Exercise 1

Kutuev Timur

October 2020

Разложение функции в ряд Тейлора

Разложим функцию $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$ в ряд Тейлора. Общая формула Тейлора имеет следующий вид:

$$f(x) = f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Найдем значения функции и ее производных при $x = 0$.

- $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$,
  $f(0) = 1$
- $f'(x) = \dfrac{(\sin(x)-\cos(x))\cos(x)}{(\sin(x)+\cos(x))^2} - \dfrac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$,
  $f'(0) = -1$
- $f''(x) = -\dfrac{2(\sin(x)-\cos(x))\sin(x)}{(\sin(x)+\cos(x))^2}+\dfrac{(\sin(x)-\cos(x))(2\sin(x)-2\cos(x))\cos(x)}{(\sin(x)+\cos(x))^3}$,
  $f''(0) = 2$
- $f'''(x) = \dfrac{2(\sin(x)-\cos(x))\cos(x)}{(\sin(x)+\cos(x))^2}-\dfrac{3(\sin(x)-\cos(x))(2\sin(x)-2\cos(x))\sin(x)}{(\sin(x)+\cos(x))^3}+$
  $+\dfrac{(\sin(x)-\cos(x))(2\sin(x)+2\cos(x))\cos(x)}{(\sin(x)+\cos(x))^3}+$
  $+\dfrac{(\sin(x)-\cos(x))(2\sin(x)-2\cos(x))(3\sin(x)-3\cos(x))\cos(x)}{(\sin(x)+\cos(x))^4}-2\dfrac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}+$
  $\dfrac{(2\sin(x)-2\cos(x))\cos(x)}{(\sin(x)+\cos(x))^2}$,
  $f'''(x) = -8$

Подставляя полученные значения производных в ряд Тейлора, получим:

$$\frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)} = 1+\frac{-1}{1!}x+\tfrac{2}{2!}x^2+\frac{-8}{3!}x^3+\dots$$