Гаттаров Тимур Б05-304 (10/02/2024)

Задача 1. *Образуют ли группу:*

(a) положительные рациональные числа относительно деления.

(b) матрицы 3x3 с целыми коэффициентами и детерминантом 1 относительно умножения матриц.

Решение.

(a) Нет. Так как для группы на множестве рациональных относительно операции деления не выполнена ассоциативность:

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc} \neq \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b}$$

(b) Да. Замкнутость доказывается очевидно: при произвдении двух матриц (3x3) получается матрица (3x3). Заметим что, коэффициенты полученной матрицы целые числа, так происходит только сложение и умножение целых чисел. Ассоциативность произвдения матриц (если оно определено) доказывается в курсе линейной алгебры. Существует нейтральный элемент:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Несложно доказывается существование A^{-1}: $A^{-1}A = E$, причём A^{-1} должен иметь целые коэффициенты. Для элементов обратной матрицы существует формула: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = A^*$ (в нашем случае) где A^* - матрица алгебраических дополнений, все коэффициенты которой целые числа, так как они являются детерминантами миноров матрицы с целыми коэффиентами (проще говоря при сложении, вычитании, умножении целых числе - результат целое число).

Единственность E и A^{-1} доказывается в курсе линейной алгебры. □

Задача 2. *Говорят, что элементы a и b группы G коммутируют, если выполнено $ab = ba$. Докажите, что если a и b коммутируют, то a и b^{-1} коммутируют.*

Решение.

$$ab = ba$$

$$abb^{-1} = bab^{-1} = a$$

$$bab^{-1} = ea = bb^{-1}a$$

$$ab^{-1} = b^{-1}a$$

□

Задача 3. *Для любого элемента a группы G выполнено, что $a^2 = e$. Докажите, что группа абелева.*

Решение. Запишем условие для a и b:

$$a^2 = aa = e$$

$$b^2 = bb = e$$

Тогда

$$a^2b^2 = ee = e$$

Запишем условие для ab:

$$(ab)^2 = abab = ee = e$$

Тогда:

$$abab = e = aabb$$

$$aba = aabb$$

$$ba = ab$$

Тогда группа абелева. □

Задача 4. *Пусть H - подмножество группы G. Докажите, что H - подгруппа тогда и только тогда, когда H непусто и $\forall x, y \in H : xy^{-1} \in H$.*

Решение.

$\Rightarrow$ Из определения непустой подгруппы, очевидно доказывается свойство $\forall x, y \in H : xy^{-1} \in H$: H - подгруппа: $\forall y \ \exists \ y^{-1} \in H, x \in H \to xy^{-1} \in H$

$\Leftarrow$ Покажем из того, что H непусто и $\forall x, y \in H : xy^{-1} \in H$, то H - группа.

Покажем существование нейтрального элемента: пусть $x = y$, тогда $\forall x \in H \hookrightarrow xx^{-1} = e \in H$.

Покажем существование обратного элемента: пусть $x = e$, тогда $\forall y \in H \hookrightarrow ey^{-1} = y^{-1} \in H$.

Ассоциативность следует из того что H - подмножество группы.

Покажем замкнутость:

$$x, y \in H \hookrightarrow xy^{-1} \in H$$

$$x(xy^{-1})^{-1} = xyx^{-1} \in H$$

$$xyx^{-1}(x^{-1})^{-1} = xy \in H$$

□

Задача 5. *Найдите все конечные подгруппы группы целых чисел по сложению*

Решение. Воспользуемся тем, что подгруппа H конечна, тогда выберем:

$$M = \max(H)$$

$$m = \min(H)$$

Тогда требуется, чтобы были выполнены следующие неравенства:

$$m + m \geq m \to m \geq 0$$

$$M + M \leq M \to M \leq 0$$

Тогда группа $G = (G, +), \ G = \{0\}$ □