Решение домашних заданий по Методам оптимизации

ДЗ1

> Учебник Демидовича. Из каждого диапазона по 5 задач:
>
> 3626-3647
> 3658-3665
> 3690-3708

Блок 1

№ 3626

Исследование функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ на экстремум

Вычислим частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x$$

Найдём стационарные точки, для этого решим систему:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x(x^3 - 1) = 0 \end{cases}$$

Получаем две стационарные точки:

$$P_0(0,0); \quad P_1(1,1)$$

Вычислим частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$$

Таким образом, матрица квадратичной формы равна

$$A = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

Вычислим главные миноры:

$$\Delta_1 = 6x, \quad \Delta_2 = 36xy - 9$$

В точке $(0,0)$ получаем:

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = -9 < 0$$

Квадратичная форма не определена $\Rightarrow$ в точке $(0,0)$ экстремума нет

В точке $(1,1)$ получаем:

$$\Delta_1 = 6 > 0, \quad \Delta_2 = 27 > 0$$

Квадратичная положительно определена $\Rightarrow$ $(1,1)$ это точка минимума

Значение функции в этой точке:

$$z(1,1) = -1$$

Ответ:

- Минимум $z = -1$ при $x = 1, \ y = 1$
- Экстремума нет при $x = 0, \ y = 0$

№ 3627

Исследование функции $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ на экстремум

Вычислим частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 2x - 2y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 2x - 2y$$

Найдём стационарные точки, для этого решим систему:

$$\begin{cases} 4x^3 - 2x - 2y = 0 \\ 4y^3 - 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

Вычтем второе уравнение из первого:

$$4x^3 - 4y^3 = 0 \implies x^3 = y^3 \implies x = y$$

Подставим $x = y$ в первое уравнение:

$$4x^3 - 4x = 0 \implies 4x(x^2 - 1) = 0$$

Получаем три стационарные точки:

$$P_0(0,0); \quad P_1(1,1); \quad P_2(-1,-1)$$

Вычислим частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 2$$

Таким образом, матрица квадратичной формы равна

$$A = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}$$

Вычислим главные миноры:

$$\Delta_1 = 12x^2 - 2, \quad \Delta_2 = (12x^2 - 2)(12y^2 - 2) - 4$$

В точке $(0, 0)$ получаем:

$$\Delta_1 = -2 < 0, \quad \Delta_2 = (-2)(-2) - 4 = 0$$

Квадратичная форма не определена $\Rightarrow$ в точке $(0, 0)$ экстремума нет

В точке $(1, 1)$ получаем:

$$\Delta_1 = 10 > 0, \quad \Delta_2 = 10 \cdot 10 - 4 = 96 > 0$$

Квадратичная форма положительно определена $\Rightarrow$ $(1, 1)$ это точка минимума.

Значение функции в этой точке:

$$z(1, 1) = -2$$

В точке $(-1, -1)$ получаем:

$$\Delta_1 = 10 > 0, \quad \Delta_2 = 10 \cdot 10 - 4 = 96 > 0$$

Квадратичная форма положительно определена $\Rightarrow$ $(-1, -1)$ это точка минимума.

Значение функции в этой точке:

$$z(-1, -1) = -2$$

Ответ:

- Минимум $z = -2$ при $x = 1,\ y = 1$ и $x = -1,\ y = -1$
- Экстремума нет при $x = 0,\ y = 0$

№ 3628

Исследование функции $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ на экстремум при $x > 0$, $y > 0$

Вычислим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y - \frac{50}{x^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x - \frac{20}{y^2}$$

Найдём стационарные точки, решая систему:

$$\begin{cases} y - \dfrac{50}{x^2} = 0 \\ \\ x - \dfrac{20}{y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{50}{x^2} \\ \\ x = \dfrac{20}{y^2} \end{cases}$$

Подставим первое уравнение во второе:

$$x = \frac{20}{\left(\frac{50}{x^2}\right)^2} = \frac{20x^4}{2500} = \frac{x^4}{125}$$

Получаем:

$$x^4 - 125x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 125) = 0$$

Учитывая $x > 0$, имеем единственное решение:

$$x = 5 \Rightarrow y = \frac{50}{25} = 2$$

Стационарная точка:

$$P(5, 2)$$

Вычислим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{100}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{40}{y^3}$$

Матрица квадратичной формы в точке $(5, 2)$:

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{100}{125} & 1 \\ \\ 1 & \dfrac{40}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Главные миноры:

$$\Delta_1 = 0.8 > 0, \quad \Delta_2 = 0.8 \cdot 5 - 1 \cdot 1 = 4 - 1 = 3 > 0$$

Квадратичная форма положительно определена $\Rightarrow$ точка $(5, 2)$ является точкой минимума.

Значение функции в этой точке:

$$z(5, 2) = 5 \cdot 2 + \frac{50}{5} + \frac{20}{2} = 10 + 10 + 10 = 30$$

Ответ:

- Минимум $z = 30$ при $x = 5,\ y = 2$

№ 3631

Исследование функции $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ на экстремум

Вычислим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Найдём стационарные точки, решая систему:

$$\begin{cases} -\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \\ -\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \end{cases}$$

Система имеет единственное решение:

$$x = 0, \quad y = 0$$

Проверим поведение функции в точке (0,0):

Вычислим вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Получаем матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} -\dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ \\ \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} & -\dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

Вычислим главные миноры:

$$\Delta_1 = -\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} < 0, \quad \Delta_2 = \frac{y^2x^2 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^3} = 0$$

Таким образом сделать выводы на основе миноров невозможно. Исследуем поведение функции в окрестности точки $(0, 0)$.

Можно заметить, что функции убывает при удалнее от точки $(0, 0)$ так как значение $\sqrt{x^2+y^2}$ возрастает. Таким образом $(0, 0)$ это точка максимума.

Значение функции в этой точке:

$$z(0, 0) = 1$$

Ответ:

- Максимум $z = 1$ при $x = 0$, $y = 0$

№ 3635

Исследование функции $z = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$ на экстремум

Вычислим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - \frac{4}{x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - \frac{10}{y}$$

Найдём стационарные точки, решая систему:

$$\begin{cases} 2x + y = \dfrac{4}{x} \\ \\ x + 2y = \dfrac{10}{y} \end{cases}$$

Из первого уравнения:

$$y = \frac{4}{x} - 2x$$

Подставим во второе:

$$x + 2\left(\frac{4}{x} - 2x\right) = \frac{10}{\frac{4}{x} - 2x}$$

После преобразований получаем биквадратное уравнение:

$$3x^4 - 19x^2 + 16 = 0$$

Решае его полчаем следующие равенства:

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = \frac{16}{3} \end{cases}$$

Исключая отрицательные корни, получаем единственное решение:

$$x = 1, \quad y = 2$$

Стационарная точка:

$$P(1, 2)$$

Вычислим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 + \frac{4}{x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 + \frac{10}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$$

Квадратичная форма в точке $(1, 2)$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 4.5 \end{pmatrix}$$

Главные миноры:

$$\Delta_1 = 6 > 0, \quad \Delta_2 = 26 > 0$$

Значит квадратичная форма положительно определена, и точка $(1, 2)$ это точка минимума.

Значение функции в этой точке:

$$z(1, 2) = 7 - 10 \ln 2 \approx 0.0685$$

Ответ:

- Локальный минимум $z \approx 0.0685$ при $x = 1,\ y = 2$

Блок 2

№ 3658

Исследование функции $z = \cos^2 x + \cos^2 y$ при условии $x - y = \frac{\pi}{4}$

Запишем функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = \cos^2 x + \cos^2 y + \lambda \left(x - y - \frac{\pi}{4}\right)$$

Вычислим частные производные и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -2\cos x \sin x + \lambda = 0 \\ \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -2\cos y \sin y - \lambda = 0 \\ \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x - y - \dfrac{\pi}{4} = 0 \end{cases}$$

Упростим систему, используя тождество $\sin 2x = 2\sin x \cos x$:

$$\begin{cases} -\sin 2x + \lambda = 0 \\ -\sin 2y - \lambda = 0 \\ x - y = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Сложим первые два уравнения:

$$-\sin 2x - \sin 2y = 0 \Rightarrow \sin 2x = -\sin 2y$$

Используем тождество $\sin A = -\sin B \Rightarrow A = -B + 2\pi n$ или $A = \pi + B + 2\pi n$:

$$2x = -2y + 2\pi n \quad \text{или} \quad 2x = \pi + 2y + 2\pi n$$

Рассмотрим оба случая с учетом условия $x - y = \frac{\pi}{4}$:

a) $x = -y + \pi n$:

$$(-y + \pi n) - y = \frac{\pi}{4} \Rightarrow -2y = \frac{\pi}{4} - \pi n \Rightarrow y = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$$

b) $x = \frac{\pi}{2} + y + \pi n$:

$$\left(\frac{\pi}{2} + y + \pi n\right) - y = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{2} + \pi n = \frac{\pi}{4}$$

Это уравнение не имеет решений при целых n.

Таким образом, критические точки:

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \quad y = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Вычислим значения функции в этих точках:

$$z = \cos^2\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}\right) + \cos^2\left(-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}\right)$$

Для $n = 0$:

$$z = \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8} = 2\cos^2\frac{\pi}{8} = 1 + \cos\frac{\pi}{4} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Для $n = 1$:

$$z = \cos^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sin^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} = 1$$

Анализ экстремумов:

Максимальное значение достигается при n четных: $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

Минимальное значение 1 достигается при n нечетных.

Ответ:

- Максимум $z = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ при $x = \frac{\pi}{8} + \pi k$, $y = -\frac{\pi}{8} + \pi k$
- Минимум $z = 1$ при $x = \frac{5\pi}{8} + \pi k$, $y = \frac{3\pi}{8} + \pi k$

где $k \in \mathbb{Z}$

№ 3659

Исследование функции $u = x - 2y + 2z$ при ограничении $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ методом множителей Лагранжа

Составляем функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = x - 2y + 2z + \lambda(1 - x^2 - y^2 - z^2)$$

Находим частные производные и приравниваем их к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 1 - 2\lambda x = 0 \\ \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -2 - 2\lambda y = 0 \\ \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 2 - 2\lambda z = 0 \\ \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 1 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$$

Из первых трех уравнений выражаем переменные:

$$x = \frac{1}{2\lambda}, \quad y = -\frac{1}{\lambda}, \quad z = \frac{1}{\lambda}$$

Подставляем в уравнение ограничения:

$$\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = 1$$

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1$$

$$\frac{9}{4\lambda^2} = 1 \implies \lambda = \pm\frac{3}{2}$$

Получаем две критические точки:

$$\lambda = \frac{3}{2} \quad P_1 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\lambda = -\frac{3}{2} \quad P_2 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Запишем матрицу Гессе из вторых производных:

$$A = \begin{pmatrix} -2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix}$$

Миноры:

$$\Delta_1 = -2\lambda, \quad \Delta_2 = 4\lambda^2, \quad \Delta_2 = -8\lambda^3$$

В точке P_1 получаем:

$$\Delta_1 = -3 < 0, \quad \Delta_2 = 9 > 0, \quad \Delta_2 = -27 < 0$$

Квадратичная форма отрицательно определена, значит P_1 это точка максимума

Значение функции в это точке:

$$u = 3$$

В точке P_2 получаем:

$$\Delta_1 = 3 > 0, \quad \Delta_2 = 9 > 0, \quad \Delta_2 = 27 > 0$$

Квадратичная форма положительно определена, значит P_2 это точка минимума

Значение функции в это точке:

$$u = -3$$

Ответ:

- Максимум: $u = 3$ в точке $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$
- Минимум: $u = -3$ в точке $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

№ 3660

Исследование функции $u = x^m y^n z^p$ при ограничении $x + y + z = a$ методом множителей Лагранжа $(m, n, p, a > 0)$

Функция Лагранжа:

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = x^m y^n z^p + \lambda(a - x - y - z)$$

Система уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = m x^{m-1} y^n z^p - \lambda = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = n x^m y^{n-1} z^p - \lambda = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = p x^m y^n z^{p-1} - \lambda = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = a - x - y - z = 0 \end{cases}$$

Из первых трех уравнений получаем соотношения:

$$\frac{m}{x} = \frac{n}{y} \Rightarrow y = \frac{n}{m}x$$

$$\frac{m}{x} = \frac{p}{z} \Rightarrow z = \frac{p}{m}x$$

Подставляем в ограничение:

$$x + \frac{n}{m}x + \frac{p}{m}x = a \Rightarrow x\left(1 + \frac{n}{m} + \frac{p}{m}\right) = a$$

$$x = \frac{am}{m+n+p}, \quad y = \frac{an}{m+n+p}, \quad z = \frac{ap}{m+n+p}$$

Матрица Гессе:

$$H = \begin{pmatrix} m(m-1)x^{m-2}y^n z^p & mnx^{m-1}y^{n-1}z^p & mpx^{m-1}y^n z^{p-1} \\ mnx^{m-1}y^{n-1}z^p & n(n-1)x^m y^{n-2}z^p & npx^m y^{n-1}z^{p-1} \\ mpx^{m-1}y^n z^{p-1} & npx^m y^{n-1}z^{p-1} & p(p-1)x^m y^n z^{p-2} \end{pmatrix}$$

Проверка миноров:

Для точки ($\frac{am}{S}, \frac{an}{S}, \frac{ap}{S}$), где $S = m+n+p$:

Главные миноры:

- $\Delta_1 = m(m-1)x^{m-2}y^n z^p < 0$ (при $m < 1$)
- $\Delta_2 = mn(1-S)x^{2m-2}y^{2n-2}z^{2p} > 0$ (при $S > 1$)
- $\Delta_3 = mnp(2-S)x^{3m-3}y^{3n-3}z^{3p-3} < 0$ (при $S > 2$)

Анализ экстремума:

- При $m+n+p > 1$ - точка является максимумом
- Значение функции в критической точке:

$$u_{max} = \left(\frac{am}{S}\right)^m \left(\frac{an}{S}\right)^n \left(\frac{ap}{S}\right)^p = \frac{a^S m^m n^n p^p}{(m+n+p)^S}$$

Ответ:

- Максимум:

$$u=\frac{a^{m+n+p}m^m n^n p^p}{(m+n+p)^{m+n+p}}$$

достигается при

$$x=\frac{am}{m+n+p},y=\frac{an}{m+n+p},z=\frac{ap}{m+n+p}$$

№ 3661

Исследование функции $u=x^2+y^2+z^2$ при ограничении $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ методом множителей Лагранжа $(a>b>c>0)$

Функция Лагранжа:

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)$$

Система уравнений:

$$\begin{cases}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}=2x-\frac{2\lambda x}{a^2}=0\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}=2y-\frac{2\lambda y}{b^2}=0\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z}=2z-\frac{2\lambda z}{c^2}=0\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}=1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0\end{cases}$$

Возможные критические точки :

$$(\pm a,0,0),\quad(0,\pm b,0),\quad(0,0,\pm c)$$

Матрица Гессе:

$$A=\begin{pmatrix}2-\frac{2\lambda}{a^2}&0&0\\0&2-\frac{2\lambda}{b^2}&0\\0&0&2-\frac{2\lambda}{c^2}\end{pmatrix}$$

Для точек вида $(\pm a,0,0)$ получим:

$$\lambda = a^2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \frac{2a^2}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \frac{2a^2}{c^2} \end{pmatrix}$$

Так как $a > b$ и $a > c$, форма отрицательно определена и это точка максимума

Значение функции в этой точке:

$$u(\pm a, 0, 0) = a^2$$

Для точек вида $(0, \pm b, 0)$ получаем что в них форма не определена.

В точках вида $(0, 0, \pm c)$ получаем что форма положительно определена а значит это точки минимума.

Значение функции в этой точке:

$$u(0, 0, \pm c) = c^2$$

Ответ:

- Минимум $u = c^2$ в точках вида $(0, 0, \pm c)$
- Минимум $u = a^2$ в точках вида $(\pm a, 0, 0)$

№ 3664

Исследование функции $u = sinxsinysinz$ при ограничении $x + y + z = \pi/2$ методом множителей Лагранжа (x,y,z > 0)

Функция Лагранжа:

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = \sin x \sin y \sin z + \lambda \left(\frac{\pi}{2} - x - y - z \right)$$

Система уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \cos x \sin y \sin z - \lambda = 0 \\ \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \sin x \cos y \sin z - \lambda = 0 \\ \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \sin x \sin y \cos z - \lambda = 0 \\ \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \frac{\pi}{2} - x - y - z = 0 \end{cases}$$

Из первых трех уравнений получаем:

$$\cos x \sin y \sin z = \cos y \sin x \sin z \Rightarrow \tan x = \tan y$$

Аналогично

$$\tan x = \tan z$$

В интервале $(0, \pi/2)$ функция tan инъективна, поэтому:

$$x = y = z$$

Подставляем в ограничение:

$$3x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = y = z = \frac{\pi}{6}$$

Матрица Гессе ограниченной задачи:

$$A = \begin{pmatrix} -\sin x \sin y \sin z & \cos x \cos y \sin z & \cos x \sin y \cos z \\ \\ \cos x \cos y \sin z & -\sin x \sin y \sin z & \sin x \cos y \cos z \\ \\ \cos x \sin y \cos z & \sin x \cos y \cos z & -\sin x \sin y \sin z \end{pmatrix}$$

В критической точке получаем:

$$H = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{3}}{4} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{4} \\ \\ \dfrac{1}{4} & -\dfrac{\sqrt{3}}{4} & \dfrac{1}{4} \\ \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{4} & -\dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$$

Вычислям миноры:

$$\Delta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0, \quad \Delta_2 = \frac{1}{2} > 0, \quad \Delta_3 = -\frac{3\sqrt{3}}{16} + \frac{3}{16} < 0$$

Получае что квадратичная форма отрицательно определена, а значит рассматриваемая точка это точка максимума.

Значение функции:

$$u\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \sin^3\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

Ответ:

- Максимум: $u = \frac{1}{8}$ достигается при $x = y = z = \frac{\pi}{6}$

Блок 3

№ 3690

> Тело состоит из прямого кругового цилиндра, завершенного прямым круговым конусом. При данной полной поверхности тела, равной Q, определить его измерения так, чтобы объем тела был наибольшим.

Обозначения:

h - высота цилиндра

r - радиус основания

α - угол между образующей конуса и основанием

L - образующая конуса

Полная поверхность тела:

$$Q = \pi r^2 + 2\pi r h + \pi r L$$

Образующую конуса можно выразить через угол и радиус:

$$L = \frac{r}{\cos\alpha}$$

Объем тела:

$$V = \pi r^2 h + \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r\tan\alpha$$

Выражаем h из уравнения поверхности:

$$h = \frac{Q - \pi r^2 \left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right)}{2\pi r}$$

Подставляем в объем:

$$V = \frac{Qr}{2} - \frac{\pi r^3}{2}(1 + \sec\alpha) + \frac{\pi r^3}{3}\tan\alpha$$

Находим производную по α и приравниваем к нулю:

$$\frac{dV}{d\alpha} = -\frac{\pi r^3}{2}\sec\alpha\tan\alpha + \frac{\pi r^3}{3}\sec^2\alpha = 0$$

Упрощаем:

$$\sin\alpha = \frac{2}{3}$$

Оптимальный угол:

$$\alpha = \arcsin\frac{2}{3}$$

Ответ: объем максимален при угле $\alpha = \arcsin\frac{2}{3}$

№ 3691

> Тело состоит из прямоугольного параллелепипеда нижнее и верхнее основания которого завершаются одинаковыми правильными 4-х угольными паралелепипедами. При объеме V найти угол наклона граней пирамид для минимальной полной поверхности.

Обозначения:

a - сторона основания

h - высота параллелепипеда

α - угол наклона боковых граней

l - апофема пирамиды

Объем тела:

$$V = a^2 h + 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a}{2} \tan \alpha \right)$$

Полная поверхность:

$$S = 4ah + \frac{a^2}{\cos \alpha}$$

Выражаем h из объема:

$$h = \frac{V}{a^2} - \frac{a \tan \alpha}{3}$$

Подставляем в выражение для поверхности:

$$S = \frac{4Va}{a^2} - \frac{4a^2 \tan \alpha}{3} + \frac{a^2}{\cos \alpha}$$

Находим производную по α:

$$\frac{dS}{d\alpha} = -\frac{4a^2}{3 \cos^2 \alpha} + \frac{a^2 \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} = 0$$

Упрощаем:

$$\sin \alpha = \frac{4}{3}$$

Оптимальный угол:

$$\alpha = \arcsin \left(\frac{4}{3} \right)$$

Ответ:

Минимальная поверхность достигается при угле $\alpha = \arcsin \left(\frac{4}{3} \right)$.

№ 3692

> Найти прямоугольник данного периметра $2p$, который вращением вокруг одной из своих сторон образует тело наибольшего объема.

Пусть стороны прямоугольника a и b, тогда периметр:

$$2a + 2b = 2p \implies a + b = p \implies b = p - a.$$

При вращении вокруг стороны a образуется цилиндр с объемом:

$$V = \pi a b^2 = \pi a (p - a)^2.$$

Найдем максимум V:

$$\frac{dV}{da} = \pi(p-a)^2 - 2\pi a(p-a) = \pi(p-a)(p-3a).$$

Приравниваем производную к нулю:

$$p - a = 0 \quad \text{или} \quad p - 3a = 0.$$

Исключаем $a = p$ (так как $b = 0$), получаем:

$$a = \frac{p}{3}, \quad b = \frac{2p}{3}.$$

Ответ:

Прямоугольник со сторонами $\frac{p}{3}$ и $\frac{2p}{3}$.

№ 3693

> Найти треугольник данного периметра $2p$, который при вращении вокруг одной из своих сторон образует тело наибольшего объема.

Обозначения:

a - сторона, вокруг которой происходит вращение

b, c - две другие стороны треугольника

h - высота к стороне a

Объем тела вращения (два конуса):

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(b' + c')$$

где b' и c' - проекции сторон b и c на ось вращения

Очевидно, что

$$b' + c' = a$$

Также, используя формулу Герона можно вычислить высоту через полупериметры:

$$h = \frac{2S}{a} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$$

Подставляем в объем:

$$V = \frac{\pi}{3}\left(\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2}\right)a = \frac{4\pi p}{3a}(p-a)(p-b)(p-c)$$

Максимизируем $V(a,b,c)$ при условии $b+c=2p-a$ (const)

Составляем функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L}(a,b,c,\lambda) = \frac{4\pi p}{3a}(p-a)(p-b)(p-c) + \lambda(2p-a-b-c)$$

Находим частные производные и приравниваем к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial a} = \dfrac{4\pi p}{3}\left[-\dfrac{(p-b)(p-c)}{a^2} - \dfrac{(p-b)(p-c)}{a} + \dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2}\right] - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial b} = \dfrac{4\pi p}{3a}[-(p-a)(p-c)] - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial c} = \dfrac{4\pi p}{3a}[-(p-a)(p-b)] - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda} = 2p-a-b-c = 0 \end{cases}$$

Из уравнений 2 и 3 следует:

$$(p-a)(p-c) = (p-a)(p-b)$$

что дает $b=c$, при котором имеем:

$$2b+a=2p \Rightarrow b=c=p-\frac{a}{2}$$

Подставляем в объем:

$$V = \frac{4\pi p}{3a}(p-a)\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi pa}{3}(p-a)$$

Находим максимум по a:

$$\frac{dV}{da} = \frac{\pi p}{3}(p-2a) = 0 \Rightarrow a = \frac{p}{2}$$

Тогда стороны:

$$a = \frac{p}{2}, \quad b=c=\frac{3p}{4}$$

Ответ:

Треугольник со сторонами $\frac{p}{2}$, $\frac{3p}{4}$, $\frac{3p}{4}$ дает максимальный объем при вращении вокруг стороны $\frac{p}{2}$.

№ 3694

> В полушар радиуса R вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

Обозначения:

x, y - половины сторон основания (по осям X и Y)

z - высота параллелепипеда

Для максимизации объема рассмотрим симметричный случай $x = y$:

$$x^2 + x^2 + z^2 = R^2$$

Выразим z:

$$z = \sqrt{R^2 - 2x^2}$$

Подставим в объем:

$$V = 4x^2\sqrt{R^2 - 2x^2}$$

Найдем производную и приравняем к нулю:

$$\frac{dV}{dx} = 8x\sqrt{R^2 - 2x^2} + 4x^2\frac{-4x}{2\sqrt{R^2 - 2x^2}} = 0$$

Упростим:

$$8x(R^2 - 2x^2) - 8x^3 = 0$$

$$R^2 - 3x^2 = 0$$

$$x = \frac{R}{\sqrt{3}}$$

Тогда размеры:

$$x = y = \frac{R}{\sqrt{3}}$$

$$z = \sqrt{R^2 - 2\frac{R^2}{3}} = \frac{R}{\sqrt{3}}$$

Ответ: параллелепипед с размерами

$$\frac{2R}{\sqrt{3}} \times \frac{2R}{\sqrt{3}} \times \frac{R}{\sqrt{3}}$$

имеет максимальный объем

№ 3695

> В данный прямой круговой конус вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

Обозначения:

R - радиус основания конуса

H - высота конуса

x, y - половины сторон основания параллелепипеда

z - высота параллелепипеда

Уравнение боковой поверхности конуса:

$$\frac{r}{R} + \frac{z}{H} = 1$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ - расстояние от центра до стороны

Ограничение для параллелепипеда:

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R} + \frac{z}{H} = 1$$

Объем параллелепипеда:

$$V = 4xyz$$

Для максимизации объема рассмотрим квадратное основание ($x = y$):

$$\frac{x\sqrt{2}}{R} + \frac{z}{H} = 1$$

$$z = H\left(1 - \frac{x\sqrt{2}}{R}\right)$$

Подставляем в объем:

$$V = 4x^2H\left(1 - \frac{x\sqrt{2}}{R}\right)$$

Находим производную и приравниваем к нулю:

$$\frac{dV}{dx} = 8xH\left(1 - \frac{x\sqrt{2}}{R}\right) + 4x^2H\left(-\frac{\sqrt{2}}{R}\right) = 0$$

$$2 - \frac{3x\sqrt{2}}{R} = 0$$

$$x = \frac{2R}{3\sqrt{2}}$$

Высота параллелепипеда:

$$z = H\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{R} \cdot \frac{2R}{3\sqrt{2}}\right) = \frac{H}{3}$$

Ответ:

$$\frac{4R}{3\sqrt{2}} \times \frac{4R}{3\sqrt{2}} \times \frac{H}{3}$$

ДЗ2

> Задачник Эльсгольц 1969.
>
> Со страницы 82 (задачи к главе 1) из 1-18 10 задач
> Со страницы 165 (задачи к главе 2) из 1-14 10 задач

Блок 1

№1

Решение уравнения

$$\tan y\, dx - \cot x\, dy = 0$$

Разделяем переменные:

$$\frac{dx}{\cot x} = \frac{dy}{\tan y}$$

Упрощаем:

$$\tan x \, dx = \cot y \, dy$$

Интегрируем:

$$-\ln|\cos x| = \ln|\sin y| + C$$

$$\ln|\sin y \cos x| = C$$

$$\sin y \cos x = C$$

Ответ:

$$\sin y \cos x = C$$

№3

Решение уравнения

$$x\frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 + y^2}$$

Это однородное уравнение. Решаем стандартной заменой:

Приводим к виду однородного уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

Делаем замену $y = ux$, тогда:

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

Подставляем в уравнение:

$$u + x\frac{du}{dx} = u + \sqrt{1 + u^2}$$

Упрощаем уравнение:

$$x\frac{du}{dx} = \sqrt{1 + u^2}$$

Разделяем переменные:

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{x}$$

Интегрируем обе части:

$$\ln(u + \sqrt{1+u^2}) = \ln|x| + C$$

Потенцируем:

$$u + \sqrt{1+u^2} = Cx$$

Возвращаемся к переменной y:

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} = Cx$$

$$y + \sqrt{x^2+y^2} = Cx^2$$

Решаем относительно y:

$$\sqrt{x^2+y^2} = Cx^2 - y$$

$$x^2 + y^2 = C^2x^4 - 2Cx^2y + y^2$$

$$x^2 = C^2x^4 - 2Cx^2y$$

$$2Cy = C^2x^2 - \frac{1}{x}$$

Ответ:

$$y(x) = \frac{Cx^2}{2} - \frac{1}{2Cx}$$

№4

Решение уравнения

$$x\frac{dy}{dx} + y + x^3 = 0$$

Это линейное неоднородное уравнение первого порядка Приведем его к стандартному виду:

Приведение к стандартной форме:

$$x\frac{dy}{dx} + y = -x^3$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = -x^2$$

Решение однородного уравнения:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = 0$$

Разделяем переменные:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

Интегрируем:

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln C$$

$$y = \frac{C}{x}$$

Применим метод вариации постоянной

Ищем решение в виде:

$$y = \frac{C(x)}{x}$$

Производная:

$$y' = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}$$

Подставляем в уравнение:

$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{C(x)}{x} = -x^2$$

$$\frac{C'(x)}{x} = -x^2$$

$$C'(x) = -x^3$$

Находим $C(x)$:

$$C(x) = -\int x^3 dx = -\frac{x^4}{4} + K$$

Общее решение:

$$y(x) = \frac{-\frac{x^4}{4} + K}{x} = -\frac{x^3}{4} + \frac{K}{x}$$

Ответ:

$$y(x) = -\frac{x^3}{4} + \frac{C}{x}$$

№6

Решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} + 3x = e^{2t}$$

Это линейное уравнение

Сначала решаем однородное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} + 3x = 0$$

Разделяем переменные:

$$\frac{dx}{x} = -3dt$$

Интегрируем:

$$\ln|x| = -3t + \ln C \quad (C > 0)$$

Получаем решение:

$$x(t) = Ce^{-3t}$$

Теперь используем метод вариации постоянной

Ищем решение в виде:

$$x(t) = C(t)e^{-3t}$$

Находим производную:

$$x'(t) = C'(t)e^{-3t} - 3C(t)e^{-3t}$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$C'(t)e^{-3t} = e^{2t}$$

Находим $C(t)$:

$$C'(t) = e^{5t}$$

$$C(t) = \frac{1}{5}e^{5t} + C_1$$

Общее решение:

$$x(t) = \frac{1}{5}e^{2t} + Ce^{-3t}$$

Ответ:

$$x(t) = \frac{1}{5}e^{2t} + Ce^{-3t}$$

№7

Решение уравнения

$$y \sin x + y' \cos x = 1$$

Это линейное уравнение первого порядка. Решаем методом вариации постоянной:

Приводим к стандартному виду:

$$y' + y \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

$$y' + y \tan x = \sec x$$

Решаем однородное уравнение:

$$y' + y \tan x = 0$$

Разделяем переменные:

$$\frac{dy}{y} = -\tan x \, dx$$

Интегрируем:

$$\ln |y| = \ln |\cos x| + \ln C$$

$$y = C \cos x$$

Применим метод вариации постоянной

Ищем решение в виде:

$$y = C(x) \cos x$$

Производная:

$$y' = C'(x)\cos x - C(x)\sin x$$

Подставляем в неоднородное уравнение:

$$C'(x)\cos x - C(x)\sin x + C(x)\cos x \cdot \tan x = \sec x$$

$$C'(x)\cos x = \sec x$$

$$C'(x) = \sec^2 x$$

Находим $C(x)$:

$$C(x) = \int \sec^2 x\, dx = \tan x + K$$

Общее решение:

$$y(x) = (\tan x + K)\cos x = \sin x + K\cos x$$

Ответ:

$$y(x) = \sin x + C\cos x$$

№8

Решение уравнения

$$y' = e^{x-y}$$

Перепишем уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = e^x e^{-y}$$

Разделяем переменные:

$$e^y\, dy = e^x\, dx$$

Интегрируем:

$$e^y = e^x + C$$

Ответ:

$$e^y - e^x = C$$

№9

Решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = x + \sin t$$

Это линейное уравнение

Решаем однородное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} - x = 0$$

Разделяем переменные:

$$\frac{dx}{x} = dt$$

Интегрируем:

$$\ln|x| = t + \ln C \quad (C > 0)$$

Получаем решение:

$$x(t) = Ce^t$$

Используем метод вариации постоянной

Ищем решение в виде:

$$x(t) = C(t)e^t$$

Находим производную:

$$x'(t) = C'(t)e^t + C(t)e^t$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$C'(t)e^t + C(t)e^t = C(t)e^t + \sin t$$

$$C'(t)e^t = \sin t$$

Находим $C(t)$:

$$C'(t) = e^{-t}\sin t$$

$$C(t) = \int e^{-t}\sin t\,dt$$

Интегрируем по частям:

$$\int e^{-t}\sin t\,dt = -\frac{1}{2}e^{-t}(\sin t + \cos t) + C$$

Общее решение:

$$x(t) = -\frac{1}{2}(\sin t + \cos t) + Ce^t$$

Ответ:

$$x(t) = Ce^t - \frac{1}{2}(\sin t + \cos t)$$

№13

Решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = e^{x/t} + \frac{x}{t}$$

Это однородное дифференциальное уравнение. Решаем стандартной заменой:

Делаем замену $x = tu$, тогда

$$\frac{dx}{dt} = u + t\frac{du}{dt}$$

Подставляем в уравнение:

$$u + t\frac{du}{dt} = e^u + u$$

$$t\frac{du}{dt} = e^u$$

Разделяем переменные:

$$\frac{du}{e^u} = \frac{dt}{t}$$

Интегрируем обе части:

$$-e^{-u} = \ln|t| + C$$

Потенцируем:

$$e^{-u} = -\ln|t| - C$$

Возвращаемся к исходной переменной:

$$e^{-x/t} = -\ln|t| + C$$

Окончательное решение:

$$x(t) = -t \ln(C - \ln|t|)$$

Ответ:

$$x(t) = -t \ln(C - \ln|t|)$$

№15

Решение уравнения

$$y = xy' + \frac{1}{y'}$$

Это уравнение Клеро. Решаем стандартной методикой:

Вводим замену $p = y'$:

$$y = xp + \frac{1}{p}$$

Дифференцируем по x:

$$p = p + xp' - \frac{p'}{p^2}$$

$$0 = p' \left(x - \frac{1}{p^2} \right)$$

Рассматриваем два случая:

Случай 1:

$$p' = 0 \Rightarrow p = C$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$y = Cx + \frac{1}{C}$$

Это общее решение - семейство прямых.

Случай 2:

$$x = \frac{1}{p^2}$$

Исключая p, получаем особое решение:

$$y = xp + \frac{1}{p} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Ответ:

7. Общее решение:

$$y(x) = Cx + \frac{1}{C}$$

8. Особое решение:

$$y(x) = 2\sqrt{x}$$

№16

Решение уравнения

$$x = (y')^3 - y' + 2$$

Это уравнение разрешено относительно x. Параметризуем:

$$p = y', \quad x = p^3 - p + 2.$$

Тогда:

$$dy = p\,dx = p(3p^2 - 1)\,dp.$$

Интегрируем:

$$y = \frac{3p^4}{4} - \frac{p^2}{2} + C.$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = p^3 - p + 2, \\ y = \frac{3p^4}{4} - \frac{p^2}{2} + C. \end{cases}$$

Блок 2

№1:

Решение уравнения

$$y'' - 6y' + 10y = 100 \quad y(0) = 10 \quad y'(0) = 5$$

Решаем однородное уравнение:
Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$$

Получаем корни:

$$\lambda = 3 \pm i$$

Общее решение однородного уравнения:

$$y_0 = e^{3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

Частное решение неоднородного уравнения.
Так как правая часть исходного уравнения это константа, предположим константное решение:

$$y_ч = A$$

Тогда получаем уравнение:

$$0 - 6 \cdot 0 + 10A = 10$$

из которого очевидно что

$$A = 10$$

а значит частное решение будет:

$$y_ч = 10$$

Таким образом общее решение:

$$y = e^{3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 10$$

Находим константы из начальных условий:

$$y(0) = C_1 + 10 = 10 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$y'(0) = 3C_1 + C_2 = 5 \Rightarrow C_2 = 5$$

Ответ:

$$y(x) = 5e^{3x} \sin x + 10$$

№2:

Решение уравнения

$$\ddot{x} + x = \sin t - \cos 2t$$

Решаем однородное уравнение:

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

Получаем корни:

$$\lambda = \pm i$$

Общее решение однородного уравнения:

$$x_0 = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

Частное решение неоднородного уравнения:
Правая часть исходного уравнения имеет вид:

$$\sin(t) - \cos(t)$$

Таким образом частное решение будет сумой двух частных решений
Для каждого из них используем метод неопределенных коэффициентов
Для $\sin(t)$ получаем уравнение:

$$\ddot{x} + x = \sin(t) \tag{1}$$

Частное решение которого имеет вид:

$$x_{ч1} = t(B\,\sin(t) + A\,\cos(t))$$

Подставляя в уравнение (1) имеем:

$$2B\cos(t) - 2A\sin(t) = \sin(t)$$

Приравниваем коэффициенты с обеих сторон и решаем систему:

$$\begin{cases} -2\,A = 1 \\ 2\,B = 0 \end{cases} = \begin{cases} A = -\dfrac{1}{2} \\ B = 0 \end{cases}$$

Подставляя найденные коэффициенты получаем первое частное решение:

$$x_{ч1} = -\frac{t\cos(t)}{2}$$

Выполняем аналогичное для $-\cos(t)$

$$\ddot{x} + x = -\cos(t)$$

$$x_{ч2} = B\,\sin(2t) + A\,\cos(2t)$$

$$-3\,B\,\sin\left(2\,t\right) - 3\,A\,\cos\left(2\,t\right) = -\cos\left(2\,t\right)$$

$$\begin{cases} -3\,A = -1 \\ -3\,B = 0 \end{cases} = \begin{cases} A = \dfrac{1}{3} \\ B = 0 \end{cases}$$

$$x_{ч2} = \frac{\cos(2\,t)}{3}$$

Общее решение:

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \frac{t}{2} \cos t + \frac{1}{3} \cos 2t$$

№3

Решение уравнения

$$y' y''' - 3(y'')^2 = 0$$

Это уравнение допускает понижение порядка.
Решаем методом замены переменных:

Понижение порядка:
Введем новую переменную $z = y''$. Тогда:

$$y''' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy'} \cdot \frac{dy'}{dx} = z' \cdot y'' = z' \cdot z$$

Подставляем в уравнение:

$$y' \cdot z' \cdot z - 3z^2 = 0$$

Упрощаем уравнение:
Делим обе части на $z \neq 0$:

$$y' z' - 3z = 0$$

Дальнейшее понижение порядка:
Введем замену $p = y'$:

$$p \frac{dz}{dp} - 3z = 0$$

Разделяем переменные:

$$\frac{dz}{z} = 3 \frac{dp}{p}$$

Интегрируем:

$$\ln|z| = 3 \ln|p| + \ln C_1$$

$$z = C_1 p^3$$

Возвращаемся к исходным переменным:
Так как $z = y''$ и $p = y'$, получаем:

$$y'' = C_1(y')^3$$

Еще одно понижение порядка:
Обозначим $v = y'$:

$$v' = C_1 v^3$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dv}{v^3} = C_1 dx$$

$$-\frac{1}{2v^2} = C_1 x + C_2$$

Выражаем v:

$$v^2 = \frac{-1}{2(C_1 x + C_2)}$$

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{-2(C_1 x + C_2)}}$$

Финальное интегрирование:

$$y = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{-2(C_1 x + C_2)}} = \pm \frac{\sqrt{-2(C_1 x + C_2)}}{C_1} + C_3$$

Упростим:

$$(y - C_3)^2 = C_1 x + C_2$$

Ответ:
Общее решение уравнения:

$$(y - C_3)^2 = C_1 x + C_2$$

№5

Решение уравнения

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 2$$

1. Решаем однородное уравнение Эйлера:

Из свойства уравнения Эйлера, после замены $x = e^t$ получим характеристическое уравнение:

$$\lambda(\lambda - 1)y - 4\lambda y + 6y = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

Подставляя $\lambda^n = y^{(n)}$ получаем дифференциальное уравнение:

$$y'' - 5y' + 6y = 2$$

Решая его характеристическое уравнение получаем корни:

$$\lambda = 2, 3$$

Общее решение однородного уравнения:

$$y_0 = C_1 x^2 + C_2 x^3$$

Частное решение неоднородного уравнения:
Методом неопределённых коэффициентов:

$$y_ч = A$$

$$0 - 5 \cdot 0 + 6A = 2$$

$$A = \frac{1}{3}$$

$$y_ч = \frac{1}{3}$$

Общее решение:

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^3 + \frac{1}{3}$$

№6

Решение уравнения

$$y'' + y = \operatorname{ch} x$$

Решаем однородное уравнение:

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

Общее решение однородного:

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Частное решение неоднородного:

Используем метод неопределенных коэффициентов

Преобразуем правую часть

Используем тождество

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Уравнение принимает вид:

$$y'' + y = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$$

Ищем частное решение для каждого слагаемого

Для e^x:

$$y_{ч1} = Ae^x$$

Подставляем в уравнение:

$$Ae^x + Ae^x = e^x \Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

Решение:

$$y_{ч1} = \frac{1}{4}e^x$$

Для e^{-x}:

$$y_{ч2} = Be^{-x}$$

Подставляем в уравнение:

$$Be^{-x} + Be^{-x} = e^{-x} \Rightarrow 2B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

Решение:

$$y_{ч2} = \frac{1}{4}e^{-x}$$

Суммируем частные решения

$$y_ч = y_{ч1} + y_{ч2} = \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{-x} = \frac{1}{2}\operatorname{ch} x$$

Общее решение:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}\operatorname{ch} x$$

№7

Решение уравнения

$$y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0$$

Понижаем порядок заменой:

$$p = y'$$

$$y'' = p\frac{dp}{dy}$$

Уравнение становится:

$$\frac{dp}{dy} + \frac{2p}{1-y} = 0$$

Разделяем переменные:

$$\frac{dp}{p} = \frac{2dy}{y-1}$$

Интегрируем:

$$\ln p = 2\ln|y-1| + \ln C_1$$

Избавляемся от логарифмов:

$$p = C_1(y-1)^2$$

Обратная замена:

$$y' = C_1(y-1)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1(y-1)^2$$

$$\frac{dy}{(y-1)^2} = C_1 dx$$

$$-\frac{1}{y-1} = C_1 t + C_2$$

$$-\frac{1}{y-1} = C_1 t + C_2$$

$$y = 1 - \frac{1}{C_1 x + C_2}$$

Ответ:

$$y(x) = 1 - \frac{1}{C_1 x + C_2}$$

№8

Решение уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 4x = e^t + e^{2t} + 1$$

Решаем однородное уравнение:

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$$

Общее решение однородного:

$$x_0 = (C_1 + C_2 t)e^{2t}$$

Частное решение неоднородного:

Методом неопределенных коэффициентов:

Для e^t:
Стандартная форма:

$$x_{ч1} = Ae^t$$

Подставляем в уравнение:

$$Ae^t - 4Ae^t + 4Ae^t = e^t$$

$$Ae^t = e^t \Rightarrow A = 1$$

$$x_{ч1} = e^t$$

Для e^{2t} :
Стандартная форма:

$$x_{ч2} = Bt^2 e^{2t}$$

Подставляем в уравнение:

$$(2B + 8Bt + 4Bt^2) - 4(2Bt + 2Bt^2) + 4Bt^2 = 1$$

$$2B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$x_{ч2} = \frac{1}{2} t^2 e^{2t}$$

Для постоянной 1:
Стандартная форма:

$$x_{ч3} = C$$

Подставляем:

$$0 - 0 + 4C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{4}$$

$$x_{ч3} = \frac{1}{4}$$

Суммируем частные решения:

$$x_ч = e^t + \frac{1}{2} t^2 e^{2t} + \frac{1}{4}$$

Общее решение:

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{2t} + e^t + \frac{t^2}{2} e^{2t} + \frac{1}{4}$$

Ответ:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{2t} + e^t + \frac{t^2}{2} e^{2t} + \frac{1}{4}$$

№9

Решение уравнения

$$(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$$

Понижаем порядок заменой:

$$p = y'$$

$$y'' = \frac{dp}{dx}$$

Уравнение становится:

$$(1 + x^2)\frac{dp}{dx} + p^2 + 1 = 0$$

Разделяем переменные:

$$\frac{dp}{1 + p^2} = -\frac{dx}{1 + x^2}$$

Интегрируем:

$$\arctan p = -\arctan x + C_1$$

$$p = -\tan(-x + C_1)$$

$$y' = -\tan(-x + C_1)$$

$$y = \frac{\left(\sin^2(C_1) + \cos^2(C_1)\right) \ln(\sin(C_1)x - \cos(C_1))}{\sin^2(C_1)} + \frac{\cos(C_1)x}{\sin(C_1)} + C_2$$

$$y = \left(\frac{\cos^2(C_1)}{\sin^2(C_1)} + 1\right) \ln(\sin(C_1)x - \cos(C_1)) + \frac{\cos(C_1)x}{\sin(C_1)} + C_2$$

Ответ:

$$y = \left(\frac{\cos^2(C_1)}{\sin^2(C_1)} + 1\right) \ln(\sin(C_1)x - \cos(C_1)) + \frac{\cos(C_1)x}{\sin(C_1)} + C_2$$

№10

Решение уравнения

$$x^3\frac{d^2x}{dt^2} + 1 = 0$$

Понижаем порядок заменой:

$$p = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = p\frac{dp}{dx}$$

Уравнение становится:

$$x^3 p\frac{dp}{dx} + 1 = 0$$

Разделяем переменные:

$$pdp = -\frac{dx}{x^3}$$

Интегрируем:

$$\frac{p^2}{2} = \frac{1}{2x^2} + C_1$$

$$p^2 = \frac{1}{x^2} + C_1$$

Обратная замена:

$$x'^2 = \frac{1}{x^2} + C_1$$

$$x^2 x'^2 = C_1 x^2 + 1$$

Выполним подстановку $v = x^2$:

$$v' = 2xx' \Rightarrow x' = \frac{v'}{2x}$$

$$\frac{v'^2}{4} = C_1 v + 1$$

$$v'^2 = 4C_1 v + 4$$

Введём параметр $p = u'$, тогда:

$$p = v' = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}v = p\,\mathrm{d}t$$

$$p^2 = 4C_1 v + 4$$

$$v = \frac{p^2}{4\,C_1} - \frac{1}{C_1} \tag{1}$$

$$\mathrm{d}v = \frac{p\,\mathrm{d}p}{2\,C_1}$$

$$p\,\mathrm{d}t = \frac{p\,\mathrm{d}p}{2\,C_1}$$

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}p}{2\,C_1}$$

$$t = \frac{p}{2\,C_1} + C_2$$

Выразим p и подставим в выражение (1)

$$p = 2\,C_1\,t - 2\,C_1\,C_2$$

$$v = \frac{{C_1}^2\,t^2 - 2\,{C_1}^2\,C_2\,t + {C_1}^2\,{C_2}^2 - 1}{C_1}$$

Обратная замена:

$$x^2 = C_1\,t^2 - 2\,C_1\,C_2\,t + C_1\,{C_2}^2 - \frac{1}{C_1}$$

$$x^2 = C_1\,(t - C_2)^2 - \frac{1}{C_1}$$

$$C_1 x^2 + 1 = C_1^2 (t - C_2)^2$$

Ответ:

$$C_1 x^2 + 1 = C_1^2 (t - C_2)^2$$

№11

Решение уравнения

$$y^{IV} - 16y = x^2 - e^x$$

Решаем однородное уравнение:

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 - 16 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2, \pm 2i$$

Общее решение однородного:

$$y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$$

Частное решение неоднородного:

Методом неопределенных коэффициентов:
Для x^2:

$$y_{ч1} = Ax^2 + Bx + C$$

$$-16\,A\,x^2 - 16\,B\,x - 16\,C = x^2$$

$$\begin{cases} -16\,A = 1 \\ -16\,B = 0 \\ -16\,C = 0 \end{cases} = \begin{cases} A = -\dfrac{1}{16} \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

$$y_{ч1} = -\frac{x^2}{16}$$

Для $-e^x$:

$$y_{ч2} = Ae^x$$

$$-15\,A\,e^x = -e^x$$

$$-15\,A = -1 \Rightarrow A = \frac{1}{15}$$

$$y_{ч2} = \frac{e^x}{15}$$

Общее решение:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x - \frac{x^2}{16} + \frac{e^x}{15}$$

Ответ:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x - \frac{x^2}{16} + \frac{e^x}{15}$$

ДЗ3

> Задачник Эльсгольц 1969.
>
> Со страницы 324 (задачи к главе 6) из 1-20 10 задач

№1

Найти экстремали функционала

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\,dx.$$

Подынтегральная функция не зависит явно от x, поэтому используем первый интеграл уравнения Эйлера:

$$F - y' F_{y'} = C.$$

Для данного функционала:

$$F = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}, \quad F_{y'} = \frac{y'}{y\sqrt{1+y'^2}}.$$

Подставляем в первый интеграл:

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} - y' \cdot \frac{y'}{y\sqrt{1+y'^2}} = C.$$

Упрощаем:

$$\frac{1+y'^2-y'^2}{y\sqrt{1+y'^2}} = C \implies \frac{1}{y\sqrt{1+y'^2}} = C.$$

Решаем относительно y':

$$y' = \pm\sqrt{\frac{1}{C^2y^2} - 1}.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{C^2y^2} - 1}} = \pm dx.$$

Интегрируем:

$$\int \frac{y\,dy}{\sqrt{1-C^2y^2}} = \pm Cx + C_1.$$

Замена $u = 1 - C^2y^2$:

$$-\frac{1}{2C^2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \pm Cx + C_1 \implies -\frac{\sqrt{u}}{C^2} = \pm Cx + C_1.$$

Возвращаемся к y:

$$\sqrt{1-C^2y^2} = -C^2(\pm Cx + C_1).$$

Возводим в квадрат:

$$1 - C^2y^2 = C^4(Cx + C_1)^2.$$

Таким образом, экстремали задаются уравнением:

$$(x+C_1)^2 + y^2 = \frac{1}{C^2}.$$

Это семейство окружностей с центром на оси Ox.

№2

Исследовать на экстремум функционал

$$J[y] = \int (y^2 + 2xyy')\,dx; \quad y(x_0) = y_0; \quad y(x_1) = y_1$$

Подынтегральная функция:

$$F = y^2 + 2xyy'$$

Уравнение Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0.$$

Вычисляем производные:

$$F_y = 2y + 2xy', \quad F_{y'} = 2xy.$$

Подставляем в уравнение Эйлера:

$$2y + 2xy' - \frac{d}{dx}(2xy) = 0 \implies 2y + 2xy' - 2y - 2xy' = 0.$$

Получаем тождество, значит любая функция $y(x)$ является экстремалью.

№4

Найти экстремали функционала

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} y'(1 + x^2 y')\,dx.$$

Подынтегральная функция:

$$F = y'(1 + x^2 y') = y' + x^2 y'^2.$$

Уравнение Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0.$$

Так как $F_y = 0$, то:

$$\frac{d}{dx}(1 + 2x^2 y') = 0 \implies 1 + 2x^2 y' = C.$$

Решаем относительно y':

$$y' = \frac{C - 1}{2x^2}.$$

Интегрируем:

$$y = \frac{1-C}{2x} + C_1.$$

Таким образом, экстремали — семейство гипербол:

$$y = \frac{C_1}{x} + C_2.$$

№5

Найти экстремали функционала

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + 2yy' - 16y^2)\, dx.$$

Подынтегральная функция:

$$F = y'^2 + 2yy' - 16y^2.$$

Уравнение Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0.$$

Вычисляем производные:

$$F_y = 2y' - 32y, \quad F_{y'} = 2y' + 2y.$$

Подставляем в уравнение Эйлера:

$$2y' - 32y - \frac{d}{dx}(2y' + 2y) = 0 \implies 2y' - 32y - 2y'' - 2y' = 0.$$

Упрощаем:

$$y'' + 16y = 0.$$

Общее решение:

$$y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x.$$

№6

Найти экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_{x_0}^{x_1} (xy' + y'^2)\,dx.$$

Подынтегральная функция:

$$F = xy' + y'^2.$$

Уравнение Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0.$$

Вычисляем производные:

$$F_y = 0$$

$$F_{y'} = x + 2y'$$

Подставляем в уравнение Эйлера:

$$0 - \frac{d}{dx}(x + 2y') = 0$$

$$-1 - 2y'' = 0$$

$$y'' = -\frac{1}{2}$$

Интегрируем дважды:

$$y' = -\frac{x}{2} + C_1$$

$$y = -\frac{x^2}{4} + C_1x + C_2$$

Ответ:
Экстремалями функционала являются квадратичные функции вида:

$$y(x) = -\frac{x^2}{4} + C_1x + C_2,$$

№8

Найти экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_{x_0}^{x_1} (y^2 + y'^2 - 2y\sin x)\,dx.$$

Подынтегральная функция:

$$F = y^2 + y'^2 - 2y\sin x.$$

Уравнение Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0.$$

Вычисляем производные:

$$F_y = 2y - 2\sin x, \quad F_{y'} = 2y'.$$

Подставляем в уравнение Эйлера:

$$2y - 2\sin x - 2y'' = 0 \implies y'' - y = -\sin x.$$

Общее решение однородного уравнения:

$$y_0 = C_1e^x + C_2e^{-x}.$$

Частное решение неоднородного уравнения:
По методу неопределённых коэффициентов:

$$y_ч = A\sin x + B\cos x$$

Подставляем в уравнение:

$$-A\sin x - B\cos x - A\sin x - B\cos x = -\sin x \implies A = \frac{1}{2}, B = 0.$$

Значит:

$$y_ч = \frac{1}{2}\sin x$$

Таким образом, экстремали:

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}\sin x.$$

№14

Найти экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{y'^2}{x^3}\,dx.$$

Подынтегральная функция:

$$F = \frac{y'^2}{x^3}.$$

Уравнение Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0.$$

Так как $F_y = 0$, то:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2y'}{x^3}\right) = 0 \implies \frac{2y'}{x^3} = C.$$

Решаем относительно y':

$$y' = \frac{C_1 x^3}{2}$$

$$y' = C_1 x^3$$

Интегрируем:

$$y = C_1 x^4 + C_2$$

№15

Найти экстремали функционала

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + y'^2 + 2ye^x)\, dx.$$

Подынтегральная функция:

$$F = y^2 + y'^2 + 2ye^x.$$

Уравнение Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0.$$

Вычисляем производные:

$$F_y = 2y + 2e^x, \quad F_{y'} = 2y'.$$

Подставляем в уравнение Эйлера:

$$2y + 2e^x - 2y'' = 0 \implies y'' - y = e^x.$$

Общее решение однородного уравнения:

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Частное решение неоднородного уравнения:
Метод неопределённых коэффициентов:

$$y_ч = Axe^x.$$

$$A(xe^x + 2e^x) - Axe^x = e^x \implies A = \frac{1}{2}$$

$$y_ч = \frac{1}{2}xe^x.$$

Таким образом, экстремали:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{xe^x}{2}.$$

№16

Найти экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_{x_0}^{x_1} (y^2 - y'^2 - 2y\sin x)\,dx.$$

Подынтегральная функция:

$$F = y^2 - y'^2 - 2y\sin x.$$

Уравнение Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0.$$

Вычисляем производные:

$$F_y = 2y - 2\sin x, \quad F_{y'} = -2y'.$$

Подставляем в уравнение Эйлера:

$$2y - 2\sin x - \frac{d}{dx}(-2y') = 0 \implies 2y - 2\sin x + 2y'' = 0.$$

Упрощаем:

$$y'' + y = \sin x.$$

Общее решение однородного уравнения:

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Частное решение неоднородного уравнения:
Методом неопределенных коэффициентов ищем решение вида:

$$y_ч = Ax\cos x + Bx\sin x.$$

Вычисляем производные:

$$y_ч' = A\cos x - Ax\sin x + B\sin x + Bx\cos x,$$

$$y_ч'' = -2A\sin x - Ax\cos x + 2B\cos x - Bx\sin x.$$

Подставляем в уравнение:

$$-2A\sin x - Ax\cos x + 2B\cos x - Bx\sin x + Ax\cos x + Bx\sin x = \sin x.$$

Упрощаем:

$$-2A\sin x + 2B\cos x = \sin x.$$

Приравниваем коэффициенты:

$$\begin{cases} -2A = 1 \\ 2B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = 0 \end{cases}$$

Таким образом, частное решение:

$$y_ч = -\frac{x\cos x}{2}.$$

Общее решение:

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{x\cos x}{2}.$$

№18

Найти экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left[x^2y'^2 + 2y^2 + 2xy\right] dx.$$

Подынтегральная функция:

$$F = x^2y'^2 + 2y^2 + 2xy.$$

Уравнение Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0.$$

Вычисляем производные:

$$F_y = 4y + 2x, \quad F_{y'} = 2x^2 y'.$$

Подставляем в уравнение Эйлера:

$$4y + 2x - \frac{d}{dx}(2x^2 y') = 0 \implies 4y + 2x - 4xy' - 2x^2 y'' = 0.$$

Упрощаем:

$$x^2 y'' + 2xy' - 2y = x.$$

Это уравнение Эйлера.
Замена $x = e^t$:

$$y'' + y' - 2y = e^t.$$

Общее решение однородного уравнения:

$$y_0 = C_1 e^t + C_2 e^{-2t} = C_1 x + C_2 x^{-2}.$$

Частное решение неоднородного уравнения:
Метод неопределенных коэффициентов:

$$y_{\text{ч}} = Ate^t.$$

Подставляем в уравнение:

$$A(te^t + 2e^t) + A(te^t + e^t) - 2Ate^t = e^t \implies A = \frac{1}{3}$$

$$y_{\text{ч}} = \frac{1}{3} te^t = \frac{x \ln x}{3}$$

Таким образом, экстремали:

$$y = C_1 x + C_2 x^{-2} + \frac{x \ln x}{3}.$$