из астрономического альманаха.

$$\mathrm{t} = 12.12.2024\ 00{:}00\ UT$$

$$t - t_{0_3} = 29719260.0\ \text{с}$$

$$M = \frac{2\pi}{T_3}\left(t - t_{0_3}\right) = 5.9173 \text{ рад}$$

$$E = 5.9112 \text{ рад}$$

$$\vartheta \ = 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+e_3}{1-e_3}} \cdot \tan\frac{E}{2}\right) = \ 5.9051 \text{ рад}$$

$$r = \frac{a_3(1-{e_3}^2)}{1+e_3\cos\vartheta} = r \ = \ 0.9844 \text{ а. е}$$

$$\lambda = \ \vartheta + \overline{\omega}_3 = 10.8511 \text{ рад}$$

Представим полученные эллиптические координаты как прямоугольные декартовы:

$$\begin{cases} x = r\cos\beta\cos\lambda \\ y = r\cos\beta\sin\lambda \\ z = r\sin\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -0.1417 \text{ а. е} \\ y = -0.9742 \text{ а. е} \\ z = 0.0 \text{ а. е} \end{cases}$$

Для сравнения полученных результатов с эталонными необходимо перевести рассчитанные результаты из эклиптических координат в экваториальные, так как в астрономическом альманахе они даны именно в таком формате.

Для перехода в экваториальную систему координат необходимо повернуть эклиптическую систему координат на угол наклона плоскости эклиптики по отношению к плоскости экватора. Этот угол является стандартным и составляет: $\varepsilon = 0.4091$ рад. Поворот будем осуществлять относительно оси Ох, так как она является общей для этих систем координат (проходит через точку весеннего равноденствия).

Используя стандартные формулы поворота системы координат, получаем следующие соотношения:

$$\begin{cases} x^* = x \\ y^* = y\cos\varepsilon - z\sin\varepsilon \\ z^* = y\sin\varepsilon + z\sin\varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^* = -0.1417 \text{ а. е} \\ y^* = -0.8938 \text{ а. е} \\ z^* = -0.3875 \text{ а. е} \end{cases}$$

Теперь, получив декартовы экваториальные координаты, совершим переход к полярным, найдя прямое восхождение и склонение:

$$\begin{cases} \alpha = \tan^{-1}\dfrac{y^*}{x^*} \\ \delta = \tan^{-1}\dfrac{z^*}{\sqrt{(x^*)^2 + (y^*)^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1.7280 \text{ рад} \\ \delta = -0.4046 \text{ рад} \end{cases}$$

Переведя прямое восхождение в часы минуты и секунды, а склонение в градусы минуты и секунды получаем следующее соотношение.

	Вычисленное	Табличное	Погрешность
α	17ч 23м 57.94с	17ч 18м 25.79с	−0ч 5м 32.15с
δ	$-23°10'55.76''$	$-23°05'40.00''$	$-0°5'15.76''$

Полученные значение достаточно близки к эталонным, погрешность составила всего 5 угловых минут. Это вызвано тем, что используемые в расчётах значения “констант”, а именно: эксцентриситета орбиты, периода вращение Земли вокруг Солнца, угла наклона эклиптики, долготы перигелия и времени перигелия, на самом деле константами не являются. Эти значения меняются со временем вследствие явлений прецессии и нутации. Также не стоит забывать, что при начале расчётов было принято допущение о рассмотрении орбиты как идеального эллипса, что тоже внесло свою погрешность.

Для проведения более точных расчётов необходимо использовать точные орбитальные данный рассчитываемые для каждой эпохи, после чего применить формулы коррекции для внесения поправок на конкретный момент времени. Однако в рамках поставленной задачи полученный результаты вполне приемлемы.

Суточное движения Солнца для наблюдателя на поверхности Земли

Для определения положения Солнца для наблюдателя на поверхности Земли необходимо представить положение Солнца в горизонтальной системе координат.

Чтобы это сделать можно использовать уже имеющиеся расчёты, а именно экваториальные координаты Земли. В пункте выше были выведены координаты Земли во второй экваториальной системе координат. Так как для решения текущей задачи нам нужны координаты Солнца, можно выполнить довольно удобное преобразование: представить, что Солнце вращается вокруг Земли, которая теперь станет началом координат и одновременно с этим центром тяготения. Равносильность данного преобразования можно обосновать принципом относительности Галилея, который утверждает, что все законы классической физики работают одинаково в инерциальных системах отсчёта, а также очевидной симметричностью решаемой задачи. В таком случае рассчитанные ранее координаты Земли относительно Солнца станут искомыми координатами Солнца относительно Земли.

Теперь осталось лишь преобразовать имеющиеся координаты во второй экваториальной системе координат в координаты в горизонтальной системе координат. Это можно сделать транзитивно через первую экваториальную систему координат.

Начнём с перехода от второй экваториальной системы координат как первой.

Расстояние и склонение останутся неизменными, так как это вытекает из определения данных систем координат. Осталось разобраться преобразованием прямого восхождения в часовой угол. Для этого удобнее всего использовать звёздное время, которое связывает обе величины:

$$s = \alpha + t$$

Откуда можно легко выразить искомый часовой угол. Осталось вычислить звёздное время, для этого можно воспользоваться формулой:

$$s = GMST0 + UT + lon$$

Где $GMST0$ – звёздное время на Гринвичском меридиане в 00:00 на текущую дату в часах, UT – время по Гринвичу в часах, lon – долгота наблюдателя на Земле в часах.

Для вычисления значения $GMST0$ также есть формула:

$$GMST0 = L + 12$$

Где L – это средняя долгота в часах.

Запишем декартовы прямоугольные координаты для полученной первой экваториальной системы координат:

$$\begin{cases} x = \cos t \cdot \cos \delta \\ y = \sin t \cdot \cos \delta \\ z = \cos t \end{cases}$$

Теперь преобразуем эти координаты в горизонтальные. Для этого повернём их вдоль оси Oy, так чтобы ось Oz начала указывать на зенит.

$$\begin{cases} x^* = x\sin(lat) - z\cos(lat) \\ y^* = y \\ z^* = x\cos(lat) + z\sin(lat) \end{cases}$$

Где lat – это широта наблюдателя на Земле.

Осталось вычислить азимут и высоту над горизонтом:

$$A = \tan^{-1}\frac{y^*}{x^*} + \pi$$

$$h = \sin^{-1}\frac{z^*}{r}$$

Добавление π к азимуту нужно чтобы привести его к стандартному представлению азимута с нулём на северном полюсе.

Для примера возьмём всё ту же тестовую дату, так как для неё уже рассчитаны экваториальные координаты. За позицию наблюдателя выберем координаты Санкт-Петербурга: $\mathrm{lon} = 60°$, $lat = 30°$. Используя ранее рассчитанные значения получаем:

Учтём часовой пояс Санкт-Петербурга

$$UT = 0 + 3 = 3 \text{ ч}$$

Среднюю долготу нужно приводить в промежуток от 0 до 2π

$$L = 10.8633 = 4.5801 \text{ рад}$$

Переводя в часы, получаем

$$L = 17.4949 \text{ ч}$$

$$lon = 4\text{ч}$$

Откуда

$$GMST0 = 29.4949 \text{ ч}$$

$$s = 34.4949 \text{ ч}$$

$$t = 4.4756 \text{ рад}$$

$$\begin{cases} x = -0.2123 \text{ а. е} \\ y = -0.8797 \text{ а. е} \\ z = -0.3875 \text{ а. е} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^* = 0.0099 \text{ а. е} \\ y^* = -0.8797 \text{ а. е} \\ z^* = -0.4418 \text{ а. е} \end{cases}$$

$$A = 1.5820 \text{ рад}$$

$$h = -0.4654 \text{ рад}$$

Сравним с эталонными значениями переведя значения азимута и высоты в градусы:

	Вычисленное	Табличное	Погрешность
A	$90.6446°$	$90.7157°$	$0.0711°$
h	$-26.6635°$	$-26.5157°$	$0.1478°$

Полученная погрешность также удовлетворяет поставленной задаче.

Вычисление положения Луны

Наконец приступим к вычислению положения Луны относительно Земли. Идейно данная задача ничем не отличается от вычисления положения Земли относительно Солнца, с той лишь разницей, что теперь Земля является центром вращения. Отличие будет лишь в орбитальных параметрах Луны, которые приведены в начале работы. Однако стоит отметить, что в описание движения Луны вокруг Земли это задача двух тел, которую не совсем корректно сводить к задаче одного тела, так как массы Земли и Луны отличаются не настолько сильно. Но в рамках данной работы я приведу упрощённый пример расчётов для Луны.

Для начала вычислим положение Луны в плоскости свой орбиты, также это было сделано для Солнца:

$$\mathrm{t} = 12.12.2024\ 00{:}\,00\ UT$$

$$t - t_{0_З} = 28087620.0 \text{ с}$$

$$M = \frac{2\pi}{T_Л}\left(t - t_{0_Л}\right) = 5.6458 \text{ рад}$$

$$E = 5.6116 \text{ рад}$$

$$\vartheta = 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1 + e_Л}{1 - e_Л}} \cdot \tan\frac{E}{2}\right) = 5.5767 \text{ рад}$$

$$r = \frac{a_Л(1 - e_Л{}^2)}{1 + e_Л \cos\vartheta} = r \;=\; 367879246.2314 \text{ м}$$

Теперь проведём преобразования, позволяющие по имеющимся полярным координатам и известным орбитальным данным перейти к эклиптически прямоугольным координатам. В рамках данной работы я не буду углубляться в вывод этих формул, так как это излишне.

$$\begin{cases} x = r \cdot (\cos\Omega \cdot \cos(\vartheta + \omega) - \sin\Omega \cdot \sin(\vartheta + \omega) \cdot \cos i) \\ y = r \cdot (\sin\Omega \cdot \cos(\vartheta + \omega) + \cos\Omega \cdot \sin(\vartheta + \omega) \cdot \cos i) \\ z = r \cdot \sin(\vartheta + \omega) \cdot \sin i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 268939751.4489 \text{ м} \\ y = 248872300.1295 \text{ м} \\ z = -32697524.7779 \text{ м} \end{cases}$$

Дальнейшие преобразования выполняются абсолютно аналогично тем, что были выполнены для Земли. Перейдём к экваториальным координатам и сравним результаты с эталонными:

$$\begin{cases} x^* = x \\ y^* = y\cos\varepsilon - z\sin\varepsilon \\ z^* = y\sin\varepsilon + z\sin\varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^* = 268939751.4489 \text{ м} \\ y^* = 241340623.2829 \text{ м} \\ z^* = 69001836.5827 \text{ м} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \tan^{-1}\dfrac{y^*}{x^*} \\ \delta = \tan^{-1}\dfrac{z^*}{\sqrt{(x^*)^2 + (y^*)^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0.7313 \text{ рад} \\ \delta = 0.1887 \text{ рад} \end{cases}$$

	Вычисленное	Табличное	Погрешность
α	2ч 47м 36.985с	02ч 06м 46.460с	−0ч 40м 50.53с
δ	$10°48'38.895''$	$15°37'39.500''$	4° 49м 0.61с

Полученный погрешности достаточно велики, но этого стоило ожидать, так как в случае с Луной помимо основных допущений и неточностей нашей модели появляются так называемые возмущения, которые вносят свой вклад в итоговую ошибку. Эти возмущения вызываются внешними силами, такими как притяжение Солнца. Для учёта этих поправок необходимо использовать точные орбитальные данные, что выходит за рамки данной работы. Добавлю также что при разработке практической части проекта я реализовал более точные расчёты для Луны так как иначе погрешность была слишком большой.

Практическая часть

На данном этапе я использовал описанную математическую модель для визуализации всех движений. В качестве языка программирования я выбрал Java Script так как на нём можно реализовать модель на сайте, что позволит сделать её более доступной для широкой аудитории. Так как моделирование движения планет подразумевает 3D графику с использованием текстур, я использовал библиотеку three.js, которая отлично подходит для поставленной задачи, так как позволяет легко визуализировать объекты в пространстве, с автоматической поддержкой управления мышью, добавлением текстур и отображением в перспективе.

Ссылка на сайт: https://test-290806.github.io/

Ссылка на исходный код: https://github.com/test-290806/test-290806.github.io

Вывода и анализ результатов

В ходе работы я вывел математическое описание движения Земли вокруг Солнца, Луны вокруг Земли, а также движения Солнца по отношению к наблюдателю на поверхности Земли, основываясь на фундаментальных законах классической физики. Также я разработал интерактивный сайт для визуализации движения описанных небесных тел и расчёта параметров их орбит с использованием построенной математической модели.

Работая над данным проектом, я не только закрепил полученный в течение курса знания о фундаментальных законах классической механики, но и расширил их, описав движения тел по более сложных траекториям, узнав много нового о таком разделе астрономии как небесная механика. Также в ходе работы я попрактиковался в разработке сайтов и изучил базовые принципы работы с библиотекой three.js.

Приложения

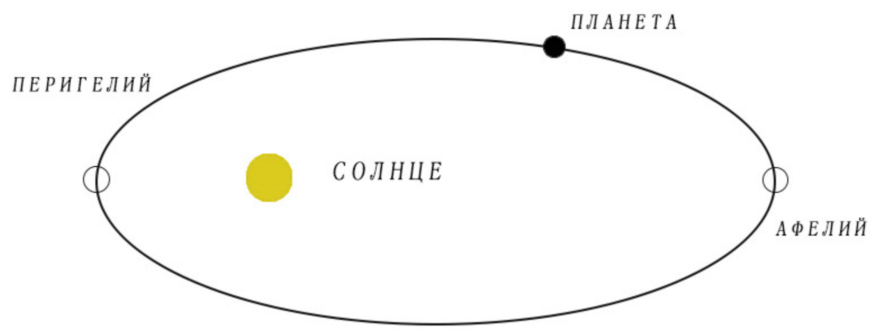

Рисунок 1

Рисунок 2

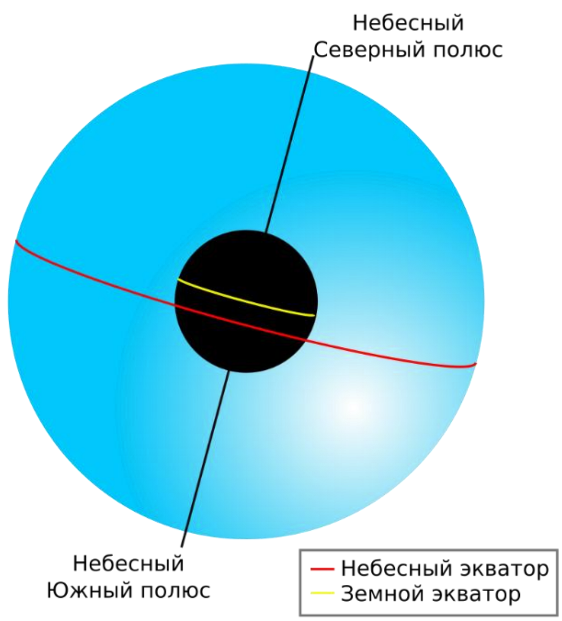

Рисунок 3

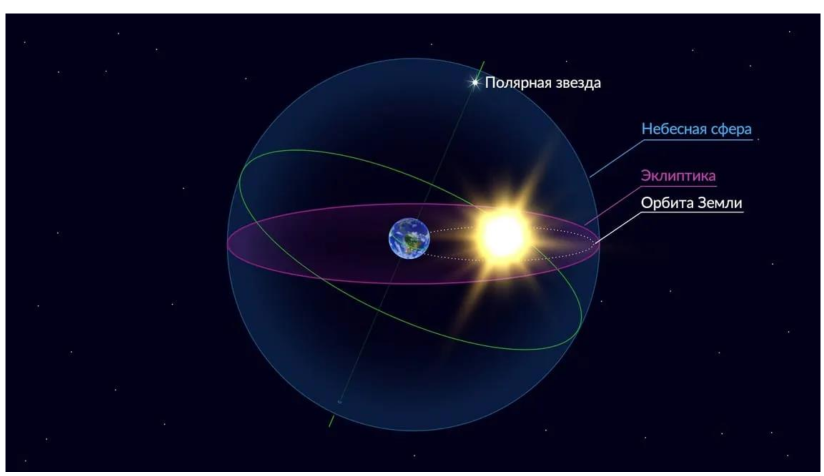

Рисунок 4

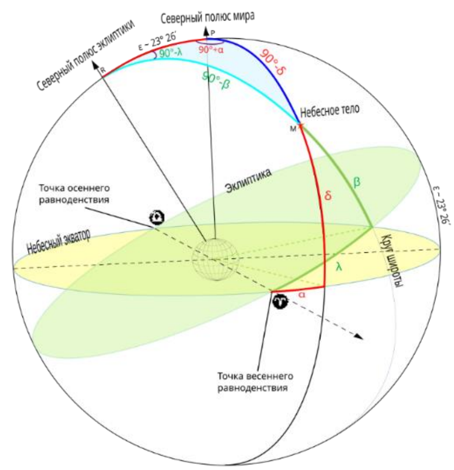

Рисунок 5

Рисунок 6

Рисунок 7

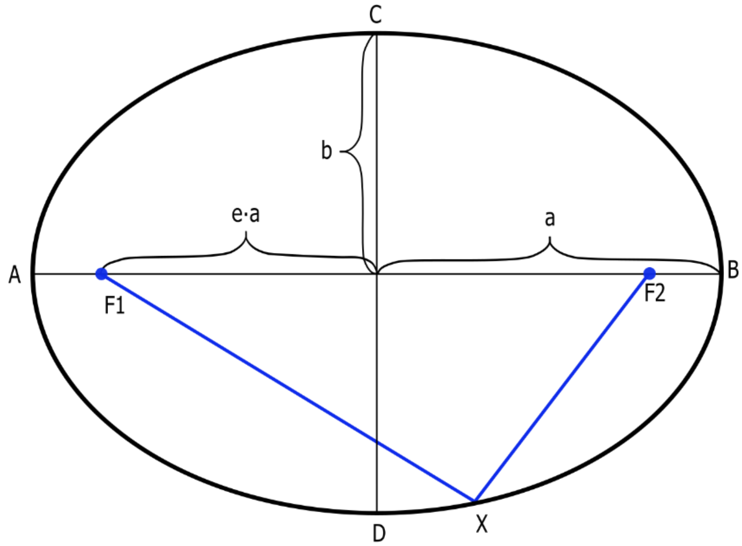

Рисунок 8

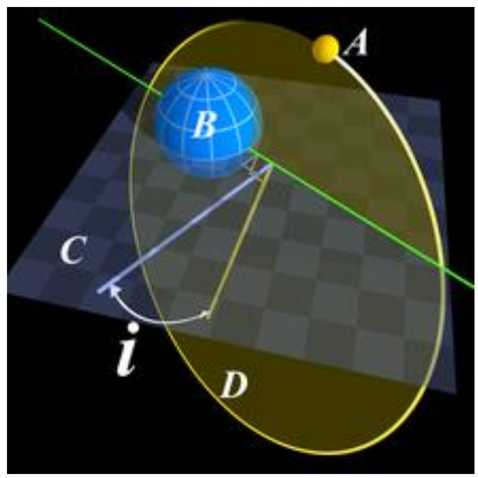

Рисунок 9

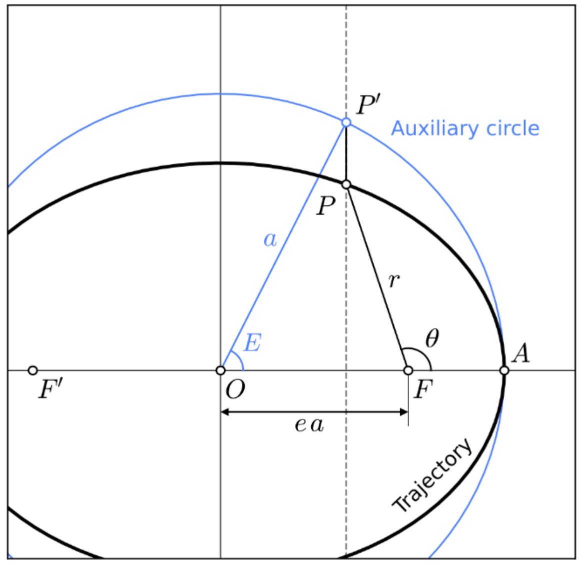

Рисунок 10

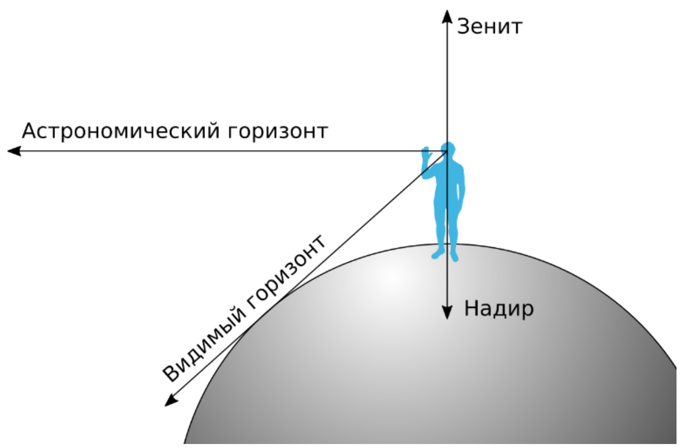

Рисунок 11

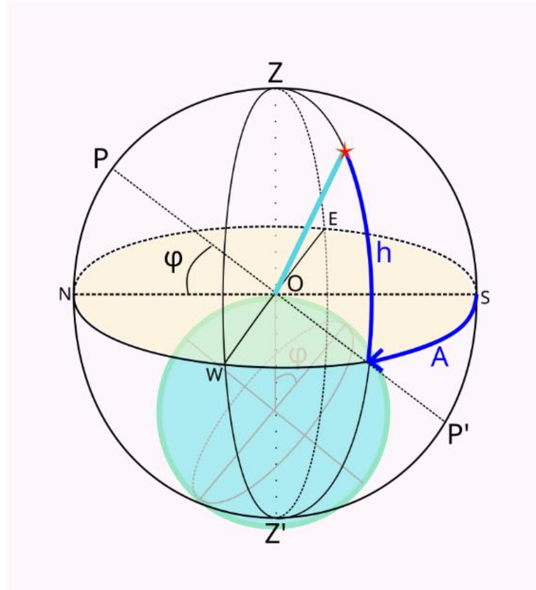

Рисунок 12

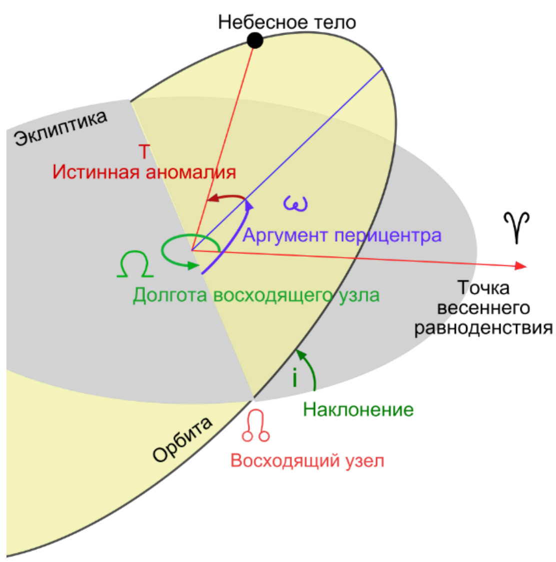

Рисунок 13