

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Сибирский государственный университет науки и технологий
имени академика М.Ф. Решетнева»

Кафедра управления качеством и сертификации

Рекомендовано
для использования в учебном процессе
методической комиссией
института машиноведения и мехатроники
протокол №5 от «26» мая 2017 г.

М. Ю. Черняк, М. С. Эльберг

Методы оптимизации в технике

Практикум

для студентов направления 27.03.01/ Стандартизация и метрология

всех форм обучения

Красноярск, 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

Общие сведения	3
1. Методы оптимизации функций одной переменной	4
Унимодальные функции. Критерии для проверки унимодальности функций	4
Выпуклые функции	5
Условие Липшица	7
Классическая минимизация функции одной переменной9
Прямые методы оптимизации функции одной переменной	10
Методы, основанные на использовании производных функции (непрямые методы)	27
2. Методы оптимизации функций многих переменных	31
Косвенные методы оптимизации	31
Прямые методы безусловной оптимизации	33
Методы безусловной многомерной минимизации, использующие производные функции	47
3. Методы условной оптимизации	54
Постановка и особенности нелинейных задач с ограничениями	54
Методы штрафных функций	57
Метод множителей Лагранжа	67
Задания для самостоятельной работы	73
Унимодальные функции	73
Методы одномерной безусловной оптимизации	73
Методы многомерной безусловной оптимизации	80
Методы условной многомерной оптимизации	83
Библиографический список	88
Приложения	89

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

В наиболее общем смысле теория оптимизации представляет собой совокупность фундаментальных математических результатов и численных методов, ориентированных на нахождение и идентификацию наилучших вариантов из множества альтернатив и позволяющих избежать полного перебора и оценивания возможных вариантов. Процесс оптимизации лежит в основе всей инженерной деятельности.

Важность и ценность теории оптимизации заключается в том, что она дает адекватные понятийные рамки для анализа и решения многочисленных задач:

- в исследовании операций: оптимизация технико-экономических систем, транспортные задачи, управление запасами и т. д.;
- в численном анализе: аппроксимация, регрессия, решение линейных и нелинейных систем, численные методы, включая методы конечных элементов, и т. д.;
- в автоматике: распознавание образов, оптимальное управление, фильтрация, управление производством, робототехника и т. д.;
- в математической экономике: решение больших макроэкономических моделей, моделей предпринимательства, теория принятия решений и теория игр.

В представленном практикуме рассмотрены методы оптимизации функций одной и многих переменных, методы условной оптимизации, а также даны задания для самостоятельной работы и библиографический список.

Рассмотренные методы далеко не исчерпывают все многообразие методов оптимизации. Изложены лишь основные идеи и методы. Предсказать заранее, какой метод окажется наиболее эффективным в конкретном случае, далеко не всегда возможно. В практической работе возникают различные задачи, но самое главное – это понять смысл задачи, уметь увидеть ее особенности и использовать их при создании математической модели, выборе метода оптимизации и разработке конкретного алгоритма решения. Одна и та же задача может быть решена различными методами.

1. МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Унимодальные функции. Критерии для проверки унимодальности функций

Многие методы оптимизации применимы только тогда, когда целевая функция $f(x)$ является унимодальной, т. е. любой локальный минимум функции одновременно является и глобальным.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется *унимодальной* на отрезке $[a; b]$, если она непрерывна на отрезке $[a; b]$ и существуют числа α и β , $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$, такие, что:

- 1) если $a < \alpha$, то на отрезке $[a; \alpha]$ функция $f(x)$ монотонно убывает;
- 2) если $\beta < b$, то на отрезке $[\beta; b]$ функция $f(x)$ монотонно возрастает;
- 3) при $x \in [\alpha; \beta]$ $f(x) = f^* = \min_{[a; b]} f(x)$.

Множество унимодальных на отрезке $[a; b]$ функций будем обозначать через $Q[a; b]$. Отметим, что возможно вырождение в точку одного или двух отрезков из $[a; \alpha]$, $[\alpha; \beta]$ и $[\beta; b]$ (рис. 1).

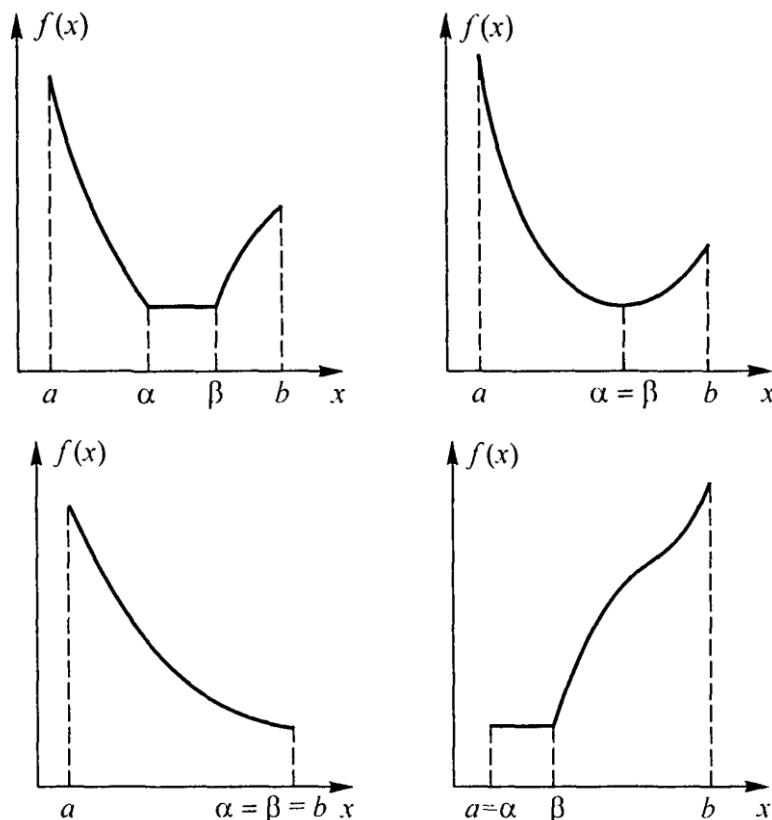


Рис. 1. Варианты расположения и вырождения в точку отрезков монотонности и постоянства унимодальной функции

Из определения 1 вытекают следующие основные свойства унимодальных функций:

1. Любая из точек локального минимума унимодальной функции является и точкой ее глобального минимума на отрезке $[a; b]$.

2. Функция, унимодальная на отрезке $[a; b]$, является унимодальной и на любом меньшем отрезке $[c; d] \subset [a; b]$.

3. Пусть $f(x) \in Q[a; b]$ и $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. Тогда:

– если $f(x_1) \leq f(x_2)$, то $x^* \in [a; x_2]$,

– если $f(x_1) > f(x_2)$, то $x^* \in [x_1; b]$,

где x^* – одна из точек минимума $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Для проверки унимодальности функции $f(x)$ на практике используются следующие критерии:

– если функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a; b]$ и производная $f'(x)$ не убывает на этом отрезке, то $f(x) \in Q[a; b]$;

– если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на отрезке $[a; b]$ и вторая производная $f''(x) \geq 0$ при $x \in [a; b]$, то $f(x) \in Q[a; b]$.

Если эти критерии не выполняются, то функция $f(x)$ является мультимодальной или многоэкстремальной.

Пример 1. Показать, что функция $f(x) = x^4 - 10x^3 + 36x^2 + 5x$ унимодальная на отрезке $[3; 5]$.

Вторая производная функции $f(x)$ равна $f''(x) = 12x^2 - 60x + 72$. Корни полученного квадратного трехчлена $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$. Следовательно, $f''(x) \geq 0$, если $x \geq 3$, и в частности, при $x \in [3; 5]$. Используя второй критерий унимодальности, получаем, что $f(x) \in Q[3; 5]$.

Выпуклые функции

Определение 2. Функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a; b]$, называется *выпуклой* на этом отрезке, если для всех $x', x'' \in [a; b]$ и произвольного числа $\alpha \in [0; 1]$ выполняется неравенство

$$f[\alpha x' + (1 - \alpha)x''] \leq \alpha f(x') + (1 - \alpha)f(x''). \quad (1)$$

Перечислим основные свойства выпуклых функций:

1. Если функция $f(x)$ выпуклая на $[a; b]$, то на любом отрезке $[x'; x''] \subset [a; b]$ ее график расположен не выше хорды, проведенной через точки графика с абсциссами x' и x'' (рис. 2).

Пусть x' и x'' – произвольные точки отрезка $[a; b]$, причем $x' < x''$. Легко проверить, что при любом $\alpha \in [0; 1]$ точка $x_\alpha = \alpha x' + (1 - \alpha)x''$

лежит на отрезке $[x'; x'']$ и при непрерывном изменении α от 0 до 1 пробегает этот отрезок от точки x'' (при $\alpha = 0$) до точки x' (при $\alpha = 1$).

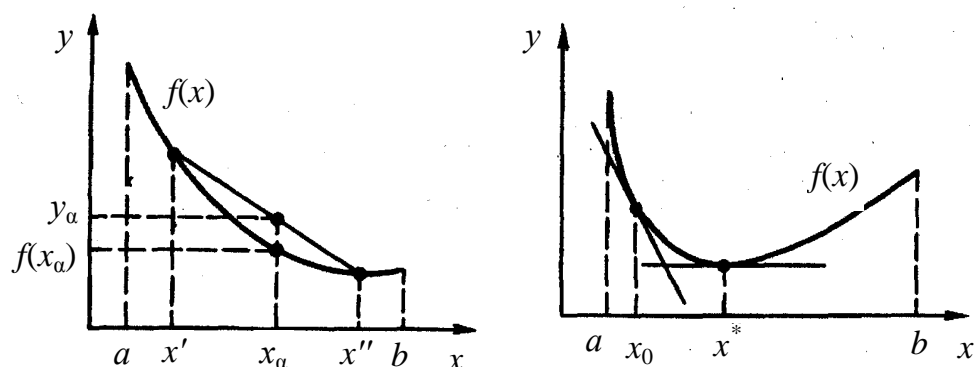


Рис. 2. Взаимное расположение $\alpha f(x') + (1 - \alpha)f(x'')$

Рассмотрим хорду графика $f(x)$, проходящую через точки $(x', f(x'))$ и $(x'', f(x''))$. Неравенство (1) графика выпуклой функции и хорды означает, что $f(x_\alpha) \leq y_\alpha$, т. е. при любом расположении x_α на отрезке $[x'; x'']$ точка графика функции $f(x)$ лежит не выше соответствующей точки хорды.

2. Из курса математического анализа известны следующие условия выпуклости функции:

- для того чтобы дифференцируемая на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ была выпуклой на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы производная $f'(x)$ не убывала на $[a; b]$;

- для того чтобы дважды дифференцируемая на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ была выпуклой на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы при всех $x \in [a; b]$ выполнялось неравенство $f''(x) \geq 0$.

3. Условие выпуклости для дифференцируемой на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$ означает, что на этом отрезке любая касательная к графику $f(x)$ лежит не выше этого графика (рис. 2, справа).

Уравнение касательной к графику $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in [a; b]$, имеет вид $y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. По формуле конечных приращений для любого $x \in [a; b]$ имеем $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$, где точка ξ лежит между x и x_0 . Поэтому $f(x) - y(x) = [f'(\xi) - f'(x_0)](x - x_0)$, $x \in [a; b]$, откуда с учетом того, что производная $f'(x)$ выпуклой функции не убывает, получаем $f(x) - y(x) \geq 0$ для всех $x \in [a; b]$.

4. Если $f(x)$ – выпуклая дифференцируемая на отрезке $[a; b]$ функция и в точке $x^* \in [a; b]$ выполняется равенство $f'(x^*) = 0$, то x^* является точкой глобального минимума $f(x)$ на $[a; b]$.

С учетом $f'(x^*) = 0$, уравнение касательной $y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ к графику $f(x)$ для точки $x_0 = x^*$ принимает вид $y(x) = f(x^*)$. Поэтому следует, что $f(x) \geq f(x^*)$ для всех $x \in [a; b]$, т. е. x^* — точка глобального минимума $f(x)$.

Благодаря свойству 3 выпуклых функций данное свойство приобретает простой геометрический смысл: поскольку касательная к графику $f(x)$ в точке с абсциссой x^* горизонтальна, а этот график расположен не ниже касательной, то x^* есть точка минимума $f(x)$ (рис. 2, справа).

Таким образом, равенство $f'(x^*) = 0$ для выпуклой дифференцируемой функции является не только необходимым условием глобального минимума (как для всякой дифференцируемой функции), но и его достаточным условием.

5. Всякая выпуклая непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция является и унимодальной на этом отрезке. Обратное, вообще говоря, неверно. Таким образом, кроме перечисленных свойств, выпуклые функции обладают также и всеми свойствами унимодальных функций.

Примечание. При исследовании выпуклости функций на практике неравенство (1) удастся использовать только в редких случаях. Поэтому для дифференцируемых достаточно число раз функций обычно применяют дифференциальные критерии выпуклости (см. свойство 2 выпуклых функций).

Непосредственная проверка унимодальности с помощью определения 1 также в большинстве случаев вызывает затруднения, и для обоснования унимодальности достаточно гладких функций часто используют те же критерии выпуклости. Если функция оказывается выпуклой, то можно утверждать, что она унимодальна (см. свойство 5). Разумеется, при отрицательном результате проверки функции на выпуклость нельзя сделать вывод о том, что она не унимодальна.

Условие Липшица

Применение некоторых методов одномерной минимизации возможно только в случае, если скорость изменения целевой функции $f(x)$ на любом участке отрезка $[a; b]$ ограничена некоторым числом, одним и тем же для всех участков. В этом случае говорят, что $f(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a; b]$ *условию Липшица*. Целевые функции большинства практических задач оптимизации указанным свойством обладают.

Определение 3. Функция $f(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a; b]$ условию Липшица, если существует такое число $L > 0$ (константа Липшица), что

$$|f(x') - f(x'')| \leq L|x' - x''| \quad (2)$$

для всех x' и x'' , принадлежащих $[a; b]$.

Примечания:

1. Если неравенство (2) выполняется с константой L , то оно справедливо и при всех $L' > L$. Поэтому для функции, удовлетворяющей условию Липшица, существует бесконечное множество констант L из равенства (2). При использовании алгоритмов минимизации, включающих L как параметр, наилучшие результаты достигаются, как правило, если в качестве L берется минимальная из констант Липшица.

2. Из условия (2) непосредственно следует непрерывность $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Поэтому согласно теореме Вейерштрасса функция $f(x)$, удовлетворяющая на отрезке $[a; b]$ условию Липшица, имеет на нем хотя бы одну точку минимума.

3. Условие (2) означает, что модуль углового коэффициента любой хорды графика $f(x)$ не превосходит L .

Переходя в условии (2) к пределу при $|x' - x''| \rightarrow 0$, убеждаемся, что если в некоторой точке существует касательная к графику функции $f(x)$, то модуль ее углового коэффициента также не может превышать L . Так, функция $f(x) = \sqrt{x}$ на отрезке $[0; 1]$ условию Липшица не удовлетворяет, потому что при $x \rightarrow +0$ угловой коэффициент касательной к ее графику k неограниченно возрастает (рис. 3).

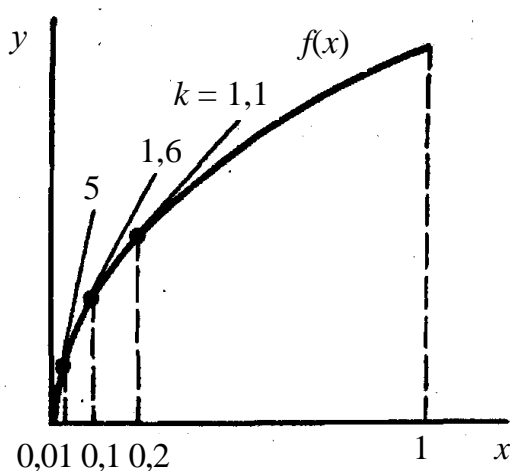


Рис. 3. График функции $f(x) = \sqrt{x}, x \in [0; 1]$, не удовлетворяющей условию Липшица

4. Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a; b]$ непрерывную производную, то она удовлетворяет на этом отрезке условию Липшица с константой $L = \max_{a;b} |f'(x)|$. По формуле конечных приращений для произвольных точек $x', x'' \in [a; b]$ имеем $f(x') - f(x'') = f'(\xi)(x' - x'')$, где ξ – некоторая точка, лежащая между x' и x'' . Отсюда с учетом условия $f'(\xi) \leq \max_{a;b} |f'(x)| = L$ получаем неравенство (2) для $f(x)$.

5. Если $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, а функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и удовлетворяет условию (2) на каждом из отрезков $[x_i; x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$, с константой L_i , то она удовлетворяет условию Липшица и на всем отрезке $[a; b]$ с константой $L = \max_{0 \leq i \leq n-1} L_i$.

Классическая минимизация функции одной переменной

Из математического анализа известны следующие условия локального экстремума функции $f(x)$, дифференцируемой достаточное число раз.

1. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке \tilde{x} и достигает в этой точке локального экстремума, то $f'(\tilde{x}) = 0$ (необходимое условие экстремума).

2. Пусть функция $f(x)$ n раз дифференцируема в точке \tilde{x} и в этой точке все производные $f(x)$ до $(n - 1)$ -го порядка включительно равны нулю, $f^{(n)}(\tilde{x}) \neq 0$. Тогда, если n – нечетное число, то \tilde{x} не является точкой локального экстремума функции $f(x)$. Если же n – четное число, то:

а) при $f^{(n)}(\tilde{x}) > 0$ \tilde{x} – точка локального минимума $f(x)$;

б) при $f^{(n)}(\tilde{x}) < 0$ \tilde{x} – точка локального максимума $f(x)$ (достаточное условие экстремума).

Перечисленные условия позволяют предложить следующий путь решения задачи минимизации:

1) с помощью условия 1 находим все точки возможного экстремума функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, т. е. корни уравнений $f'(\tilde{x}) = 0$ (стационарные точки), принадлежащие интервалу $(a; b)$;

2) найденные стационарные точки исследуем в соответствии с условием 2, выделяя из них только точки локальных минимумов $f(x)$;

3) значения $f(x)$ в точках локальных минимумов и на концах отрезка $[a; b]$ сравниваем между собой; наименьшему из этих значений соответствует точка глобального минимума $f(x)$ на $[a; b]$.

Примечание. Применение условия 2 требует вычисления высших производных функции $f(x)$, поэтому в большинстве случаев бывает проще сравнить значения $f(x)$ во всех стационарных точках, не интересуясь их характером. С учетом этого можно предложить следующий алгоритм минимизации $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ (*классический метод*):

Шаг 1. Решить уравнение $f'(\tilde{x}) = 0$ на интервале $x \in (a; b)$, т. е. найти все стационарные точки $x_1, \dots, x_{k-1} \in (a; b)$. Положить $x_0 = a$, $x_k = b$ (границы интервала).

Шаг 2. Вычислить значения $f(x)$ функции в точках x_i , $i = 0, \dots, k$.

Шаг 3. Найти $f^* = \min_{0 \leq i \leq k} f(x_i) = f(x_m)$. Положить $x^* = x_m$.

Пример 2. Решить задачу $f(x) = x^3 - 3x + 1 \rightarrow \min, x \in [-2; 2]$.

Шаг 1. Находим корни уравнения $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ из интервала $(-2; 2)$: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Полагаем $x_0 = -2$, $x_3 = 2$.

Шаг 2. Вычисляем значения $f(x)$ в точках x_i , $i = 0, \dots, 3$: $f(x_0) = -17$, $f(x_1) = 3$, $f(x_2) = -1$, $f(x_3) = 1$.

Шаг 3. Находим $f^* = \min(-17, 3, -1, 1) = -17 = f(x_0)$. Поэтому $x^* = x_0 = -2$, $f^* = -17$.

При решении практических задач оптимизации классический метод имеет ограниченное применение. Это объясняется тем, что, во-первых, во многих случаях значения целевой функции $f(x)$ находятся из измерений или экспериментов, а измерение производной $f'(x)$ затруднительно или невозможно, и, во-вторых, даже когда производная $f'(x)$ задана аналитически или поддается измерению, решение уравнения $f'(\tilde{x}) = 0$ зачастую вызывает затруднения.

Прямые методы оптимизации функции одной переменной

Для решения задачи минимизации функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ на практике, как правило, применяются приближенные методы. Они позволяют найти решение этой задачи с необходимой точностью в результате определения конечного числа значений функции $f(x)$ и ее производных в некоторых точках отрезка $[a; b]$. Методы, использующие только значения функции и не требующие вычисления ее производных, называются *прямыми методами минимизации*.

Большим достоинством прямых методов является то, что от целевой функции не требуется дифференцируемости, и, более того, она может быть не задана в аналитическом виде. Единственное, на чем основаны алгоритмы прямых методов минимизации, это возможность определения значений $f(x)$ в заданных точках.

Рассмотрим наиболее распространенные на практике прямые методы поиска точки минимума. Самым главным требованием для функции $f(x)$, позволяющим использовать эти методы, является ее унимодальность. Поэтому далее будем считать функцию $f(x)$ унимодальной на отрезке $[a; b]$.

Метод перебора (равномерного поиска). Метод перебора, или равномерного поиска, является простейшим из прямых методов минимизации и состоит в следующем.

Разобьем отрезок $[a; b]$ на n равных частей точками деления:

$$x_i = a + i(b - a)/n, i = 0, \dots, n.$$

Вычислив значения $f(x)$ в точках x_i , путем сравнения найдем точку x_m , $0 \leq m \leq n$, для которой

$$f(x_m) = \min_{0 \leq i \leq n} f(x_i). \quad (3)$$

Далее положим $x^* \approx x_m, f^* \approx f(x_m)$.

Рассмотрим следующие замечания:

1. Погрешность определения точки в минимумах x^* функции $f(x)$ методом перебора не превосходит величины $\varepsilon_n = (b - a) / n$.

Предположим, что x_m из выражения (3) является внутренней точкой разбиения отрезка $[a; b]$, т. е. $1 \leq m \leq n - 1$ (случаи $m = 0$ и $m = n$ рассматриваются аналогично). Тогда из соотношения (3) с учетом свойства унимодальных функций следует что:

$$\text{а) } f(x_{m-1}) \geq f(x_m), \text{ т. е. } x^* \in x_{m-1}; b ;$$

$$\text{б) } f(x_m) \leq f(x_{m+1}), \text{ т. е. } x^* \in a; x_{m+1} .$$

Отсюда получаем, что $x^* \in x_{m-1}; b \cap x^* \in a; x_{m+1} = x_{m-1}; x_{m+1}$. Длина последнего отрезка равна $2(b - a)/n$, а точка x_m является его серединой. Поэтому $|x_m - x^*| \leq (b - a) / n = \varepsilon_n$.

Таким образом, чтобы обеспечить требуемую точность ε определения точки x^* , число отрезков разбиения n необходимо выбрать из условия $\varepsilon_n = (b - a) / n \leq \varepsilon$, т. е. $n \geq (b - a) / \varepsilon$.

2. Пусть реализация метода перебора потребовала N вычислений функции $f(x)$. Это означает, что отрезок $[a; b]$ был разбит на $n = N - 1$ частей и достигнутая точность определением x^* составила

$\varepsilon_n = \varepsilon_{N-1} = \frac{b-a}{N-1}$. Поэтому точность решения $\varepsilon(N)$, которую обеспечивает метод перебора в результате N вычислений $f(x)$, будет

$$\varepsilon(N) = \frac{b-a}{N-1}. \quad (4)$$

Пример 3. Методом перебора решить задачу $f(x) = x^4 + e^{-x} \rightarrow \min$, $x \in [0; 1]$, с точностью до $\varepsilon = 0,1$.

Функция $f(x)$ унимодальна на отрезке $[0; 1]$, что нужно проверить. Найдем число n отрезков разбиения: $n \geq \frac{1-0}{0,1} = 10$, т. е. можно

взять $n = 10$. Вычислим значения $f(x_i)$, где $x_i = 0,1 \cdot i$, $i = 0, \dots, 10$, и запишем их в таблицу:

x_i	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$f(x_i)$	1,00	0,90	0,82	0,75	0,70	<u>0,67</u>	0,68	0,74	0,86	1,06	1,37

В этой таблице подчеркнуто минимальное из вычисленных значений $f(x)$. Таким образом, $x^* \approx 0,5$, $f^* \approx 0,67$.

В методе перебора точки x_i , в которых определяются значения $f(x)$, выбираются заранее. Если же для выбора очередной точки вычисления (измерения) $f(x)$ использовать информацию, содержащуюся в уже найденных значениях $f(x)$, то поиск точки минимума можно сделать более эффективным, т. е. сократить число определяемых для этого значений $f(x)$.

Пусть $a < x_1 < x_2 < b$. Сравнив значения $f(x)$ в точках x_1 и x_2 (пробных точках), можно сократить отрезок поиска точки x^* , перейдя к отрезку $[a; x_2]$, если $f(x_1) \leq f(x_2)$, или к отрезку $[x_1; b]$, если $f(x_1) > f(x_2)$ (рис. 4). Описанную процедуру можно повторить необходимое число раз, последовательно уменьшая отрезок, содержащий точку минимума. Когда длина последнего из найденных отрезков станет достаточно малой, следует положить $x^* \approx \bar{x}$, где \bar{x} — одна из точек этого отрезка, например, его середина. Методы минимизации, основанные на этом принципе, называются *методами исключения отрезков*.

Чтобы относительное уменьшение отрезка на каждой итерации не зависело от того, какая из его частей исключается из дальнейшего рассмотрения, пробные точки следует располагать симметрично относительно середины исходного отрезка. В зависимости от способа выбора пробных точек получаются различные методы исключения отрезков.

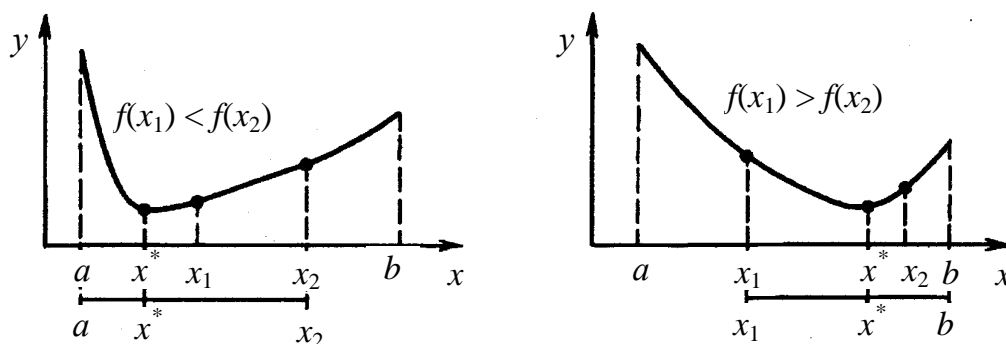


Рис. 4. Уменьшение отрезка поиска точки минимума методами исключения отрезков

Метод дихотомии (деления отрезка пополам). Точки x_1, x_2 выбираются близко от середины интервала на расстоянии $\delta > \varepsilon$ от середины $[a; b]$:

$$x_1 = (a_i + b_i - \delta) / 2,$$

$$x_2 = (a_i + b_i + \delta) / 2.$$

За одну итерацию интервал неопределенности уменьшается примерно в два раза (рис. 5). За n итераций длина интервала будет примерно равна $(b_0 - a_0)/2^n$. Для достижения точности ε потребуется $n \geq \frac{\ln(b_0 - a_0) / \varepsilon}{\ln 2}$ итераций. На каждой итерации минимизируемая функция вычисляется дважды.

Опишем алгоритм метода деления отрезка пополам.

Шаг 1. Определить x_1 и x_2 . Вычислить $f(x_1)$ и $f(x_2)$.

Шаг 2. Сравнить $f(x_1)$ и $f(x_2)$. Если $f(x_1) \leq f(x_2)$, то перейти к отрезку $[a; x_2]$, положив $b = x_2$, иначе – к отрезку $[x_1; b]$, положив $a = x_1$.

Шаг 3. Найти достигнутую точность $\varepsilon_n = \frac{b-a}{2}$. Если $\varepsilon_n > \varepsilon$, то перейти к следующей итерации, вернувшись к шагу 1. Если $\varepsilon_n \leq \varepsilon$, то завершить поиск x^* , перейдя к шагу 4.

Шаг 4. Положить $x^* \approx \bar{x} = \frac{a+b}{2}, f^* \approx (f(\bar{x}))$.

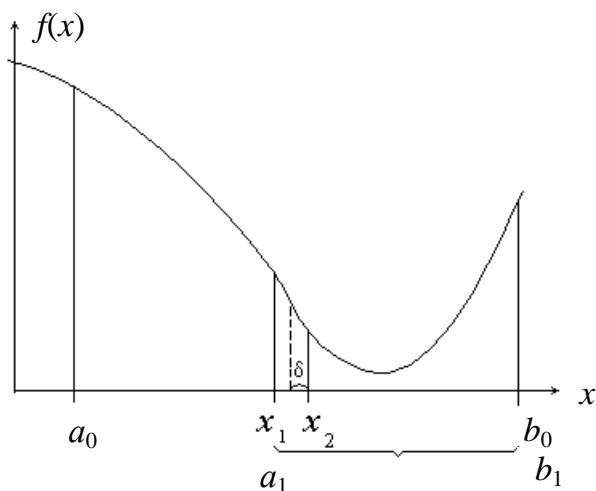


Рис. 5. Метод дихотомии

Примечание. Число δ выбирают на интервале $(0; 2\varepsilon)$ с учетом следующих соображений:

- чем меньше δ , тем больше относительное уменьшение длины отрезка на каждой итерации, т. е. при уменьшении δ достигается более высокая скорость сходимости метода дихотомии;

- при чрезмерно малом δ сравнение значений $f(x)$ в точках x_1 и x_2 , отличающихся на величину δ , становится затруднительным. Поэтому выбор δ должен быть согласован с точностью определения $f(x)$ и с количеством верных десятичных знаков при задании аргумента x .

Пример 4. Решить задачу методом деления отрезка пополам:

$$f(x) = x^4 + e^{-x} \rightarrow \min, \quad x \in [0; 1], \quad \varepsilon = 0,1.$$

Выберем $\delta = 0,02$.

Итерация 1:

Шаг 1. $x_1 = 0,49, x_2 = 0,51; f(x_1) = 0,670, f(x_2) = 0,688$.

Шаг 2. $f(x_1) > f(x_2)$, поэтому полагаем $a = x_1 = 0,49$.

Шаг 3. $(b - a)/2 = 0,255 > 0,1$, т. е. переходим к следующей итерации. Результаты вычислений на остальных итерациях записаны в таблице:

Номер итерации	a	b	$(b - a)/2$	x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$	Сравнение $f(x_1)$ и $f(x_2)$
2	0,49	1	0,26	0,735	0,755	0,771	0,792	$f(x_1) < f(x_2)$
3	0,49	0,755	0,13	0,613	0,633	0,683	0,691	$f(x_1) < f(x_2)$
4	0,49	0,633	0,07	0,07 < 0,1 – точность достигнута				

Таким образом, $x^* \approx \frac{0,49 + 0,633}{2} \approx 0,56, f^* \approx f(0,56) \approx 0,67$.

Второй метод деления отрезка пополам. Этот метод, использующий на каждой итерации три пробные точки, обеспечивает последовательное уменьшение длины отрезка, содержащего x^* , ровно вдвое. Рассмотрим способ исключения отрезков, применяемый в рассматриваемом методе.

Разделим отрезок $[a; b]$ на четыре равные части пробными точками $x_i = a + \frac{b-a}{4}i, i = 1, 2, 3$. Сравним значения $f(x_1)$ и $f(x_2)$. Если $f(x_1) \leq f(x_2)$, то уменьшенный вдвое отрезок поиска точки x^* найден: это $[a; x_2]$. Если $f(x_1) > f(x_2)$, то произведем еще одно сравнение значений $f(x)$: при $f(x_2) \leq f(x_3)$ перейдем к отрезку $[x_1; x_3]$, а в противном случае – к отрезку $[x_2; b]$.

Отметим, что каким бы ни оказался новый отрезок, одна из уже использованных пробных точек переходит на его середину, становясь новой точкой x_2 . Таким образом, для проведения следующей итерации на вновь полученном отрезке потребуется вычисление не более двух новых значений $f(x)$ (либо только в точке x_1 , либо еще и в точке x_3).

Перечислим основные шаги алгоритма второго метода деления отрезка пополам:

Шаг 1. Положить $x_1 = \frac{a+b}{2}$. Вычислить значение $f(x_2)$ и перейти к шагу 2.

Шаг 2. Положить $x_2 = \frac{a+b}{2}$. Вычислить значение $f(x_1)$ и перейти к шагу 3.

Шаг 3. Сравнить $f(x_1)$ и $f(x_2)$. Если $f(x_1) \leq f(x_2)$, то продолжить поиск на отрезке $[a; x_2]$, положив $b = x_2, x_2 = x_1, f(x_1) = f(x_2)$, и перейти к шагу 5, иначе – положить $x_3 = \frac{x_2+b}{2}$, вычислить значение $f(x_3)$ и перейти к шагу 4.

Шаг 4. Сравнить $f(x_2)$ и $f(x_3)$. Если $f(x_2) \leq f(x_3)$, то перейти к отрезку $[x_1; x_3]$, положив $a = x_1$, $b = x_3$, иначе – продолжить поиск на отрезке $[x_2; b]$, положив $a = x_2$, $x_2 = x_3$, $f(x_2) = f(x_3)$. Перейти к шагу 5.

Шаг 5. Проверка на окончание поиска. Вычислить $\varepsilon_n = \frac{b-a}{2}$

и сравнить с ε . Если $\varepsilon_n > \varepsilon$, то перейти к следующей итерации, вернувшись к шагу 2, иначе – завершить поиск, положив $x^* \approx x_2$, $f^* \approx f(x_2)$.

Пример 5. Решить задачу минимизации вторым методом деления отрезка пополам: $f(x) = x^4 + e^{-x} \rightarrow \min, x \in [0; 1], \varepsilon = 0,1$.

Итерация 1:

Шаг 1. Находим $x_2 = 0,5$, $f(x_2) = 0,669$. Переходим к шагу 2.

Шаг 2. Определяем $x_1 = 0,25$, $f(x_1) = 0,783$. Переходим к шагу 3.

Шаг 3. $f(x_1) > f(x_2)$, поэтому полагаем $x_3 = 0,75$, вычисляем $f(x_3) = 0,789$ и переходим к шагу 4.

Шаг 4. $f(x_1) < f(x_2)$, поэтому полагаем $a = 0,25$, $b = 0,75$ и переходим к шагу 5.

Шаг 5. Находим $\varepsilon_n = 0,25 > 0,1$, т. е. переходим к следующей итерации, начиная с шага 2.

Результаты вычислений на остальных итерациях записаны в таблице:

Номер итерации	a	b	$\varepsilon_n = \frac{b-a}{2}$	x_1	x_2	x_3	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	Сравнение $f(x_1)$ и $f(x_2)$
2	0,250	0,750	0,25	0,375	0,500	0,625	0,707	0,669	0,688	$f(x_1) > f(x_2)$ $f(x_2) < f(x_3)$
3	0,375	0,625	0,13	0,438	0,500	0,563	0,669	0,669	0,670	$f(x_1) > f(x_2)$ $f(x_2) < f(x_3)$
4	0,438	0,563	0,06	0,06 < 0,1 – точность достигнута						

Таким образом, $x^* \approx x_2 = 0,5$, $f^* \approx f(x_2) = 0,67$. Можно сравнить этот ответ с результатами решения предыдущих примеров.

Примечание. На первой итерации второго метода деления отрезка пополам вычисляется не более трех значений $f(x)$ а на остальных – не более двух. Поэтому N вычислений $f(x)$ гарантируют осуществление $(N - 1)/2$ итераций, и достигнутая точность определения x^* составляет

$$\varepsilon(N) = \frac{b-a}{\frac{N-1}{2} + 1}.$$

Метод золотого сечения. Точки x_1, x_2 находятся симметрично относительно середины отрезка $[a_0; b_0]$ и делят его в пропорции золотого сечения, когда длина всего отрезка относится к длине большей его части также, как длина большей части относится к длине меньшей части:

$$\frac{b_0 - a_0}{b_0 - x_1} = \frac{b_0 - x_1}{x_1 - a_0} \quad \text{и} \quad \frac{b_0 - a_0}{x_2 - a_0} = \frac{x_2 - a_0}{b_0 - x_2}.$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_i + \frac{(3 - \sqrt{5})}{2} (b_i - a_i) \approx a_i + 0,381966011 \cdot (b_i - a_i), \\ x_2 &= a_i + \frac{(\sqrt{5} - 1)}{2} (b_i - a_i) \approx a_i + 0,618003399 \cdot (b_i - a_i) = \\ &= b_i - 0,381966011 \cdot (b_i - a_i). \end{aligned}$$

За одну итерацию интервал неопределенности уменьшается в $\frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1,618$ раз, но на следующей итерации вычисляют функцию

только один раз, так как по свойству золотого сечения $\frac{x_2 - x_1}{b - x_1} = 1,381$

и $\frac{b - x_2}{b - x_1} = 0,618$ (рис. 6). Для достижения точности ε потребуется

$$n \geq \frac{\ln((b_0 - a_0) / \varepsilon)}{\ln \frac{\sqrt{5} - 1}{2}} \text{ итераций.}$$

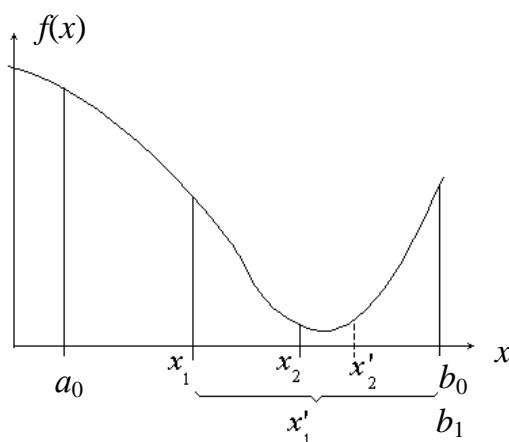


Рис. 6. Метод золотого сечения

Неточное задание величины $5^{1/2}$ на ЭВМ уже при достаточно небольшом количестве итераций может приводить к погрешностям и потере точки минимума, так как она выпадает из интервала неопределенности. Поэтому, вообще говоря, при реализации алгоритма возможность такой ситуации должна быть предусмотрена.

Опишем алгоритм метода золотого сечения:

Шаг 1. Найти x_1 и x_2 . Вычислить $f(x_1)$ и $f(x_2)$. Положить $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\varepsilon_n = \frac{b-a}{2}$.

Шаг 2. Проверка на окончание поиска: если $\varepsilon_n > \varepsilon$, то перейти к шагу 3, иначе – к шагу 4.

Шаг 3. Переход к новому отрезку и новым пробным точкам. Если $f(x_1) \leq f(x_2)$, то положить $b = x_2$, $x_2 = x_1$, $f(x_2) \leq f(x_1)$, $x_1 = b - \tau(b - a)$ и вычислить $f(x_1)$, иначе – положить $a = x_1$, $x_1 = x_2$, $f(x_1) = f(x_2)$, $x_2 = b + \tau(b - a)$ и вычислить $f(x_2)$. Положить $\varepsilon_n = \tau\varepsilon_n$ и перейти к шагу 2.

Шаг 4. Окончание поиска: положить $x^* \approx \bar{x} = \frac{a+b}{2}$, $f^* \approx f(\bar{x})$.

Пример 6. Решить задачу методом золотого сечения: $f(x) = x^4 + e^{-x} \rightarrow \min, x \in [0; 1]$, $\varepsilon = 0,1$.

Итерация 1:

Шаг 1. Находим $x_1 = 0,382$, $x_2 = 0,618$, $f(x_1) = 0,704$, $f(x_2) = 0,685$, $\varepsilon_n = 0,5$.

Шаг 2. $\varepsilon_n = 0,5 > \varepsilon = 0,1$, поэтому переходим к шагу 3.

Шаг 3. $f(x_1) > f(x_2)$, поэтому полагаем $a = 0,382$, $x_1 = 0,618$, $f(x_1) = 0,685$, $x_2 = 0,764$, $\varepsilon_n = 0,309$ и вычисляем $f(x_2) = 0,807$. Переходим к следующей итерации, начиная с шага 2.

Результаты вычислений на остальных итерациях представлены в таблице:

Номер итерации	a	b	Интервал	x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$	Сравнение $f(x_1)$ и $f(x_2)$
2	0,382	1,000	0,309	0,618	0,764	0,685	0,807	$f(x_1) < f(x_2)$
3	0,382	0,764	0,191	0,528	0,618	0,668	0,685	$f(x_1) < f(x_2)$
4	0,382	0,618	0,118	0,472	0,528	0,673	0,668	$f(x_1) > f(x_2)$
5	0,472	0,618	0,073	0,073 < 0,1 – точность достигнута				

Таким образом, $x^* \approx \frac{0,472+0,618}{2} \approx 0,55, f^* \approx f(0,55) = 0,67$.

Метод Фибоначчи. Числа Фибоначчи определяются соотношениями

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n=1, 2, 3, \dots, \quad F_1 = F_2 = 1.$$

С помощью индукции можно показать, что n -е число Фибоначчи представимо в виде формулы Бинэ:

$$F_n = \left[\frac{(1+\sqrt{5})}{2}^n - \frac{(1-\sqrt{5})}{2}^n \right] / \sqrt{5}, \quad n=1, 2, \dots$$

Из этой формулы видно, что при больших n $F_n \approx \left[\frac{(1+\sqrt{5})}{2}^n \right] / \sqrt{5}$ так что числа Фибоначчи с увеличением n растут очень быстро. На начальном интервале вычисляют точки

$$x_1 = a_0 + \frac{F_n}{F_{n+2}}(b_0 - a_0),$$

$$x_2 = a_0 + \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}(b_0 - a_0),$$

где n выбирается, исходя из точности и начальной длины интервала. На k -м шаге метода будет получена тройка чисел a_k, b_k, \bar{x}_k , локализирующая минимум $f(x)$, такая, что

$$\Delta_k = b_k - a_k = (b_0 - a_0) \frac{F_{n-k+3}}{F_{n+2}}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad a_1 = a_0, \quad b_1 = b_0,$$

а точка $\bar{x}_k, a_k < \bar{x}_k < b_k$, с вычисленным значением $f(\bar{x}_k) = \min_{1 \leq i \leq k} f(x_i)$, совпадает с одной из точек, расположенных на отрезке $[a_k; b_k]$ симметрично относительно его середины (рис. 7). При $k = n$ процесс заканчивается. В этом случае длина отрезка $\Delta_n = b_n - a_n = (b_0 - a_0) / F_{n+2}$, а точки

$$x_1 = a_n + \frac{F_1}{F_{n+2}}(b_0 - a_0),$$

$$x_2 = a_n + \frac{F_2}{F_{n+2}}(b_0 - a_0)$$

совпадают и делят отрезок пополам.

Следовательно,

$$\frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b_0 - a_0}{F_{n+2}} < \varepsilon.$$

Отсюда можно выбрать n из условия

$$\frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} < F_{n+2}.$$

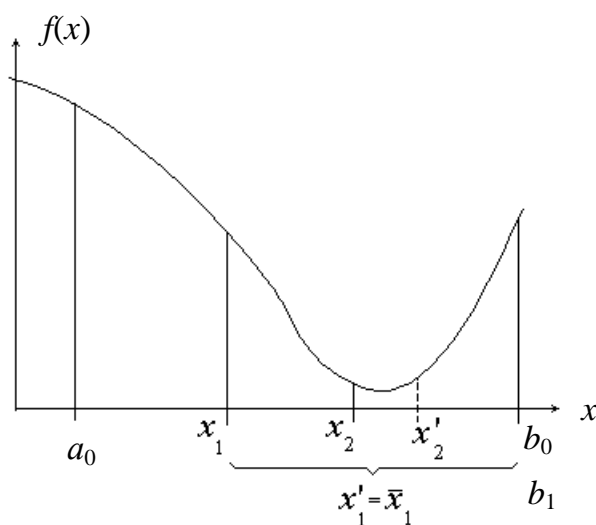


Рис. 7. Метод Фибоначчи

С ростом n , из-за того, что F_n/F_{n+2} – бесконечная десятичная дробь, происходит искажение метода. Поэтому на очередном шаге в качестве новой точки берут из $f(\bar{x}_k) = \min_{1 \leq i \leq k} f(x_i)$ наиболее удаленную от \bar{x}_{k-1} на предыдущем шаге.

Пример 7. С помощью метода Фибоначчи найти минимум функции $f(x) = x^2 + 2x$ на интервале $(-3; 5)$. Длина конечного интервала неопределенности не должна превосходить 0,2.

Примем $\delta = 0,01$. Найдем необходимое число вычислений функции

$$N = \frac{b-a}{\varepsilon} = \frac{8}{0,2} = 40, \quad F_8 < 40 < F_9.$$

i	0	2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_i	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

Итак, число итераций 9:

$$l = \frac{b-a}{F_9} = \frac{5-(-3)}{55} = 0,1455.$$

Шаг 1. $a = -3$; $b = 5$.

$$x_1 = a + l \cdot F_7 = 0,0555; \quad f(x_1) = 0,1141;$$

$$x_2 = b - l \cdot F_7 = 1,9445; \quad f(x_2) = 7,6701;$$

$f(x_1) < f(x_2)$. Новый отрезок $[-3; 1,9445]$.

Шаг 2. $a = -3$; $b = 1,9445$.

$$x_1 = a + l \cdot F_6 = -1,1085; \quad f(x_1) = -0,9882;$$

$$x_2 = 0,0555; \quad f(x_2) = 0,1141;$$

$f(x_1) < f(x_2)$. Новый отрезок $[-3; 0,0555]$.

Дальнейшие расчеты приведены в таблице, где значения $f(x)$, вычисленные на каждом шаге, помечены звездочкой:

№ шага	a	b	$b - a$	x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$
1	-3,000	5,000	8,000	0,0555	1,9445	0,1141*	7,6701*
2	-3,000	1,9445	4,9445	-1,1085	0,0555	-0,9882*	0,1141
3	-3,000	0,0555	3,0555	-1,8360	-1,1085	-0,3011*	-0,9882
4	-1,8360	0,0555	1,8915	-1,1085	-0,6720	-0,9882	-0,8924*
5	-1,8360	-0,6720	1,1640	-1,3995	-1,1085	-0,8404*	-0,9882
6	-1,3995	-0,6720	0,7275	-1,1085	-0,9630	-0,9882	-0,9986*
7	-1,1085	-0,6720	0,4365	-0,9630	-0,8175	-0,9986	-0,9667*
8	-1,1085	-0,8175	0,2910	-0,9630	-0,9630	-0,9986	-0,9986
9	-1,1085	-0,9630	0,1455	-0,9630	-0,9530	-0,9986	-0,9978*

Поскольку для $k = 9$ $f(x_1) < f(x_2)$ конечный интервал неопределённости равен $(-1,1085; -0,9630)$, длина его составляет 0,1455. В качестве приближенного значения точки минимума выберем середину этого отрезка $-1,0358$; $f(-1,0358) = -0,9987$.

Метод парабол (квадратичной аппроксимации). Поиск точки минимума методами исключения отрезков основан на сравнении значений функции в двух точках. При таком сравнении разности значений $f(x)$ в этих точках не учитываются, важны только их знаки.

Учесть информацию, содержащуюся в относительных изменениях значений $f(x)$ в пробных точках, позволяют *методы полиномиальной аппроксимации*, основная идея которых состоит в том, что для функции $f(x)$ строится аппроксимирующий многочлен, и его точка минимума служит приближением к x^* . Для эффективного использования этих методов на функцию $f(x)$, кроме унимодальности, нала-

гается дополнительное требование достаточной гладкости (по крайней мере, непрерывности).

Обоснованием указанных методов является известная из математического анализа теорема Вейерштрасса об аппроксимации, согласно которой непрерывную на отрезке функцию можно с любой точностью приблизить на этом отрезке некоторым полиномом.

Для повышения точности аппроксимации можно, во-первых, увеличивать порядок полинома и, во-вторых, уменьшать длину отрезка аппроксимации. Первый путь приводит к быстрому усложнению вычислительных процедур, поэтому на практике используются аппроксимирующие полиномы не выше третьего порядка. В то же время уменьшить отрезок, содержащий точку минимума унимодальной функции, не представляет особого труда.

В простейшем методе полиномиальной аппроксимации – методе парабол используются полиномы второго порядка. На каждой итерации этого метода строится квадратный трехчлен, график которого (парабола) проходит через три выбранные точки графика функции $f(x)$ (рис. 8).

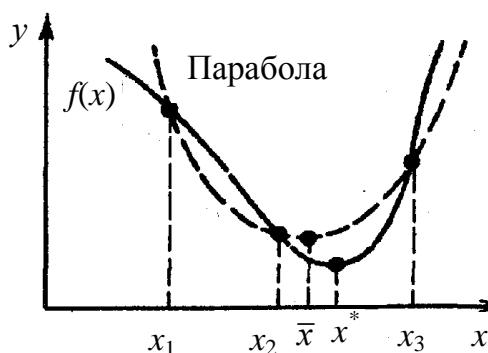


Рис. 8. Метод парабол

Опишем метод парабол. Рассмотрим унимодальную на отрезке $[a; b]$ функцию $f(x)$, достигающую минимума во внутренней точке этого отрезка. Выберем три точки x_1, x_2 и x_3 отрезка $[a; b]$, для которых выполняются неравенства $x_1 < x_2 < x_3$, $f(x_1) \geq f(x_2) \leq f(x_3)$. Из унимодальности $f(x)$ следует, что $x^* \in [x_1; x_3]$. Построим квадратный трехчлен $q(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2)$, график которого проходит через точки $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3))$ графика функции $f(x)$. Будем считать, что если хотя бы одно из неравенств $x_1 < x_2 < x_3$, $f(x_1) \geq f(x_2) \leq f(x_3)$ для $f(x_i)$ является строгим (если $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$), то поиск точки x^* на этом закончен, так как из унимодальности функции $f(x)$

следует, что она достигает минимума в каждой точке отрезка $[x_1; x_3]$. Тогда следует, что ветви искомой параболы направлены вверх, а точка минимума \bar{x} трехчлена $q(x)$ принадлежит отрезку $[x_1; x_3]$. Определяя коэффициенты a_0 , a_1 и a_2 из системы уравнений:

$$q(x_1) = f(x_1) = f_1,$$

$$q(x_2) = f(x_2) = f_2,$$

$$q(x_3) = f(x_3) = f_3,$$

где $q(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2)$, находим

$$a_0 = f_1, \quad a_1 = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}, \quad a_2 = \frac{1}{x_3 - x_2} \left(\frac{f_3 - f_1}{x_3 - x_1} \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} \right).$$

Точку минимума \bar{x} квадратного трехчлена $q(x)$ вычислим, приравняв его производную к нулю. Получим

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{2} \left(x_1 + x_2 - \frac{a_1}{a_2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[x_1 + x_2 - \frac{(f_2 - f_1)(x_3 - x_2)}{x_2 - x_1} \middle/ \left(\frac{f_3 - f_1}{x_3 - x_1} - \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Число \bar{x} служит очередным приближением метода парабол к x^* . Далее описанная процедура повторяется для новых точек x_1 , x_2 , x_3 , удовлетворяющих неравенствам $x_1 < x_2 < x_3$, $f(x_1) \geq f(x_2) \leq f(x_3)$.

Выбрать эти точки среди x_1 , x_2 , x_3 и \bar{x} можно с помощью перехода от исходного к новому отрезку $[x_1; x_3]$, содержащему точку x^* , методом исключения отрезков. Для этого перехода используются пробные точки x_2 и \bar{x} и сравниваются значения $f(x)$ в этих точках. Начало и конец нового отрезка, а также пробная точка, попавшая на него, образуют тройку точек, обладающих свойством $x_1 < x_2 < x_3$, $f(x_1) \geq f(x_2) \leq f(x_3)$.

Заметим, что на каждой итерации метода парабол, кроме первой, определяется только одно новое значение $f(x)$.

Условием окончания поиска служит близость к нулю разности Δ чисел \bar{x} , найденных на данной и предыдущей итерациях, т. е. неравенство $|\Delta| \leq \varepsilon$, где ε — заданное число, характеризующее точность определения x^* .

Перечислим основные шаги алгоритма метода парабол:

Шаг 1. Выбрать точки x_1 , x_2 , x_3 , удовлетворяющие условиям неравенства. Перейти к шагу 2.

Шаг 2. Найти \bar{x} по формуле (5). На первой итерации перейти к шагу 4, на остальных – к шагу 3.

Шаг 3. Проверка на окончание поиска. Сравнить модуль разности значений \bar{x} на данной и предыдущей итерациях Δ с числом ε . Если $|\Delta| \leq \varepsilon$, то поиск завершить, полагая $x^* \approx \bar{x}$, $f^* \approx f(x)$, иначе – перейти к шагу 4.

Шаг 4. Вычислить значение $f(\bar{x})$. Перейти к шагу 5.

Шаг 5. Определить новую тройку чисел x_1, x_2, x_3 . Присвоить $f(x_1), f(x_2)$ и $f(x_3)$ соответствующие значения $f(x)$, найденные ранее. Перейти к шагу 2.

Пример 8. Методом парабол решить задачу $f(x) = x^4 + e^{-x} \rightarrow \min$, $x \in [0; 1]$, с точностью $|\Delta| \leq \varepsilon = 0,0025$.

Итерация 1:

Шаг 1. Выберем точки $x_1 = 0,25, x_2 = 0,5, x_3 = 0,75$. Функция принимает в этих точках значения, соответственно, $f_1 = 0,7827, f_2 = 0,6690, f_3 = 0,7888$, удовлетворяющие неравенствам. Переходим к шагу 2.

Шаг 2. По формуле находим $\bar{x} = 0,4968$. Переходим к шагу 4.

Шаг 4. Вычисляем $f(\bar{x}) = 0,6694$. Переходим к шагу 5.

Шаг 5. На данной итерации имеем: $x_1 < \bar{x} < x_2 < x_3, f(\bar{x}) > f(x_2)$, следовательно, $x^* \in [\bar{x}; x_3]$. Поэтому полагаем $x_1 = \bar{x} = 0,4968, f(x_1) = f(\bar{x}) = 0,6694$, а точки x_2, x_3 и значения $f(x)$ в них не изменяются. Переходим к следующей итерации, начиная с шага 2.

Итерация 2:

Шаг 2. Находим $\bar{x} = 0,5224$. Переходим к шагу 3.

Шаг 3. $\Delta = |0,4968 - 0,5224| = 0,026 > 0,0025$, поэтому переходим к шагу 4.

Шаг 4. Вычисляем $f(\bar{x}) = 0,6676$. Переходим к шагу 5.

Шаг 5. На этой итерации $x_1 < x_2 < \bar{x} < x_3, f(x_2) > f(\bar{x})$, поэтому $x^* \in [x_2; x_3]$; полагаем $x_1 = x_2 = 0,5, f(x_1) = f(x_2) = 0,6690; x_2 = \bar{x} = 0,5224; f(x_2) = f(\bar{x}) = 0,6676$, а точка x_3 и значение $f(x_3)$ остаются прежними. Переходим к следующей итерации.

Итерация 3:

Шаг 2. Находим $\bar{x} = 0,5248$. Переходим к шагу 3.

Шаг 3. Определяем $\Delta = |0,5224 - 0,5248| = 0,0024 < 0,0025$, т. е. требуемая точность достигнута. Поэтому полагаем $x^* = \bar{x} = 0,525$.

Отметим, что в результате пяти вычислений $f(x)$ точка x^* была найдена с весьма высокой точностью (можно сравнить с точным до четвертого знака значением $x^* = 0,5283$).

Метод ломаных. В прямых методах минимизации, рассмотренных выше, требуется, чтобы функция $f(x)$ была унимодальной.

Если $f(x)$ этим свойством не обладает, то применение указанных методов приводит, вообще говоря, к неверному результату. Кроме этого, во многих случаях доказательство унимодальности функции $f(x)$ бывает затруднительно. Метод ломаных является последовательным методом, рассчитанным на минимизацию произвольных (необязательно унимодальных) функций, удовлетворяющих условию Липшица. Говорят что функция $f(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a; b]$ условию Липшица, если существует такое число $L > 0$ (константа Липшица), что $|f(x') - f(x'')| \leq L|x' - x''|$ для всех x', x'' , принадлежащих $[a; b]$. Для проверки условия Липшица на практике используется следующий факт: если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a; b]$ ограниченную производную, то она удовлетворяет условию Липшица, где $L \geq \max_{[a;b]} |f'(x)|$.

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a; b]$ условию Липшица с константой L . Опишем метод ломаных для минимизации. Положим:

$$x_1^* = \frac{1}{2L}[f(a) - f(b) + L(a + b)],$$

$$p_1^* = \frac{1}{2}[f(a) + f(b) + L(a - b)]$$

и реализуем следующую схему вычислений:

Шаг 1. Вместо пары чисел (x_1^*, p_1^*) образуем две новые пары (x_1', p_1) и (x_1'', p_1) следующим образом:

$$x_1' = x_1^* - \Delta_1,$$

$$x_1'' = x_1^* + \Delta_1,$$

$$p_1 = \frac{1}{2}[f(x_1^*) + p_1^*],$$

где $\Delta_1 = \frac{1}{2L}[f(x_1^*) - p_1^*]$.

Шаг 2. Из полученных двух пар (x_1', p_1) и (x_1'', p_1) выберем ту, у которой вторая компонента минимальна, обозначим ее (x_2^*, p_2^*) и исключим из рассматриваемого множества (очевидно, на данном шаге можно взять любую пару). Вместо пары (x_2^*, p_2^*) добавляем две новые пары (x_2', p_2) и (x_2'', p_2) , компоненты которых находятся по формулам

$$\begin{aligned}x_2' &= x_2^* - \Delta_2, \\x_2'' &= x_2^* + \Delta_2, \\p_2 &= \frac{1}{2}[f(x_2^*) + p_2^*],\end{aligned}$$

где $\Delta_2 = \frac{1}{2L}[f(x_2^*) - p_2^*]$.

В результате получим множество, состоящее из пар чисел (x, p) .

Шаг n. Из n полученных на предыдущих шагах пар выбираем ту, у которой вторая компонента p минимальна. Обозначим ее (x_n^*, p_n^*) . Исключаем эту пару из рассматриваемого множества и добавляем вместо нее две новые пары чисел (x_n', p_n) и (x_n'', p_n) по формулам

$$\begin{aligned}x_n' &= x_n^* - \Delta_n, \\x_n'' &= x_n^* + \Delta_n, \\p_n &= \frac{1}{2}[f(x_n^*) + p_n^*],\end{aligned}$$

где $\Delta_n = \frac{1}{2L}[f(x_n^*) - p_n^*]$.

Полагая $x^* \approx x_n^*, f^* \approx f(x_n^*)$, получаем приближенное решение задачи оптимизации. Точность определения f^* характеризуется неравенствами $0 \leq f(x_n^*) - f^* \leq 2L\Delta_n$. Геометрический метод ломаных состоит в построении последовательности ломаных, приближающихся к графику функции снизу и имеющих угловые коэффициенты всех звеньев, равные $\pm L$ (рис. 9).

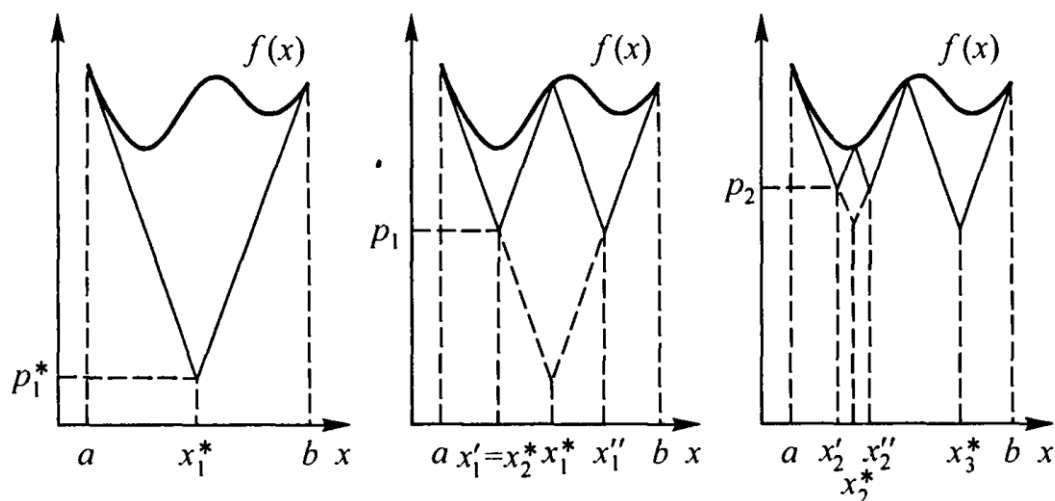


Рис. 9. Метод ломаных

Пример 9. Методом ломаных найти минимум f^* функции $f(x) = \sin x/x$ на отрезке $[10; 15]$ с точностью 0,01 и точку минимума x^* .

Функция дифференцируема на указанном отрезке. Так как

$$|f'(x)| = \left| \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \right| < \frac{x |\cos x| + |\sin x|}{x^2} < \frac{x+1}{x^2} \leq 0,11 \text{ при } x, \text{ принадлежащем отрезку } [10; 15],$$

то $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L = 0,11$. Найдя $x_1^* = 12,056$, $p_1^* = -0,281$, продолжим вычисления. Результаты вычислений представим в таблице:

n	Исключаемая пара		$2L\Delta_n$	Включенные пары		
	x_n^*	p_n^*		x_n'	x_n''	p_n
1	12,056	-0,281	0,240	10,963	13,149	-0,161
2	10,963	-0,161	0,070	10,646	11,280	-0,126
3	13,149	-0,161	0,203	12,227	14,071	-0,096
4	10,646	-0,126	0,038	10,474	10,818	-0,107
5	11,280	-0,126	0,041	11,094	11,466	-0,106
6	10,474	-0,107	0,024	10,364	10,584	-0,095
7	10,818	-0,107	0,160	10,745	10,891	-0,099
8	11,094	-0,106	0,016	11,020	11,168	-0,098
9	11,466	-0,106	0,028	11,338	11,594	-0,092
10	10,891	-0,099	$0,008 < \varepsilon$	—	—	—

Из таблицы находим $x^* = 10,89$, $f^* = f(10,89) = 0,091$.

Методы, основанные на использовании производных функции (непрямые методы)

Если вычисление или измерение производных функции $f(x)$ не представляет больших затруднений, то при решении задачи минимизации можно применять не прямые методы, основанные на использовании производных. Во многих случаях эти методы обеспечивают более быструю сходимость, чем прямые методы.

Метод касательных. Этот метод применяется для минимизации выпуклых дифференцируемых функций. Проверка условия выпуклости, описанного в п. 1.2, всегда вызывает затруднения, поэтому на практике используют следующий критерий выпуклости.

Для того чтобы дважды дифференцируемая на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ была выпуклой на отрезке $[a; b]$, необходимо и достаточно, чтобы ее вторая производная $f''(x) \geq 0$ при всех x , принадлежащих отрезку $[a; b]$. Опишем метод касательных. Пусть $f(x)$ – выпуклая дифференцируемая на отрезке $[a; b]$ функция, причем $f'(a) \cdot f'(b) < 0$. Построим с рекуррентными соотношениями $a_0 = a$ и $b_0 = b$:

$$C_{n-1} = \frac{b_{n-1}f'(b_{n-1}) - a_{n-1}f'(a_{n-1}) + f(a_{n-1}) - f(b_{n-1})}{f'(b_{n-1}) - f'(a_{n-1})},$$

$$a_n = a_{n-1}, b_n = C_{n-1} \text{ при } f'(C_{n-1}) \geq 0,$$

$$a_n = C_{n-1}, b_n = b_{n-1} \text{ при } f'(C_{n-1}) < 0.$$

После n шагов полагаем $x^* = C_n$, $f^* = f(C_n)$. Требуемая точность минимизации $f(x)$ считается достигнутой, если производная $f'(C_n)$ достаточно близка к нулю, т. е. $|f'(C_n)| \leq \varepsilon$, где ε больше нуля – заданное число. Метод касательных имеет простой геометрический смысл (рис. 10): величина C_{n-1} – это абсцисса точки пересечения касательных к графику $f(x)$, проведенных в граничных точках отрезка $[a_{n-1}; b_{n-1}]$ (рис. 10, а). На рис. 10, б и 10, в приведены графики для случаев $f'(C_{n-1}) > 0$ и $f'(C_{n-1}) < 0$ соответственно.

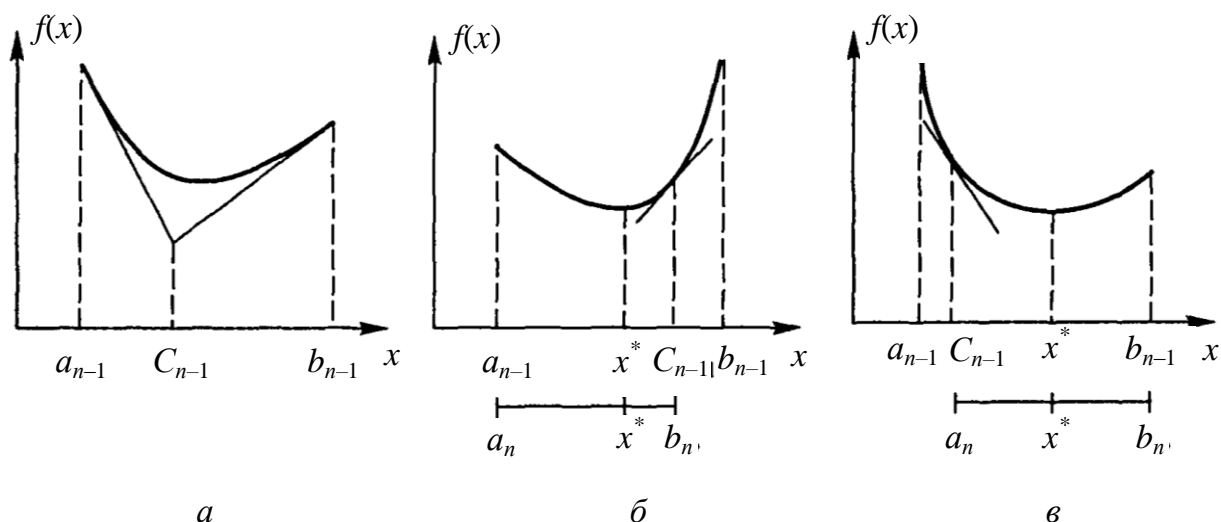


Рис. 10. Метод касательных

Если условие $f'(a)f'(b) < 0$ не выполняется, то:

- 1) $x^* = a$ при $f'(a) > 0, f'(b) > 0$;
- 2) $x^* = b$ при $f'(a) < 0, f'(b) < 0$;
- 3) $x^* = a$, если $f'(a) = 0$, и $x^* = b$, если $f'(b) = 0$.

Пример 10. Убедиться, что функция $f(x) = x^2 + e^x$ выпукла на отрезке $[-1; 1]$, и минимизировать ее методом касательных с точностью $|f'(C_n)| \leq 0,05$.

Так как $f'(x) = 2 + e^x > 0$, то $f(x)$ – выпуклая функция, кроме того, $f'(a)f'(b) < 0$. Проведем вычисления по формулам, поместив результаты в таблицу:

n	a_n	b_n	C_n	$f'(C_n)$	Примечание
0	-1	1	0,11586	1,35	$f'(C_0) > 0, b_1 = C_0$
1	-1	0,11586	-0,41637	-0,173	$f'(C_1) < 0, a_2 = C_1$
2	-0,4164	0,11586	-0,14313	0,58	$f'(C_2) > 0, b_3 = C_2$
3	-0,4164	-0,14313	-0,27806	0,02	$ f'(C_3) < 0,05$ Точность достигнута

Из таблицы находим $x^* = C_3 = 0,278; f^* = f(C_3) = 0,835$.

Метод Ньютона. Метод Ньютона, использующий не только первую, но и вторую производную функции $f(x)$, при определенных условиях обеспечивает значительно более высокую, чем рассмотренные выше методы минимизации, скорость сходимости к точке минимума. Пусть $f(x)$ – выпуклая дважды дифференцируемая функ-

ция. Выбрав начальное приближение x_0 , построим последовательность

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f'(x_{n-1})}{f''(x_{n-1})}, n = 1, 2, \dots$$

Считая неравенство $|f'(x_n)| \leq \varepsilon$ условием достижения требуемой точности вычислений, положим $x^* = x_n, f^* = f(x_n)$. При неудачном выборе x_0 последовательность может расходиться. Если же точка x_0 достаточно близка к x^* , то эта последовательность сходится к x^* достаточно быстро. Оценка скорости сходимости может быть сформулирована следующим образом. Пусть $f(x)$ – дважды дифференцируемая функция, причем $f''(x) \geq \mu > 0$ при всех x , принадлежащих R , и $f'(x)$ удовлетворяет условию Липшица на R с константой L . Тогда, если начальное приближение x_0 удовлетворяет условию $q = \frac{L}{2\mu^2} |f'(x_0)| < 1$, то последовательность сходится к единственной

точке минимума x^* , причем $|x^* - x_n| \leq \frac{2\mu}{L} q^{2^n}, n = 0, 1, \dots$

Пример 11. Методом Ньютона найти точку минимума x^* и минимальное значение f^* функции $f(x) = (x - 2)^4 - \ln x$ с точностью $|f'(x_n)| \leq 10^{-7}$.

Выберем $x_0 = 3$ и проведем вычисления, записывая результаты в таблицу:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	3	$-9,86 \cdot 10^{-2}$	3,67
1	2,6972477	-0,7558859	0,985
2	2,5333701	-0,8488508	0,208
3	2,4736906	-0,8553636	$2,1 \cdot 10^{-2}$
4	2,4663735	-0,8554408	$3 \cdot 10^{-4}$
5	2,4662656	-0,8554408	$5 \cdot 10^{-8} < 10^{-7}$

Окончательно $x^* = 2,4662656, f^* = -0,8554408$.

Метод Ньютона часто используется на завершающем этапе минимизации, когда точка минимума x^* грубо найдена другим, менее трудоемким, методом и требуется найти x^* с большей точностью.

2. МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Косвенные методы оптимизации

Возможны два подхода к решению задачи отыскания минимума функции многих переменных $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ при отсутствии ограничений на диапазон изменения неизвестных. Первый подход лежит в основе *косвенных методов оптимизации* и сводит решение задачи оптимизации к решению системы нелинейных уравнений, являющихся следствием условий экстремума функции многих переменных. Как известно, эти условия определяют, что в точке экстремума x^* все первые производные функции по независимым переменным равны нулю. Эти условия образуют систему n нелинейных уравнений, среди решений которой находятся точки минимума. Вектор $f'(x)$, составленный из первых производных функции по каждой переменной, называется градиентом скалярной функции $f(x)$. Как видно, в точке минимума градиент равен нулю.

Пример 1. Найти минимум функции $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - 1)^2$ с точностью $\varepsilon = 0,2$ для начальной точки с координатами $x(0) = (5, 6)$.

Находим частные производные первого порядка и приравниваем их к нулю:

$$\frac{df}{dx_1} = 2(x_1 + x_2) = 0, \quad \frac{df}{dx_2} = 2(x_1 + x_2) + 2(x_2 - 1) = 0.$$

Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ -2x_2 - 2 = 0. \end{cases}$$

Получаем $x_1^* = -1$ и $x_2^* = 1$ — это и есть точка минимума. Проверим, что это действительно минимум, вычислив частные производные второго порядка:

$$\frac{d^2 f}{dx_1^2} = 2 = A, \quad \frac{d^2 f}{dx_2^2} = 4 = B, \quad \frac{d^2 f}{dx_1 dx_2} = 2 = C$$

и матрицу Гессе:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{d^2 f}{dx_1^2} & \frac{d^2 f}{dx_1 dx_2} \\ \frac{d^2 f}{dx_1 dx_2} & \frac{d^2 f}{dx_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AC \\ CB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 24 \end{bmatrix}.$$

Поскольку матрица Гессе $A \cdot B - C^2 = 8 - 4 = 4 > 0$ и $A = 2 > 0$, точка $x^* = (-1, 1)$ является точкой минимума. Значение функции в этой точке $f(-1; 1) = (-1 + 1)^2 + (1 - 1)^2 = 0$. Матрица Гессе положительно определена независимо от координат точки x , и, следовательно, рассматриваемая функция является выпуклой на множестве R^2 , а единственная стационарная точка x^* – глобальным минимумом $f(x_1, x_2)$.

Примечания. Дважды непрерывно дифференцируемая на выпуклом множестве X с непустой внутренностью функция является выпуклой (вогнутой) на этом множестве в том и только том случае, когда матрица Гессе $H(x^*)$ неотрицательно (неположительно) определена для всех $x \in X$. При исследовании на знакоопределенность матрицы вторых производных функции рекомендуется применять критерий Сильвестра или анализ собственных значений матрицы.

Рассмотрим схему поиска безусловных экстремумов функции:

Шаг 1. Составить и решить систему алгебраических уравнений.

Шаг 2. В стационарных точках (точках, являющихся решением системы) исследовать на знакоопределенность матрицу вторых производных; точки, в которых $H(x) > 0$, являются точками глобального минимума; стационарные точки, в которых $H(x) < 0$, являются точками глобального максимума.

Критерии определенности матрицы (теорема Сильвестра):

1) положительная определенность:

– все диагональные элементы матрицы должны быть положительны;

– все ведущие главные определители должны быть положительны;

2) положительная полуопределенность:

– все диагональные элементы неотрицательны;

– все главные определители неотрицательны.

Главный определитель – это определитель главного минора. Для положительной определенности квадратичной формы – матрицы A – необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры матрицы A были положительны.

Прямые методы безусловной оптимизации

Решение систем нелинейных уравнений – задача весьма сложная и трудоемкая. Вследствие этого на практике используется второй подход к минимизации функций, составляющий основу *прямых методов*. Суть их состоит в построении последовательности векторов $x[0]$, $x[1]$, ..., $x[n]$ таких, что $f(x[0]) > f(x[1]) > f(x[n]) > \dots$. В качестве начальной точки $x[0]$ может быть выбрана произвольная точка, однако стремятся использовать всю имеющуюся информацию о поведении функции $f(x)$, чтобы точка $x[0]$ располагалась как можно ближе к точке минимума. Переход (итерация) от точки $x[k]$ к точке $x[k+1]$, $k = 0, 1, 2, \dots$, состоит из двух этапов:

- 1) выбор направления движения из точки $x[k]$;
- 2) определение шага вдоль этого направления.

Методы построения таких последовательностей часто называются *методами спуска*, так как осуществляется переход от больших значений функций к меньшим.

Рассмотрим вычислительные алгоритмы решения задачи безусловной минимизации $f(x) \rightarrow \min, x \in E_n$, которые опираются только на вычисление значений функции $f(x)$, т. е. прямые методы минимизации. Важно отметить, что для их применения не требуется дифференцируемость целевой функции и даже ее аналитическое задание. Нужно лишь иметь возможность вычислять или измерять значения $f(x)$ в произвольных точках. Такие ситуации часто встречаются в практически важных задачах оптимизации.

Метод Гаусса–Зейделя. В методе Гаусса–Зейделя при выполнении шага по каждой переменной ищут минимум целевой функции в ее направлении, при этом значения остальных переменных остаются постоянными.

Этот поиск по направлению можно производить любым известным методом одномерной оптимизации (например, методом золотого сечения и т. п.). Таким образом, в методе Гаусса–Зейделя задача многомерной оптимизации сводится к многократному использованию метода одномерной оптимизации. Очередность варьирования переменных при этом устанавливается произвольно и обычно не меняется в процессе оптимизации.

Таким образом, алгоритм метода заключается в следующем:

1. Для некоторого начального значения $x^{(0)}$ фиксируют все координаты вектора x , кроме одной (для определенности x_1), и проводят операцию одномерного поиска минимума функции $F(x_1) = f(x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$.

$x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$), в результате чего получают точку $\mathbf{x}(1) = (x_1^*, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, где $x_1^* = \arg \min (x_1)$.

2. Фиксируя в точке $\mathbf{x}(1)$ все координаты кроме второй, повторяют п. 1 по x_2 , и так до последней составляющей x_n . Цикл алгоритма завершается после n -кратной операции одномерной оптимизации вдоль каждой из координат, после чего этот цикл повторяют, получая точки $\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots$, в каждой из которых значение целевой функции не больше, чем в предыдущей.

Условием прекращения вычислительной процедуры при достижении заданной точности ε может служить неравенство $\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k-1) < \varepsilon$. При пошаговом движении, например в алгоритме поочередного изменения переменных, поиск прекращается в точке, для которой $\mathbf{x}(k)$ совпало с $\mathbf{x}(k-1)$, т. е. цикл оказался нерезультативным.

Недостатком метода Гаусса–Зейделя является жесткое направление изменения каждой из составляющих решения, не зависящее от характера функции, что может привести к неоправданной остановке алгоритма в случае «овражных» функций типа Розенброка $f(x, y) = N(y - x^2)^2 + (1 - x^2)^2$, где N больше нуля.

Пример 2. Решить задачу $f(x) = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min, x \in E_2$, методом циклического покоординатного спуска.

Линии уровня этой целевой функции – окружности с центром в начале координат. Выберем произвольную начальную точку x , например $x = (3, 3)$. Очевидно, два шага исчерпывающего спуска сначала по направлению e^1 , затем по направлению e^2 приведут в точку минимума $x^* = (0, 0)$.

В этом примере точку минимума функции удалось найти точно за конечное число шагов. Это скорее исключение, чем правило.

Для уменьшения числа вычислений величину шага λ меняют при каждом переходе от поиска минимума по одной переменной к поиску минимума по другой переменной.

Алгоритм метода с учетом длины шага может быть представлен следующими этапами:

1. Задают исходную точку поиска $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$.
2. Определяют направление поиска; если варьируется переменная x_1 , то $\bar{p}_1 = 1, 0, 0, 0 \dots 0$.

3. Делают первый шаг в направлении $\bar{p}_1: x_1^1 = x_1^0 + \lambda_1 e_1$. Значение λ_1 выбирают способом удвоения или минимизацией функции $f(x_1^0 + \lambda_1 e_1, x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0)$ по λ_1 . Если аналитическое выражение целе-

вой функции достаточно простое, для выбора λ_1 можно использовать условие минимизации $\frac{df}{d\lambda_1} = 0$.

4. После определения положения минимума по координате x_1 делают шаг в направлении $\bar{p}_2 = 0,1,0,0\dots 0$: $\bar{p}_2 : x_2^1 = x_2^0 + \lambda_2 e_2$. Значение λ_2 находят, минимизируя функцию $f(x_1^1, x_2^0 + \lambda_2 e_2, x_3^0, \dots, x_n^0)$ по λ_2 , и т. д.

5. Поиск заканчивают при выполнении условия $\max |x_i^{k+1} - x_i^k| \leq \varepsilon$.

Пример 3. Пусть целевая функция имеет вид $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$. Требуется найти ее минимум с точностью $\varepsilon = 0,01$.

1. Примем в качестве исходной точку $A_0(2,1)$. Значение целевой функции в этой точке $f(A_0) = 7$.

2. Направление поиска выберем параллельно координатной оси OX_1 , $\bar{p}_1 = 1,0$.

3. Изменим переменную x_1 .

Значение λ_1 найдем из условия $\frac{df}{d\lambda_1} = 0$:

$$f(x_1 + \lambda_1 e_1, x_2) = 2(x_1 + \lambda_1 e_1)^2 + x_2^2 - (x_1 + \lambda_1 e_1) \cdot x_2,$$

$$\frac{df}{d\lambda_1} = 4(x_1 + \lambda_1 e_1)e_1 - x_2 e_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,25x_2 - x_1,$$

$$\lambda_1 = 0,25x_2^0 - x_1^0 = 0,25 \cdot 1 - 2 = -1,75.$$

Тогда $x_1^1 = x_1^0 + \lambda_1 e_1 = 2 + (-1,75) \cdot 1 = 0,25$.

Итак, нашли точку $A_1(0,25; 1)$, в которой значение целевой функции $f(A_1) = 0,875$.

4. Изменим переменную x_2 . Значение λ_2 найдем из условия $\frac{df}{d\lambda_2} = 0$:

$$f(x_1, x_2 + \lambda_2 e_2) = 2x_1^2 + (x_2 + \lambda_2 e_2)^2 - x_1(x_2 + \lambda_2 e_2),$$

$$\frac{df}{d\lambda_2} = 2(x_2 + \lambda_2 e_2)e_2 - x_1 e_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0,5x_1 - x_2,$$

$$\lambda_2 = 0,5x_1^1 - x_2^0 = 0,25 \cdot 0,5 - 1 = -0,875.$$

Тогда $x_2^1 = x_2^0 + \lambda_2 e_2 = 1 + (-0,875) \cdot 1 = 0,125$.

Нашли точку $A_2(0,25; 0,125)$, $f(A_2) = 0,109$.

5. От точки A_2 вновь изменим направление поиска и сведём дальнейшие вычисления в таблицу:

Номер итерации k	\bar{p}_k	λ	x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0			2	1	7
1	1,0	-1,750	0,250	1,000	0,875
2	0,1	-0,875	0,250	0,125	0,109
3	1,0	-0,215	0,030	0,125	0,013
4	0,1	-1,108	0,030	0,015	0,001

После четвертой итерации выполняется условие окончания поиска: $\max |x_i^4 - x_i^3| = |x_2^4 - x_2^3| = 0,01 = \varepsilon$.

Итак, минимум целевой функции находится в точке $(0,030; 0,015)$, $f(A_{\min}) = 0,001$. Отметим, что точный минимум целевой функции находится в точке $(0,0)$, $f(0,0) = 0$.

Рассмотрим на другом примере покоординатный спуск с использованием для выбора величины шага способа удвоения. Пусть требуется минимизировать функцию $f(x_1, x_2) = 4(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2$, начиная из точки $A_0(8,9)$; $f(A_0) = 45$.

1. Изменим переменную $x_1^1 = x_1^0 + \lambda_1 e_1$. Найдём λ_1 , применяя способ удвоения. Выберем произвольное значение $\lambda_1 = -0,5$. Тогда $x_1^1 = 8 + (-0,5) \cdot 1 = 7,5$; $f(7,5; 9) = 34 < f(8; 9)$.

Удвоим шаг: $\lambda_1 = -1$. При этом $x_1^1 = 8 + (-1) \cdot 1 = 7$; $f(7; 9) = 25 < f(7,5; 9)$.

Еще раз удвоим шаг: $\lambda_1 = -2$. Тогда $x_1^1 = 8 + (-2) \cdot 1 = 6$; $f(6; 9) = 13 < f(7; 9)$.

Уменьшение целевой функции позволяет еще удвоить шаг: $\lambda_1 = -4$. При этом $x_1^1 = 8 + (-4) \cdot 1 = 4$; $f(4; 9) = 13$.

Функция не уменьшилась. Следовательно, наилучшее значение $\lambda_1 = -2$. Точка A_1 , найденная с этим значением λ_1 , имеет координаты $x_1^1 = 6$; $x_2^1 = 9$; $f(A_1) = 13$.

2. Еще раз изменим переменную x_1 : $x_1^2 = x_1^1 + \lambda_1^1 e_1$. Примем $\lambda_1^1 = \lambda_1 = -2$. Тогда $x_1^2 = 6 + (-2) \cdot 1 = 4$; $f(4; 9) = 13$.

Функция не уменьшилась. Уменьшим шаг вдвое: $\lambda_1^1 = -1$. При этом $x_1^2 = 6 + (-1) \cdot 1 = 5$; $f(5; 9) = f(A_2) = 9 < f(A_1)$.

3. Сделаем шаг по переменной x_2 : $x_2^1 = x_2^0 + \lambda_2 e_2$. Примем $\lambda_2 = \lambda_1^1 = -1$. Тогда $x_2^1 = 9 + (-1) \cdot 1 = 8$; $f(5; 8) = f(A_3) = 4 < f(A_2)$.

4. Еще раз изменим переменную x_2 : $x_2^2 = x_2^1 + \lambda_2^1 e_2$, где $\lambda_2^1 e_2 = -2$. Тогда $x_2^2 = 8 + (-1) \cdot 1 = 7$; $f(5; 7) = f(A_4) = 1 < f(A_3)$.

5. Еще раз изменим переменную x_2 с тем же значением λ :

$$x_2^3 = 7 + (-1) \cdot 1 = 6; f(5; 6) = f(A_5) = 0 < f(A_4).$$

6. Следующий шаг по x_2 с тем же параметром λ приводит к возрастанию функции: $x_2^4 = 6 + (-1) \cdot 1 = 5$; $f(5; 5) = 1$. Следовательно, точка $A_5(5; 6)$ является точкой минимума целевой функции (рис. 11).

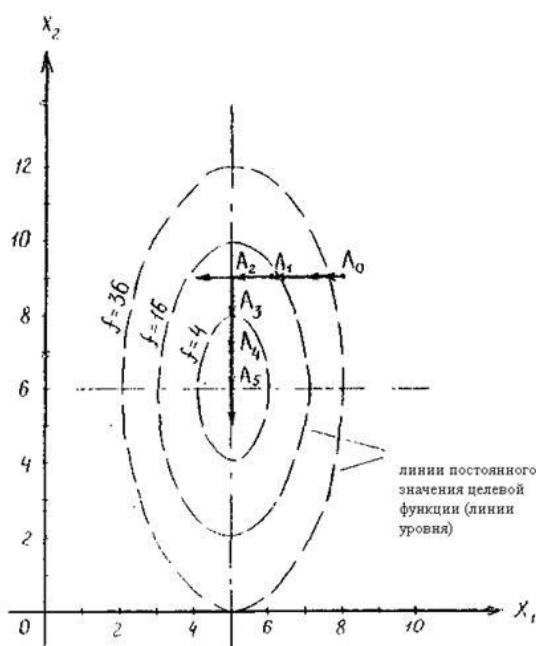


Рис. 11. Траектория поиска

Алгоритм Хука–Дживса. Этот алгоритм содержит две основные процедуры:

1. Исследующий покоординатный поиск в окрестности данной точки, предназначенный для определения направления убывания $f(x)$.
2. Перемещение в направлении убывания.

Основные шаги алгоритма показаны на рис. 12.

Для простоты рассматривается задача минимизации функции двух переменных x_1, x_2 .

1. До начала процесса поиска должны быть заданы исходные значения пробных шагов – векторы δx с элементами δx_1 и δx_2 .

2. Также до начала процесса поиска должны быть заданы минимальные значения шагов $\delta x_1^{(\min)}$ и $\delta x_2^{(\min)}$ (определяют точность нахождения минимума).

3. Выбираем (произвольно) начальную точку (на рис. 12 – точка 0 с координатами $x^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]^T$). Назначаем ее базовой (от нее будет отсчитываться шаг к минимуму до тех пор, пока функция будет уменьшаться, что приведет к увеличению шага, если он удачен).

4. Определяем (непосредственным измерением) значение минимизируемой функции $f(x)$, соответствующее $x = x^{(0)}$; обозначим это значение f_0 . Далее также будем опускать аргумент в обозначении функции: обозначение f_j относится к функции $f(x)$ в точке $x = x_j$.

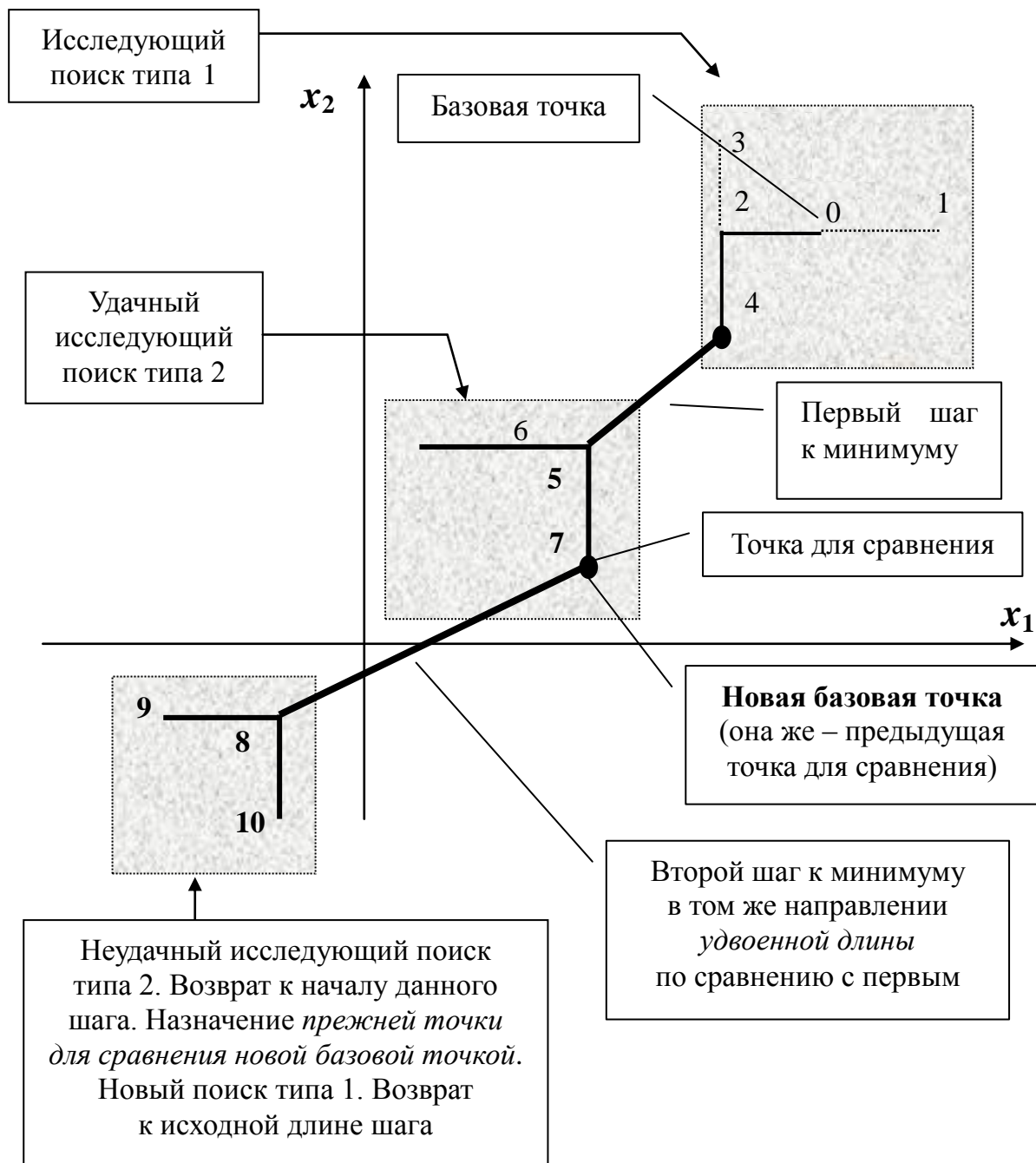


Рис. 12. Последовательность действий в алгоритме Хука–Дживса
Исследующий поиск типа 1:

1. В окрестности этой точки совершаем пробный шаг, например, в сторону увеличения аргумента x_1 : $x_1^{(\text{пробное})} = x_1^{(0)} + \delta x_1$, значение $x_2^{(0)}$ не изменяем. Происходит перемещение в точку 1 (см. рис. 12).

2. Определяем (непосредственным измерением) значение минимизируемой функции $f(x)$ в точке 1, оно соответствует аргументу $x = [x_1^{(0)} + \delta x_1, x_2^{(0)}]$; обозначим это значение f_1 .

3. Проверяем, уменьшилось ли значение функции в результате данного пробного шага, т. е. проверяем, истинно ли $[f_1 - f_0 < 0]$. Если

«да», то направление пробного шага выбрано удачно. Пусть в нашем случае $[f_1 - f_0 < 0]$ ложно. Возвращаемся в точку 0 и делаем пробный шаг в противоположном направлении: $x_1^{(\text{пробное})} = x_1^{(0)} - \delta x_1$, значение $x_2^{(0)}$ по-прежнему не изменяем. Происходит перемещение в точку 2.

4. Проверяем, уменьшилось ли значение функции в результате данного пробного шага, т. е. проверяем, истинно ли $[f_2 - f_0 < 0]$. Если «да», то направление пробного шага выбрано удачно. Если же и это изменение окажется неудачным, оставляем $x_1 = x_1^{(0)}$. Пусть в нашем случае $[f_2 - f_0 < 0]$ истинно, т. е. направление выбрано удачно. Перемещаем точку приближения к экстремуму в точку 2.

5. В окрестности точки 2 совершаем пробный шаг по другой координате, например, в сторону увеличения аргумента x_2 : $x_2^{(\text{пробное})} = x_2^{(0)} + \delta x_2$, значение $x_1 = x_1^{(0)} - \delta x_1$ (соответствует точке 2). Происходит перемещение в точку 3 (см. рис. 12).

6. Определяем (непосредственным измерением) значение минимизируемой функции $f(x)$ в точке 3, оно соответствует аргументу $x = [x_1^{(0)} - \delta x_1, x_2^{(0)} + \delta x_2]$; обозначим это значение f_3 .

7. Проверяем, уменьшилось ли значение функции в результате данного пробного шага, т. е. проверяем, истинно ли $[f_3 - f_2 < 0]$. Если «да», то направление пробного шага выбрано удачно. Пусть в нашем случае $[f_3 - f_2 < 0]$ ложно. Возвращаемся в точку 2 и делаем пробный шаг в противоположном направлении: $x_2^{(\text{пробное})} = x_2^{(0)} - \delta x_2$ при $x_1 = x_1^{(0)} - \delta x_1$. Происходит перемещение в точку 4.

8. Проверяем, уменьшилось ли значение функции в результате данного пробного шага, т. е. проверяем, истинно ли $[f_4 - f_2 < 0]$. Если «да», то направление пробного шага выбрано удачно. Если же и это изменение окажется неудачным, оставляем $x_2 = x_2^{(0)}$. Если пробные шаги во всех направлениях по всем координатам окажутся неудачными, то следует уменьшить величины пробных шагов δx_1 и δx_2 . Пусть в нашем случае $[f_4 - f_2 < 0]$ истинно, т. е. направление выбрано удачно.

9. Перемещаем точку приближения к экстремуму в точку 4. Назначаем эту точку точкой для сравнения для оценки эффективности следующего шага поиска по образцу.

Таким образом, исследующий поиск типа 1 завершается определением направления движения к минимуму, т. е. оценки вектора, направленного против направления градиента, а также назначением базовой точки (на рис. 12 – точка 0), от которой будет отсчитываться шаг к минимуму, и точки для сравнения (по ней мы будем определять

целесообразность сохранения выбранного направления движения к минимуму).

Поиск по образцу. В направлении, определенном в результате выполнения исследующего поиска типа 1, делаем шаг, который называется поиском по образцу, из точки для сравнения 4. Величина шага $\Delta x = [\Delta x_1, \Delta x_2]^T$ определяется отсчетом от базовой точки (на рис. 12 это точка 0). Формула для определения координаты точки (точка 5 на рис. 12), в которую переходим после шага поиска, следующая:

$$x_i^{(5)} = x_i^{(4)} + \Delta x_i = x_i^{(4)} + (x_i^{(4)} - x_i^{(0)}) = 2x_i^{(4)} - x_i^{(0)},$$

или в общих обозначениях:

$$x_i^{(\text{в конце шага поиска по образцу})} = 2x_i^{(\text{в точке для сравнения})} - x_i^{(\text{в базовой точке})}, i = 1, \dots, n.$$

Получаем точку 5.

Исследующий поиск типа 2. В окрестности точки, полученной в результате поиска по образцу (на рис. 12 это точка 5), совершаем пробные шаги последовательно по каждой координате в ту же сторону, что оказалась успешной для базовой точки.

Начинаем с любого из аргументов, например с x_1 . В базовой точке успешным было направление уменьшения аргумента. Сохраняем это направление: $x_1^{(\text{пробное})} = x_1^{(5)} - \delta x_1$, значение $x_2^{(5)}$ не изменяем. Происходит перемещение в точку 6. Возможно значение функции по сравнению с достигнутым в точке для сравнения (точка 4) улучшится, т. е. получится $f_6 - f_4 < 0$. Тогда считаем направление поиска удачным и не делаем пробных шагов по остальным координатам.

Пусть в нашем примере $[f_6 - f_4 < 0]$ ложно. Тогда следует вернуться в точку 5 и продолжить пробные шаги (в тех же направлениях, что привели к удаче на этапе исследующего поиска типа 1) по другим координатам до первой удачи. Если все направления пробных шагов привели к неудаче, следует откорректировать направление поиска (см. п. 5 исследующего поиска типа 1).

Пусть в нашем примере шаг в направлении «прежнего» (для базовой точки) успешного пробного шага для аргумента x_2 : $x_2^{(\text{пробное})} = x_2^{(5)} - \delta x_2$ при $x_1 = x_1^{(5)}$ (перемещение в точку 7), оказался успешным, $[f_7 - f_4 < 0]$ истинно. Тогда, несмотря на неудачу пробного шага по координате x_1 ($[f_6 - f_4 < 0]$ ложно), считаем выбранное направление движения правильным и не изменяем положение базовой точки. Назначаем новую точку для сравнения (в нашем примере – точку 7).

Таким образом, исследующий поиск типа 2 завершается либо назначением новой точки для сравнения с сохранением прежнего направления движения к минимуму и переходу к поиску по образцу, либо заключением о необходимости корректировки прежнего направления.

Поиск по образцу. В направлении, определенном в результате выполнения исследующего поиска типа 2, делаем шаг поиска по образцу из точки для сравнения 7. Величина шага $\Delta x = [\Delta x_1, \Delta x_2]^T$ определяется отсчетом от старой базовой точки (на рис. 12 это точка 0). Формула для определения координаты точки 8, в которую переходим после шага поиска, следующая:

$$x_i^{(8)} = x_i^{(7)} + \Delta x_i = x_i^{(7)} + (x_i^{(7)} - x_i^{(0)}) = 2x_i^{(7)} - x_i^{(0)}$$

или в более общих обозначениях:

$$x_i^{(\text{в конце шага поиска по образцу})} = 2x_i^{(\text{в точке для сравнения})} - x_i^{(\text{в базовой точке})} \quad 1, \dots, n.$$

Получаем точку 8.

Мы видим, что произошло примерно двукратное увеличение длины шага (с точностью до длины пробных шагов $\delta x_1, \delta x_2$) благодаря сохранению старой базовой точки.

Исследующий поиск типа 2 (неудачный). Пусть оба пробных шага из точки 8 оказались неудачными $((f_9 - f_7 < 0) \cap (f_{10} - f_7 < 0))$ ложно). Тогда следует отменить шаг поиска по образцу и возвратиться в прежнюю точку для сравнения (точка 7).

Действия после неудачного исследующего поиска типа 2. Назначаем базовой прежнюю точку для сравнения (точка 7). Из этой точки проводим исследующий поиск типа 1. Возможны 2 случая:

1. Исследующий поиск типа 1 удачен. Тогда следует продолжить работу, начиная с п. 1 (базовая точка 7).

2. Исследующий поиск типа 1 неудачен. Это означает попадание в область экстремума с точностью до текущей величины пробных шагов (в начале эта величина задана и равна $\delta x_1, \delta x_2$). Сравниваем эти величины с заранее заданной точностью поиска $\delta x_{1\min}, \delta x_{2\min}$. Возможны 2 случая:

– хотя бы один из пробных шагов ниже точности нахождения экстремума, т. е. $(\delta x_1 > \delta x_{1\min}) \cup (\delta x_2 > \delta x_{2\min})$; экстремум не найден, следует уменьшить шаг по алгоритму: $\delta x_i^{(\text{новое})} = \delta x_i^{(\text{исходное})} / e^w$, где e – основание натуральных логарифмов; w – число неудачных акций исследующего поиска типа первого подряда;

– оба пробных шага выше точности нахождения экстремума; экстремум найден, работа алгоритма закончена.

Симплекс-метод. Рассмотрим следующее определение.

Определение 4. *Правильным симплексом* в пространстве E_n называется множество из $n + 1$ равноудаленных друг от друга точек (вершин симплекса). Отрезок, соединяющий две вершины, называется *ребром симплекса*. В пространстве E_2 правильным симплексом является совокупность вершин равностороннего треугольника, в E_3 – правильного тетраэдра.

Если x^0 – одна из вершин правильного симплекса в E_n , то координаты остальных n вершин x^1, \dots, x^n можно найти, например, по формуле

$$x_j^i = \begin{cases} x_j^0 + d_1, & i \neq j, \\ x_j^0 + d_2, & i = j, \end{cases} \quad (6)$$

где $d_1 = a(\sqrt{n+1} - 1) / n\sqrt{2}$; $d_2 = a(\sqrt{n+1} + n - 1) / n\sqrt{2}$; a – длина ребра.

Вершину x^0 симплекса, построенного по формуле (6), будем называть *базовой*. В алгоритме симплексного метода используется следующее важное свойство правильного симплекса. По известному симплексу можно построить новый симплекс *отражением* какой-либо вершины, например x^k , симметрично относительно центра тяжести x^c остальных вершин симплекса.

Таким образом, происходит перемещение симплекса в пространстве E_n (рис. 13).

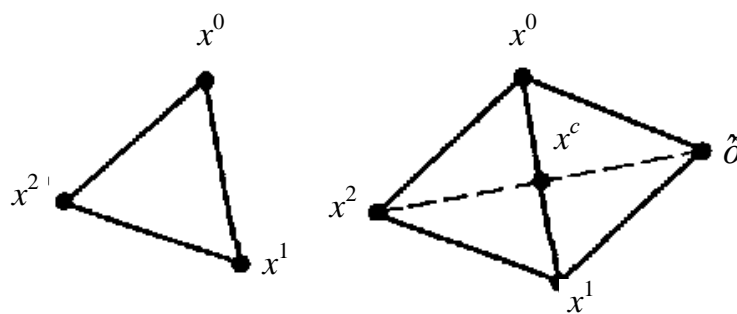


Рис. 13. Иллюстрация перемещения симплекса в пространстве E_2

Поиск точки минимума функции $f(x)$ с помощью правильных симплексов производят следующим образом. На каждой итерации сравнивают значения $f(x)$ в вершинах симплекса. Затем проводят процедуру отражения для той вершины, в которой $f(x)$ принимает наибольшее значение. Если в отраженной вершине получается мень-

шее значение функции, то переходят к новому симплексу. В противном случае выполняют еще одну попытку отражения для вершины со следующим по величине значением $f(x)$. Если и она не приводит к уменьшению функции, то сокращают длину ребра симплекса, например вдвое, и строят новый симплекс с этим ребром. В качестве базовой выбирают ту вершину x^0 старого симплекса, в которой функция принимает минимальное значение. Поиск точки минимума $f(x)$ заканчивают, когда либо ребро симплекса, либо разность между значениями функций в вершинах симплекса становятся достаточно малыми. Опишем один из вариантов алгоритма этого метода.

Шаг 0. Выбрать параметр точности ε , базовую точку x^0 , ребро a и построить начальный симплекс по формуле (6). Вычислить $f(x^0)$.

Шаг 1. Вычислить значения $f(x)$ в вершинах симплекса x^1, \dots, x^n .

Шаг 2. Упорядочить вершины симплекса x^0, \dots, x^n так, чтобы

$$f(x^0) \leq \dots \leq f(x^1) \leq f(x^{n-1}) \leq f(x^n).$$

Шаг 3. Проверить условие $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [f(x^i) - f(x^0)]^2 < \varepsilon^2$.

Если оно выполнено, то вычисления прекратить, полагая $x^* \approx x^0$, $f^* \approx f(x^0)$.

В противном случае перейти к шагу 4.

Шаг 4. Найти $x^c = \frac{1}{n} \sum_{i \neq 1} x^i$ и выполнить отражение вершины x^n :

$$\hat{x}^n = 2x^c - x^n.$$

Если $f(\hat{x}^n) < f(x^n)$, то положить $x^n = \hat{x}^n$ и перейти к шагу 2. Иначе – перейти к шагу 5.

Шаг 5. Найти $x^c = \frac{1}{n} \sum_{i \neq 1} x^i$ и выполнить отражение вершины x^{n-1} :

$$\hat{x}^{n-1} = 2x^c - x^{n-1}.$$

Если $f(\hat{x}^{n-1}) < f(x^{n-1})$, то положить $x^{n-1} = \hat{x}^{n-1}$ и перейти к шагу 2. Иначе – перейти к шагу 6.

Шаг 6. Перейти к новому правильному симплексу с вдвое меньшим ребром, считая базовой вершиной x^0 . Остальные n вершин симплекса найти по формуле $x^i = (x^i + x^0)/2$, $i = 1, \dots, n$. Перейти к шагу 1.

Геометрическая иллюстрация работы алгоритма в пространстве показана на рис. 14, где точки x^0, x^1, x^2 – вершины начального симплекса, а пунктиром указаны процедуры отражения.

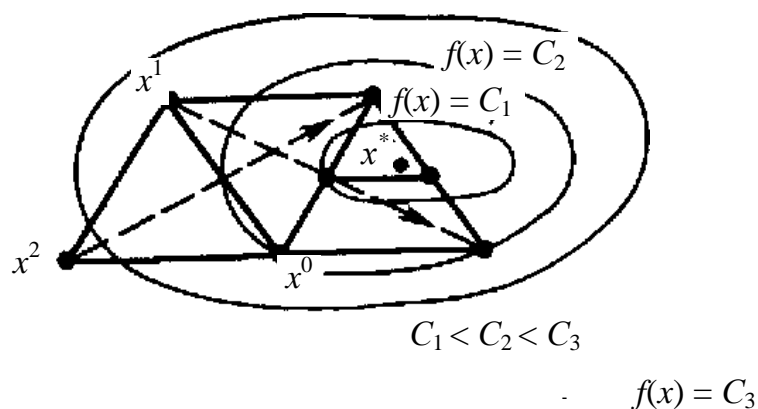


Рис. 14. Алгоритм симплекс-метода

Примечание. Следует иметь в виду, что если функция $f(x)$ многомерная, то описанным методом может быть найдена точка локального, а не глобального минимума $f(x)$.

Метод деформируемого симплекса (метод Нелдера–Мида). Алгоритм, описанный выше, можно модифицировать, добавив к процедуре отражения при построении нового симплекса процедуры *сжатия* и *растяжения*. А именно, положение новой вершины \hat{x}^n вместо вершины x^n , соответствующей наибольшему значению функции, находится сравнением и выбором наименьшего значения среди значений целевой функции в точках:

$$\begin{aligned} z^1 &= x^c - \alpha(x^c - x^n), \quad 0 < \alpha < 1; \\ z^2 &= x^c + \alpha(x^c - x^n), \quad 0 < \alpha < 1; \\ z^3 &= x^c - \beta(x^c - x^n), \quad \beta = 1; \\ z^4 &= x^c - \gamma(x^c - x^n), \quad \gamma > 1. \end{aligned} \tag{7}$$

Геометрическая иллюстрация этих процедур для пространства E_2 приведена на рис. 15 и 16. Так как величина $\alpha \in (0; 1)$, то выбор точек z^1 и z^2 соответствует сжатию симплекса; $\beta \approx 1$, поэтому выбор точки z^3 соответствует отражению, а $\gamma > 1$ и выбор точки z^4 приводит к растяжению симплекса.

Численные эксперименты показывают, что этот алгоритм хорошо работает в пространстве E_n для $n \leq 6$. Отметим, что при деформациях утрачивается свойство правильности исходного симплекса. Поэтому, не стремясь к правильности начального симплекса, его строят

из произвольной базовой точки $x^0 \in E_n$ по формулам $x^i = x^0 + \alpha e^i$, где e^i – i -й базисный вектор; α – параметр симплекса. На практике хорошо зарекомендовал себя следующий набор параметров α , β и γ для выбора пробных точек z^i в формулах (7): $\alpha = 1/2$, $\beta = 1$ и $\gamma = 2$.

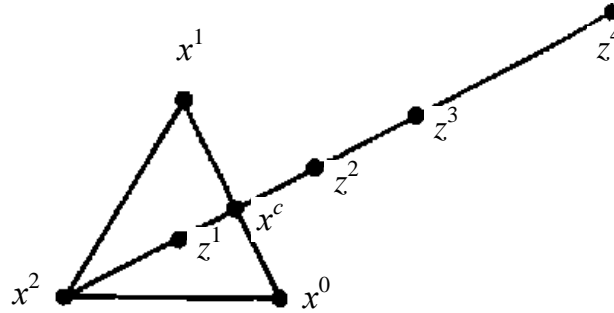


Рис. 15. Пробные точки z^1, z^2, z^3, z^4 для перехода к новому симплексу

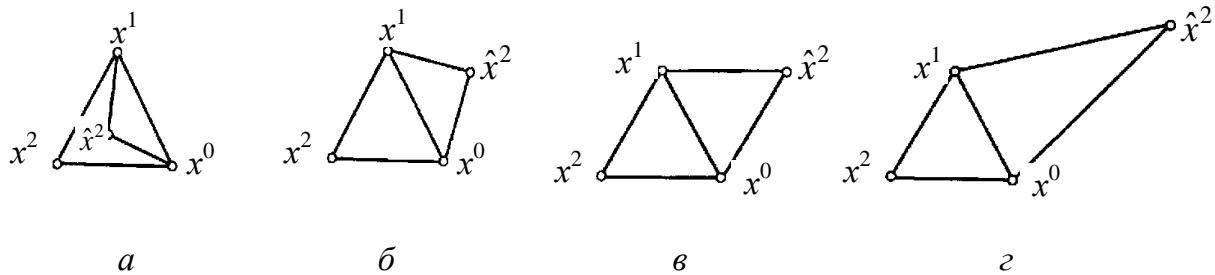


Рис. 16. Новые симплексы, полученные в результате процедур сжатия (а, б); отражения (в); растяжения (г)

Опишем алгоритм метода поиска точки минимума функции по деформируемому симплексу:

Шаг 0. Выбрать параметр точности ε , параметры α , β и γ , базовую точку x^0 , параметр α и построить начальный симплекс по формулам (6) или (7). Вычислить $f(x^0)$.

Шаг 1. Вычислить значения функции в вершинах симплекса x^1, \dots, x^n .

Шаг 2. Упорядочить вершины x^0, \dots, x^n так, чтобы $f(x^0) \leq \dots \leq f(x^n)$.

Шаг 3. Проверить достижение заданной точности. Если оно выполняется, то вычисления завершить, полагая $x^* \approx x^0, f^* \approx f(x^0)$. Иначе – перейти к шагу 4.

Шаг 4. Найти $x^c = \frac{1}{n} \sum_{i=0} x^i$ и пробные точки $z^k, k = 1, \dots, 4$, по формулам (7). Найти $f(z^*) = \min f(z^k)$. Если $f(z^*) < f(z^n)$, то положить $x^n = z^*$ и перейти к шагу 2. Иначе – перейти к шагу 5.

Шаг 5. Уменьшить симплекс, полагая $x^i = (x^i + x^0)/2, i = 1, \dots, n$, и перейти к шагу 1.

Примечание. Для того чтобы избежать сильной деформации симплекса, алгоритм иногда дополняют процедурой обновления. Например, после N шагов алгоритма из точки x^0 снова строят симплекс, полагая $a = \|x^0 - x^n\|$. С теоретической точки зрения описанные методы минимизации слабо исследованы, однако практика показывает их работоспособность.

Методы безусловной многомерной минимизации, использующие производные функции

Рассмотрим методы безусловной многомерной минимизации, использующие производные функции.

Метод наискорейшего спуска. Алгоритм такого метода, называемого методом наискорейшего спуска, можно представить следующими этапами:

Шаг 1. Задают исходную точку $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Оценивают величину начального шага λ_0 . Определяют направление поиска путём вычисления частных производных в точке A_0 :

$$\left(\frac{df}{dx_1} \right)_{A_0}, \left(\frac{df}{dx_2} \right)_{A_0}, \dots, \left(\frac{df}{dx_n} \right)_{A_0}.$$

Шаг 2. Делают переход от точки A_0 к точке A_1 по формуле

$$x_i^1 = x_i^0 - \lambda_1 \left(\frac{df}{dx_i} \right)_{A_0}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Шаг 3. Вновь определяют направление спуска, вычисляя частные производные в полученной точке:

$$\left(\frac{df}{dx_1} \right)_{A_1}, \left(\frac{df}{dx_2} \right)_{A_1}, \dots, \left(\frac{df}{dx_n} \right)_{A_1}.$$

Шаг 4. Делают переход к точке A_2 :

$$x_i^2 = x_i^1 - \lambda_1 \left(\frac{df}{dx_i} \right)_{A_1}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \text{и т. д.}$$

При этом параметр λ можно рассматривать как константу, а можно оценить способом удвоения. В частности, можно для определения λ на $(k+1)$ -м шаге использовать косинус угла α_k между последовательными векторами переходов в процессе спуска от точки A_{k+1} до A_k :

$$\cos \alpha_k = \frac{1}{L} \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{df}{dx_i} \right)_{A_k} \cdot \left(\frac{df}{dx_i} \right)_{A_{k-1}}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{df}{dx_i} \right)_{A_k}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{df}{dx_i} \right)_{A_{k-1}}^2}}.$$

Тогда

$$\lambda_{k+1} = \begin{cases} 2\lambda_k, & \text{если } \alpha_k < \alpha_{\min}, \\ \lambda_k, & \text{если } \alpha_{\min} \leq \alpha_k \leq \alpha_{\max}, \\ \frac{1}{3}\lambda_k, & \text{если } \alpha_k > \alpha_{\max}. \end{cases} \quad (8)$$

В качестве α_{\min} и α_{\max} можно принять, например, углы в 30° и 90° соответственно.

Шаг 5. Поиск заканчивают, если

$$\sum_{i=0}^n \left(\frac{df}{dx_i} \right)_{A_k}^2 \leq \varepsilon \quad \text{или} \quad \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^{k+1} - x_i^k)^2} \leq \varepsilon,$$

где ε — малая положительная величина.

Пример 4. Требуется минимизировать функцию $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 16x_2^2$, начиная с точки $A_0(2, 3)$, с точностью $\varepsilon = 0,1$.

1. Определим направление поиска, вычисляя производные в заданной точке:

$$\left(\frac{df}{dx_1} \right)_{A_0} = 2x_1 = 2 \cdot 2 = 4 \quad \left(\frac{df}{dx_2} \right)_{A_0} = 32x_2 = 32 \cdot 3 = 96.$$

2. Выберем λ_0 из условия $f(A_1) < f(A_0)$. Пусть $\lambda_0 = 0,1$, тогда точка A_1 имеет координаты

$$x_1^1 = x_1^0 - \lambda_0 \left(\frac{df}{dx_1} \right)_{A_0} = 2 - 0,1 \cdot 4 = 1,6,$$

$$x_2^1 = x_2^0 - \lambda_0 \left(\frac{df}{dx_2} \right)_{A_0} = 3 - 0,1 \cdot 96 = -6,6.$$

При этом $f(A_1) = f(1,6; -6,6) = 699,52 > f(A_0) = 148$. Следовательно, λ_0 необходимо уменьшить. Примем $\lambda_0 = 0,05$, тогда

$$x_1^1 = 2 - 0,05 \cdot 4 = 1,8; \quad x_2^1 = 3 - 0,05 \cdot 96 = -1,8.$$

При этом $f(A_1) = f(1,8; -1,8) = 55,08 < f(A_0)$.

3. Сделаем переход в точку A_2 , корректируя λ :

$$\left(\frac{df}{dx_1} \right)_{A_1} = 2x_1^1 = 2 \cdot 1,8 = 3,6 \quad \left(\frac{df}{dx_2} \right)_{A_1} = 32x_2^1 = 32 \cdot (-1,8) = -57,6,$$

$$\begin{aligned} \cos a_1 &= \frac{1}{L} \cdot \frac{\left(\frac{df}{dx_1} \right)_{A_1} \cdot \left(\frac{df}{dx_1} \right)_{A_0} + \left(\frac{df}{dx_2} \right)_{A_1} \cdot \left(\frac{df}{dx_2} \right)_{A_0}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx_1} \right)_{A_1}^2 + \left(\frac{df}{dx_2} \right)_{A_1}^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{df}{dx_1} \right)_{A_0}^2 + \left(\frac{df}{dx_2} \right)_{A_0}^2}} = \\ &= \frac{3,6 \cdot 4 + (-57,6) \cdot 96}{\sqrt{3,6^2 + (-57,6)^2} \cdot \sqrt{4^2 + 96^2}} = -0,995. \end{aligned}$$

Поскольку $\alpha_1 = \arccos(-0,995) = 162,777^\circ > 90^\circ$, в соответствии с формулой (8) примем

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{3} = 0,016.$$

Тогда

$$x_1^2 = x_1^1 - \lambda_1 \cdot \left(\frac{df}{dx_1} \right)_{A_1} = 1,8 - 0,016 \cdot 3,6 = 1,742,$$

$$x_2^2 = x_2^1 - \lambda_1 \cdot \left(\frac{df}{dx_2} \right)_{A_1} = -1,8 - 0,016 \cdot 57,6 = -0,878,$$

$$f(A_2) = f(1,742; -0,878) = 15,369 < f(A_1).$$

4. Вновь определим направление поиска, вычисляя производные в точке A_2 , скорректируем λ и все дальнейшие итерации сведем в таблицу:

k	x_1	x_2	$\left(\frac{df}{dx_1}\right)$	$\left(\frac{df}{dx_2}\right)$	λ	$f(A_k)$
0	2	3	4	96	0,050	148
1	1,800	-1,800	3,600	-57,600	0,016	55,080
2	1,742	-0,878	3,484	-28,096	0,016	15,396
3	1,686	-0,248	3,372	-13,696	0,016	5,774
4	1,632	-0,209	3,264	-6,688	0,016	3,362
5	1,580	-0,102	3,160	-3,264	0,016	2,662
6	1,529	-0,050	3,058	-1,600	0,016	2,378
7	1,480	-0,024	2,960	-0,768	0,016	2,199
8	1,433	-0,012	2,866	-0,384	0,016	2,055
9	1,387	-0,006	2,774	-0,192	0,032	1,925
10	1,298	0	2,596	0	0,064	1,685
11	1,130	0	2,260	0	0,128	1,277
12	0,841	0	1,682	0	0,256	0,708
13	0,411	0	0,822	0	0,256	0,169
14	0,201	0	0,402	0	0,256	0,040
15	0,098	0	0,196	0	0,256	0,002
16	0,048	0	0,096	0	0,256	0,002

На шестнадцатой итерации выполняется условие окончания поиска:

$$\sqrt{(x_1^{16} - x_1^{15})^2 + (x_2^{16} - x_2^{15})^2} = 0,05 < \varepsilon.$$

Итак, минимум целевой функции находится в точке $A_{16}(0,048; 0,000)$, $f(A_{16}) = 0,002$.

Графическая иллюстрация данного примера приведена на рис. 17.

Метод Ньютона для многих переменных. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в E_n . Тогда для нее можно записать разложение по формуле Тейлора в окрестности точки x^k :

$$f(x) = f(x^k) + (f'(x^k), x - x^k) +$$

$$+ \frac{1}{2} (f''(x^k)(x - x^k), x - x^k) + o(\|x - x^k\|^2).$$

Отсюда видно, что поведение функции $f(x)$ с точностью до величины порядка $o(\|x - x^k\|^2)$ может быть описано квадратичной функцией

$$\Phi_k(x) = \frac{1}{2} \langle f''(x^k)(x - x^k), x - x^k \rangle + \langle f'(x^k), x - x^k \rangle + f(x^k). \quad (9)$$

Минимизируем функцию $\Phi_k(x)$ вместо $f(x)$. Найдем ее точку минимума x^{k+1} из условия $\Phi'_k(x) = 0$:

$$\Phi'_k(x) = f''(x^k)(x - x^k) + f'(x^k) = 0. \quad (10)$$

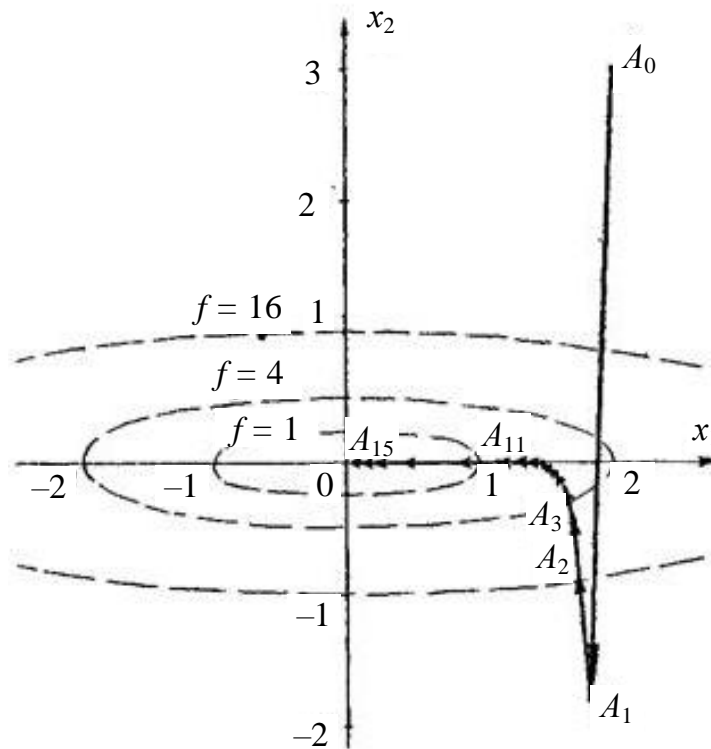


Рис. 17. Метод наискорейшего спуска

Пусть матрица Гессе $f''(x^k)$ положительно определена при всех $x \in E_n$ и, следовательно, не вырождена ($\det f''(x^k) > 0$). Тогда существует обратная матрица $[f''(x^k)]^{-1}$. Отметим, что квадратичная функция (9) с положительно определенной матрицей $f''(x^k)$ сильно выпукла, и уравнение (10) определяет единственную точку глобального минимума функции $\Phi_k(x)$. Умножим слева обе части равенства (10) на

матрицу $[f''(x^k)]^{-1}$ и найдем точку минимума x^{k+1} квадратичной функции (9), аппроксимирующей $f(x)$ в окрестности точки $x = x^k$:

$$x^{k+1} = x^k - [f''(x^k)]^{-1} \cdot f'(x^k), k = 0, 1 \dots \quad (11)$$

Итерационный процесс, начатый из произвольной точки $x^0 \in E_n$, называется *методом Ньютона минимизации функции многих переменных* и является обобщением метода Ньютона в одномерном случае.

Очевидно, для квадратичной функции с положительно определенной матрицей A применение метода Ньютона обеспечивает получение точки глобального минимума ровно за один шаг из любой точки $x^0 \in E_n$.

Для выпуклой функции, отличной от квадратичной, применение этого метода обеспечивает, как правило, быструю сходимость. Дело в том, что на каждом шаге итерационного процесса (11) используется информация о поведении функции $f(x)$ в окрестности точки x^k , содержащаяся не только в значениях первых, но и вторых ее частных производных. Поэтому при прочих равных условиях следует ожидать более быструю сходимость метода Ньютона по сравнению с градиентными методами.

При выборе достаточно хорошего начального приближения $x^0 \in E_n$ минимизирующая последовательность $\{x^k\}$ для сильно выпуклой, дважды дифференцируемой функции $f(x)$ сходится к точке минимума с квадратичной скоростью $\rho(x^k, x^*) \leq cq^{2^k}$, $q \in (0, 1)$. Если же точка x^0 выбрана недостаточно близкой к точке x^* , то последовательность (11) может расходиться.

Отметим, что даже сходящаяся последовательность $\{x^k\}$ метода Ньютона не всегда обеспечивает монотонное убывание $f(x)$, т. е. неравенство $f(x^{k+1}) < f(x^k)$ для некоторых $k = 0, 1 \dots$ может нарушаться. Этот недостаток устранен в *обобщенном методе Ньютона*:

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k [f''(x^k)]^{-1} \cdot f'(x^k),$$

где величина $\alpha_k > 0$ находится на каждом шаге из условия исчерпывающего спуска по направлению $p^k = -[f''(x^k)]^{-1} \cdot f'(x^k)$.

Недостатком метода Ньютона является необходимость вычисления и обращения матрицы Гессе на каждой итерации.

Пример 5. Найти точку минимума функции $f(x) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + x_1$ методом Ньютона из начальной точки $x^0 = (0,0)$.

Градиент $f'(x^0) = (-1, 0)$, матрица Гессе $f''(x^0) = A = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$.

Найдем обратную матрицу $[f''(x^0)]^{-1} = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$. С помощью фор-

мулы (11) получаем $x^1 = x^0 - \alpha_k [f''(x^0)]^{-1} \cdot f'(x^0) = (-3/16, -1/8)$. Так как $f'(x^1) = (0, 0)$, то задача решена: $x^* = x^1$. Целевая функция квадратична, поэтому решение задачи получено за одну итерацию.

3. МЕТОДЫ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Постановка и особенности нелинейных задач с ограничениями

Наиболее важный и обширный класс оптимизационных задач представляют собой задачи минимизации многомерных нелинейных целевых функций с различными ограничениями на управляемые переменные: найти $f(x^*) = \min f(x)$ при ограничениях

$$h_k(x) = 0, i = 1, 2, \dots, K,$$

$$g_j(x) \geq 0, j = 1, 2, \dots, J,$$

$$x_i^{(H)} \leq x_i \leq x_i^{(B)}, i = 1, 2, \dots, N.$$

Ограничения задачи существенно уменьшают размеры области, в которой проводится поиск минимума. На первый взгляд, может показаться, что уменьшение допустимой области должно упростить процедуру поиска минимума. Между тем, напротив, процесс оптимизации становится более сложным, поскольку стационарные точки не лежат внутри допустимой области, т. е. установленные ранее необходимые и достаточные условия существования экстремума нельзя использовать при наличии ограничений.

Так как осуществление минимизации без ограничений представляет собой более легкую задачу, чем минимизация с ограничениями, то естественными являются попытки преобразования задач с ограничениями в задачи без ограничений. Существует несколько подобных методов. Можно попытаться осуществить это заменой переменных либо видоизменением целевой функции с помощью некоторых функций ограничивающих уравнений.

Пример 1. Рассмотрим простую условную задачу минимизации с ограничениями типа равенства $f(x) = x_1 x_2 x_3 \rightarrow \min$ при $h_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

Наиболее простым и известным методом решения является метод исключения переменных. Так, выразив, например, переменную x_3 через другие переменные из уравнения-ограничения, получим следующую безусловную задачу минимизации для преобразованной целевой функции $f_{\text{пр}}: f_{\text{пр}}(x) = x_1 x_2 (1 - x_1 - x_2) \rightarrow \min$. Эта задача может быть решена каким-либо из итерационных методов безусловной минимизации, рассмотренных выше. Используя необходимые и достаточные условия экстремума, после несложных выкладок найдем, что градиент $f_{\text{пр}}(x)$ равен нулю в следующих двух стационарных точках:

$A(0, 0)$ и $B(1/3, 1/3)$, вторая из которых дает точку условного экстремума.

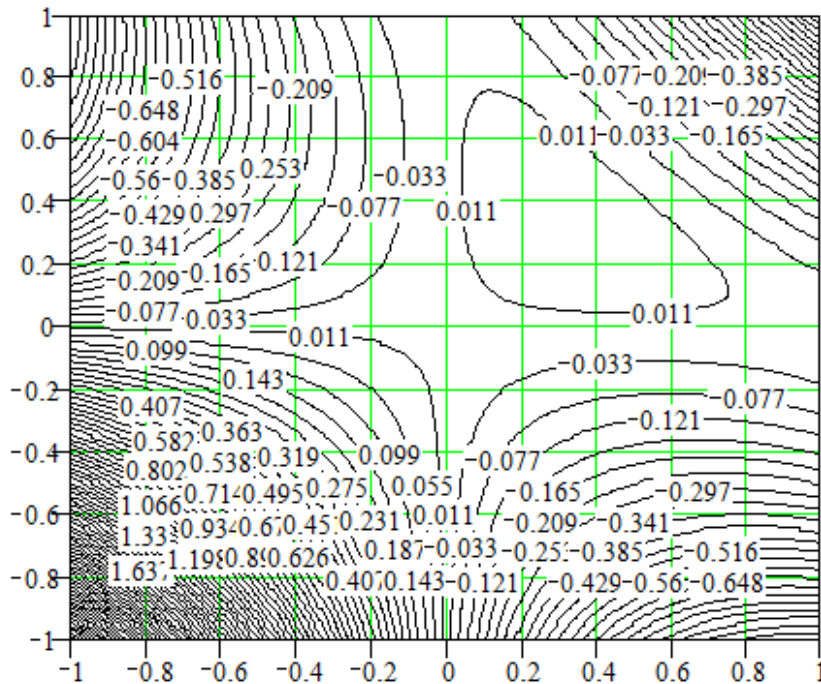


Рис. 18. Линии равного уровня преобразованной целевой функции $f(x) = x_1x_2(1 - x_1 - x_2)$

Линии равного уровня для функции $f_{\text{пр}}(x)$ показаны на рис. 18, на котором достаточно хорошо видны две упомянутые стационарные точки. Метод исключения переменных применим лишь в тех случаях, когда уравнения-ограничения можно разрешить относительно некоторого конкретного набора переменных. При наличии большого числа ограничений в виде равенств процесс исключения переменных становится весьма трудоемкой процедурой. Кроме того, возможны ситуации, когда уравнение-ограничение нельзя в принципе разрешить относительно переменной. Например, это относится к следующему уравнению-ограничению: $h_1(x) = x_1^2x_3 + x_2x_3^2 + x_2^{-1}x_1 = 0$. Тем не менее полезно знать о некоторых искусственных приемах замены переменных, которые могут оказаться вполне приемлемыми для решения условных задач. Например, если скалярная переменная x ограничена условием $|x| \leq 1$, то можно использовать замену переменной x на ϑ , где $x = \sin \vartheta$ или $\cos \vartheta$. Если x ограничена интервалом $[0, \infty]$, то снять ограничение на x можно, заменив x на y , где $x = e^y$, или $x = y^2$. Переменная y уже не ограничена. Наконец, если ограничения, накладываемые на x , заключаются в том, что x должен лежать между a и b , то простое преобразование вида $x = a + (b - a)\sin^2$ позволит перейти

к новой неограниченной переменной. Рассмотрим эту, на первый взгляд, довольно неочевидную замену переменной на следующем простом примере.

Пример 2. Минимизировать $f(x) = x^2$ при ограничении $1 \leq x \leq 3$. Рассматриваемая замена $x = a + (b - a)\sin^2\vartheta$ приводит к безусловной задаче: минимизировать $g(\vartheta) = [1 + 2\sin^2\vartheta]^2$. Эти приемы имеют ограниченное применение, и поэтому для более серьезных задач нам бы хотелось иметь более мощные методы решения условных задач, в которых в равной степени или, как говорят, симметрично используются все переменные. Однако нужно иметь в виду следующее программное положение, которое уже было проиллюстрировано: решение задач условной минимизации заключается в преобразовании исходной постановки в задачу безусловной минимизации.

Область допустимых решений (ОДР) в условных задачах оптимизации может быть самой разнообразной. Некоторые возможные ОДР в нелинейных задачах с ограничениями показаны на рис. 19 и 20.

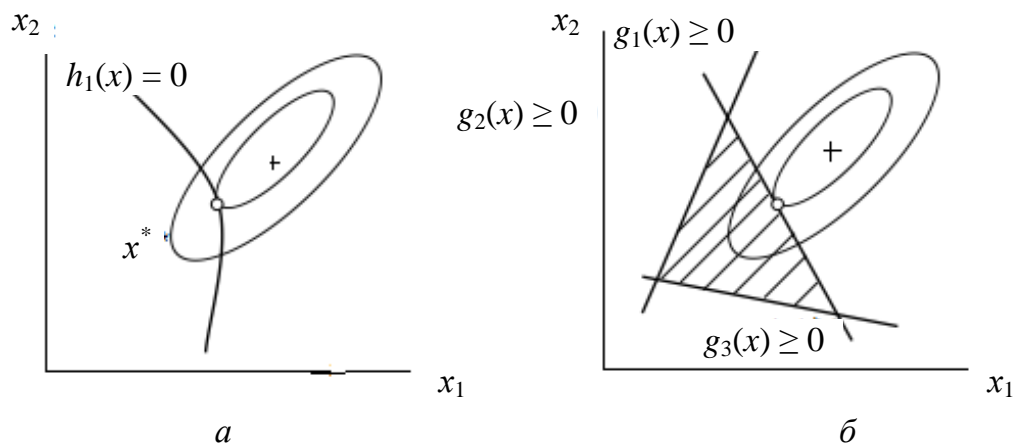


Рис. 19. ОДР в виде ограничения-равенства (а), минимум на ребре ОДР (б)

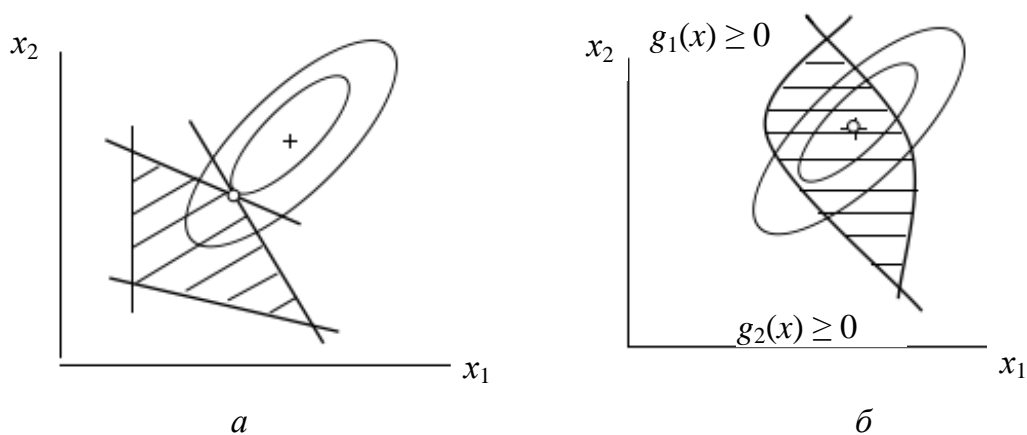


Рис. 20. Минимум в угловой точке ОДР (а),
безусловный минимум в ОДР (б)

Как видно из рисунков, задачи условной минимизации весьма многообразны, причем априори нельзя установить характерное местоположение точки условного оптимума, как, например, в задачах линейного программирования, в которых точка оптимума всегда лежит в угловой точке ОДР. Для изучения методов условной минимизации прежде всего необходимо классифицировать существующие задачи и методы условной минимизации.

Рассмотрим следующие задачи:

- задачи с ограничениями-равенствами;
- задачи с ограничениями-неравенствами.

Для задач первого типа мы применим теоретическую основу, разработанную Лагранжем. Задачи второго типа позволяют использовать как эвристические поисковые процедуры, так и теоретические методы, основанные на преобразовании задачи. Кроме того, широкое распространение получили также и методы линеаризации нелинейных задач, когда решение исходной нелинейной задачи распадается на последовательность решений определенных подзадач линейного программирования.

Методы штрафных функций

Рассмотрим методы решения условной задачи минимизации с ограничениями вида равенств и неравенств. Предполагается, что для вектора x^* , являющегося решением этой задачи, известно некоторое начальное приближение x^0 , возможно и недопустимое, т. е. не удовлетворяющее ограничениям исходной постановки. С помощью рассматриваемых далее методов в пространстве переменных находится конечная последовательность точек x^k , $k = 1, 2, \dots, K$, которая начинается в точке x^0 и заканчивается точкой x^K , дающей наилучшее приближение к искомой x^* среди всех точек найденной последовательности. В качестве каждой x^k , $k = 1, 2, \dots, K$, находятся стационарные точки так называемой *штрафной функции*, которая играет роль целевой функции вспомогательной задачи безусловной минимизации. С помощью штрафной функции исходная задача условной минимизации преобразуется в задачу безусловной минимизации, которая и является k -й подзадачей, решение которой дает соответствующую стационарную точку x^k . Конкретные способы преобразования исход-

ной (условной) задачи во вспомогательную (безусловную) определяются видом штрафной функции.

Методы штрафной функции можно классифицировать по способу учета ограничений-неравенств, поскольку ограничения-равенства учитываются во всех методах более или менее одинаково. В зависимости от того, являются ли точки последовательности $x^{*(k)}$ допустимыми или нет, говорят о методах внутренней или внешней точки соответственно. Если $x^{*(k)}$ содержит точки обоих типов, метод называют смешанным. Штрафная функция $P(x, R)$ в общем виде определяется выражением $P(x, R) = f(x) + \Omega(R, g(x), h(x))$, где R – набор штрафных параметров; Ω – величина штрафа как функция R и ограничений. Штраф Ω – это функция, и она определяется так, чтобы допустимые точки задачи имели преимущество перед недопустимыми в отношении безусловной минимизации штрафной функции. Очевидно, что «преимущество» здесь должно пониматься как меньшее значение.

Методы внутренней точки связаны с такими Ω , при которых стационарные точки подзадач $P(x, R)$ оказываются заведомо допустимыми. Эти методы называются также *методами барьеров*, поскольку здесь штраф как бы создает вдоль границы допустимой области барьер из бесконечно больших значений функции P . Очевидно, любой метод, основанный на преобразовании задачи условной минимизации в последовательность подзадач безусловной минимизации, может представлять интерес лишь при выполнении следующих требований:

- решения подзадач должны стремиться к решению исходной задачи нелинейного программирования;

- сложность минимизации $P(x, R)$ должна быть того же порядка, что и для функции $f(x)$. Даже при наличии исчерпывающего теоретического обоснования сходимости метод будет не особенно полезен, если подзадачи безусловной минимизации с чрезвычайно большим трудом поддаются решению;

- правило пересчета $R^{k+1} = F(R^k)$ должно быть простым.

Квадратичный штраф. Этот вид штрафа Ω используется для решения условных задач с ограничениями-равенствами $h(x)$ и имеет следующий вид (в случае одного ограничения): $\Omega = R\{h(x)\}^2$. При минимизации этот штраф препятствует отклонению величины $h(x)$ от нуля как в сторону положительных, так и в сторону отрицательных значений. Рассмотрим теперь очень простой пример, который

позволит понять, что, собственно, происходит в методе штрафных функций.

Пример 3. Решить следующую условную задачу минимизации методом штрафной квадратичной функции: минимизировать $f(x) = x^2$ при ограничении-равенстве $h(x) = x - 1 = 0$.

Очевидно, что искомой точкой условного минимума является точка $x^* = 1$, а значение минимума равно $f(x^*) = 1$. Теперь применим метод штрафных функций. Вначале составим штрафную функцию $P(x, R)$ с квадратичным штрафом, а затем сформулируем безусловную задачу минимизации:

$$P(x, R) = f(x) + R[h(x)]^2 = x^2 + R(x - 1)^2 \rightarrow \min.$$

Из необходимых условий экстремума следует, что решение этой задачи находится достаточно просто. Вначале приравняем первую производную функции по x к нулю: $P'_x(x, R) = 2x + 2R(x - 1) = 0$, откуда получаем координату стационарной точки x^* : $x^* = \frac{R}{R+1} = \frac{1}{1+1/R}$.

Таким образом, мы нашли выражение для x^* в виде параметрической зависимости от величины штрафного параметра. В табл. 1 приведены значения координат стационарной точки x^* в зависимости от значения R .

Таблица 1

Координаты стационарных точек квадратичной штрафной функции

R	$1/R$	x^*	$P(x^*, R)$
0	∞	0	0
0,1	10	0,09	0,09091
1	1	0,5	0,5
10	0,1	0,909	0,909091
100	0,01	0,991	0,990181
∞	0	1,0	1,0

Как видно, по мере увеличения параметра штрафа R от 0 до ∞ координата стационарной точки $P(x^*, R)$ стремится к своему точному значению $x^* = 1$. Задать R равным ∞ , разумеется, нельзя, но можно взять его достаточно большим. Вопрос обычно сводится к тому, насколько большим должно быть R (рис. 21).

Видно, что при увеличении штрафного параметра точка минимума штрафной функции $P(x, R)$ приближается к искомой точке $x^* = 1$.

Заметим также, что при увеличении штрафного параметра R штрафная функция имеет более выраженный минимум.

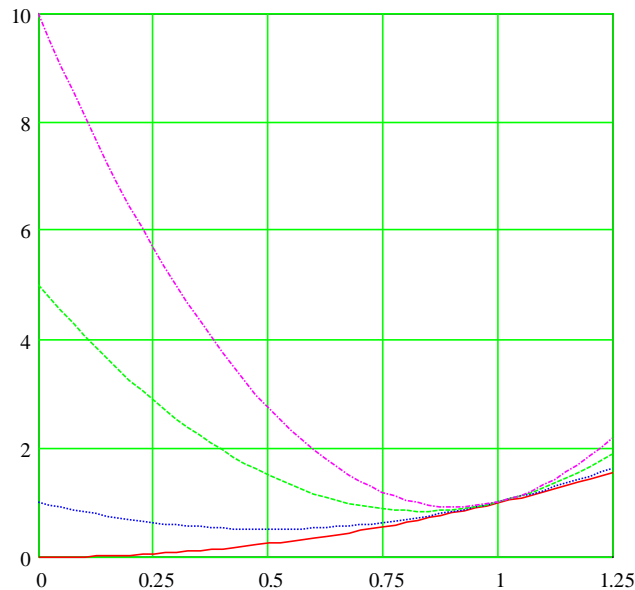


Рис. 21. Геометрическая интерпретация метода штрафных функций с квадратичным штрафом ($p_1(x) = P(x, R = 1)$; $p_1(x) = P(x, R = 5)$, $p_1(x) = P(x, R = 10)$)

Пример 4. Используя квадратичный штраф, решить следующую задачу нелинейного программирования: минимизировать $f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2$ при ограничении $h(x) = x_1 + x_2 - 5 = 0$.

На рис. 22 показано, что искомая точка минимума равна $x^* = (2,5; 2,5)$.

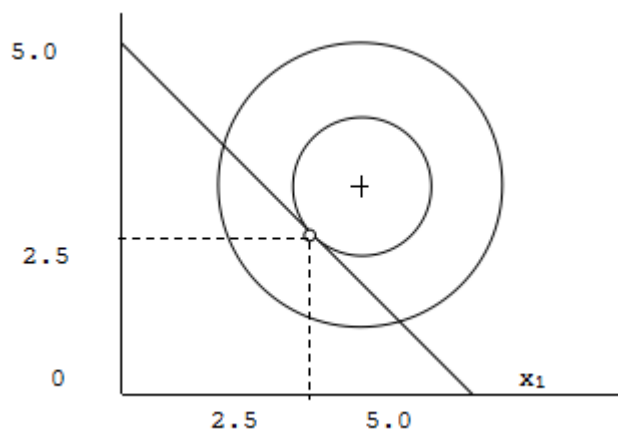


Рис. 22. Геометрическая иллюстрация двумерной задачи с ограничением-равенством

Первым шагом решения является преобразование исходной условной задачи в безусловную с введением следующей штрафной функции*: $P(x, R) = f(x) + (1/R)(h(x))^2$ или, конкретизируя $P(x, R)$, получается задача минимизировать $P(x, R) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 + (1/R)(x_1 + x_2 - 5)^2$. Покажем, что теоретически метод штрафной функции сходится к искомой точке условного минимума $x^* = (2,5; 2,5)$. Стационарная точка функции $P(x, R)$ находится из условия:

$$\frac{dP}{dx_1} = 2(x_1 - 4) + \frac{2}{R}(x_1 + x_2 - 5) = 0,$$

$$\frac{dP}{dx_2} = 2(x_2 - 4) + \frac{2}{R}(x_1 + x_2 - 5) = 0.$$

Далее находим координаты этой точки в зависимости от R : $x_1^* = x_2^* = (10 + 8R)/(4 + 2R)$. Переходя в этом выражении к пределу при $R \rightarrow \infty$, получаем $\lim [(10 + 8R)/(4 + 2R)] = 10/4 = 2,5$. Таким образом, теоретически метод сходится к искомой точке условного минимума $x^* = (2,5; 2,5)$, что и требовалось доказать.

Координаты стационарных точек штрафной функции $P(x, R)$ для различных значений R приведены в табл. 2.

Таблица 2

Координаты стационарных точек квадратичной штрафной функции

R	$1/R$	$x_1^* = x_2^*$	$P(x^*, R)$
0	∞	0	0
0,1	10	0,09	0,09091
1	1	0,5	0,5
10	0,1	0,909	0,909091
100	0,01	0,991	0,990181
∞	0	1,0	1,0

Как выбирать величину штрафного параметра? На первый взгляд, ответ на этот вопрос очевиден: чем больше значение параметра R , тем точнее ответ. Однако такая рекомендация носит слишком неточный, расплывчатый характер и вряд ли подходит для практических приложений. Поэтому обычно пользователь проводит не-

* Во избежание недоразумений следует иметь в виду, что мы будем использовать две разные формы записи коэффициентов при квадратичном штрафе: R и $1/R$. В первом случае R в процессе решения устремляет к ∞ , а во втором – к нулю.

сколько итераций, постепенно увеличивая значение R . Трудности минимизации $P(x, R)$ связаны с тем, что при $R \rightarrow \infty$ штрафная функция становится плохо обусловленной. Действительно, рассмотрим рис. 23, на котором изображены линии равного уровня штрафной функции $P(x, R)$ при $R = 1$. Предположим, мы определили точку минимума этой функции, которая равна $x^* = (3,3)$. Эта оценка условного минимума пока еще достаточно грубая. Для того чтобы увеличить точность решения, нужно увеличить значение штрафного параметра R .

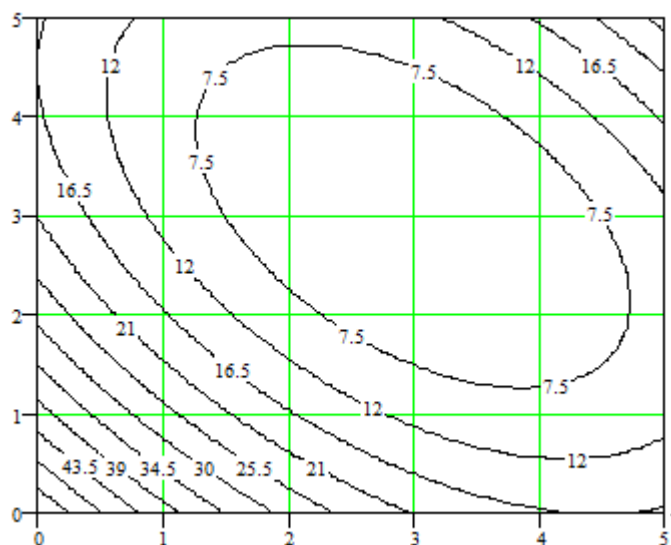


Рис. 23. Линии равного уровня штрафной функции
 $P(x, R = 1) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 + 1(x_1 + x_2 - 5)^2$

Увеличим значение штрафного параметра, например, примем $R = 10$. Тогда получим более точное приближение к точке условного минимума, равное $x^* = (3,75; 3,75)$, но соответствующая штрафная функция $P(x, R = 10)$ будет иметь более вытянутые линии равного уровня (рис. 24), и какой-либо метод оптимизации будет вынужден затратить большее число шагов для нахождения решения этой задачи по сравнению с предыдущей.

На рис. 24, б изображены линии равного уровня штрафной квадратичной функции при $R = 100$. Такая функция представляет значительные трудности при попытке ее численной минимизации. Таким образом, в практических приложениях принята стратегия многоэтапного последовательного приближения к решению, состоящая в следующем. Начав с относительно малого R , например с $R = 1$, находят точку минимума $P(x, 1)$. Затем увеличивают R , например до 10, и находят минимум $P(x, 10)$, используя ранее полученную точку в ка-

честве начальной. Увеличение R производят до тех пор, пока не окажется, что элементы решения этих итераций $x^{*(k)}, f(x^{*(k)}), P(x^{*(k)}, R)$ изменяются от шага к шагу достаточно мало. Применяя подобную стратегию, рассчитывают на то, что всякий раз близость вновь определяемой точки безусловного минимума $x^{*(k)}$ к предыдущей точке $x^{*(k-1)}$, используемой в качестве начальной, послужит компенсацией за возрастание сложности минимизации, обусловленной увеличением R . В действительности так и происходит, если R увеличивается достаточно медленно. Рассмотрим теперь штрафы, используемые для решения задач с ограничениями-неравенствами.

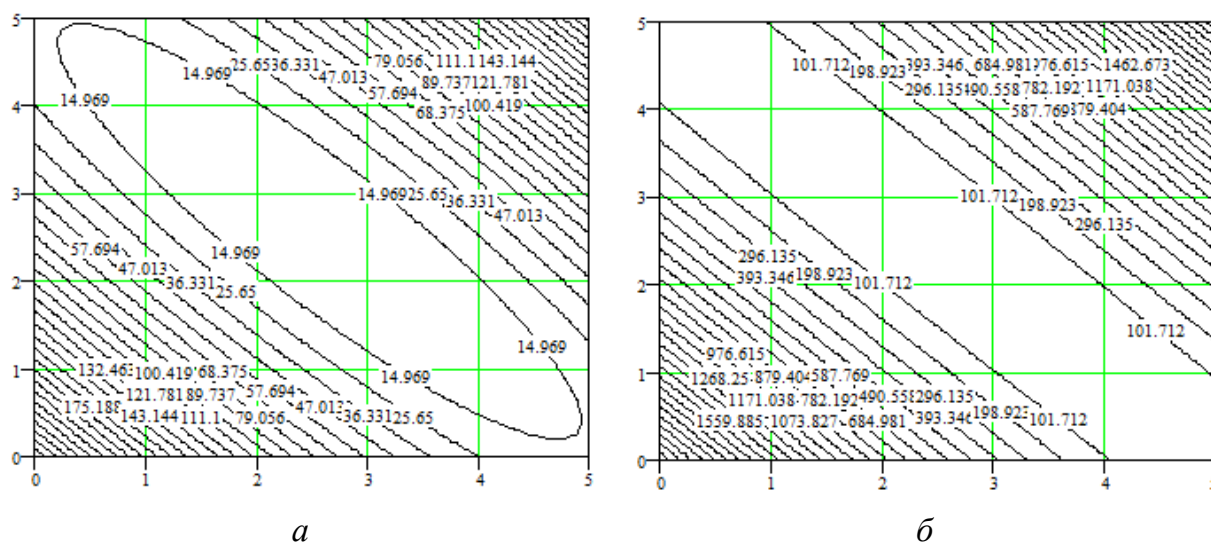


Рис. 24. Линии равного уровня штрафной функции
 $P(x, R = 1) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 + R(x_1 + x_2 - 5)^2$
 при $R = 10$ (а) и 100 (б) соответственно

Логарифмический штраф. Этот штраф представляет собой барьерную функцию, формально записывающуюся как $\Omega = -R \ln[g(x)]$.

Логарифмический штраф – это функция, не определенная в недопустимых точках (т. е. для таких x , когда $g(x) < 0$). Поэтому в тех случаях, когда приходится иметь дело с недопустимыми точками (например, когда заданное начальное приближение x^0 не является допустимым), требуется специальная процедура, обеспечивающая попадание в допустимую область (рис. 25).

Исследование графика показывает, что штраф положителен при всех x таких, что $0 < g(x) < 1$, и отрицателен при $g(x) > 1$. В данном случае как бы вводится искусственная дискриминация точек допустимой области: внутренним точкам отдается предпочтение перед граничными точками. Отрицательных значений штрафа можно было

бы избежать, положив $\Omega = 0$ для x таких, что $g(x) > 1$, однако при этом у градиента P появились бы разрывы в прилегающей к границе части допустимой области. Итерационный процесс начинается из допустимой начальной точки при положительном начальном значении R (скажем, при $R = 10$ или $R = 100$). После решения каждой подзадачи безусловной минимизации параметр R уменьшается и в пределе стремится к нулю.

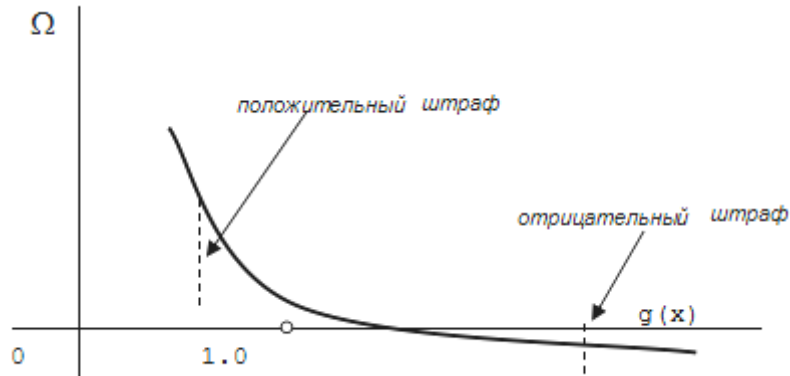


Рис. 25. Логарифмический штраф

Пример 5. При помощи логарифмической штрафной функции минимизировать $f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2$ при ограничении $g(x) = 5 - x_1 - x_2 \geq 0$.

Для решения этой задачи необходимо решать последовательность следующих безусловных задач штрафной функции с логарифмическим штрафом:

$$P(x, R) = f(x) - R \ln[g(x)],$$

$$\text{или } P(x, R) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 - R \ln(5 - x_1 - x_2).$$

Вначале выпишем условия стационарности функции $P(x, R)$ и аналитически определим решение задачи:

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = 2(x_1 - 4) + R \left[\frac{1}{5 - x_1 - x_2} \right] = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2} = 2(x_2 - 4) + R \left[\frac{1}{5 - x_1 - x_2} \right] = 0,$$

откуда $x_1 = x_2$, и с учетом этого имеем $2(x_1 - 4) + [R/(5 - 2x_1)] = 0$.

Отсюда приходим к уравнению $2x_1^2 - 13x_1 + 20 - (R/2) = 0$, один из корней которого дает координату искомой стационарной точки: $x_1 = \frac{13}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{9 + 4R}$.

Устремляя R к нулю, получаем в пределе $x_1^{(K)} = x_2^{(K)} = \lim_{R \rightarrow +0} x_1(R) = 2,5$, $f(x^{(K)}) = 4,5$. Таким образом, мы показали, что метод является сходящимся по крайней мере в предположении, что решение каждой k -й подзадачи минимизации ($k = 0, 1, \dots, K$) проводится точно.

Из табл. 3, где приведены координаты стационарных точек штрафной функции $P(x, R)$ нескольких подзадач безусловной минимизации, в частности следует, что значения P изменяются немонотонно: сначала они возрастают, а затем убывают. Этот эффект связан с наличием у логарифмического штрафа отрицательных значений. Штраф, заданный обратной функцией (рис. 26), задается формулой $\Omega = R[1/g(x)]$.

Таблица 3

Координаты стационарных точек логарифмической штрафной функции

R	$x_1^* = x_2^*$	$f(x)$	$g(x)$	$-R\{g(x)\}$	$P(x^*, R)$
100	0	67,4170	8,6118	-215,31	-147,8963
10	0,09	12,500	2,000	-6,93	5,5685
1	0,5	5,4542	0,3028	+1,195	6,6489
0,1	0,909	4,5995	0,0034	+0,341	4,9406
0,01	0,991	4,5100	0,0034	+0,057	4,5668
0	1,0	4,500	0,0000	0,0	4,5000

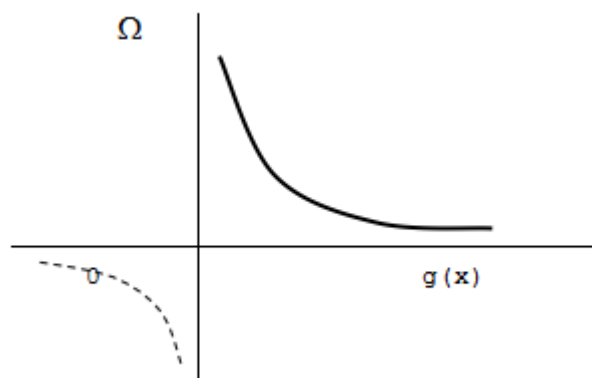


Рис. 26. Штраф, задаваемый обратной функцией

Обратный штраф. Обратный штраф не имеет отрицательных значений в допустимой области. Этот штраф, как и предыдущий, яв-

ляется барьером; в этом случае также возникают трудности, связанные с появлением недопустимых точек. Необходимость предотвращения этой ситуации очевидна, поскольку в недопустимых точках штраф принимает отрицательные значения. В допустимых точках вблизи границы значения штрафа положительны и быстро убывают при движении от границы внутрь допустимой области. На самой границе функция $P(x, R)$ и градиент P не определены. Итерации начинаются с начальной допустимой точки при положительном значении R , причем в процессе вычислений величина R в пределе стремится к нулю. Для задачи предшествующего примера, применяя обратный штраф, линии равного уровня для двух подзадач с различными значениями R показаны на рис. 27.

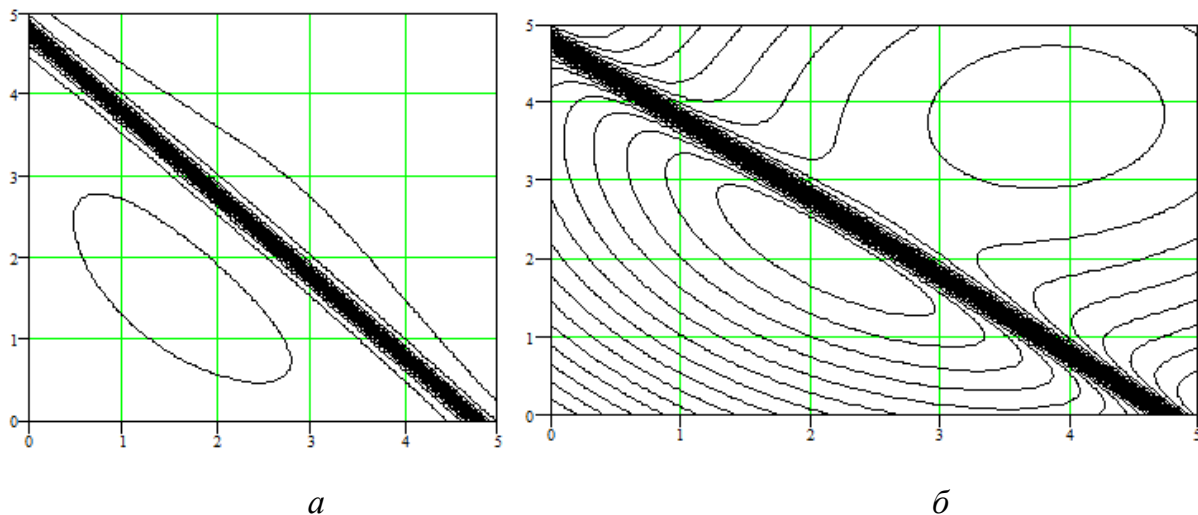


Рис. 27. Линии равного уровня обратной штрафной функции $P(x, 1) = (x_1 - 4)^2 - (x_2 - 4)^2 + 10/(5 - x_1 - x_2)$ при $R = 10$ (а) и 100 (б)

Алгоритм методов штрафных функций. Построение эффективных алгоритмов на основе метода штрафных функций не представляет особых трудностей. Простейший алгоритм выглядит следующим образом:

Шаг 1. Задать исходные значения:

- $k = 0$ – номер начальной итерации;
- ε_1 – параметр окончания одномерного поиска;
- ε_2 – параметр окончания процедуры безусловной минимизации;
- ε_3 – параметр окончания работы алгоритма;
- $x^{(0)}$ – начальное приближение для x^* ;
- $R^{(0)}$ – начальный вектор штрафных параметров.

Шаг 2. Построить $P(x, R) = f(x) + \Omega(R, g(x), h(x))$.

Шаг 3. Найти значение $x^{*(k+1)}$, доставляющее минимум функции $P(x^{(k+1)}, R^{(k)})$ при фиксированном $R^{(k)}$. В качестве начальной точки использовать $x^{(k)}$, а в качестве параметра окончания шага – константу ε_2 .

Шаг 4. Проверить, выполняется ли условие

$$|P(x^{(k+1)}, R^{(k)}) - P(x^{(k)}, R^{(k-1)})| \leq \varepsilon_3.$$

В случае, если оно выполняется, положить $x^{(k+1)} = x^{(k)}$ и закончить процесс решения; иначе перейти к следующему шагу.

Шаг 5. Положить $R^{(k+1)} = R^{(k)} + \Delta R^{(k)}$ в соответствии с некоторым правилом пересчета штрафного параметра, после чего перейти к шагу 2.

Метод множителей Лагранжа

Метод множителей Лагранжа предназначен для решения нелинейных задач минимизации с ограничениями-равенствами. С теоретической точки зрения метод Лагранжа по существу устанавливает необходимые условия существования условного экстремума. При этом используется весьма общий подход, который заключается в том, что исходная задача с ограничениями преобразуется в эквивалентную задачу безусловной оптимизации.

Пример 6. Найти экстремум функции $y = x_1^2 - 4x_2$ при условии $x_1 - x_2 = 1$.

Из уравнения связи выразим x_2 через x_1 и подставим полученное выражение в функцию y :

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - 1, \\ y &= x_1^2 - 4(x_1 - 1), \\ y &= x_1^2 - 4x_1 + 4. \end{aligned}$$

Эта функция имеет единственный экстремум (минимум) при $x_1 = 2$. Соответственно, $x_2 = x_1 - 1 = 1$. Таким образом, точкой условного экстремума (минимума) заданной функции является точка $\bar{x}_{\min}(2, 1)$; $y_{\min}(\bar{x}) = 0$.

Пример 7. Найти экстремумы функции $f(x) = 2x_1 + 4x_2$ при условии $x_1^2 + 4x_2^2 = 8$.

Заметим, что функции $f(\bar{x}) = 2x_1 + 4x_2$ и $q(\bar{x}) = x_1^2 + 4x_2^2 = 8$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные.

Составим функцию Лагранжа, которая для функции $f(x)$ имеет вид

$$L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(\bar{x}),$$

где $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ – вектор множителей Лагранжа,

$$L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 2x_1 + 4x_2 + \lambda(x_1^2 + 4x_2^2 - 8).$$

Найдем частные производные и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} \frac{dL}{dx_1} = 2 + 2\lambda x_1 = 0; \\ \frac{dL}{dx_2} = 4 + 8\lambda x_2 = 0; \\ \frac{dL}{d\lambda} = x_1^2 + 4x_2^2 = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{\lambda}; \\ x_2 = -\frac{1}{2\lambda}; \\ \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 8; \end{cases}$$

$$\frac{2}{\lambda^2} = 8; \quad \lambda^2 = \frac{1}{4}; \quad \lambda = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2}.$$

Получаем две стационарные точки:

1) при $\lambda_1 = 0,5$ $\bar{x}_1 = (-2, -1)$;

2) при $\lambda_1 = -0,5$ $\bar{x}_2 = (2, 1)$.

Принимая во внимание характер целевой функции, линиями уровня которой являются плоскости, и функции $q(\bar{x})$ (эллипс), заключаем, что в точке \bar{x}_1 функция $f(\bar{x}_1)$ принимает минимальное значение, а в точке \bar{x}_2 – максимальное: $f_{\min} = -8, f_{\max} = 8$.

Пример 8. В области решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

найти максимальное и минимальное значение функции $y = 2(x_1 - 1)^2 + 3(x_2 - 3)^2$ при условии $x_1 + x_2 = 6$.

Пересечением области допустимых решений и прямой $x_1 + x_2 = 6$ является отрезок MN : $M(0; 6)$, $N(6; 0)$. Поэтому экстремальные значения функция может принимать либо в стационарных точках, либо в точках M и N . Для нахождения стационарной точки применим метод Лагранжа. Составим функцию Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 2(x_1 - 1)^2 + 3(x_2 - 3)^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 6).$$

Найдем частные производные функции Лагранжа и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} \frac{dL}{dx_1} = 4(x_1 - 1) + \lambda = 0, \\ \frac{dL}{dx_2} = 6(x_2 - 3) + \lambda = 0, \\ \frac{dL}{dx_\lambda} = x_1 + x_2 - 6 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, получаем стационарную точку $K(2, 2; 3, 8)$. Сравним значения целевой функции в точках K, M, N :

$$y(K) = 4,76, y(N) = 77, y(M) = 29.$$

Следовательно, $y_{\min} = 4,76$, $x_{\min} = (2, 2; 3, 8)$, $y_{\max} = 77$, $x_{\max} = (6; 0)$.

Пример 9. Минимизировать $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ при ограничении $h_1(x) = 2x_1 + x_2 - 2 = 0$.

Соответствующая задача безусловной оптимизации записывается в следующем виде: минимизировать $L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 - \lambda(2x_1 + x_2 - 2)$.

Приравняв две компоненты градиента L к нулю, получим

$$\begin{cases} \frac{dL}{dx_1} = 2x_1 - 2\lambda = 0 \rightarrow x_1^0 = \lambda, \\ \frac{dL}{dx_2} = 2x_2 - \lambda = 0 \rightarrow x_2^0 = \lambda/2. \end{cases}$$

Для того чтобы проверить, соответствует ли стационарная точка X^0 минимуму, вычислим элементы матрицы Гессе функции $L(X; \lambda)$, рассматриваемой как функция X :

$$H = \begin{bmatrix} \frac{d^2 L}{dx_1^2} & \frac{d^2 L}{dx_1 dx_2} \\ \frac{d^2 L}{dx_1 dx_2} & \frac{d^2 L}{dx_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

которая оказывается положительно определенной. Это означает, что $L(X; \lambda)$ – выпуклая функция X . Следовательно, координаты $x_1^0 = \lambda$ и $x_2^0 = \lambda / 2$ определяют точку глобального минимума. Оптимальное значение λ находится путем подстановки значений x_1^0 и x_2^0 в уравнение $2x_1 + x_2 = 2$, откуда $2\lambda + \lambda/2 = 2$ или $\lambda^0 = 4/5$. Таким образом, условный минимум достигается при $x_1^0 = 4/5$ и $x_2^0 = 2/5$ и равен $\min f(x) = 4/5$.

При практическом использовании метода Лагранжа мы не должны опираться только на аналитическую схему решения. Рассмотрим следующий, достаточно простой пример, для решения которого используем подход, связанный с использованием численного метода решения системы нелинейных уравнений.

Пример 10. Минимизировать функцию $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ при ограничении $h_1(x) = x_1^3 - 6x_1^2 + 11x_1 - x_2 - 6 = 0$. Это ограничение при соответствующем преобразовании может быть представлено также в виде $h_1(x) = (x_1 - 1)(x_1 - 2)(x_1 - 3) = 0$, что позволяет достаточно просто построить его график. Вновь, прежде чем переходить к решению, представим геометрическую иллюстрацию данной задачи (рис. 28), из которой следует, что точка условного минимума приближенно оценивается координатами $x^* = (0,9; -0,3)$.

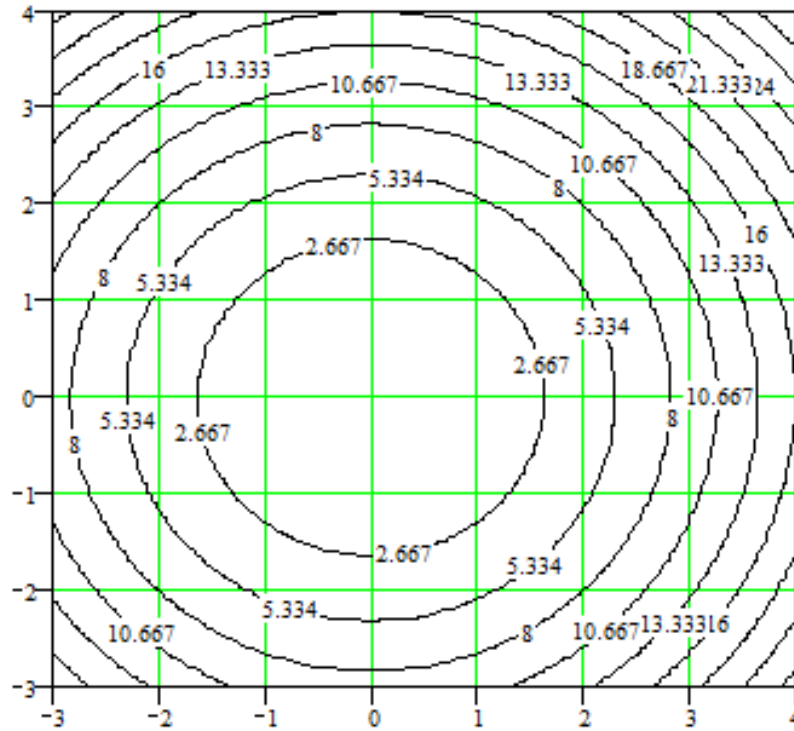


Рис. 28. Геометрическая иллюстрация примера минимизации с ограничением-равенством

Составим функцию Лагранжа $L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 - \lambda(x_1^3 - 6x_1^2 + 11x_1 - x_2 - 6)$ и попытаемся использовать аналитический подход к минимизации $L(*)$:

$$\begin{cases} \frac{dL}{dx_1} = 2x_1 - 3\lambda x_1^2 + 12\lambda x_1 - 11\lambda = 0, \\ \frac{dL}{dx_2} = 2x_2 + \lambda = 0. \end{cases}$$

Из последнего уравнения системы находим $x_2^* = -\lambda/2$ и, подставляя это выражение в первое уравнение системы, находим, что

$$x_1^* = \frac{2(1+6\lambda) \pm \sqrt{4(1+6\lambda)^2 - 132\lambda}}{6\lambda}.$$

Теперь, подставляя $x_2^* = -\lambda/2$ и $x_1^* = \frac{2(1+6\lambda) \pm \sqrt{4(1+6\lambda)^2 - 132\lambda}}{6\lambda}$

в уравнение ограничения задачи $h_1(x) = 0$, нам осталось найти значение λ^* . Однако при этом мы уже не можем быть уверены, что найдем аналитическое решение для λ^* из-за сложности полученного уравнения. Таким образом, мы столкнулись с трудностями аналитического

решения уравнений уже даже для рассматриваемой достаточно простой и ясной задачи. В связи с вышеизложенным, наиболее конструктивным путем, очевидно, является следующий:

– выписать выражение для вектор-градиента функции Лагранжа и приравнять его нулю:

$$\nabla L(x, \lambda) = \begin{cases} \partial L / \partial x_1 = 0, \\ \partial L / \partial x_2 = 0, \\ \partial L / \partial \lambda = 0, \end{cases}$$

– применить к этой системе уравнений какой-либо численный алгоритм решения, например метод Ньютона.

Чтобы закончить решение предыдущего примера, используем метод решения системы нелинейных уравнений Ньютона. Пусть исходная система состоит из M уравнений с N неизвестными:

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0,$$

...

$$f_M(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0.$$

Алгоритм метода Ньютона решения системы состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Задать координаты начальной точки поиска x^0 .

Шаг 2. Найти очередную k -ю точку поиска по формуле Ньютона

$$x^{k+1} = x^k + d^k,$$

где вектор направления поиска d^k находится из уравнения

$$J(x^k) \cdot d^k = -L(x, \lambda),$$

в котором через $J(x^k)$ обозначен якобиан исходной системы, представляющий собой матрицу первых производных исходной системы линейных уравнений:

$$J(x^k) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1} & \frac{\partial f_M}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_M}{\partial x_N} \end{vmatrix}.$$

Шаг 3. Проверить правило останова. Если оно удовлетворяется, то закончить вычисления, иначе перейти к шагу 1.

Пример 11. Решим задачу из предыдущего примера методом Ньютона, для чего нужно решить следующую систему уравнений:

$$f_1: 2x_1 - 3\lambda x_1^2 + 12\lambda x_1 - 11\lambda = 0;$$

$$f_2: 2x_2 + \lambda = 0;$$

$$f_3: x_1^3 - 6x_1^2 + 11x_1 - x_2 - 6 = 0.$$

Результаты решения такой системы методом Ньютона из начальной точки $x^0 = (1, 1)$ приведены в таблице:

k	x_1	x_2	λ	f_1	f_2	f_3
0	1,0	1,0	1,0	0	3,0	-1
1	0,875	-0,250	0,5	0,5	0	-0,05
2	0,871	-0,309	0,618	-0,003	0	0

Таким образом, мы решили задачу минимизации функции Лагранжа, получив следующий ответ: точка минимума равна $x^* = (0,871, -0,309)$, оптимальное значение множителя Лагранжа равно $\lambda^* = 0,618$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Приведенные задания для самостоятельной работы обобщают темы 1–3. Вариант задания самостоятельной работы соответствует последней цифре в номере зачетной книжки студента. Например: 1 вариант – задачи 1.1, 2.1, 3.1, 4.1, 5.01, 5.11, 5.21, 5.31, 5.41 и т. д. В случае если последняя цифра в номере зачетной книжки «0», то требуемый вариант «9» или «10». При решении задач целесообразно использовать математические операции интегрирования (прил. 1, 2), дифференцирования (прил. 2), действия с матрицами (прил. 3).

Выполненная самостоятельная работа сдается на проверку в сроки, указанные преподавателем.

Унимодальные функции

1. Убедиться в унимодальности функций $f(x)$ на указанных отрезках $[a; b]$:

1.1. $f(x) = x^2 - 3x + \ln x$, $[1; 2]$;

1.2. $f(x) = \ln x(1 + x^2) - \sin x$, $[0; \pi/4]$;

$$1.3. f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^2 - 8x + 12, [0; 2];$$

$$1.4. f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \sin x, [0; 1];$$

$$1.5. f(x) = 10x \ln x - \frac{x^2}{2}, [0,5; 1];$$

1.6. На какие 3 части следует разбить отрезок $[-1; 2]$, чтобы на каждой из них функция $f(x) = //x(x - 1)/ - 1/$ была унимодальной?

1.7. Найти максимальное значение b , при котором функция $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ унимодальна на отрезке $[-5; 6]$.

1.8. Будет ли функция $f(x) = ax^3 - 3x^2 - 10$ унимодальна на отрезке $[1; 2]$ при $a > 3$?

1.9. Методом перебора определить точку минимума функции $f(x) = 2x^2 - 12x$ на отрезке $[0; 10]$ с $N = 10$.

Методы одномерной безусловной оптимизации

2. Пусть $f(x)$ – унимодальная дифференцируемая функция на отрезке $[a; b]$, причем $|f'(x)| \leq M$ при x , принадлежащем $[a; b]$. Оценить погрешность нахождения минимума f^* методом перебора при разбиении отрезка на n частей. Методом перебора найти точку минимума x^* функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ с точностью ε и минимум f^* :

$$2.1. f(x) = x + \frac{2}{x}, [1; 2], \varepsilon = 0,05;$$

$$2.2. f(x) = x^2 - 2x + e^{-x}, [1; 1,5], \varepsilon = 0,05;$$

$$2.3. f(x) = \operatorname{tg} x - 2 \sin x, [0; \pi/4], \varepsilon = 0,03;$$

$$2.4. f(x) = \sqrt{1 + x^2} + e^{-2x}, [0; 1], \varepsilon = 0,1;$$

$$2.5. f(x) = x^4 + 4x^2 - 32x + 1, [1,5; 2], \varepsilon = 0,05;$$

$$2.6. f(x) = \frac{1}{7}x^7 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x, [1; 1,5], \varepsilon = 0,05;$$

$$2.7. f(x) = x^3 - 3 \sin x, [0,5; 1], \varepsilon = 0,05;$$

$$2.8. f(x) = 5x^2 - 8x^{5/4} - 20x, [3; 3,5], \varepsilon = 0,02;$$

$$2.9. f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x + x \ln x, [1,5; 2], \varepsilon = 0,02.$$

3. В задачах методом деления отрезка пополам найти точку минимума x^* функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ с точностью ε и минимум f^* :

- 3.1. $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$, $[1; 2]$, $\varepsilon = 0,02$;
- 3.2. $f(x) = x \sin x + 2 \cos x$, $[-5; -4]$, $\varepsilon = 0,02$;
- 3.3. $f(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x + 90$, $[1,5; 2]$, $\varepsilon = 0,05$;
- 3.4. $f(x) = x^6 + 3x^2 + 6x - 1$, $[-1; 0]$, $\varepsilon = 0,1$;
- 3.5. $f(x) = 10x \ln x - \frac{x^2}{2}$, $[0,5; 1]$, $\varepsilon = 0,05$;
- 3.6. $f(x) = x^2 + 2 \left(x \lg \frac{x}{e} - 2 \right)$, $[1,5; 2]$, $\varepsilon = 0,01$;
- 3.7. $f(x) = 3x^4 - 10x^3 + 21x^2 + 12x$, $[0; 0,5]$, $\varepsilon = 0,01$;
- 3.8. $f(x) = \frac{2x}{\ln 2} - 2x^2$, $[-3,5; 4,5]$, $\varepsilon = 0,02$;
- 3.9. $f(x) = e^x - \frac{1}{3}x^3 + 2x$, $[-1,5; -1]$, $\varepsilon = 0,01$.

4. В задачах методом золотого сечения найти точку минимума x^* функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ с точностью ε и минимум f^* :

- 4.1. $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$, $[0; 1]$, $\varepsilon = 0,1$;
- 4.2. $f(x) = x^4 + 2x^2 + 4x + 1$, $[-1; 0]$, $\varepsilon = 0,1$;
- 4.3. $f(x) = x^5 - 5x^3 + 10x^2 - 5x$, $[-3; -2]$, $\varepsilon = 0,1$;
- 4.4. $f(x) = x^2 + 3x(\ln x - 1)$, $[0,5; 1]$, $\varepsilon = 0,05$;
- 4.5. $f(x) = x^2 - 2x - 2 \cos x$, $[0,5; 1]$, $\varepsilon = 0,05$;
- 4.6. $f(x) = (x+1)^4 - 2x^2$, $[-3; -2]$, $\varepsilon = 0,05$;
- 4.7. $f(x) = 3(5-x)^{4/3} + 2x^2$, $[1,5; 2]$, $\varepsilon = 0,025$;
- 4.8. $f(x) = -x^3 + 3(1+x)[\ln(1+x) - 1]$, $[-0,5; 0,5]$, $\varepsilon = 0,05$;
- 4.9. $f(x) = 2 + x^2 + x^{2/3} - \ln(1 + x^{2/3}) - 2x \cdot \operatorname{arctg} x^{1/3}$, $[0,5; 1]$, $\varepsilon = 0,025$.

5. Используя метод Фибоначчи, найти положение точки экстремума и экстремальное значение функции $f(x)$ на интервале (a, b) . Длина конечного интервала неопределенности не должна превышать 0,01:

Вариант	Вид функции $f(x)$	a	b	Экстремум
5.1	$\frac{x^3}{3} + 2(e^{-x} - x^2 + 2x)$	1	2	max

5.2	$x(\ln x - 1) - \frac{1}{\pi} \sin \pi x$	0,5	1,5	min
5.3	$\frac{1}{2}e^x + \frac{x^3}{3} - 2x - 4$	0	1	min
5.4	$x^4 - 14x^3 + 60x^2 - 70x$	0	1	min
5.5	$-e^{-x} + 4\cos \frac{x}{2} + 1$	0	1	max
5.6	$\frac{x^3}{3} - x^2 + x - 2\sin x$	1	2	min
5.7	$\frac{1}{8}(\sin 2x - 2x) - e^{-x}$	0,5	1,5	max
5.8	$x^4 + 4x^2 - 32x + 5$	1	2	min
5.9	$\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - \frac{4}{\pi}\sin \frac{\pi x}{2}$	0	1	min
5.10	$2x^2 + 3e^{-x} + 1$	0	1	min
5.11	$3x^4 - 16x^3 + 6x^2 + 72x - 1$	-1,4	-0,4	min
5.12	$\frac{3}{\pi}\sin \pi x + \frac{x^2}{2} - x$	0	1	max

Продолжение таблицы

Вариант	Вид функции $f(x)$	a	b	Экстремум
5.13	$\frac{e^{1,2x}}{1,2} + \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{2}x$	0	1	min
5.14	$1 + 2x^2 - \frac{x^2}{4}$	-2,8	-1,8	max
5.15	$\ln x - \frac{3}{\pi}\sin \pi x$	1	2	max
5.16	$\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - e^x$	0	1	max
5.17	$0,4x^3 - \frac{1}{\pi}\sin \pi x$	0	1	min
5.18	$x^4 + 2x^2 - 128x + 87$	2,5	3,5	min
5.19	$x \ln 2x - x + \frac{1}{\pi}\cos \pi x$	0,5	1,5	min

5.20	$x + \cos 2x - 3$	0	1	max
5.21	$4x - \operatorname{tg} x + 1$	0,2	1,2	max
5.22	$e^{-x} + \frac{1}{3} 4\sqrt{x^3} - 1$	0	1	min
5.23	$\frac{1}{3}(x^3 + 2) + 0,2 \cos 5x$	0,2	1,2	min
5.24	$2 \ln x - \sin \pi x$	1	2	max
5.25	$e^x - 2x + \frac{1}{3}(x^3 + 1)$	0	1	min
5.26	$3x^4 - 16x^3 - 24x^2 - 60x + 25$	4,8	5,8	min
5.27	$\frac{x^4}{4} - x^3 + 10$	2,3	3,3	min
5.28	$\frac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$	0,2	1,2	max
5.29	$\sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 - 36x}$	1,7	2,7	min
5.30	$\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 2e^x$	0	1	max
5.31	$2x - x^2 - x \ln x$	0,1	1,1	max
5.32	$x - \ln x + 5$	0,3	1,3	min

Окончание таблицы

Вариант	Вид функции $f(x)$	a	b	Экстремум
5.33	$\frac{x^4}{x^3 - 1}$	1,1	2,1	min
5.34	$\frac{4}{x} + \frac{1}{x^4}$	-1,4	-0,4	min
5.35	$e^{-x} + e^{2x} + 3$	-1	0	min
5.36	$1,2 \ln x - \frac{3}{\pi} \sin \pi x$	6	7	min
5.37	$\frac{2x^3}{3} + \frac{\cos 4x}{4} + 3$	0	1	min
5.38	$x^2 \cdot e^{-x} - 1$	1,4	2,4	max

5.39	$\frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$	4,6	5,6	min
5.40	$e^{-x} + 1, 2\sqrt{x^3}$	0	1	min
5.41	$\ln x (x - 2) - x + 1$	2	3	min
5.42	$x(\ln 3x - 1) + \frac{1}{3} \cos 3x$	0,5	1,5	min
5.43	$\frac{1}{3}(1, 4x^3 - \sin 3x) - 2$	0	1	min
5.44	$3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 5$	-0,4	0,6	min
5.45	$\frac{4x}{x^2 + 4}$	1,6	2,6	max
5.46	$\sin 2x - x + 3$	0	1	max
5.47	$3x^5 - 5x^3$	0,5	1,5	min
5.48	$\frac{12\sqrt[3]{(x+2)^2}}{x^2 + 8}$	-2,4	-1,4	min
5.49	$x + \operatorname{arctg} 2x$	0	1	min
5.50	$\frac{4}{3}\sqrt{x^3} - \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2}$	0	1	min

6. Реализовать методы дихотомии, золотого сечения и Фибоначчи, исследовать их сходимость и провести сравнение по числу вычислений функции для достижения заданной точности. Построить график зависимости количества вычислений минимизируемой функции от логарифма задаваемой точности ε :

- 6.1. $f(x) = x^2 + e^{-0,35x} \rightarrow \min$;
- 6.2. $f(x) = x^2 + 3e^{-0,45x} \rightarrow \min$;
- 6.3. $f(x) = x^4 - 1,5 \operatorname{arctg} x \rightarrow \min$;
- 6.4. $f(x) = x^2 - x + e^{-x} \rightarrow \min$;
- 6.5. $f(x) = -4x + e^{|x-0,2|} \rightarrow \min$;
- 6.6. $f(x) = x - \ln x \rightarrow \min$;

- 6.7. $f(x) = 10x \ln x - \frac{x^2}{2} \rightarrow \min;$
- 6.8. $f(x) = e^x + \frac{1}{x} \rightarrow \min;$
- 6.9. $f(x) = x^4 - 1,1 \operatorname{arctg} 1,5x \rightarrow \min;$
- 6.10. $f(x) = -2,8x + e^{|x-0,6|} \rightarrow \min;$
- 6.11. $f(x) = \frac{x^3}{3} - 5x + x \ln x \rightarrow \min;$
- 6.12. $f(x) = e^x - \frac{x^3}{3} + 2x \rightarrow \min;$
- 6.13. $f(x) = e^{-x} + x^2 \rightarrow \min;$
- 6.14. $f(x) = \sin(x^2) + \sin^2 x \rightarrow \min;$
- 6.15. $f(x) = x \sin x + 2 \cos x \rightarrow \min;$
- 6.16. $f(x) = -2,2x + e^{|x-0,8|} \rightarrow \min;$
- 6.17. $f(x) = \sqrt{1+x^2} + e^{-2x} \rightarrow \min;$
- 6.18. $f(x) = (x-4)^2 + \ln x \rightarrow \min;$
- 6.19. $f(x) = x^2 + 2e^{-0,65x} \rightarrow \min;$
- 6.20. $f(x) = x^4 - 0,9 \operatorname{arctg} 2,5x \rightarrow \min;$
- 6.21. $f(x) = x^4 - 1,3 \operatorname{arctg} 1,5x \rightarrow \min;$
- 6.22. $f(x) = 2x^2 + x - \cos^2 x \rightarrow \min;$
- 6.23. $f(x) = x^2 + 3x(\ln x - 1) \rightarrow \min;$
- 6.24. $f(x) = x^4 + e^{-x} \rightarrow \min;$
- 6.25. $f(x) = x^2 - 2x - 2 \cos x \rightarrow \min;$
- 6.26. $f(x) = x^2 + 5e^{-0,05x} \rightarrow \min;$
- 6.27. $f(x) = -3,4x + e^{|x-0,4|} \rightarrow \min;$
- 6.28. $f(x) = x^2 - 2x - e^{-x} \rightarrow \min;$
- 6.29. $f(x) = \frac{\cos x}{x^2} \rightarrow \min;$
- 6.30. $f(x) = e^x + e^{-2x} + 2x \rightarrow \min.$

7. Методом ломаных найти минимум f^* функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ с точностью ε :

$$7.1. f(x) = \frac{\cos x}{x^2}, [7; 11], \varepsilon = 0,01;$$

$$7.2. f(x) = -\sqrt{20x - x^2} + 0,01 \sin x, [9; 11], \varepsilon = 0,05;$$

$$7.3. f(x) = (0,1x - 5)^8 + \cos(0,02x), [49; 51], \varepsilon = 0,02;$$

$$7.4. f(x) = \ln x + 0,1 \sin(0,1x), [10; 12], \varepsilon = 0,01;$$

$$7.5. f(x) = (x - 0,9)^2 + (x - 1,1)^4, [0,8; 1,2], \varepsilon = 0,05.$$

В задачах 7.6–7.13, убедившись в выпуклости функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, найти ее точку минимума x^* и минимальное значение f^* методом касательных, используя в качестве условия достижения требуемой точности неравенство $|f'(C_n)| \leq 0,01$:

$$7.6. f(x) = x - \ln x, [0,1; 2];$$

$$7.7. f(x) = x^2 - \sin x, [0; \pi/2];$$

$$7.8. f(x) = x^4 + x^2 + x + 1, [-1; 2];$$

$$7.9. f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x, [0; 3];$$

$$7.10. f(x) = \sqrt{1 + x^2} + e^{-2x}, [0; 1];$$

$$7.11. f(x) = e^x + \frac{1}{x}, [0,1; 2];$$

$$7.12. f(x) = (x - 4)^2 + \ln x, [3; 5];$$

$$7.13. f(x) = x^4 + e^{-x}, [0; 1].$$

В задачах 7.14–7.19 минимизировать функцию $f(x)$ на всей числовой оси методом Ньютона. Критерием достижения требуемой точности считать выполнение неравенства $|f'(x_n)| \leq 10^{-4}$:

$$7.14. f(x) = x^2 + e^{-x};$$

$$7.15. f(x) = 2x + e^{-x};$$

$$7.16. f(x) = x^2 + x + \sin x;$$

$$7.17. f(x) = x^2 - x + e^{-x};$$

$$7.18. f(x) = e^x + e^{-2x} + 2x;$$

$$7.19. f(x) = 2x^2 + x + \cos^2 x.$$

7.20. Найти точку минимума x^* функции $f(x)$ одной из задач 7.6–7.13 методом Ньютона, используя в качестве начального приближения решение, найденное методом касательных. Вычисления закончить при $|f'(x_n)| \leq 10^{-6}$.

Методы многомерной безусловной оптимизации

8. Решить задачи методами многомерной безусловной оптимизации:

8.1. Выполнить несколько итераций решения задачи $f(x) = (x_1 + 1)^2 + x_2^2 \rightarrow \min$ с помощью правильного симплекса, положить $x^0 = (5, 3)$ и $a = 1$. Привести графическую иллюстрацию. При этом линии уровня целевой функции – окружности с центром в точке $(-1, 0)$.

8.2. Как изменится процедура поиска точки минимума в задании 8.1 при использовании деформируемого симплекса? Дать графическую иллюстрацию (положить $\alpha = 0,5$, $\beta = 1$ и $\gamma = 2$).

8.3. Выполнить четыре итерации решения задачи $f(x) = (x_1 + 1)^2 + x_2^2 \rightarrow \min$ методом Хука–Дживса. Положить $\varepsilon = 1/2$, $\Delta = (2, 1)$, $x^0 = (3, 4)$. Привести графическую иллюстрацию.

8.4. Из начальной точки $x = (4, 3)$ решить задачу $f(x) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_1x_2 \rightarrow \min$ методом Гаусса–Зейделя.

8.5. Найти минимум функции $f(x) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + x_1 + 2x_2$, выполняя покоординатный спуск последовательно по направлениям p^1 и p^2 .

8.6. Для функции $f(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_1x_2 + 2x_1 - 4x_2$ выполнить три итерации поиска минимума по методу наискорейшего спуска при $x^0 = (1, 1)$.

8.7. Выполнить три итерации в соответствии с методом наискорейшего спуска, методом сопряженных градиентов, методом Ньютона для минимизации функции $f(x) = (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - 2x_3)^4 + 10(x_1 - x_4)^4$ при $x^0 = (3, -1, 0, 1)$.

8.8. Минимизировать каким-либо методом следующие функции:

а) $f(x) = 10x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 1$;

б) $f(x) = x_1^4 + x_2^4 - 2x_1^2x_2^2 - 4x_1 + 3$;

в) $f(x) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$.

В задачах 8.9–8.26. аналитически найти стационарные точки заданной функции, области выпуклости/вогнутости функции. Найти точку глобального минимума. Решить задачу минимизации численным методом из нескольких начальных точек. Сделать вывод об эффективности выбранного метода:

8.9. $f_1(\bar{x}) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$, метод Хука–Дживса;

- 8.10. $f_1(\bar{x}) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$, метод наискорейшего спуска;
- 8.11. $f_2(\bar{x}) = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$, метод Хука–Дживса;
- 8.12. $f_3(\bar{x}) = (x_2 - x_1^2)^2 + 100(1 - x_1)^2$, метод Нелдера–Мида;
- 8.13. $f(\bar{x}) = (x_2 - x_1^2)^2 + 100(1 - x_1)^2$, метод Ньютона;
- 8.14. $f(\bar{x}) = -x_1^2 \exp[1 - x_1^2 - (x_1 - x_2)^2]$, метод Нелдера–Мида;
- 8.15. $f(\bar{x}) = -x_1^2 \exp[1 - x_1^2 - (x_1 - x_2)^2]$, метод наискорейшего спуска;
- 8.16. $f(\bar{x}) = -x_1 x_2 \exp[1 - x_1^2 - (x_1 - x_2)^2]$, метод Ньютона;
- 8.17. $f(\bar{x}) = -x_1 x_2 \exp[1 - x_1^2 - (x_1 - x_2)^2]$, метод Хука–Дживса;
- 8.18. $f(\bar{x}) = -x_1^2 x_2 \exp[1 - x_1^2 - (x_1 - x_2)^2]$, метод Ньютона;
- 8.19. $f(\bar{x}) = -x_2^2 \exp[1 - x_1^2 - (x_1 - x_2)^2]$, метод наискорейшего спуска;
- 8.20. $f(\bar{x}) = -x_2^2 \exp[1 - x_1^2 - (x_1 - x_2)^2]$, метод Нелдера–Мида;
- 8.21. $f_3(\bar{x}) = (x_2 - x_1^2)^2 + 100(1 - x_1)^2$, метод Ньютона;
- 8.22. $f_4(\bar{x}) = 100(x_2 - x_1^3)^2 + (1 - x_1)^2$, метод Нелдера–Мида;
- 8.23. $f_5(\bar{x}) = (1,5 - x_1(1 - x_2))^2 + (2,25 - x_1(1 - x_2^2))^2 + (2,625 - x_1 \times (1 - x_2^3))^2$, метод наискорейшего спуска;
- 8.24. $f_5(\bar{x}) = (1,5 - x_1(1 - x_2))^2 + (2,25 - x_1(1 - x_2^2))^2 + (2,625 - x_1 \times (1 - x_2^3))^2$, метод Ньютона;
- 8.25. $f(\bar{x}) = -x_1^2 x_2^2 \exp[1 - x_1^2 - (x_1 - x_2)^2]$, метод Нелдера–Мида;
- 8.26. $f(\bar{x}) = (x_1 - x_2) \exp[1 - x_1^2 - (x_1 - x_2)^2]$, метод Ньютона.
- Решить дополнительные задачи 8.27–8.56:
- 8.27. $f(x) = 7x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 + x_1 - 10x_2 \rightarrow \min$;
- 8.28. $f(x) = 3x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_1 + x_2 \rightarrow \min$;
- 8.29. $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + e^{x_1^2 + x_2^2} - x_1 + x_2 \rightarrow \min$;
- 8.30. $f(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1} + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \rightarrow \min$;
- 8.31. $f(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 13x_1^2 + 5x_2 \rightarrow \min$;
- 8.32. $f(x) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 - x_1 - x_3 \rightarrow \min$;
- 8.33. $f(x) = x_1^4 + 2x_2^4 + x_1^2x_2^2 + 2x_1 + x_2 \rightarrow \min$;

- 8.34. $f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + \cos(x_1 + x_2) \rightarrow \min;$
- 8.35. $f(x) = \sqrt{1 + 2x_1^2 + x_2^2} + e^{x_1^2 + 2x_2^2} - x_1 - x_2 \rightarrow \min;$
- 8.36. $f(x) = x_1 + 5x_2 + e^{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \min;$
- 8.37. $f(x) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 17x_1 \rightarrow \min;$
- 8.38. $f(x) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + x_1 - 3x_2 \rightarrow \min;$
- 8.39. $f(x) = 10x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2 + 10x_2 \rightarrow \min;$
- 8.40. $f(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 6x_1^2 + x_1 - x_2 \rightarrow \min;$
- 8.41. $f(x) = x_1^4 + x_2^4 + \sqrt{2 + x_1^2 + x_2^2} - 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min;$
- 8.42. $f(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 2\sin\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right) + x_2 \rightarrow \min;$
- 8.43. $f(x) = \ln(1 + 3x_1^2 + 5x_2^2 + \cos(x_1 - x_2)) \rightarrow \min;$
- 8.44. $f(x) = x_1^2 + e^{x_1^2 + x_2^2} + 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \min;$
- 8.45. $f(x) = x_1 + 2x_2 + 4\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \min;$
- 8.46. $f(x) = 2x_1 - 5x_2 + e^{x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2} \rightarrow \min;$
- 8.47. $f(x) = 2\sqrt{3 + x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2} - x_1 - x_3 \rightarrow \min;$
- 8.48. $f(x) = 4x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 2x_1x_2 + x_1x_3 + x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \min;$
- 8.49. $f(x) = 3x_1^2 + 4x_2^3 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_1 - 3x_3 \rightarrow \min;$
- 8.50. $f(x) = x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_3^2 - x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3 + 5x_1 - 3x_2 + x_3 \rightarrow \min;$
- 8.51. $f(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_3^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + 6x_1 + 7x_3 \rightarrow \min;$
- 8.52. $f(x) = 7x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_3^2 - 3x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3 + x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \min;$
- 8.53. $f(x) = 5x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 5x_1 + x_3 \rightarrow \min;$
- 8.54. $f(x) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 + 7x_1 + x_3 \rightarrow \min;$
- 8.55. $f(x) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2x_3 - x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \min;$
- 8.56. $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3 + e^{x_2^2 + x_3^2} - x_2 + x_3 \rightarrow \min.$

Методы условной многомерной оптимизации

9. Решить задачи методом неопределенных множителей Лагранжа:

- 9.1. $x_1^2 + x_2^2 - x_1 + x_2 \rightarrow \min$,
 $x_1 + x_2 = 5$;
- 9.2. $2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_1 - 2x_2 \rightarrow \min$,
 $x_1 + 2x_2 = 4$;
- 9.3. $3x_1^2 + 5x_2^2 \rightarrow \min$,
 $3x_1 - x_2 = 8$;
- 9.4. $7x_1^2 + 5x_2^2 \rightarrow \min$,
 $3x_1 - 4x_2 = 9$;
- 9.5. $2x_1^2 + 3x_2^2 \rightarrow \min$,
 $-x_1 + 2x_2 = 7$;
- 9.6. $x_1^2 + x_2^2 - 5x_1 \rightarrow \min$,
 $2x_1 + 7x_2 = 6$;
- 9.7. $2x_1^2 + 3x_2^2 - 5x_1 + x_2 \rightarrow \min$,
 $-3x_1 + 7x_2 = 11$;
- 9.8. $7x_1^2 + 3x_2^2 + x_1 - 3x_2 \rightarrow \min$,
 $x_1 - 7x_2 = -4$;
- 9.9. $2x_1^2 + 2x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 \rightarrow \min$,
 $-5x_1 + 8x_2 = -12$;
- 9.10. $7x_1^2 + 9x_2^2 + 4x_1 - 8x_2 \rightarrow \min$,
 $2x_1 - 11x_2 = 5$.

10. Решить задачи методом штрафных функций:

- 10.1. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 20x_1 - 30x_2 \rightarrow \min$,
 $2x_1 + 3x_2 - 13 \leq 0$,
 $2x_1 + x_2 - 10 \leq 0$;
- 10.2. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 15x_2 \rightarrow \min$,
 $5x_1 + 13x_2 - 51 \leq 0$,
 $15x_1 + 7x_2 - 107 \leq 0$;

$$10.3. \quad f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 5x_1 - 10x_2 \rightarrow \min, \\ 9x_1 + 8x_2 - 72 \leq 0, \\ x_1 + 2x_2 - 10 \leq 0;$$

$$10.4. \quad f(x) = x_1^2 + 2x_1 - x_2 \rightarrow \min, \\ 2x_1 + 3x_2 - 6 \leq 0, \\ 2x_1 + x_2 - 4 \leq 0;$$

$$10.5. \quad f(x) = x_2^2 - 2x_2 + 2x_1 + x_3 \rightarrow \min, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 6 \leq 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 2 \leq 0;$$

$$10.6. \quad f(x) = -x_1 + x_2^2 - 2x_2 \rightarrow \min, \\ 3x_1^2 + 2x_2^2 - 6 \leq 0;$$

$$10.7. \quad f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 3x_2 \rightarrow \min, \\ x_1^2 + x_2^2 - 9 \leq 0;$$

$$10.8. \quad f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_2 \rightarrow \min, \\ -2x_1 + x_2^2 \leq 0, \\ x_1 - 2x_2 \leq 0;$$

$$10.9. \quad f(x) = -x_1 - 4x_2 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_2^2 - 1 \leq 0, \\ -x_1 + x_2 \leq 0;$$

11. Решить задачи методами условной оптимизации (метод выбрать самостоятельно):

$$11.1. \quad 6x_1 + 4x_2 \rightarrow \min, \\ 2x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ -x_1 + 2x_2 \geq 1;$$

$$11.2. \quad 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min, \\ x_1 + 5x_2 \geq 16, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 12, \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 16;$$

$$11.3. \quad -6x_1 - 4x_2 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2,$$

$$11.4. \quad 6x_1 + 4x_2 \rightarrow \min, \\ 2x_1 + x_2 \geq 3, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 1,$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 1;$$

$$-x_1 - x_2 \geq 6;$$

$$11.5. 7x_1 + x_2 \rightarrow \min,$$

$$x_1 + x_2 \geq 3,$$

$$5x_1 + x_2 \geq 5,$$

$$x_1 + 5x_2 \geq 5;$$

$$11.6. 7x_1 + 10x_2 \rightarrow \min,$$

$$2x_1 + 28x_2 \geq 17,$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 3,$$

$$x_1 + 17x_2 \geq 19;$$

$$11.7. x_1 + x_2 + 2x_3 \rightarrow \min,$$

$$2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = -3,$$

$$x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_5 = -1;$$

$$11.8. -15x_1 - 33x_2 \rightarrow \max,$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 6,$$

$$6x_1 + x_2 \geq 6;$$

$$11.9. x_1 + 2x_2 \rightarrow \min,$$

$$2x_1 + x_2 \leq 18,$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 14,$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 10;$$

$$11.10. 78x_1 + 52x_2 \rightarrow \min,$$

$$6x_1 + 2x_2 \geq 9,$$

$$-10x_1 + 14x_2 \geq 13,$$

$$11x_1 - x_2 \geq 6;$$

$$11.11. 5x_1 + 4x_2 \rightarrow \min,$$

$$x_1 + x_2 \leq 6,$$

$$2x_1 + x_2 \geq 9,$$

$$3x_1 + x_2 \geq 11.$$

Ответы к задачам 11:

$$1) x^* = (1; 1), \quad f(x^*) = 10;$$

$$2) x^* = (2; 3), \quad f(x^*) = 13;$$

$$3) x^* = (1,5; 0), \quad f(x^*) = -9;$$

$$4) \text{ решения нет } (D = \emptyset);$$

$$5) x^* = (0; 5), \quad f(x^*) = 5;$$

$$6) x^* = (0; 1,5), \quad f(x^*) = 15;$$

$$7) x^* = (0; 0; 1; 0; 3), \quad f(x^*) = 2;$$

$$8) x^* = (2; 0), \quad f(x^*) = -30;$$

$$9) x^* = (7,33; 3,33), \quad f(x^*) = 14;$$

$$10) x^* = (0,96; 1,62), \quad f(x^*) = 159,12;$$

$$11) x^* = (4,5; 0), \quad f(x^*) = 22,5.$$

12. Решить задачи методами условной оптимизации (метод выбрать самостоятельно):

$$12.1. x_1 - x_2 + 3x_4 + x_5 \rightarrow \min,$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 15,$$

$$2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 4,$$

$$2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_5 = 8;$$

- 12.2. $3x_1 + x_2 + x_4 + x_5 \rightarrow \min$,
 $2x_1 - x_2 + x_4 - x_5 = 9$,
 $4x_1 - x_2 - x_3 - x_5 = 4$,
 $x_1 - x_2 - x_3 - x_5 = 6$;
- 12.3. $x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 \rightarrow \max$,
 $-x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 2$,
 $-x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 3$,
 $2x_1 + 3x_2 + x_4 - x_5 = 6$;
- 12.4. $x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min$,
 $-x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$,
 $2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 6$,
 $10x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 25$;
- 12.5. $x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \rightarrow \min$,
 $x_1 + x_4 + 6x_5 = 9$,
 $3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_5 = 2$,
 $x_1 + 2x_2 + 2x_5 = 6$;
- 12.6. $x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \rightarrow \max$,
 $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 7$,
 $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 12$,
 $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 22$;
- 12.7. $x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \rightarrow \min$,
 $x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2$,
 $x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 6$,
 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$;
- 12.8. $x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 \rightarrow \min$,
 $4x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 + 8x_6 = 15$,
 $4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_5 + 4x_6 = 8$,
 $5x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 + 10x_6 = 21$;
- 12.9. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \rightarrow \max$,
 $x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 = 1$,
 $x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 1$,
 $-x_1 + x_2 - 6x_3 + x_4 + x_5 = 1$;
- 12.10. $x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 \rightarrow \min$,
 $x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 \geq 8$,
 $-x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 10$,
 $2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 \leq 4$.

Ответы к задачам 12:

1) $x^* = (5,11; 3,67; 0; 0; 2,56)$, $f(x^*) = 4$;

2) решения нет ($D = \emptyset$);

3) решения нет (целевая функция не ограничена сверху на допустимом множестве);

4) $x^* = (1; 0; 4; 0; 7)$, $f(x^*) = 5$;

5) $x^* = (0; 1,5; 0,63; 0; 1,5)$, $f(x^*) = -2,38$;

6) $x^* = (1; 0; 4; 1; 0)$, $f(x^*) = 7$;

7) $x^* = (4,13; 0; 1,25; 2,62)$, $f(x^*) = 1,25$;

8) $x^* = (0; 1; 0,83; 0; 0; 2,17)$, $f(x^*) = -2,33$;

9) $x^* = (0; 1; 0; 0; 0)$, $f(x^*) = 2$;

10) решения нет ($D = \emptyset$).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Азарнова, Т. В. Методы оптимизации : учеб. пособие / Т. В. Азарнова, И. Л. Каширина, Г. Д. Чернышова. – Воронеж : Изд-во ВГУ, 2003. – 86 с.
2. Алексеева, Е. В. Численные методы оптимизации / Е. В. Алексеева, О. А. Кутненко, А. В. Плясунов. – Новосибирск : НГУ, 2009.
3. Аттеков, А. В. Методы оптимизации : учебник / А. В. Аттеков, С. В. Галкин, В. С. Зарубин ; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – 2-е изд., стер. – М. : МГТУ, 2003. – 440 с.
4. Владимирский, Б. М. Математика. Общий курс : учебник / Б. М. Владимирский, А. Б. Горстко, Я. М. Ерусалимский. – 4-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2008. – 960 с.
5. Глебов, Н. И. Методы оптимизации : учеб. пособие / Н. И. Глебов, Ю. А. Кочетов, А. В. Плясунов. – Новосибирск : НГУ, 2000.
6. Гловацкая, А. П. Методы и алгоритмы вычислительной математики / А. П. Гловацкая. – М. : Радио и связь, 1999.
7. Измаилов, А. Ф. Численные методы оптимизации / А. Ф. Измаилов, М. В. Солодов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 304 с.
8. Ларин, Р. М. Методы оптимизации. Примеры и задачи : учеб. пособие [Электронный ресурс] / Р. М. Ларин, А. В. Плясунов, А. В. Пяткин. – Новосибирск : НГУ, 2009. – Режим доступа: <http://www.math.nsc.ru/LBRT/k5/Plyasunov/opt-2.html>. – Загл. с экрана.
9. Методы оптимизации : метод. указания / сост. М. Ю. Красников ; Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. – Красноярск, 2009. – 28 с.
10. Сборник задач по математике для втузов : учеб. пособие для втузов. В 4 ч. Ч. 3 / под общ. ред. А. В. Ефимова и А. С. Пospelова. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Изд-во физико-математической лит-ры, 2002. – 576 с.
11. Струченков, В. И. Методы оптимизации. Основы теории, задачи, обучающие компьютерные программы : учеб. пособие / В. И. Струченков. – М. : Экзамен, 2005. – 256 с.
12. Сухарев, А. Г. Курс методов оптимизации : учеб. пособие / А. Г. Сухарев, А. В. Тимохов, В. В. Федоров. – 2-е изд. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 368 с.
13. Черноруцкий, И. Г. Методы оптимизации в теории управления : учеб. пособие / И. Г. Черноруцкий. – СПб. : Питер, 2004. – 256 с. : ил.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

$$1. \quad u^n' = n u^{n-1} \cdot u'.$$

$$2. \quad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'.$$

$$3. \quad \sqrt{u}' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'.$$

$$4. \quad \ln u' = \frac{1}{u} \cdot u', \quad (u > 0).$$

$$5. \quad \log_a u' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u', \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad u > 0.$$

$$6. \quad e^u' = e^u \cdot u'.$$

$$7. \quad a^u' = a^u \ln a \cdot u', \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

$$8. \quad \sin u' = \cos u \cdot u'.$$

$$9. \quad \cos u' = -\sin u \cdot u'.$$

$$10. \quad \operatorname{tg} u' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'.$$

$$11. \quad \operatorname{ctg} u' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'.$$

$$12. \quad \operatorname{arctg} u' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$$

$$13. \quad \operatorname{arcctg} u' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$$

$$14. \quad \arcsin u' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'.$$

$$15. \quad \arccos u' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'.$$

ИНТЕГРАЛЫ

1. $\int du = u + c.$
2. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c.$
3. $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + c.$
4. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + c.$
5. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c.$
6. $\int e^u du = e^u + c.$
7. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c.$
8. $\int \sin u du = -\cos u + c.$
9. $\int \cos u du = \sin u + c.$
10. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + c.$
11. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + c.$
12. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + c.$
13. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{u}{a} + c.$
14. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + c.$
15. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + c.$
16. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + c.$
17. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a} \right| + c.$

Правила дифференцирования

1. $cu' = c \cdot u'.$
2. $u \pm v' = u' \pm v'.$
3. $u \cdot v' = u' \cdot v + v' \cdot u.$
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}.$

Свойства интегралов

1. $\int d F(x) = F(x) + c.$
2. $\int f'(x) dx = f(x).$
3. $\int cf(x) dx = c \int f(x) dx.$
4. $\int f(x) \pm \varphi(x) dx = \int f(x) dx \pm \int \varphi(x) dx.$

ДЕЙСТВИЯ С МАТРИЦАМИ

Необходимо найти матрицу первых и вторых производных для функции

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1 + 5x_2 - 6x_2^2.$$

Матрица первых производных имеет вид

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 6x_1 + 2x_2 - 4 \\ 2x_1 + 5 - 12x_2 \end{vmatrix}.$$

Первая строчка матрицы вторых производных будет получена путем применения правила нахождения производной к первой строчке матрицы $\nabla f(x_1, x_2)$ сначала по x_1 , затем по x_2 . Вторая строчка матрицы вторых производных будет получена путем применения правил нахождения производной ко второй строчке матрицы $\nabla f(x_1, x_2)$ сначала по x_1 , затем по x_2 :

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -12 \end{vmatrix}.$$

Операции над матрицами:

1. Нахождение определителя:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

В примере найдем определитель матрицы:

$$\det(\nabla^2 f(x_1, x_2)) = -12 \cdot 6 - 2 \cdot 2 = -76.$$

2. Умножение матриц. Здесь необходимо рассмотреть два варианта: умножение матрицы на матрицу и умножение матрицы на строку:

а) умножение матрицы на строку:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad C = A \times B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_1 + a_{12} \cdot b_2 \\ a_{21} \cdot b_1 + a_{22} \cdot b_2 \end{pmatrix};$$

например:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix},$$

тогда

$$C = A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \\ 4 \cdot 2 + 2 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 18 \end{pmatrix};$$

б) умножение матрицы на матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

$$C = A \times B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix};$$

например:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C = A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 5 & 1 \cdot 4 + 3 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 + 2 \cdot 5 & 4 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 7 \\ 18 & 18 \end{pmatrix}.$$

3. Нахождение обратной матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

тогда обратная матрица:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}^T;$$

например:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{-10} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

Проверка: при умножении матрицы на свою обратную матрицу мы должны получить единичную матрицу. Это означает, что мы правильно нашли обратную матрицу:

$$\begin{aligned} A \times A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) + 3 \cdot \frac{2}{5} & 1 \cdot \frac{3}{10} - 3 \cdot \frac{1}{10} \\ 4 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) + 2 \cdot \frac{2}{5} & 4 \cdot \frac{3}{10} - 2 \cdot \frac{1}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$