Задача 1. *AB*

Задача 2. *Построить гомоморфизм φ аддитивной группы рациональных чисел $(\mathbb{Q}, +)$, ядром которого является подгруппа целых чисел $(\mathbb{Z}, +)$.*

Решение. Построим гомоморфизм φ из $(\mathbb{Q}, +)$ в группу корней из единицы $(A, \cdot)$ по следующему правилу:

$$\forall q \in \mathbb{Q} \ \exists \ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} : q = \frac{m}{n} \hookrightarrow \varphi(q) = \varphi(m/n) = \cos(2\pi m/n) + i \sin(2\pi m/n)$$

Тогда имеем:

$$\forall z \in \mathbb{Z} \hookrightarrow \varphi(z) = \cos(2\pi z) + i \sin(2\pi z) = 1 = e,$$

где $e = 1$ - нейтральный элемент в $(A, \cdot)$. Таким образом, получаем $\varphi = (\mathbb{Q}, +)$. □

Задача 3. *В предыдущей задаче покажите, что факторгруппа по ядру гомоморфизма имеет бесконечный порядок, но порядок каждого элемента конечен.*

Решение. По основной теореме о гомоморфизмах:

$$G/Ker\varphi \cong \operatorname{Im} \varphi$$

В нашем случае имеем:

$$(\mathbb{Q}, +)/\operatorname{Ker} \varphi \cong (A, \cdot),$$

но группа $(A, \cdot)$ является бесконечной. Оценим порядок элемента, откуда сделаем вывод о его конечности:

$$|\cos(2\pi m/n) + i \sin(2\pi m/n)| \leq n \in \mathbb{Z}.$$

□

Задача 4. *Покажите, что факторгруппа невырожденных матриц по умножению по подгруппе матриц с детерминантом 1 изоморфна мультипликативной группе действительных чисел $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \times)$.*

Решение. Рассмотрим отображение $\varphi(A) = \det(A)$. Покажем, что φ действительно является гомоморфизмом: По опрделелению гомоморфизма:

$$\varphi - \text{гомоморфизм} \Leftrightarrow \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

По свойству детерминанта, доказанного в курсе Линейной алгебры:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Далее применим следующую теорему:

(Основная теорема о гомоморфизмах) Пусть $\varphi : G \to H$ - гомоморфизм групп. Тогда $\exists!$:

$$\overline{\varphi} : G/\operatorname{Ker}\varphi \to \operatorname{Im}\varphi$$

Таким образом, гомоморфный образ группы из всех невырожденных матриц (группа всех ненулевых дейтсвительных чисел по умножению) изоморфен факторгруппе по ядру гомоморфизма (факторгруппе по матрицам $A : \det(A) = 1$). □

Задача 5. *Найдите количество различных (не совмещаемых вращениями) раскрасок вершин куба в 2 цвета.*

Решение.

□

Задача 6. *Сколько различных ожерелий из 6 бусин можно составить, имея две красные, две синие и две зелёные бусины?*

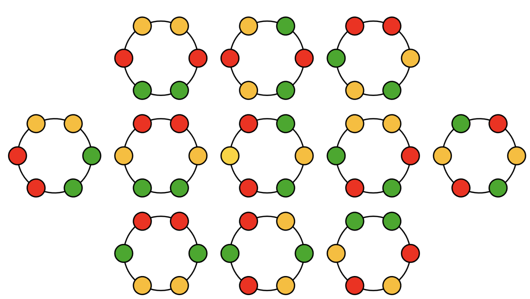
Решение.

Введем группу поворотов и отражений : $\{r^0 ... r^5, s_1 .. s_5\}$

g	Комментарий	$\lvert X_g \rvert$
e	все раскраски переходят в себя	$\frac{P_6}{2!\cdot 2!\cdot 2!}$
r, r^{-1}	расскраски переходят в себя по циклу	0
r^2, r^{-2}	Каждая вершина переходит через одну от себя	0
r^3	Каждая вершина переходит в противоположную	P_3
s_2, s_4, s_6	Отражения относительно осей, проходящих через середины противоположных сторон	$3P_3$
s_1, s_3, s_5	Отражения относительно осей, проходящих через противоположные вершины	$3P_3$

По *Лемме Бернсайда*:

$$\operatorname{orb}(X) = \frac{\Sigma_{g\in G}|X_g|}{|G|} = \frac{90+0+0+6+18+18}{12} = 11$$



□