Задача 1. *Укажите классы сопряжённости в S_5.*

Решение. В общем случае число классов сопряжённости в симметрической группе S_n равно количеству разбиений числа n, так как каждый класс сопряжённости соответствует в точности одному разбиению перестановки $\{1, 2, \ldots, n\}$ на циклы. Число разбиений для $l(5) = 7 : \{\{5\}, \{4, 1\}, \{3, 2\}, \{3, 1, 1\}, \{2, 2, 1\}, \{2, 1, 1, 1\}, \{1, 1, 1, 1, 1\}\}$ □

Задача 2. *Укажите нормальные подгруппы в S_3.*

Решение. Перечислим все перестановки S_3:

$$S_3 = \{e, (12), 23, (31), (123), (132)\}$$

Очевидно что, e и S_3 являются нормальными подгруппами. Проверим остальные: $H = \{e, (12)\}$ является группой, но не является нормальной (для $x = (23)$). Аналогичные рассуждения приводятся и для $H = \{e, (13)\},\ H = \{e, (23)\}$.

$H = \{e, (123), (132)\}$ - подгруппа, при том индекса 2 , а подгруппы иднекса 2 всегда нормальные.

Ответ: $\{e\}$, $\{e, (123), (132)\}$, S_3

□

Задача 3. *Пусть G - группа, H - её нормальная подгруппа, докажите, что $\forall x \in H$: $[x] \in H$. (То есть что классы сопряженности должны целиком лежать в нормальной подгруппе)*

Решение. Подгруппа H нормальна тогда и только тогда, когда для любых $h \in H$ и $g \in G$ выполнено $ghg^{-1} \in H$. То есть для любого $h \in H$ выполнено $C(h) \subset H$. □

Задача 4. *Используя прошлую задачу докажите, что не существует нетривиальных (не единичный элемент и не сама группа) нормальных подгрупп группы A_5.*

Решение. Группа A_5 представима из циклов вида $(ab)(cd)(e)$ или $(abc)(d)(e)$ - остальные тривиальными. Воспользуемся утвержением, доказанным в *Задаче 3.* Если существует нетривиальная нормальная подгруппа, то она должна либо целиком содержать классы смежности вида $(ab)(cd)(e)$ или $(abc)(d)(e)$.

Приведём контрпример, где класс смежности $(ab)(cd)(e)$ не образует подгруппу: $(12)(34) \circ (23)(45) = (24531)$. Аналогичный контрпример и для $(abc)(d)(e) : (123) \circ (234) = (21)(34)-$ не группа. □

Задача 5. *Докажите, что нормальная подгруппа индекса k содержит все элементы, порядки которых взаимно просты с k.*

Решение. Пусть H - нормальная подгруппа G с индексом k. Пусть также есть x порядка n. НОД$(n, k) = 1$:

$$x^n = e \in H$$

Фактор-группа G/H имеет порядок k, поэтому $(xH)^k = H$. Воспользуемся нормальностью подгруппы:

$$(xH)^k = x^k H = H \Longrightarrow x^k \in H$$

Так как НОД$(n, k) = 1$, существуют такие целые числа x, y, что

$$kx + ny = 1$$

Возведем в эту степень x :

$$x = x^1 = \left(x^k\right)^x \cdot (x^n)^y \in H$$

Утверждение доказано. $\square$