Гаттаров Тимур Б05-304 (25/03/2024)

Задача 1. *Найдите с точностью до изоморфизма все различные абелевы группы порядка 20 (можно представлять группу, как прямое произведение циклических групп).*

Решение.

Воспользумся утверждением, что *любая Абелева группа изоморфна прямому произведению циклических групп.* Вользовавшись Китайской теоремой об остатках, получим что $\mathbb{Z}_{20} \cong \{C_4 \times C_5, C_2 \times C_{10}\}$.

□

Задача 2. *Существует ли сюръективный гомоморфизм $C_{24} \times C_{18}$ на C_{16}?*

Решение.

НОК $(24, 18) = 72$, но $72 \% 16$ ⇒ сюръективного гомономорфизма не существует, т.к в $C_{24} \times C_{18}$ нет элемента порядка 16.

□

Решение. Приведём доказательство от противного : пусть гомоморфизм существует. Тогда $\forall a \in C_{24} \times C_{16} \longrightarrow \mathrm{ord}(a) = \text{НОК}(24, 18) = 72$ □

Задача 3. *Существует ли сюръективный гомоморфизм $C_{16} \times C_9$ на C_{24}?*

Решение. Да, существует, покажем это.

$$\text{НОД}(16, 9) = 144 \vdots 24$$

Пусть c - образующий C_{24}, тогда

$$(a, e) \longrightarrow c^3, a \text{ - попрождающий } C_{16}$$

$$(e, e) \longrightarrow c^8, a \text{ - попрождающий } C_9$$

Следовательно, этот гомомрфизм будет сюръективаны, так как значения образа покрыты. □

Задача 4. *Найдите все элементы группы автоморфизмов C_{10} и укажите, как устроена данная группа (можно показать какой группе она изоморфна).*

Решение.

Автоморфизм $\varphi : a \to a^k$, при этом a^k порождает C_{10}.

⇒ $\mathrm{ord}(a^k) = 10 \Longleftrightarrow$ НОД$(k, n) = 1$

⇒ $k \in \mathbb{Z}_n^*$ ⇒ $C_{10} \cong \mathbb{Z}_{10}^*$ ⇒

$\varphi(c) \longrightarrow \{c, c^3, c^7, c^9\}$

□

Задача 5. *Найдите все перестановки, коммутирующие с* $(123)(4567)$ *в* S_8.

Решение. Нам нужно найти все σ, такие что $\sigma\tau = \tau\sigma$ или, что эквивалентно, $\tau = \sigma\tau\sigma^{-1}$. Запишем:

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3))(\sigma(4)\sigma(5)\sigma(6)\sigma(7)) = (123)(4567)$$

Заметим, что автоматически $\sigma(8) = 8$. Положим $A := (\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3))$ и $B := (\sigma(4)\sigma(5)\sigma(6)\sigma(7))$. Тогда для A возможны случаи:

1. $\sigma(1) = 1, \sigma(2) = 2, \sigma(3) = 3$
2. $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 1, \sigma(3) = 2$
3. $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 1$

Аналогично для B:

1. $\sigma(4) = 4, \sigma(5) = 5, \sigma(6) = 6, \sigma(7) = 7$
2. $\sigma(4) = 7, \sigma(5) = 4, \sigma(6) = 5, \sigma(7) = 6$
3. $\sigma(4) = 6, \sigma(5) = 7, \sigma(6) = 4, \sigma(7) = 5$
4. $\sigma(4) = 5, \sigma(5) = 6, \sigma(6) = 7, \sigma(7) = 4$

Тогда все перестановки, коммутирующие с $(123)(4567)$ в S_8 есть прямое произведение $A \times B$ в S_8. Их всего $\frac{8!}{\frac{8!}{3\cdot 4}} = 12$ $\square$