ОВАиТК 2024 Домашнее задание 8

Гаттаров Тимур Б05-304 (06/04/2024)

Жизнь сама и есть наука,
Эти пальчики считали, но ни разу не устали

Ежемесячные
Маленькие Шоти(Little Shoti)

Задача 1. *Являются ли кольцом и полем следующие множества*

1. *Комплексные числа с целыми коэффициентами*
2. *Функции, непрерывные на отрезке* $[-1,1]$ *относительно поточечных сложения и умножения*

Решение. Пункт 1 Пункт 2 $\square$

Задача 2. *Пусть* X *- множество. Докажите, что* 2^X *(множество всех подмножеств* X *) является кольцом относительно операции симметрической разности* $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$ *и пересечения, взятых в качестве сложения и умножения соответственно. Есть ли единица в данном кольце? Является ли оно полем?*

Решение. Докажем, что является кольцом. Проверим некоторые неочевидные аксиомы:

1. $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
2. $(A \triangle B) \cap C = (A/B \cup B/A) \cap C = (A \cap C)/(B \cap C) \cup (B \cap C)/(A \cap C) = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$
3. X - абелева : $A \triangle B = B \triangle A$, $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C) = A \triangle B \triangle C$
4. Нейтральные элемент "1" $x : A \cup x = A \; \forall A \subseteq x$

Не является полем. Отсутствует обратый элемент: $A \subset X$ не существует $B : A \cap B = X$, так как $A \cap B \subseteq A \subset X$ $\square$

Задача 3. *Докажите, что множество конечных подмножеств множества* X *образует подкольцо в кольце из предыдущей задачи. Является ли подкольцо идеалом?*

Решение. Решение $\square$

Задача 4. *Докажите, что множество нильпотентных элементов коммутативного кольца вместе с 0 образуют идеал.*

Решение. Решение $\square$

Задача 5. *Доказать, что в кольце квадратных матриц порядка* n *с элементами из* $\mathbb{R}$ *вырожденные матрицы и только они являются делителями нуля.*

Решение. Решение $\square$