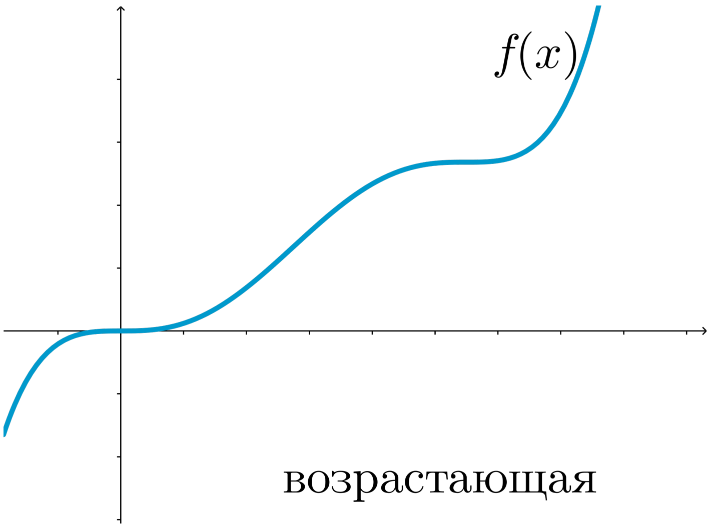
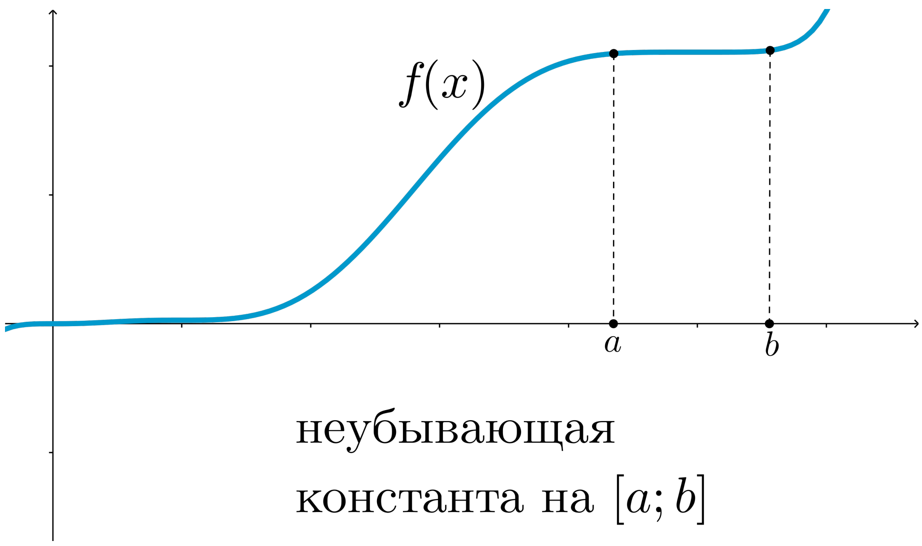
ИНТЕНСИВ ПО ПАРАМЕТРАМ. ФУНКЦИИ. Вебинар №3

► Функция $f(x)$ называется **возрастающей** на промежутке X, если для любых $x_1, x_2 \in X$, таких что $x_1 < x_2$, выполнено $f(x_1) < f(x_2)$.

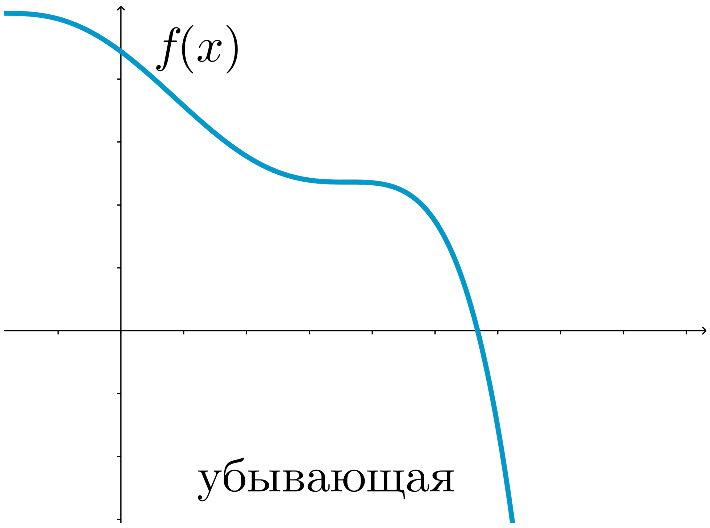


Примеры: $y = \sqrt{x},\ y = 2^x,\ y = \log_2 x,\ y = x^3$.

Функция называется **неубывающей** на промежутке X, если для любых $x_1, x_2 \in X$, таких что $x_1 < x_2$, выполнено $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

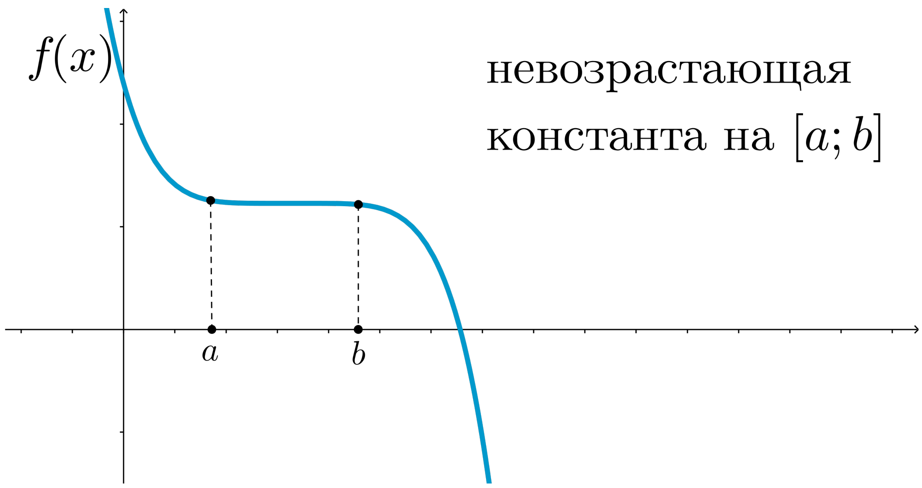


► Функция $f(x)$ называется **убывающей** на промежутке X, если для любых $x_1, x_2 \in X$, таких что $x_1 < x_2$, выполнено $f(x_1) > f(x_2)$.



Примеры: $y = \log_{0,5} x,\ y = (0,5)^x,\ y = \sqrt{-x}$.

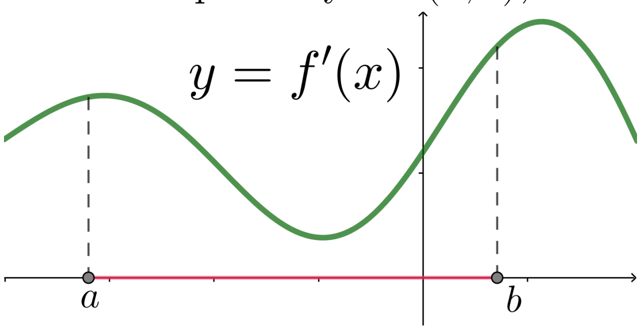
Функция называется **невозрастающей** на промежутке X, если для любых $x_1, x_2 \in X$, таких что $x_1 < x_2$, выполнено $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.



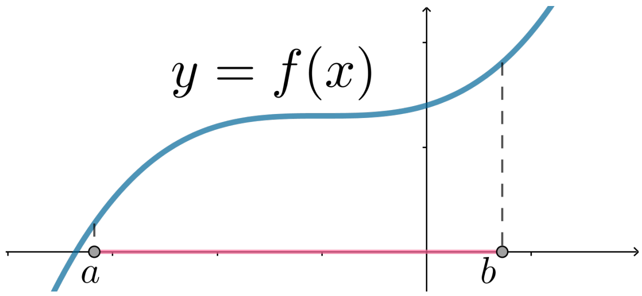
► Возрастающие и убывающие функции называют **строго монотонными**, а невозрастающие и неубывающие — просто **монотонными**.

Краткий справочник:

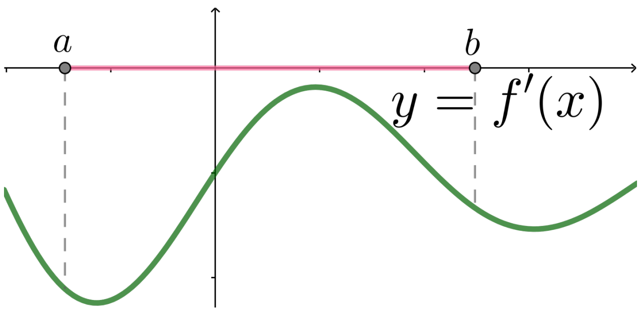
Если производная положительна на промежутке $(a;b)$,



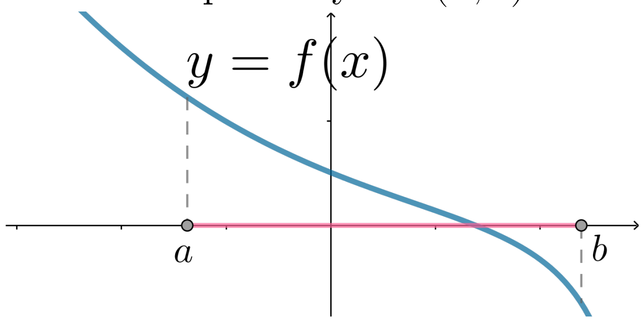
то функция возрастает на промежутке $(a;b)$



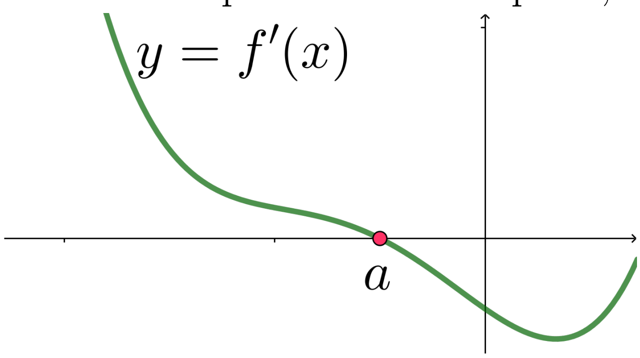
Если производная отрицательна на промежутке $(a;b)$,



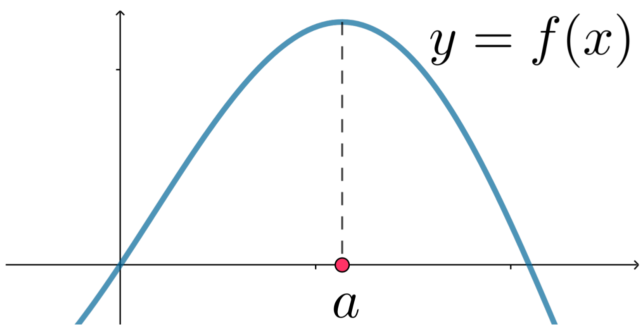
то функция убывает на промежутке $(a;b)$



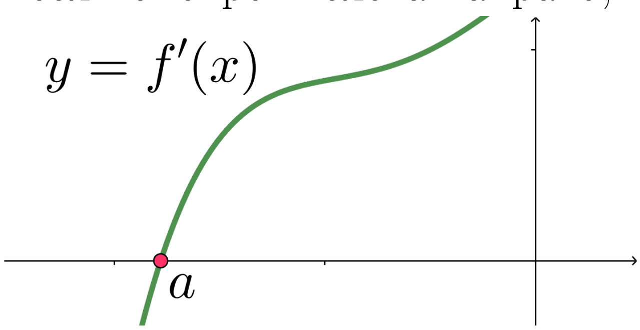
Если производная равна нулю в точке $x = a$, причем меняет знак с “плюса” на “минус”, если смотреть слева направо,



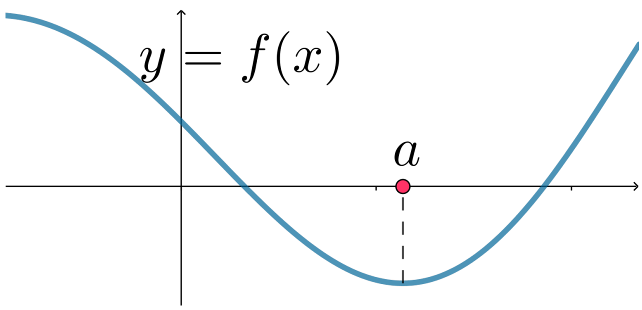
то точка $x = a$ является точкой максимума функции



Если производная равна нулю в точке $x = a$, причем меняет знак с “минуса” на “плюс”, если смотреть слева направо,



то точка $x = a$ является точкой минимума функции



	Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$
1	$c = \text{const}$	0
2	x^a	$a \cdot x^{a-1}$
3	$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
4	$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \cdot \ln a}$
5	e^x	e^x
6	a^x	$a^x \cdot \ln a$
7	$\sin x$	$\cos x$
8	$\cos x$	$-\sin x$
9	$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
10	$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
11	$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
14	$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$

Частные случаи

	Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$
15	$\dfrac{1}{x} = x^{-1}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
16	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
17	$x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$	$\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$
18	e^{-x}	$-e^{-x}$

Виды функций	Правила
Умножение на число	$(c \cdot f)' = c \cdot f'$
Сумма/разность	$(f \pm g)' = f' \pm g'$
Произведение	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
Частное	$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
Сложная функция	$\big(f(t(x))\big)' = f'_t \cdot t'_x$

▶ *Основные свойства:*

I. Сумма двух возрастающих функций – возрастающая функция;
если $f(x)$ – возрастающая функция, то $-f(x)$ – убывающая функция;
если $f(x)$ – возрастающая функция, то $f(x)+c$ – возрастающая функция (c – некоторое число).

Если $f(x), g(x)$ – возрастающие функции, $h(x), p(x)$ – убывающие (на некотором множестве), то $f(g(x))$ – возрастающая, $f(h(x))$ – убывающая, $h(f(x))$ – убывающая, $h(p(x))$ – возрастающая. **То есть композиция двух функций одинаковой монотонности – возрастающая, разной монотонности – убывающая.**

Если $f(x)$ – возрастающая и знакопостоянная на некотором множестве (либо положительна, либо отрицательна), то $\dfrac{1}{f(x)}$ – убывающая. Аналогично с убывающей.

Если $f(x), g(x)$ – возрастающие неотрицательные функции, то $f(x)\cdot g(x)$ – возрастающая. Аналогично с убывающими.

II. Если функция $f(x)$ — строго монотонна на X, то из равенства
$x_1 = x_2$ $(x_1, x_2 \in X)$ следует $f(x_1) = f(x_2)$, и наоборот.

Пример: функция $f(x) = \sqrt{x}$ является строго возрастающей при всех $x \in [0; +\infty)$, поэтому из равенства $\sqrt{x} = \sqrt{4}$ следует $x = 4$.

III. Если функция $f(x)$ — строго монотонна на X, то уравнение $f(x) = c$, где c — некоторое число, всегда имеет не более одного решения на X.

Пример:

1) функция $f(x) = x^2$ является строго убывающей при всех
$x \in (-\infty; 0]$, поэтому уравнение $x^2 = 9$ имеет на этом промежутке не более одного решения, а точнее одно: $x = -3$.

2) функция $f(x) = -\dfrac{1}{x+1}$ является строго возрастающей при всех $x \in (-1; +\infty)$,

поэтому уравнение $-\dfrac{1}{x+1} = 0$ имеет на этом промежутке не более одного решения, а точнее ни одного, т.к. числитель левой части никогда не может быть равен нулю.

IV. Если на $[a;b]$ $f(x)$ – возрастающая функция, а $g(x)$ – убывающая функция, то уравнение $f(x) = g(x)$ на $[a;b]$ имеет не более одного корня.

Пример: функция $f(x) = x^2$ является возрастающей на $[0;+\infty)$, а функция $g(x) = -x+5$ – убывающей, следовательно, уравнение $x^2 = -x+5$ имеет на $[0;+\infty)$ не более одного корня. В данном случае – ровно один корень.

V. Если функция $f(x)$ — неубывает (невозрастает) и непрерывна на отрезке $[a;b]$, причем на концах отрезка она принимает значения $f(a) = A, f(b) = B$, то при $C \in [A;B]$ ($C \in [B;A]$) уравнение $f(x) = C$ всегда имеет хотя бы одно решение.

Пример: функция $f(x) = x^3$ является строго возрастающей (то есть строго монотонной) и непрерывной при всех $x \in \mathbb{R}$, поэтому при любом $C \in (-\infty;+\infty)$ уравнение $x^3 = C$ имеет ровно одно решение: $x = \sqrt[3]{C}$.

Идея: $f(t) = f(z)$

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$8x^6 + (a - x)^3 + 2x^2 + a = x$$

имеет хотя бы один корень.

$a \in (-\infty; 0,125]$

Идея: $f(x) = 0$, где $f(x)$ – строго монотонна

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любой корень уравнения

$$3\sqrt[5]{6,2x - 5,2} + 4\log_5(4x + 1) + 5a = 0$$

принадлежит отрезку $[1; 6]$.

$a \in [-2,8; -1,4]$

Идея: свести уравнение к виду $a = f(x)$

3. При каких a уравнение $5\cos 2x + \dfrac{2a}{\sin x} = -29$ имеет решения?

$a \in [-12; 0) \cup (0; 12]$

Идея: метод главного модуля/слагаемого

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

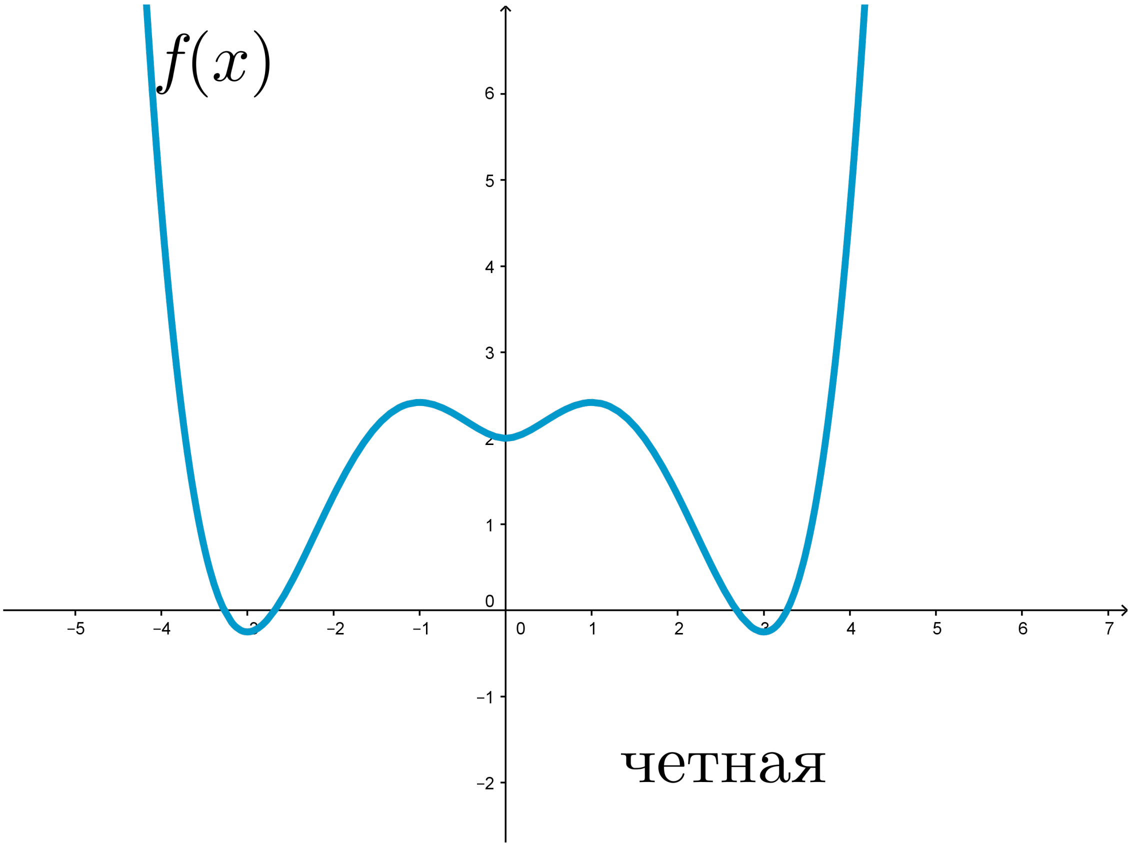
$$4x - |3x - |x + a|| = 9|x - 1|$$

имеет хотя бы один корень.

$a \in [-8; 6]$

► Функция $f(x)$ называется **четной**, если при всех x из ее области определения верно: $f(-x) = f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси y:

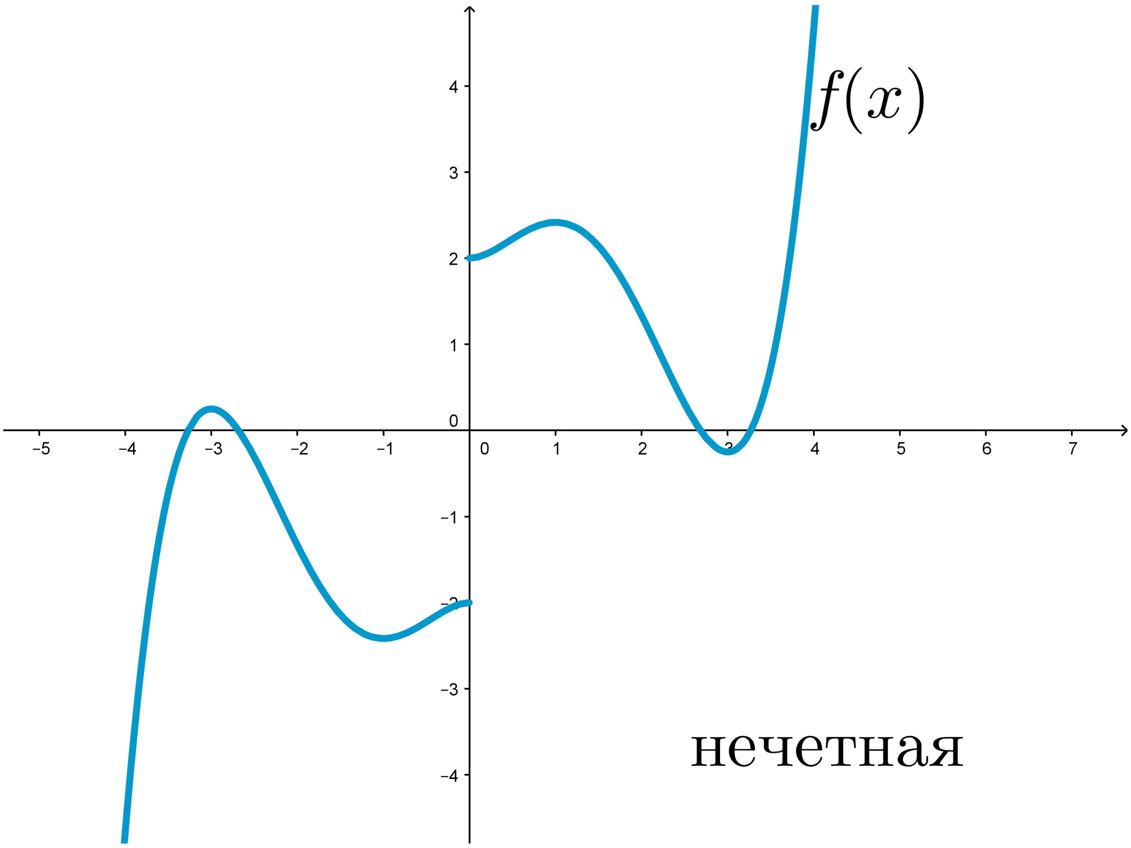


Область определения четной функции $f(x)$ симметрична относительно $x = 0$.

Пример: функция $f(x) = x^2 + \cos x$ является четной, т.к. $f(-x) = (-x)^2 + \cos(-x) = x^2 + \cos x = f(x)$.

► Функция $f(x)$ называется **нечетной**, если при всех x из ее области определения верно: $f(-x) = -f(x)$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат:
Область определения нечетной функции $f(x)$ симметрична относительно $x = 0$.



Пример: функция $f(x) = x^3 + x$ является нечетной, т.к. $f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x)$.

► Функции, не являющиеся ни четными, ни нечетными, называются функциями общего вида. Такую функцию можно всегда единственным образом представить в виде суммы четной и нечетной функции.

Например, функция $f(x) = x^2 - x$ является суммой четной функции $f_1 = x^2$ и нечетной $f_2 = -x$.

► *Некоторые свойства:*

1) Произведение и частное двух функций одинаковой четности — четная функция.

2) Произведение и частное двух функций разной четности — нечетная функция.

3) Сумма и разность четных функций — четная функция.

4) Сумма и разность нечетных функций — нечетная функция.

5) Если $f(x)$ — четная функция, то уравнение $f(x) = c$ $(c \in \mathbb{R})$ имеет единственный корень тогда и только когда, когда его корнем является $x = 0$ и этот корень единственный.

6) Если $f(x)$ — четная или нечетная функция, и уравнение $f(x) = 0$ имеет корень $x = b$, то это уравнение обязательно будет иметь второй корень $x = -b$.

---

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\operatorname{tg}|a| = \log_2(\cos x - |x|)$ имеет единственное решение.

$\boxed{a = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$

Факт: Если $f(x) \geqslant c$, $g(x) \leqslant c$ при любом x, то равенство

$$f(x) = g(x)$$

возможно тогда и только тогда, когда $f(x) = g(x) = c$.

Основные ограниченные функции и их области значений:

Функция	Область значений (значение y)	Область определения (значение x)
$y = x^2$	$y \geqslant 0$	$x \in \mathbb{R}$
$y = x + \frac{1}{x}$	$y \geqslant 2$, если $x > 0$ $y \leqslant -2$, если $x < 0$	$x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$
$y = \lvert x\rvert + \lvert 1 - x\rvert$	$y \geqslant 1$, причем $y = 1$, если $x \in [0; 1]$	$x \in \mathbb{R}$
$y = \lvert x - a\rvert + \lvert x + a\rvert$	$y \geqslant 2\lvert a\rvert$, причем $y = 2\lvert a\rvert$, если $x \in [-\lvert a\rvert; \lvert a\rvert]$	$x \in \mathbb{R}$
$y = \sin x$, $y = \cos x$	$-1 \leqslant y \leqslant 1$	$x \in \mathbb{R}$
$y = \arcsin x$	$-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$
$y = \arccos x$	$0 \leqslant y \leqslant \pi$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$
$y = \operatorname{arctg} x$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$	$x \in \mathbb{R}$
$y = \operatorname{arcctg} x$	$0 < y < \pi$	$x \in \mathbb{R}$

Важные неравенства:

1) Неравенство Коши (о средних) :

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots \frac{1}{a_n}}$$

ср. квадратичное $\geqslant$ ср. арифметического $\geqslant$ ср. геометрического $\geqslant$ ср. гармоническог

2) Неравенство треугольника :

$|a| - |b| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a| + |b|$

Идея: метод оценки

6. Найдите все такие пары чисел a и b, при каждой из которых уравнение

$$(3x^2 - 2a^2 + ab)^2 + (3a^2 - ab + 2b^2 - 12x)^2 + 4 = 4x - x^2$$

имеет единственное решение.

$(2; -2); (-2; 2); (2\sqrt{2}; \sqrt{2}); (-2\sqrt{2}; -\sqrt{2})$

Идея: неравенство Коши

7. Найдите a, при которых уравнение

$$|x - a^2 + 4a - 2| + |x - a^2 + 2a + 3| = 2a - 5$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $[5; 23]$.

$4 \leqslant a \leqslant 7$