Домашнее задание 7

Задача 1. Найдите с точностью до изоморфизма все различные абелевы группы порядка 20 (можно представлять группу, как прямое произведение циклических групп).

Решение.

Воспользумся утверждением, что любая Абелева группа изоморфна прямому произведению циклических групп. Вользовавшись Китайской теоремой об остатках, получим что  $\mathbb{Z}_{20}\cong\{C_4\times C_5,C_2\times C_{10}\}.$ 

**Задача 2.** Существует ли сюръективный гомоморфизм  $C_{24} \times C_{18}$  на  $C_{16}$ ?

Решение. 
$$HOR(24,18) = 72$$
, to  $72 \% 16 = 0$  Сюръективного гомономоризма не существует, Т.К  $b C_{24} \times C_{18}$  нет элемента торадка 16.

Решение. Приведём доказательство от противного : пусть гомоморфизм существует. Тогда  $\forall a \in C_{24} \times C_{16} \longrightarrow \operatorname{ord}(a) = \operatorname{HOK}(24, 18) = 72 \, \Box$ 

**Задача 3.** Существует ли сюръективный гомоморфизм  $C_{16} \times C_{9}$  на  $C_{24}$ ?

Решение. Да, существует, покажем это.

$$HOД(16,9) = 144 \div 24$$

Пусть c - образующий  $C_{24}$ , тогда

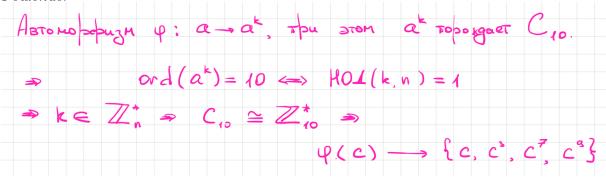
$$(a,e)\longrightarrow c^3, a$$
 - попрождающий  $C_{16}$ 

$$(e,e)\longrightarrow c^8, a$$
 - попрождающий  $C_9$ 

Следовательно, этот гомомрфизм будет сюръективаны, так как значения образа покрыты.  $\square$ 

**Задача 4.** Найдите все элементы группы автоморфизмов  $C_{10}$  и укажите, как устроена данная группа (можно показать какой группе она изоморфна).

Решение.



Задача 5. Найдите все перестановки, коммутирующие с (123)(4567) в  $S_8$ .

*Решение.* Нам нужно найти все  $\sigma$ , такие что  $\sigma \tau = \tau \sigma$  или, что эквивалентно,  $\tau = \sigma \tau \sigma^{-1}$ . Запишем:

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3))(\sigma(4)\sigma(5)\sigma(6)\sigma(7)) = (123)(4567)$$

Заметим, что автоматически  $\sigma(8)=8$ . Положим  $A:=(\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3))$  и  $B:=(\sigma(4)\sigma(5)\sigma(6)\sigma(7))$ . Тогда для A возможны случаи:

1. 
$$\sigma(1) = 1, \sigma(2) = 2, \sigma(3) = 3$$

2. 
$$\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 1, \sigma(3) = 2$$

3. 
$$\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 1$$

Аналогично для B:

1. 
$$\sigma(4) = 4, \sigma(5) = 5, \sigma(6) = 6, \sigma(7) = 7$$

2. 
$$\sigma(4) = 7, \sigma(5) = 4, \sigma(6) = 5, \sigma(7) = 6$$

3. 
$$\sigma(4) = 6, \sigma(5) = 7, \sigma(6) = 4, \sigma(7) = 5$$

4. 
$$\sigma(4) = 5, \sigma(5) = 6, \sigma(6) = 7, \sigma(7) = 4$$

Тогда все перестановки, коммутирующие с (123)(4567) в  $S_8$  есть прямое произведение  $A\times B$  в  $S_8$ . Их всего  $\frac{8!}{\frac{8!}{3.4}}=12$   $\square$