
Задача 1. *Найдите порядок перестановки (123)(4567) в S_8. Найдите количество сопряженных к ней. (Сопряженной к перестановке a называются перестановки, представимые в виде $\sigma a \sigma^{-1}$)*

Решение. Воспользуемся утверждниеим: *порядок перестановки равен НОК длин всех циклов в её цикловом представлении.* Порядок перестановки $k = \text{НОК}(1,3,4) = 12$.

Воспользуемся ещё одним утвержением: *для любой перестановки τ сопряжение ее произвольной перестановкой на любом количестве символов формирует перестановку, которая имеет точно такую же структуру разложения в циклы, как и τ.*

Тогда выберем в первый цикл 4 элемента из 8, во второй 3 элемента из оставшихся 5 и рассмотрим всевозможные перестановки в этих циклах, кроме циклических перестановок: зафиксируем первое в них число и перемешаем все остальные.

$$C_8^4 \cdot C_4^3 \cdot 3! \cdot 2!$$

□

Задача 2. *Найдите все решения уравнения $\sigma^2 = (123)$ в S_6.*

Решение. Воспользуемся утверждением: *при возведении цикла длины n в степень k цикла распадается на цикл длины $\frac{n}{\text{НОД}(n,k)}$.*

При возведении цикла длины 6 он распадается на 2 цикла длины 3, длины 5 - в цикла длины 5, длины 4 - в в цикл 2 цикла длины 2, цикл длины 2 - в 2 цикла длины 1. Таким образом нас интересуют только циклы длины 3. Тогда рассмотрим 4 случая:

$$(abc)^2 = (bac) = (123)$$

$$(abc)^2(cd)^2(e)^2 = (bac) = (123)(4)(5)(6)$$

$$(abc)^2(c)^2(de)^2 = (bac) = (123)(4)(5)(6)$$

$$(abc)^2(ce)^2(d)^2 = (bac) = (123)(4)(5)(6)$$

Ответ: $\sigma = (213)$, $(213)(45)$, $(213)(56)$, $(213)(46)$ □

Задача 3. *Найдите* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 7 & 5 & 1 & 6 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}^{2030}$

Решение. $((1274)(356))^{2030} = (1274)^2(356)^2 = (17)(24)(365)$. □

Задача 4. *Найдите наименьший n такой, что группа C_{12} (циклическая группа порядка 12) изоморфна одной из подгрупп S_n.*

Решение. *(Аналогично разобранному в учебнике «Основы высшей алгебры и теории кодирования» Ю. И. Журавлёв, Ю. А. Флёров, М. Н. Вялый примеру 6.28)*

Теорема Кэли гарантирует, что $C_n \cong G < S_n$. Из её доказательства ясно даже, что это за подгруппа G : она порождена циклом длины n.

Однако это не наименьшее k для которого в S_k существует подгруппа, изоморфная C_n. Действительно, любой элемент группы, порядок которого равен n, порождает подгруппу, изоморфную C_n.

Вспоминая формулу для порядка перестановки, получаем такую неявную характеризацию тех k, для которых в S_k есть элемент порядка n : существует такое разбиение k на слагаемые, $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_t$, что НОК $(k_1, k_2, \ldots, k_t) = n$.

$$k = 3 + 4 = 7,\ \text{НОК}(3, 4) = 12$$

□

Задача 5. *Укажите все смежные классы группы C_{12} по подгруппе порядка 3.*

Решение. Так как H подгруппа, то она сожержит в себе e. Пусть подгруппа содержит в себе элемент x, но тогда она и содержит элемент $x^{-1} : xx^{-1} = e$. Но длина подгруппы по условию 3. Тогда имеем группу:

$$H = \{e, x, x^{-1}\}$$

Порождающим элементом в C_{12} является 1. Найдём подгруппу H. Воспользуемся теоремой Лагранжа и условием количества элементов в группе:

$$\frac{12}{\text{НОД}(12, k)} = 3 \longrightarrow k \in \{4, 8\}$$

где $x = 1^k$. Получили интересующую нас подгруппу $H = 0, 4, 8$. Перечислим все классы смежности с учётом коммутативности операции $+$: $\{0, 4, 8\}; \{1, 5, 9\}; \{2, 6, 10\}; \{3, 7, 11\}$
□