Интенсив по параметрам

Подробный конспект

Содержание

1 Введение. Что нужно знать

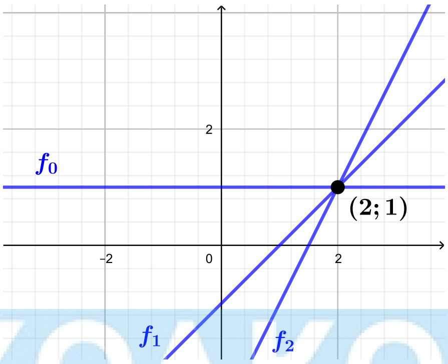
1.1 Пучок прямых

Рассмотрим функцию $f(x) = a(x-2)+1$. Несложно видеть, что она линейна относительно x, и графиком такой функции при любом фиксированном значении параметра a будет прямая.

Теперь попробуем понять, как устроено всё **семейство** (то есть множество функций, которые могут быть получены при всех возможных значениях a) функций такого вида. Уже ясно, что это будет некоторое множество прямых на плоскости, но мы хотим знать больше. Построим графики трех функций

$$f_0(x) = 0\cdot(x-2)+1 = 1;$$
$$f_1(x) = 1\cdot(x-2)+1 = x-1;$$
$$f_2(x) = 2\cdot(x-2)+1 = 2x-3,$$

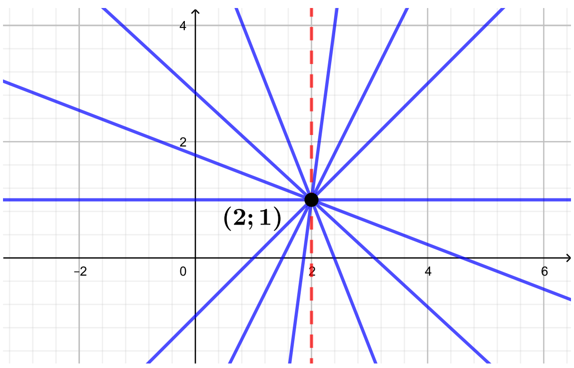
полученных подставлением соответствующего значения параметра a.



Замечаем, что все три прямые проходят через точку $(2;1)$. Докажем теперь, что любая прямая нашего семейства проходит через эту точку. Для этого подставим $x=2$ в нашу функцию, получим

$$f(2) = a(2-2)+1 = 1$$

То есть $f(2) = 1$ **независимо** от значения параметра a, и любая прямая нашего семейства проходит через точку $(2;1)$. Так мы поняли, что наша функция с параметром задает **пучок прямых** на плоскости. Также важно отметить, что единственная прямая, которая проходит через точку $(2;1)$, но не будет реализована — это вертикальная прямая $x=2$.



1.2 Простейший пример задачи с параметром

Рассмотрим следующую задачу. Необходимо найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} y = ax \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Для начала рассмотрим **алгебраическое решение** задачи. Из первого уравнения видим, что каждому значению x всегда соответствует ровно одно значение y. Подставляя во второе уравнение $y = ax$, получим

$$ax = x^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - ax + 1 = 0$$

Это квадратное уравнение, оно имеет ровно одно решение в том и только в том случае, когда $D = 0$. Осталось найти a, при которых это так.

$$D = a^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm 2$$

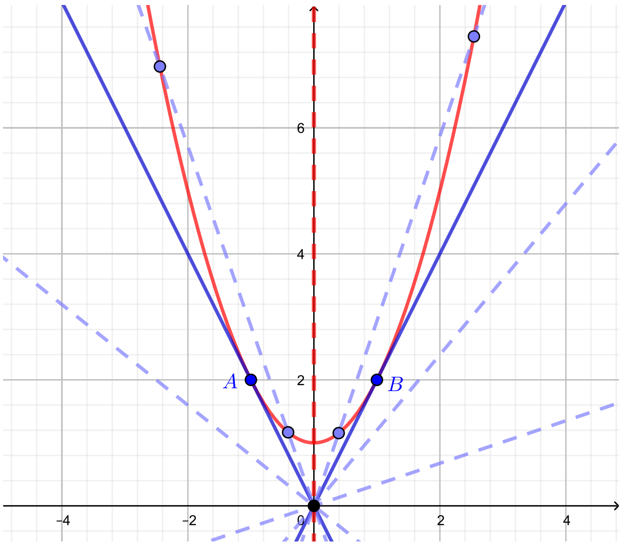
1.3 Условие касания функций

Все значения x_0 такие, что функции $f(x)$ и $g(x)$ касаются в точке с x-координатой, равной x_0, являются решениями системы

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$

Воспользуемся этим знанием и решим предыдущую задачу **графически**.

Графиком первого уравнения, как мы уже знаем, будет пучок прямых, проходящих через начало координат. Графиком второго будет обычная парабола.



Имеем две касательные к параболе, которые как раз и будут иметь с ней ровно одну точку пересечения. Остальные прямые либо не будут иметь с параболой ни одной точки пересечения (если лежат внутри тупого угла между касательными), либо будут иметь две точки пересечения (если лежат внутри острого угла). Во втором случае будут две точки пересечения: первая на дуге AB, а вторая обязательно будет на одной из ветвей параболы, так как квадратичная функция возрастает быстрее линейной. Вертикальная прямая будет также иметь ровно одну точку пересечения с параболой, но мы уже оговаривались, что она **не войдет** в пучок.

Чтобы найти x-координаты точек касания A и B, решим систему. Вместе с координатами точек касания мы найдем также и значения параметра a, при которых прямая $y = ax$ будет касательной.

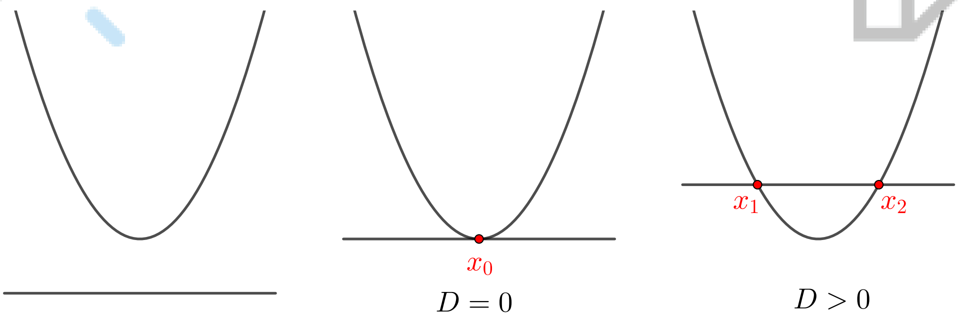
$$\begin{cases} ax = x^2 + 1 \\ (ax)' = (x^2+1)' \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - ax + 1 = 0 \\ a = 2x \end{cases}$$

$$x^2 - 2x \cdot x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad a = \pm 2$$

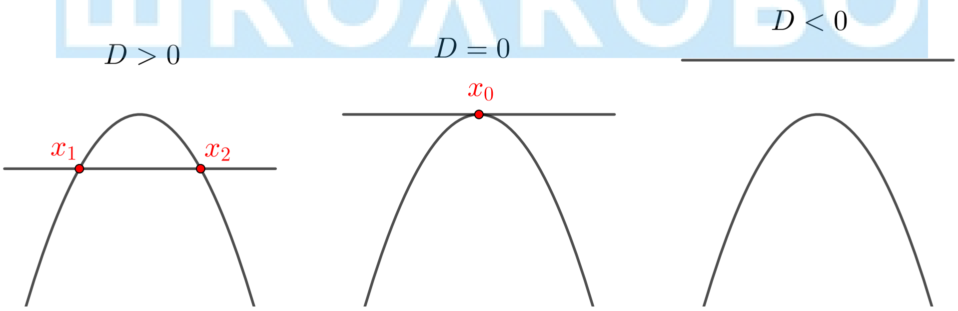
1.4 Квадратное уравнение. Теорема Виета

Вид, который принимает график квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ в зависимости от коэффициента a и дискриминанта.

При $a > 0$:



При $a < 0$:



Теорема Виета для квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0, \ a \neq 0, \ D > 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

1.5 Кубическое уравнение. Теорема Виета

Рассмотрим многочлен третьей степени $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. При $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ многочлен будет стремиться к бесконечностям противоположных знаков (знак будет определен коэффициентом a). То есть наша непрерывная функция (а многочлен таков) имеет хотя бы одну точку в положительной полуплоскости и хотя бы одну точку в отрицательной полуплоскости. Значит, существует хотя бы одна точка, в которой многочлен обращается в 0, то есть **как минимум один корень** (действительно, мы не можем попасть из положительной полуплоскости в отрицательную, «перескочив» ноль).

Теорема Виета для кубического уравнения

$$\begin{gathered} ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,\ a \neq 0, \\ \text{имеет три корня } x_1,\ x_2,\ x_3 \end{gathered} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

1.6 Неравенства

Неравенство 1 *(Неравенство треугольника)*

$$|a| + |b| \geqslant |a + b| \geqslant a + b$$

Доказательство

Докажем сначала левое неравенство. Обе части неотрицательны, можем возвести в квадрат.

$$\begin{aligned} &(|a| + |b|)^2 \overset{?}{\geqslant} (a + b)^2 \\ &a^2 + b^2 + 2|a| \cdot |b| \overset{?}{\geqslant} a^2 + b^2 + 2ab \\ &|a| \cdot |b| \geqslant ab \end{aligned}$$

Очевидно, что левая и правая часть равны по модулю, при этом левая всегда неотрицательна, значит неравенство верное.

Чтобы доказать правое неравенство, рассмотрим два случая:

I. $a + b \geqslant 0$

Раскрыв модуль, получим $a + b \geqslant a + b$.

II. $a + b < 0$

В этом случае тоже все очевидно, т.к. правая часть неравенства отрицательна, а левая положительна.

Неравенство 2

Для $a, b \geqslant 0$ выполняется

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \geqslant \sqrt{a + b}$$

Доказательство

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \overset{?}{\geqslant} \sqrt{a+b}$$
$$a+b+2\sqrt{ab} \overset{?}{\geqslant} a+b$$
$$2\sqrt{ab} \geqslant 0$$

Неравенство 3

Для $a, b \geqslant 0$ выполняется
$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab},$$
причем равенство достигается $\Leftrightarrow a=b$

Доказательство

$$\frac{a+b}{2} \overset{?}{\geqslant} \sqrt{ab}$$
$$a+b-2\sqrt{ab} \overset{?}{\geqslant} 0$$
$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$$

Очевидно, что равенство достигается только при $a=b$.

Неравенство 4

Для $t>0$ выполняется
$$t+\frac{1}{t} \geqslant 2,$$
причем равенство достигается $\Leftrightarrow t=1$.

Доказательство

$$t+\frac{1}{t} \overset{?}{\geqslant} 2$$
$$t^2-2t+1 \overset{?}{\geqslant} 0$$
$$(t-1)^2 \geqslant 0$$

Очевидно, что равенство достигается только при $t=1$.

1.7 Задача

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^3+x^2-9a^2x-2x+a}{x^3-9a^2x}=1$$

имеет ровно один корень.

Решение

$$\frac{x^3+x^2-9a^2x-2x+a-(x^3-9a^2x)}{x(x^2-9a^2)}=0$$
$$\frac{x^2-2x+a}{x(x-3a)(x+3a)}=0$$

Левая часть зануляется, когда зануляется числитель (а он имеет не более двух нулей), но при этом знаменатель не равен нулю. Возможны две ситуации, в которых данное уравнение имеет ровно один корень.

I. Числитель имеет ровно один корень, который при этом не является нулем знаменателя.

   В этом случае дискриминант числителя должен быть равен нулю.

$$D=4-4a=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=1$$

   Числитель превратится в x^2-2x+1, это выражение имеет единственный ноль $x=1$. Проверим, что знаменатель не занулился

$$1\cdot(1-3)\cdot(1-3)\neq 0$$

   Значит, $a=1$ нам подходит.

II. Числитель имеет ровно два корня, ровно один из которых является также и нулем знаменателя.

   Сразу найдем ограничения из условия на дискриминант

$$D=4-4a>0 \quad \Leftrightarrow \quad a<1$$

   Запишем корни

$$x_1=\frac{2+2\sqrt{1-a}}{2}=1+\sqrt{1-a}; \qquad x_2=\frac{2-2\sqrt{1-a}}{2}=1-\sqrt{1-a}$$

   Несложно видеть, что корнями знаменателя являются 0, $3a$ и $-3a$.

II.1. x_2 является корнем знаменателя, x_1 — не является.

$$\begin{cases} a<1 \\ x_1 \neq 0 \\ x_1 \neq 3a \\ x_1 \neq -3a \\ \left[\begin{aligned} &x_2 = 0 \\ &x_2 = 3a \\ &x_2 = -3a \end{aligned}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<1 \\ 1+\sqrt{1-a} \neq 0 \\ 1+\sqrt{1-a} \neq 3a \\ 1+\sqrt{1-a} \neq -3a \\ \left[\begin{aligned} &1-\sqrt{1-a} = 0 \\ &1-\sqrt{1-a} = 3a \\ &1-\sqrt{1-a} = -3a \end{aligned}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<1 \\ a \neq \frac{5}{9} \\ a \neq -\frac{7}{9} \\ \left[\begin{aligned} &a = 0 \\ &a = 0 \\ &a = 0 \end{aligned}\right. \end{cases} \Leftrightarrow a = 0$$

II.2. x_1 является корнем знаменателя, x_2 — не является.

$$\begin{cases} a<1 \\ x_2 \neq 0 \\ x_2 \neq 3a \\ x_2 \neq -3a \\ \left[\begin{aligned} &x_1 = 0 \\ &x_1 = 3a \\ &x_1 = -3a \end{aligned}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<1 \\ 1-\sqrt{1-a} \neq 0 \\ 1-\sqrt{1-a} \neq 3a \\ 1-\sqrt{1-a} \neq -3a \\ \left[\begin{aligned} &1+\sqrt{1-a} = 0 \\ &1+\sqrt{1-a} = 3a \\ &1+\sqrt{1-a} = -3a \end{aligned}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<1 \\ a \neq 0 \\ a \neq 0 \\ a \neq 0 \\ \left[\begin{aligned} &a \in \varnothing \\ &a = \frac{5}{9} \\ &a = -\frac{7}{9} \end{aligned}\right. \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{5}{9}; -\frac{7}{9}$$

Объединив ответы всех случаев, получим

$$a \in \left\{-\frac{7}{9}; 0; \frac{5}{9}; 1\right\}$$

1.8 Метод xOa

Решим предыдущую задачу новым методом.

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^3+x^2-9a^2x-2x+a}{x^3-9a^2x} = 1$$

имеет ровно один корень.

Решение

$$\frac{x^3+x^2-9a^2x-2x+a-(x^3-9a^2x)}{x(x^2-9a^2)} = 0$$

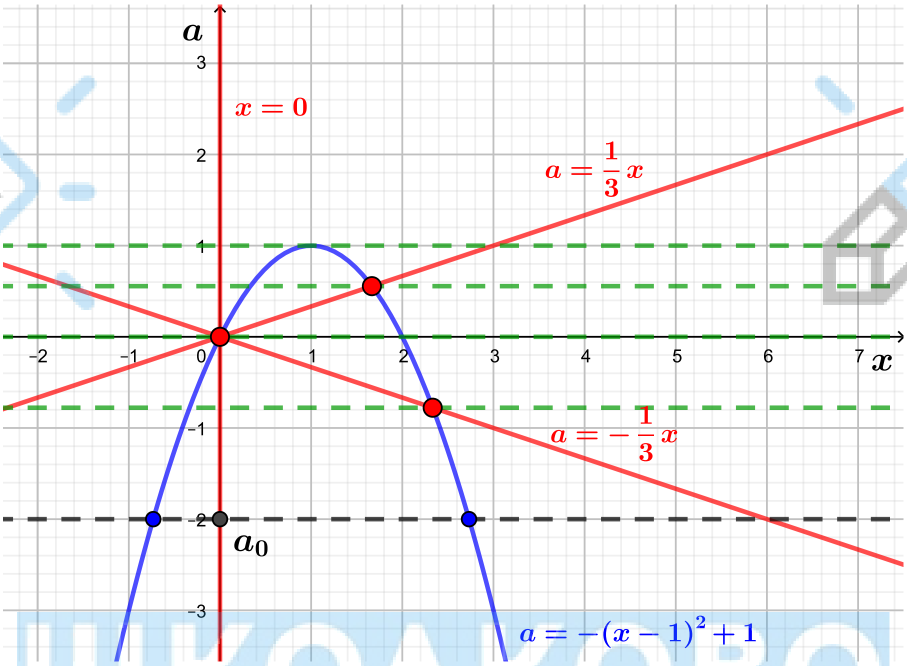
$$\frac{x^2-2x+a}{x(x-3a)(x+3a)} = 0$$

Левая часть зануляется, когда зануляется числитель (а он имеет не более двух нулей), но при этом знаменатель не равен нулю.

Представим числитель как функцию $a(x) = 2x - x^2 = -(x-1)^2 + 1$. Если мы построим график данной функции в системе координат xOa, он будет изображать множество всех пар $(x; a)$, при которых числитель, а значит, и вся левая часть зануляется. Однако нужно еще «выбить» те пары $(x; a)$, при которых зануляется знаменатель. Множество таких точек на плоскости это объединение графиков трех линейных функций:

$$\left[\begin{aligned} &x = 0 \\ &x - 3a = 0 \\ &x + 3a = 0 \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &x = 0 \\ &a = \tfrac{1}{3}x \\ &a = -\tfrac{1}{3}x \end{aligned}\right.$$

Построим все описанное на плоскости.



Попробуем по полученному графику понять, сколько будет решений у уравнения при a равном некоторому a_0. Все пары $(x; a)$, зануляющие числитель лежат на синей параболе, при этом все точки со второй координатой a_0 лежат на черной пунктирной прямой $a = a_0$. Значит, количество решений при $a = a_0$ равно количеству точек пересечения пунктирной прямой с графиком параболы. Однако помним, что некоторые точки параболы «выбиты» красными прямыми — нулями знаменателя.

Нам нужно найти такие a, при которых уравнение имеет ровно одно решение, то есть такие горизонтальные прямые, которые пересекают синюю параболу в невыбитах точках ровно один раз. Эти прямые обозначены зеленым пунктиром. Осталось найти a, которые соответствуют эти прямым. Чтобы это сделать найдем координаты по оси Oa красных точек. Верхняя из зеленых это $a = 1$ (касательная к параболе в вершине), а вторая сверху совпадает с осью Ox. Найдем две оставшиеся (не будем по второму разу учитывать $x = 0$)

$$-(x-1)^2 + 1 = \frac{1}{3}x \quad \Leftrightarrow \quad x = 0; \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{3}x = \frac{5}{9}$$

$$-(x-1)^2 + 1 = -\frac{1}{3}x \quad \Leftrightarrow \quad x = 0; \frac{7}{3} \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{3}x = -\frac{7}{9}$$

Объединив все ответы, получим

$$a \in \left\{-\frac{7}{9}; 0; \frac{5}{9}; 1\right\}$$

2 Алгебра

№1 Решить уравнение

$$(a^2-9)x = 5(a+3)$$

для всех значений параметра a.

Решение

Сразу можем видеть, что уравнение *линейно* относительно x, т.е. содержит x не более, чем в первой степени.

$$(a-3)(a+3)x - 5(a+3) = 0$$
$$(a+3)\left((a-3)x-5\right) = 0$$

Разберем возможные случаи.

I. $a+3=0 \quad \Rightarrow \quad a=-3$

В этом случае любой $x\in\mathbb{R}$ будет решением.

II. $a+3\neq 0 \quad \Rightarrow \quad a\neq -3$

$$(a-3)x-5=0 \quad \Leftrightarrow \quad (a-3)x=5$$

II.1. $a-3=0 \quad \Rightarrow \quad a=3$

В этом случае, ни один x не будет решением, т.е. $x\in\varnothing$.

II.2. $a-3\neq 0 \quad \Rightarrow \quad a\neq 3$

$$x=\frac{5}{a-3}$$

Собрав решения всех случаев, получим

$$\begin{array}{l|l} a=-3 & x\in\mathbb{R} \\ a=3 & x\in\varnothing \\ a\in\mathbb{R}\setminus\{3;-3\} & x=\dfrac{5}{a-3} \end{array}$$

№2 Решить неравенство

$$ax-3<a^2-2x$$

для всех значений параметра a.

Решение

Видим, что неравенство линейно относительно x.

$$x(a+2)<a^2+3$$

Хочется поделить неравенство на скобку $(a+2)$, чтобы получить решение. Возникают три случая:

I. $a+2=0 \quad \Rightarrow \quad a=-2$

Левая часть зануляется, получаем $0<a^2+3$, что верно при любом $x\in\mathbb{R}$.

II. $a+2>0 \quad \Rightarrow \quad a>-2$

При делении на положительное выражение знак не меняется, получаем

$$x < \frac{a^2+3}{a+2}$$

III. $a+2<0 \quad \Rightarrow \quad a<-2$

При делении на отрицательное выражение знак меняется на противоположный, получаем

$$x > \frac{a^2+3}{a+2}$$

Собрав решения всех случаев, получим

$$\begin{array}{l|l} a=-2 & x\in\mathbb{R} \\ a>-2 & x<\frac{a^2+3}{a+2} \\ a<-2 & x>\frac{a^2+3}{a+2} \end{array}$$

№3 Решить уравнение

$$x^2=-a$$

для всех значений параметра a.

Решение

Хочется извлечь квадратный корень из обеих частей, но правая часть может быть отрицательной. Возникают три случая:

I. $-a<0 \quad \Rightarrow \quad a>0$

При таком a решений нет, т.е. $x\in\varnothing$.

II. $-a=0 \quad \Rightarrow \quad a=0 \quad \Rightarrow \quad x=0$

III. $-a>0 \quad \Rightarrow \quad a<0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{-a}$

Собрав решения всех случаев, получим

$$\begin{array}{l|l} a>0 & x\in\varnothing \\ a=0 & x=0 \\ a<0 & x=\pm\sqrt{-a} \end{array}$$

№4 Решить неравенство

$$x<\frac{a}{x}$$

для всех значений параметра a.

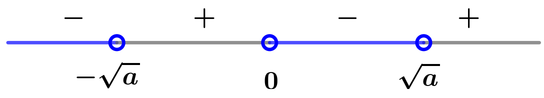
Решение

$$x-\frac{a}{x}<0$$
$$\frac{x^2-a}{x}<0$$

Возможны три случая:

I. $a > 0$

$$\frac{(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})}{x} < 0$$



$$x \in (-\infty; -\sqrt{a}) \cup (0; \sqrt{a})$$

II. $a = 0$

$$\frac{x^2}{x} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 0$$

III. $a < 0$

В этом случае можем разделить на $x^2 - a > 0$.

$$\frac{1}{x} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 0$$

Собрав решения всех случаев, получим

$$\begin{array}{l|l} a > 0 & x \in (-\infty; -\sqrt{a}) \cup (0; \sqrt{a}) \\ a \leqslant 0 & x < 0 \end{array}$$

№5 Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\log_{a-6,5}(x^2+1) = \log_{a-6,5}((a-5)x)$$

имеет ровно два различных корня.

Решение

Сразу запишем ограничения на a

$$\begin{cases} a - 6,5 > 0 \\ a - 6,5 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 6,5 \\ a \neq 7,5 \end{cases}$$

Основания логарифмов равны, значит, можем приравнять их аргументы. Аргумент левой части $x^2 + 1$ положителен при всех x, значит, приравнивая, можем не накладывать дополнительное ограничение $(a-5)x > 0$, ведь оно и так будет обеспечено равенством.

$$x^2 + 1 = (a-5)x$$
$$x^2 - (a-5)x + 1 = 0$$

Квадратное уравнение имеет два корня только тогда, когда дискриминант положителен.

$$D = (a-5)^2 - 4 = a^2 - 10a + 21 = (a-7)(a-3) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \in (-\infty; 3) \cup (7; +\infty)$$

Учитывая ограничения, полученные в начале, ответ

$$a \in (7; 7,5) \cup (7,5; +\infty)$$

№8 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(a-3)x^2 - 2ax + 5a = 0$$

имеет решения, и все решения этого уравнения положительны.

Решение

Сразу возникает два случая: $a-3=0$ и уравнение вырождается в линейное, либо уравнение квадратное.

I. $a-3=0 \quad \Rightarrow \quad a=3$

Получаем

$$-6x+15=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{5}{2}>0$$

При таком a корень существует и положителен.

II. $a-3\neq 0 \quad \Rightarrow \quad a\neq 3$

Далее возможны два случая:

II.1. Уравнение имеет ровно один корень, т.е. $D=0$. Найдем a, при которых $D=0$.

$$D=4a^2-20a(a-3)=-16a^2+60a=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=0;\frac{15}{4}$$

При $a=0$ получаем уравнение $-3x^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0$, корень неположителен.

При $a=\frac{15}{4}$ корень положителен

$$x=\frac{2a}{2(a-3)}=\frac{\frac{15}{4}}{\frac{15}{4}-3}=\frac{15}{15-12}=5>0$$

II.2. Уравнение имеет ровно два корня, т.е. $D>0$. Найдем a, при которых $D>0$.

$$D=-16a^2+60a=0 \quad \Leftrightarrow \quad a\in\left(0;\frac{15}{4}\right)$$

По теореме Виета

$$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{2a}{a-3} \\ x_1x_2=\frac{5a}{a-3} \end{cases}$$

Заметим, что два числа положительны $\Leftrightarrow$ их сумма и произведение положительны, т.е. должна выполняться система

$$\begin{cases} \frac{2a}{a-3}>0 \\ \frac{5a}{a-3}>0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a\in(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$$

Пересекая с промежутком $\left(0;\frac{15}{4}\right)$, получаем

$$a\in\left(3;\frac{15}{4}\right)$$

Объединив все подходящие a, получаем

$$a\in\left[3;\frac{15}{4}\right]$$

№9 Найдите a, при которых уравнение

$$ax^2+2(a+2)x+a+5=0$$

имеет два корня, расстояние между которыми больше 1.

Решение

Уравнение обязательно должно иметь два корня, поэтому сразу можем сказать, что $a\neq 0$ и $D>0$. Найдем a, при которых $D>0$.

$$D=4(a+2)^2-4a(a+5)=16-4a>0 \quad \Leftrightarrow \quad a<4$$

Заметим, что $|x_1-x_2|>1 \quad \Leftrightarrow \quad (x_1-x_2)^2>1$, при этом

$$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2,$$

а сумма и произведение корней хорошо выражаются из теоремы Виета. Запишем ее.

$$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{-2(a+2)}{a} \\ x_1x_2=\frac{a+5}{a} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (x_1-x_2)^2=\left(\frac{-2(a+2)}{a}\right)^2-4\cdot\frac{a+5}{a}=\frac{4(4-a)}{a^2}$$

Осталось найти a, при которых $(x_1-x_2)^2>1$

$$\begin{aligned}
&(x_1-x_2)^2=\frac{4(4-a)}{a^2}>1\\
&\frac{4(4-a)}{a^2}-\frac{a^2}{a^2}>0\\
&\frac{16-4a-a^2}{a^2}>0 \quad |\cdot a^2>0\\
&16-4a-a^2>0 \quad \Leftrightarrow \quad a\in(-2-\sqrt{20};-2+\sqrt{20})
\end{aligned}$$

Не забываем, что мы изначально наложили условия $a\neq 0$ и $a<4$, итого

$$a\in(-2-\sqrt{20};-2+\sqrt{20})\setminus\{0\}$$

№11 Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(\operatorname{tg} x+6)^2-(a^2+2a+8)(\operatorname{tg} x+6)+a^2(2a+8)=0$$

имеет ровно два различных решения на отрезке $\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Решение

Заметим, что $\operatorname{tg} x$ – периодическая функция с периодом π. Таким образом, если данное уравнение будет иметь решение на $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$, то оно также будет иметь еще одно решение на $\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$ (в точках $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ тангенс не определен). А вот решения из промежутка $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ не дублируются на отрезке $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$.
Таким образом, данное уравнение будет иметь два решения на отрезке $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$ в одном из двух случаев:

1) Если оно будет иметь ровно одно, причем неотрицательное, решение относительно $\operatorname{tg} x$.
2) Если оно будет иметь ровно два различных, причем отрицательных, решения относительно $\operatorname{tg} x$.

Рассмотрим первый случай.

Введем обозначение $\operatorname{tg} x+6=t$. Тогда $t\geqslant 6$. Получим уравнение:

$$t^2-(a^2+2a+8)t+a^2(2a+8)=0$$

Заметим, что по теореме Виета корнями данного уравнения будут:

$$t_1=2a+8 \quad \text{и} \quad t_2=a^2$$

Для того, чтобы уравнение имело ровно один корень, причем $t\geqslant 6$, нужно:

$$\begin{cases} t_1=t_2 \\ t_1\geqslant 6 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad a=4.$$

Рассмотрим второй случай.

Т.к. в этом случае $\operatorname{tg} x<0 \quad\Rightarrow\quad t<6$.

Также остается:

$$t_1=2a+8 \quad \text{и} \quad t_2=a^2$$

Для того, чтобы уравнение имело два корня, причем оба были меньше 6, нужно:

$$\begin{cases} t_1\neq t_2 \\ t_1<6 \\ t_2<6 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} -\sqrt{6}<a<-1 \\ a\neq -2 \end{cases}$$

Таким образом, окончательный ответ в задаче:

$$a\in(-\sqrt{6};-2)\cup(-2;-1)\cup\{4\}.$$

3 Функции

3.1 Основные свойства монотонных функций

I. Сумма двух возрастающих функций – возрастающая функция;
если $f(x)$ – возрастающая функция, то $-f(x)$ – убывающая функция;
если $f(x)$ – возрастающая функция, то $f(x)+c$ – возрастающая функция (c – некоторое число).

II. Если функция $f(x)$ — строго монотонна на X, то из равенства $x_1 = x_2$ $(x_1, x_2 \in X)$ следует $f(x_1) = f(x_2)$, и наоборот.

Пример: функция $f(x) = \sqrt{x}$ является строго возрастающей при всех $x \in [0; +\infty)$, поэтому из равенства $\sqrt{x} = \sqrt{4}$ следует $x = 4$.

III. Если функция $f(x)$ — строго монотонна на X, то уравнение $f(x) = c$, где c — некоторое число, всегда имеет не более одного решения на X.

Пример: 1) функция $f(x) = x^2$ является строго убывающей при всех
$x \in (-\infty; 0]$, поэтому уравнение $x^2 = 9$ имеет на этом промежутке $\leqslant 1$ решения, а точнее одно: $x = -3$.

2) функция $f(x) = -\dfrac{1}{x+1}$ является строго возрастающей при всех $x \in (-1; +\infty)$, поэтому уравнение $-\dfrac{1}{x+1} = 0$ имеет на этом промежутке не более одного решения, а точнее ни одного, т.к. числитель левой части никогда не может быть равен нулю.

IV. Если на $[a; b]$ $f(x)$ – возрастающая функция, а $g(x)$ – убывающая функция, то уравнение $f(x) = g(x)$ на $[a; b]$ имеет не более одного корня.

Пример: функция $f(x) = x^2$ является возрастающей на $[0; +\infty)$, а функция $g(x) = -x + 5$ – убывающей, следовательно, уравнение $x^2 = -x+5$ имеет на $[0; +\infty)$ не более одного корня. В данном случае – ровно один корень.

V. Если функция $f(x)$ — неубывает (невозрастает) и непрерывна на отрезке $[a; b]$, причем на концах отрезка она принимает значения $f(a) = A, f(b) = B$, то при $C \in [A; B]$ $(C \in [B; A])$ уравнение $f(x) = C$ всегда имеет хотя бы одно решение.

Пример: функция $f(x) = x^3$ является строго возрастающей (то есть строго монотонной) и непрерывной при всех $x \in \mathbb{R}$, поэтому при любом $C \in (-\infty; +\infty)$ уравнение $x^3 = C$ имеет ровно одно решение: $x = \sqrt[3]{C}$.

VI. Если $f(x), g(x)$ – возрастающие функции, $h(x), p(x)$ – убывающие (на некотором множестве), то $f(g(x))$ – возрастающая, $f(h(x))$ – убывающая, $h(f(x))$ – убывающая, $h(p(x))$ – возрастающая.

Если $f(x)$ – возрастающая и знакопостоянная на некотором множестве (либо положительна, либо отрицательна), то $\dfrac{1}{f(x)}$ – убывающая. Аналогично с убывающей.

Если $f(x), g(x)$ – возрастающие неотрицательные функции, то $f(x) \cdot g(x)$ – возрастающая. Аналогично с убывающими.

3.2 Идея: $f(t) = f(z)$, f — строго монотонна

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$8x^6 + (a-x)^3 + 2x^2 + a = x$$

имеет хотя бы один корень.

Решение

Преобразуем уравнение

$$8x^6 + 2x^2 = (x-a)^3 + (x-a)$$

Замечаем, что в обеих частях имеем сумму двух слагаемых, одно из которых является третьей степенью второго. Рассмотрим функцию $f(t) = t^3 + t$, тогда наше уравнение можно переписать в виде

$$f(2x^2) = f(x-a)$$

Проверим, является ли функция f монотонной. Это можно сделать несколькими способами.

I. Первый способ — посмотреть на производную функции.

$$f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$$

Видим, что производная функции f определена и положительна при любом $t \in \mathbb{R}$, значит, f строго возрастает на всей числовой прямой.

II. Второй способ — проверить по определению, т.е. доказать, что $f(a) > f(b)$ для любых действительных $a > b$.

$$a > b,\ a^3 > b^3 \quad \Rightarrow \quad a + a^3 > b + b^3$$

III. Можно воспользоваться свойством, что сумма двух монотонно возрастающих (какими и являются t и t^3) монотонно возрастает.

Мы доказали строгую монотонность f, вернемся к исходной задаче. Равенство $f(u) = f(v)$ может выполняться только тогда, когда $u = v$. В этом легко убедиться от противного. Пусть $u > v$, но тогда по определению монотонного возрастания $f(u) > f(v)$, и равенство значений функций в этих точках не может выполняться. Значит,

$$f(2x^2) = f(x-a) \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = x - a$$

Уравнение $2x^2 - x + a = 0$ имеет хотя бы одно решение $\Leftrightarrow D \geqslant 0$

$$D = 1 - 8a \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \leqslant \frac{1}{8}$$

3.3 Идея: $f(x) = 0$, где f монотонная функция, у которой от параметра зависит только сдвиг вдоль вертикальной оси

Задача 1

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любой корень уравнения

$$3\sqrt[5]{6,2x-5,2}+4\log_5(4x+1)+5a=0$$

принадлежит отрезку $[1;6]$.

Решение

Обозначим

$$f(x)=3(6,2x-5,2)^{\frac{1}{5}}+4\log_5(4x+1)+5a,$$

докажем, что f монотонно возрастает, исследовав производную.

$$f'(x)=3\cdot 6,2\cdot\frac{1}{5}(6,2x-5,2)^{-\frac{4}{5}}+4\cdot\frac{4}{(4x+1)\ln 5}=3\cdot 6,2\cdot\frac{1}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{(6,2x-5,2)^4}}+4\cdot\frac{4}{(4x+1)\ln 5}$$

Функция определена при $4x+1>0$, несложно видеть, что оба слагаемых производной положительны на всей области определения, следовательно, сама f монотонно возрастает на всей области определения. Из этого также следует, что исходное уравнение имеет не более одного корня.

Посмотрим, какие условия должны выполняться, чтобы был ровно один корень на отрезке $[1;6]$.

Во-первых, значение функции в левом конце отрезка должно быть не больше нуля, т.е. $f(1)\leqslant 0$. Действительно, ведь в противном случае на всем отрезке $[1;6]$ функция f будет лежать выше оси абсцисс, а значит, не будет иметь на нем корней.

Во-вторых, значение функции в правом конце отрезка должно быть не меньше нуля, т.е. $f(6)\geqslant 0$, иначе вся функция окажется «ниже» оси абсцисс на рассматриваемом отрезке.

При выполнении двух перечисленных условий мы гарантированно будем иметь ровно один корень на отрезке. Получаем систему

$$\begin{cases}f(1)\leqslant 0\\ f(6)\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3\sqrt[5]{6,2\cdot 1-5,2}+4\log_5(4\cdot 1+1)+5a\leqslant 0\\ 3\sqrt[5]{6,2\cdot 6-5,2}+4\log_5(4\cdot 6+1)+5a\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7+5a\leqslant 0\\ 14+5a\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\quad a\in\left[-\frac{14}{5};-\frac{7}{5}\right]$$

Задача 2

При каких a уравнение

$$5\cos 2x+\frac{2a}{\sin x}=-29$$

имеет решения?

Решение

Домножим на $\sin x$, наложив дополнительное условие $\sin x\neq 0$

$$5(1-2\sin^2 x)\sin x+2a+29\sin x=0$$
$$-10\sin^3 x+34\sin x+2a=0$$

Сделаем замену $t = \sin x$ с условиями $t \neq 0,\ -1 \leqslant t \leqslant 1$.

$$f(t) = -10t^3 + 34t + 2a = 0$$

Проверим монотонность функции f на отрезке $[-1;1]$. Нас интересует поведение функции и наличие корней только на этом отрезке.

$$f'(t) = -30t^2 + 34,\ t \in [-1;1] \quad \Rightarrow \quad t^2 \in [0;1] \quad \Rightarrow \quad -30t^2 \geqslant -30 \quad \Rightarrow \quad -30t^2 + 34 > 0$$

То есть функция монотонно возрастает на отрезке $[-1;1]$.

Посмотрим, какие условия должны выполняться, чтобы был хотя бы один корень (на самом деле из монотонности следует, что будет не более одного) на отрезке $[-1;1]$. Временно забудем про ограничение $t \neq 0$, в конце выкинем лишние значения.

Во-первых, значение функции в левом конце отрезка должно быть не больше нуля, т.е. $f(-1) \leqslant 0$. Действительно, ведь в противном случае на всем отрезке $[-1;1]$ функция f будет лежать выше оси абсцисс, а значит, не будет иметь на нем корней.

Во-вторых, значение функции в правом конце отрезка должно быть не меньше нуля, т.е. $f(1) \geqslant 0$, иначе вся функция окажется «ниже» оси абсцисс на рассматриваемом отрезке.

При выполнении двух перечисленных условий мы гарантированно будем иметь ровно один корень на отрезке. Получаем систему

$$\begin{cases} f(-1) \leqslant 0 \\ f(1) \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10 \cdot (-1)^3 + 34 \cdot (-1) + 2a \leqslant 0 \\ -10 \cdot (1)^3 + 34 \cdot (1) + 2a \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -24 + 2a \leqslant 0 \\ 24 + 2a \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad a \in [-12;12]$$

Осталось найти, какое a соответствует $t = 0$ и выколоть его. Очевидно, что это $a = 0$. Итого, получаем

$$a \in [-12;12] \setminus \{0\}$$

При всех найденных a будет существовать решение для t, а значит и для x.

3.4 Метод главного модуля

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$4x - |3x - |x + a|| = 9|x - 1|$$

имеет хотя бы один корень.

Решение

Перепишем уравнение в следующем виде

$$f(x) = 9|x-1| - 4x + |3x - |x + a|| = 0$$

Рассмотрим выражение $-4x + |3x - |x + a||$. Как бы мы ни раскрывали в нем модули итоговый коэффициент k при x может быть равен $k = \pm 4 \pm 3 \pm 1$ с некоторым выбором знаков. Очевидно, что $|k| \leqslant 8$.

Посмотрим на раскрытие модуля $9|x-1|$. При $x < 1$ модуль будет раскрываться с минусом и коэффициент при x будет равен -9. В этом случае независимо от того, чему будет равен k, результирующий коэффициент будет отрицательным ($-9 + k < 0$, т.к. $|k| \leqslant 8$).

Из аналогичных соображений при $x > 1$ первый модуль раскроется с плюсом, а результирующий коэффициент будет положительным.

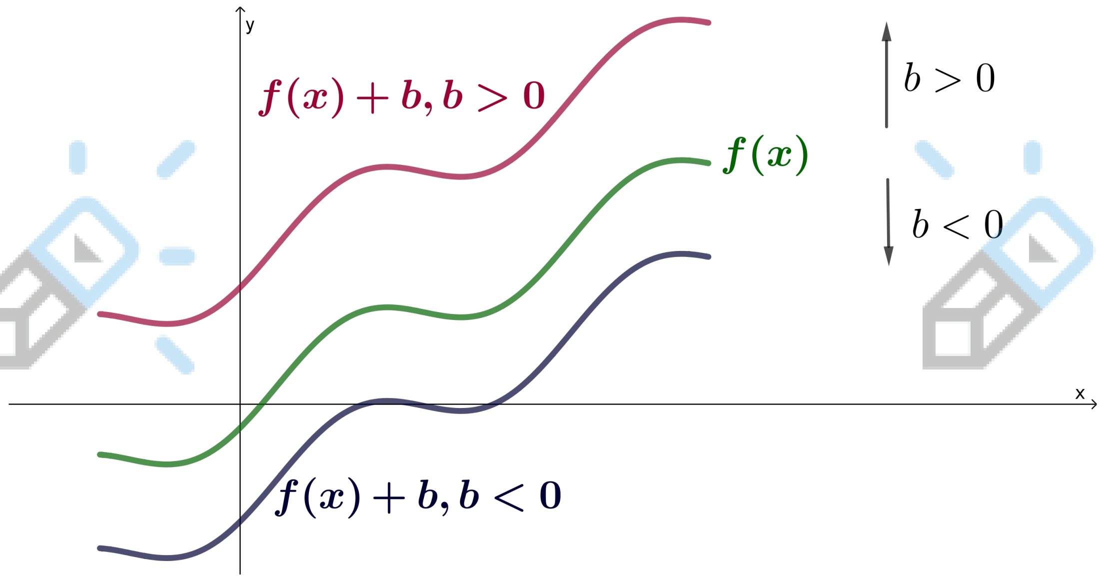
Таким образом, при $x < 1$ функция f кусочно-линейная убывающая, а при $x > 1$ — кусочно-линейная возрастающая, $x = 1$ — точка минимума. Чтобы уравнение имело хотя бы одно решение, точка минимума должна быть не выше нуля, т.е. должно выполняться $f(1) \leqslant 0$. Если это условие выполняется, то корни обязательно будут, т.к. функция неограниченно возрастает на $+\infty$.

$$\begin{aligned}
&f(1) = 9|1-1| - 4\cdot 1 + |3\cdot 1 - |1+a|| \leqslant 0\\
&|3 - |1+a|| \leqslant 4\\
&-4 \leqslant 3 - |1+a| \leqslant 4\\
&-7 \leqslant -|1+a| \leqslant 1\\
&7 \geqslant |1+a| \geqslant 1\\
&a \in [-8; 6]
\end{aligned}$$

4 Графика

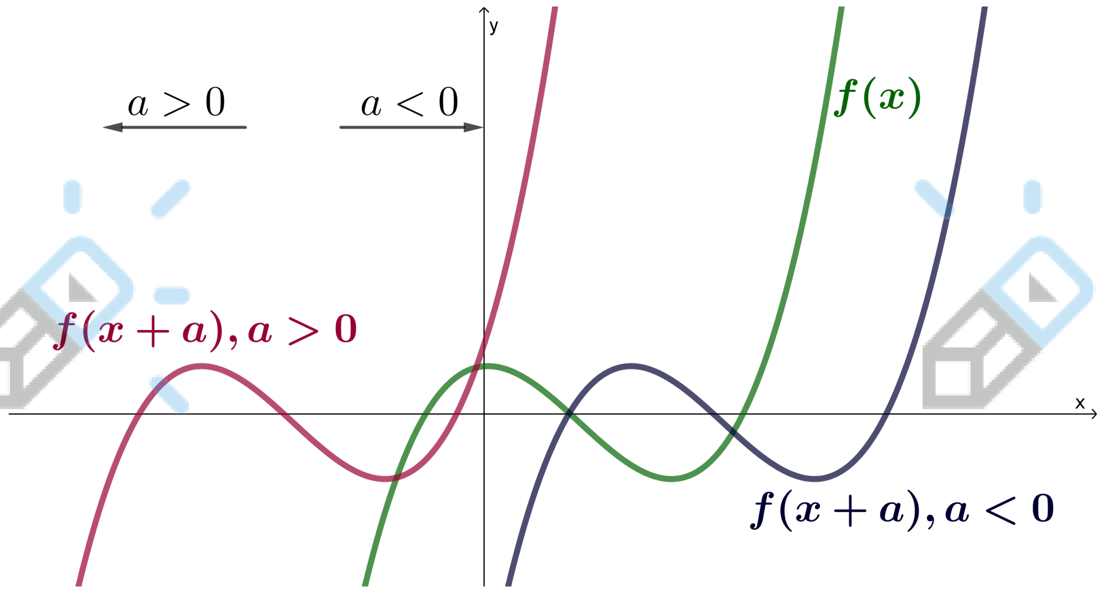
4.1 Основные свойства построения графиков

• График функции $f(x)+b$ получается из графика функции $f(x)$ путем поднятия на b единиц вверх по оси Oy, если $b>0$, и опускания на $|b|$ единиц вниз по оси Oy, если $b<0$.



Пример. Чтобы построить график функции $y=x^2+2$, нужно параболу $y=x^2$ поднять на 2 единицы вверх. Чтобы построить график функции $y=\sin x-3$, нужно синусоиду $y=\sin x$ опустить на 3 единицы вниз.

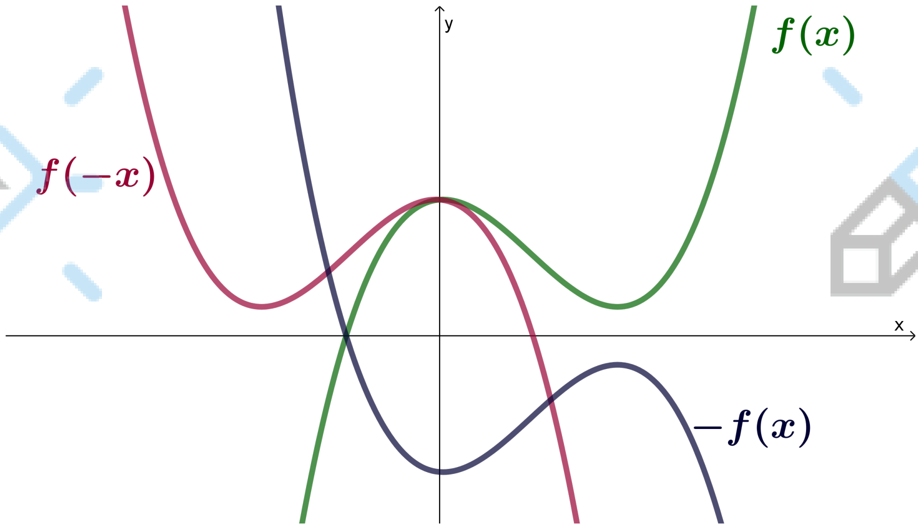
• График функции $f(x+a)$ получается из графика функции $f(x)$ путем сдвига на a единиц влево по оси Ox, если $a>0$, и сдвига на $|a|$ единиц вправо по оси Ox, если $a<0$.



Таким образом, число точек пересечения графика функции $f(x+a)$ будет таким же, как и у графика $f(x)$.

Пример. Чтобы построить график функции $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right)$, нужно график функции $y = \cos x$ сдвинуть на $\frac{\pi}{5}$ единиц влево. Чтобы построить график функции $y = (x-5)^5$, нужно график функции $y = x^5$ сдвинуть на 5 единиц вправо.

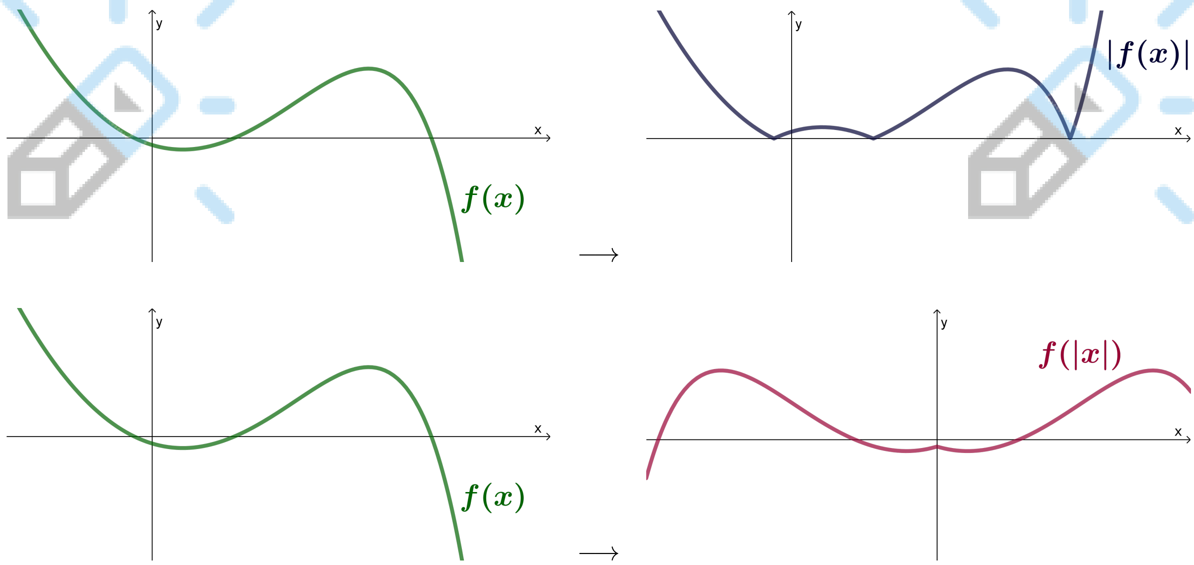
• График функции $-f(x)$ получается из графика функции $f(x)$ отражения симметрично относительно оси Ox. График функции $f(-x)$ получается из графика функции $f(x)$ путем отражения симметрично относительно оси Oy.



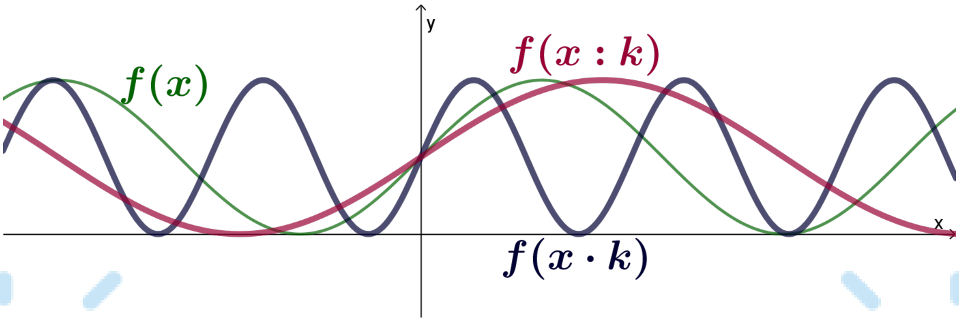
Соответственно график $-f(x)$ пересекает ось Ox в тех же точках, что и график $f(x)$. График $f(-x)$ пересекает ось Oy в тех же точках, что и график $f(x)$.

Пример. Чтобы построить график функции $y = -x^2$, нужно параболу $y = x^2$ отразить симметрично относительно оси Ox. Чтобы построить график $y = \ln(-x)$, нужно график $y = \ln x$ отразить симметрично относительно оси Oy.

• График функции $|f(x)|$ получается из графика функции $f(x)$ отражением той части графика, что находится ниже оси Ox, симметрично относительно оси Ox. График функции $f(|x|)$ получается из графика функции $f(x)$ путем отражения той части графика, что находится правее оси Oy, симметрично относительно оси Oy.

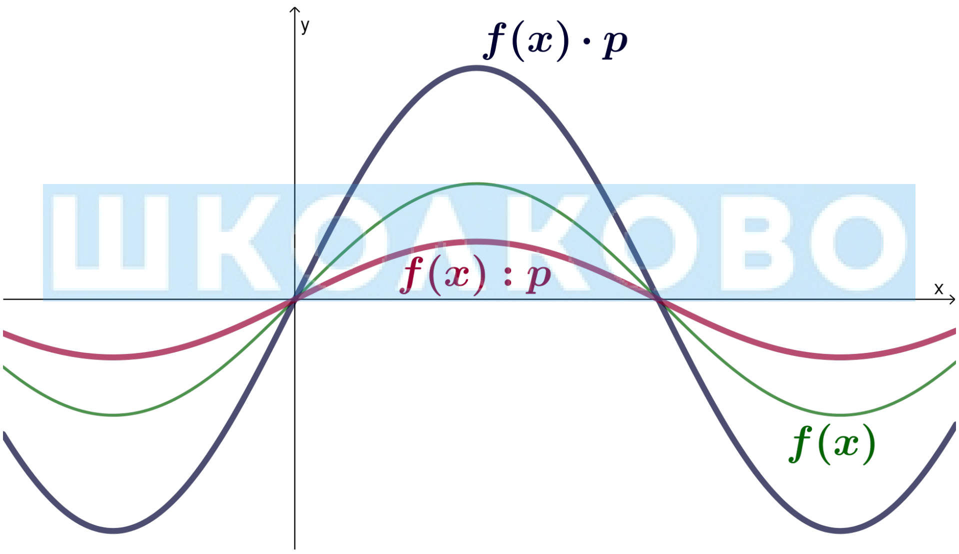


• График функции $f(x \cdot k)$ получается из графика функции $f(x)$ путем сжатия его в k раз к оси Oy, если $k > 1$. График функции $f(x : k)$ получается из графика функции $f(x)$ путем растяжения в k раз от оси Oy, если $k > 1$.



В таком случае область значений функции $f(x \cdot k)$, как и $f(x : k)$, остается такой же, как и у функции $f(x)$. Точки пересечения графиков с осью Oy также остаются неизменными.

• График функции $f(x) \cdot p$ получается из графика функции $f(x)$ путем растяжения его в p раз от оси Ox, если $p > 1$. График функции $f(x) : p$ получается из графика функции $f(x)$ путем сжатия в p раз к оси Ox, если $p > 1$.



В таком случае область определения функции $f(x \cdot k)$, как и $f(x : k)$, остается такой же, как и у функции $f(x)$. Точки пересечения графиков с осью Ox остаются неизменными.

Как построить график функции $p \cdot f(kx+a)+b$, базируясь на функции $f(x)$?

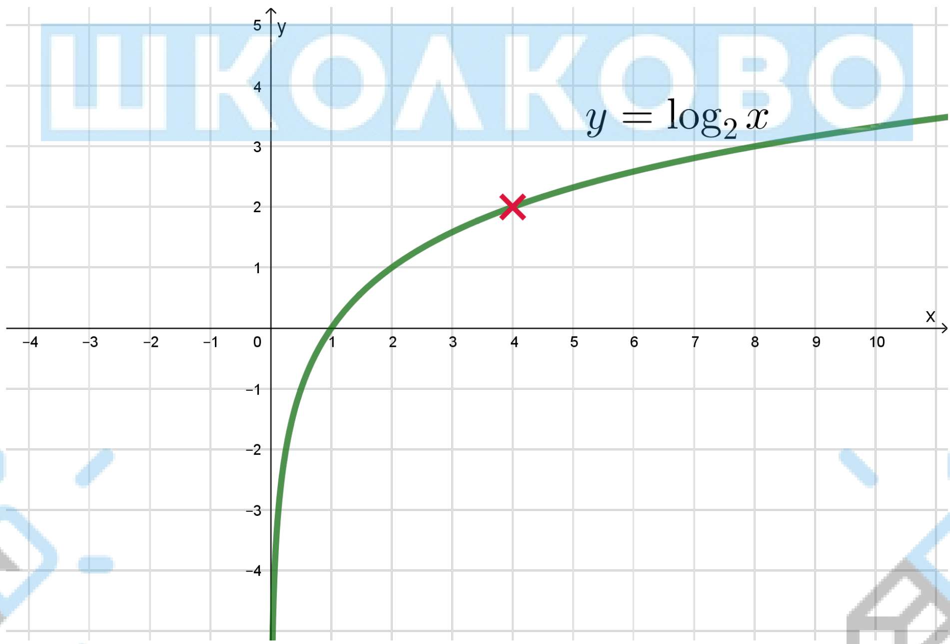
1) Выполняем все преобразования, связанные с **аргументом**: сначала делаем сложение, то есть сдвигаем график вправо/влево на $|a|$ по оси Ox. Получаем график $f(x+a)$. Затем делаем умножение на k, то есть сжимаем/растягиваем график к/от оси Oy. Получаем график функции $f(kx+a))$.

2) Выполняем все преобразования, связанные с **функцией**. Сначала делаем умножение на p, то есть сжимаем/растягиваем график к/от оси Ox. Получаем график $p \cdot f(kx+a)$. Затем делаем сложение, то есть сдвигаем график вверх/вниз по оси Oy. Получаем график функции $p \cdot f(kx+a)+b$.

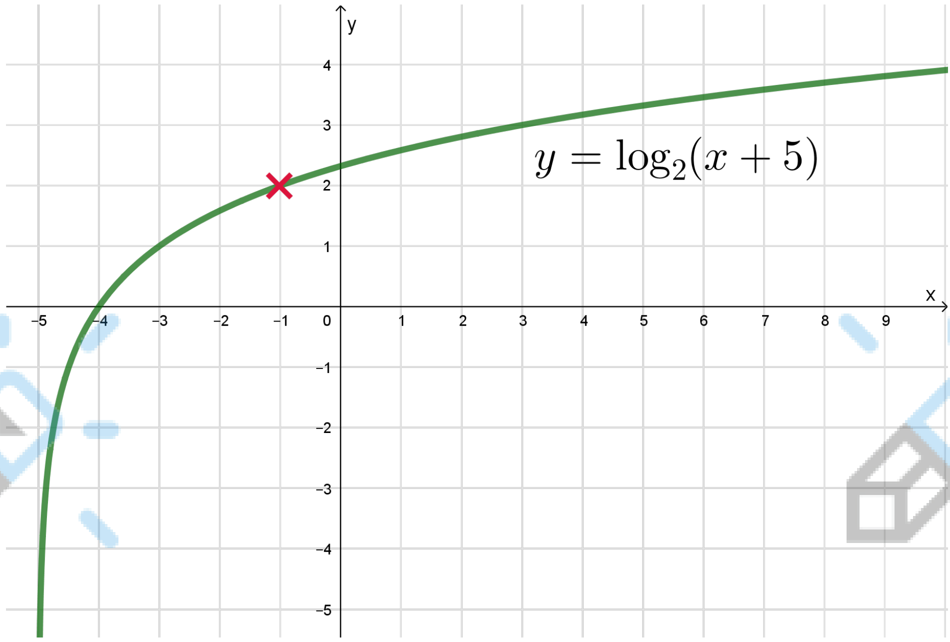
Заметим, что все действия с аргументом "цепляются" именно к переменной x! Соответственно, если вы хотите получить, например, в аргументе $-2|x|+1$, то нужно сделать сначала $x+1$ (сдвинуть на 1 влево по Ox), затем $2x+1$ (уменьшить координаты x всех точек в 2 раза), затем $2\cdot(-x)+1=-2x+1$ (отразить график симметрично относительно Oy), затем $-2|x|+1$ (отразить часть графика, находящую правее Oy, симметрично относительно Oy).

Как и в начальной математике, в первую очередь делаются действия в скобках, затем умножение, затем сложение. Поэтому сначала делаем действия с аргументом (он в скобках). Затем переходим к функции.

Пример. Построить график функции $y=-\frac{1}{2}\log_2(2x+5)+4$.
Будем строить график этой функции, опираясь на функцию $y=\log_2 x$.

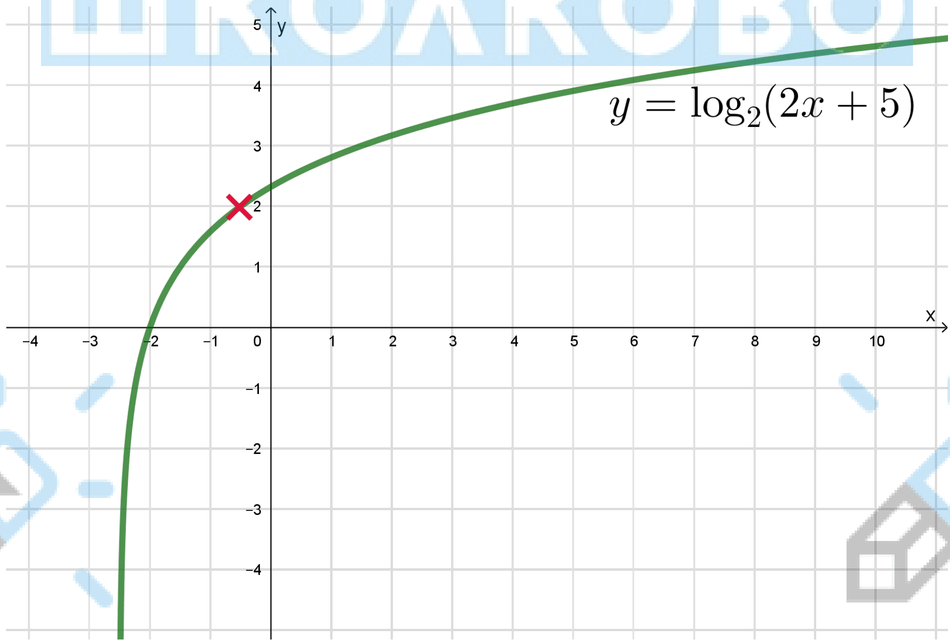


1) Строим график функции $y = \log_2(x+5)$. Сдвигаем график на 5 единиц влево по оси Ox:



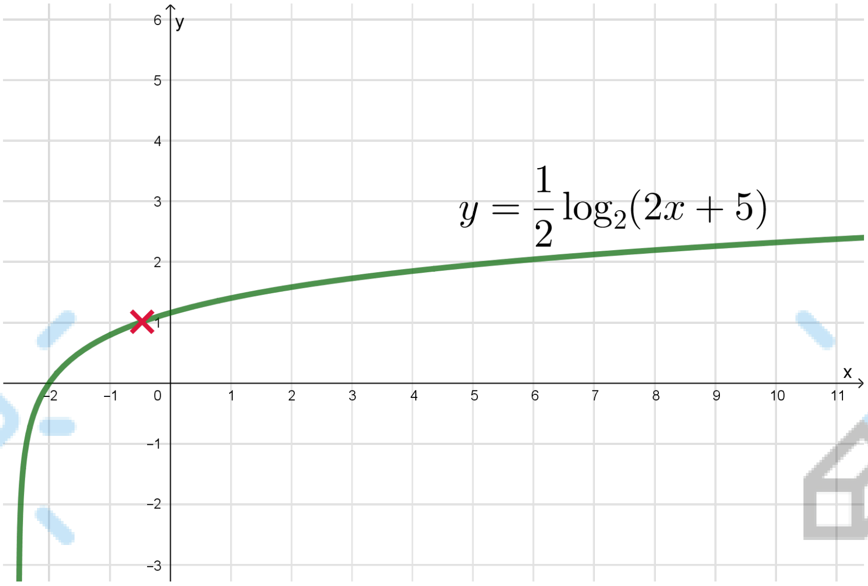
Как это делать: фиксируем несколько точек. Не меняя у этих точек координату y, уменьшаем координату x на 5. Таким образом, если график $y = \log_2(x)$ проходил через точку $(4; 2)$, то график $y = \log_2(x+5)$ будет проходить через точку $(4-5; 2) = (-1; 2)$.

2) Строим график функции $y = \log_2(2x+5)$. Сжимаем график $y = \log_2(x+5)$ в 2 раза к оси Oy:



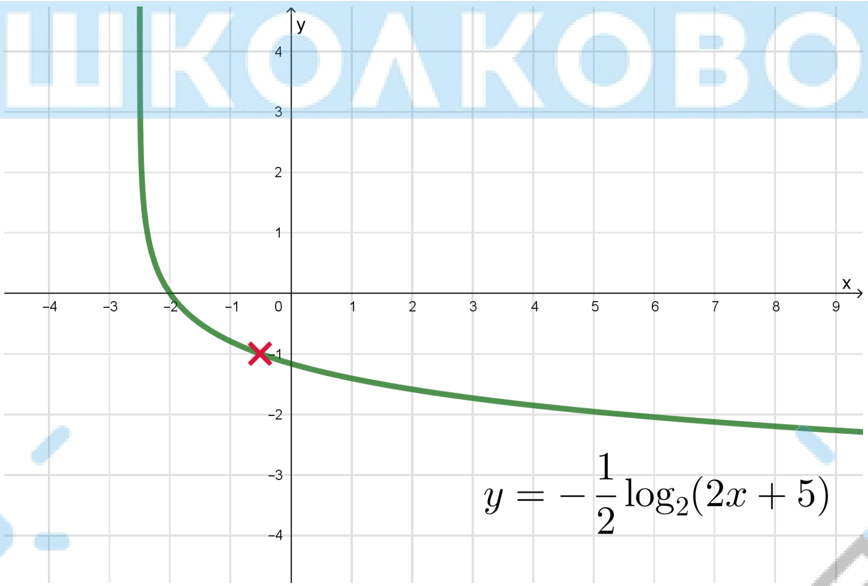
Как это делать: фиксируем несколько точек. Не меняя у этих точек координату y, уменьшаем координату x в 2 раза. Таким образом, если график $y = \log_2(x+5)$ проходил через точку $(-1; 2)$, то график $y = \log_2(2x+5)$ будет проходить через точку $(-1:2; 2) = (-0,5; 2)$.

3) Строим график функции $y = \frac{1}{2}\log_2(2x+5)$. Сжимаем предыдущий график в 2 раза к оси Ox:



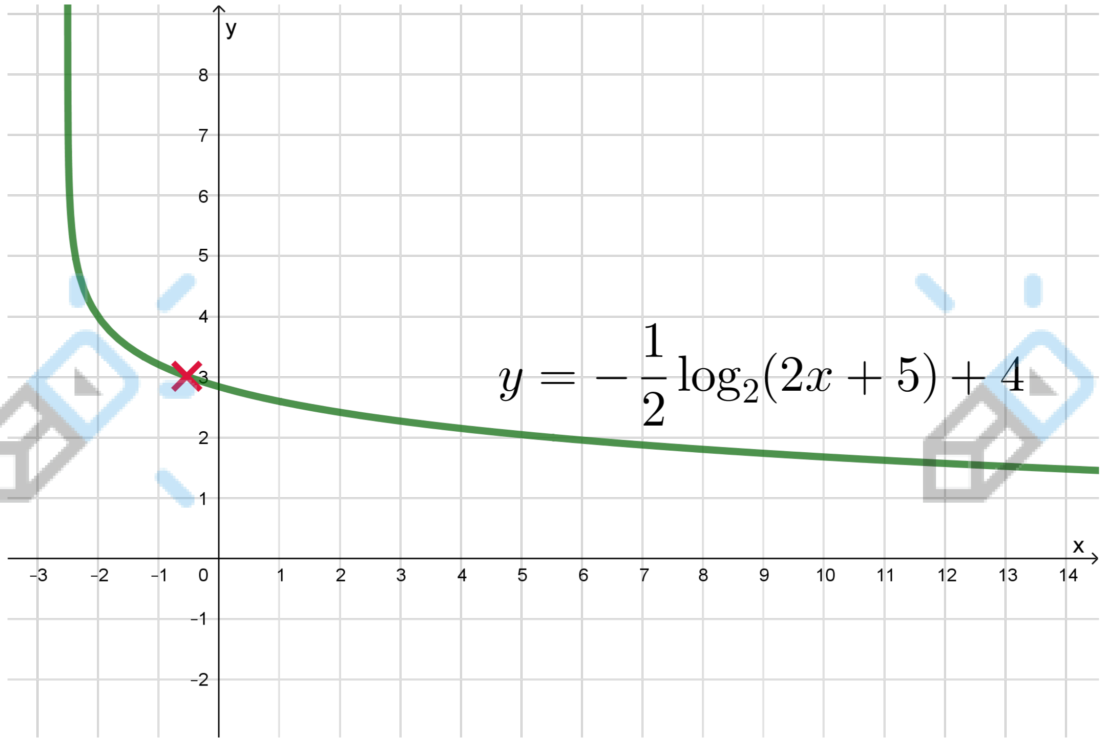
Как это делать: фиксируем несколько точек. Не меняя у этих точек координату x, уменьшаем координату y в 2 раза. Таким образом, если график $y = \log_2(2x+5)$ проходил через точку $(-0,5;2)$, то график $y = \frac{1}{2}\log_2(2x+5)$ будет проходить через точку $(-0,5;2:2) = (-0,5;1)$.

4) Строим график функции $y = -\frac{1}{2}\log_2(2x+5)$. Отражаем предыдущий график относительно оси Ox.



Как это делать: фиксируем несколько точек. Не меняя у этих точек координату x, координату y умножаем на -1. Таким образом, если график $y = \frac{1}{2}\log_2(2x+5)$ проходил через точку $(-0,5;1)$, то график $y = -\frac{1}{2}\log_2(2x+5)$ будет проходить через точку $(-0,5;-1)$.

5) Строим график функции $y = -\frac{1}{2}\log_2(2x+5)+4$. Поднимаем предыдущий график на 4 единицы вверх по оси Oy:

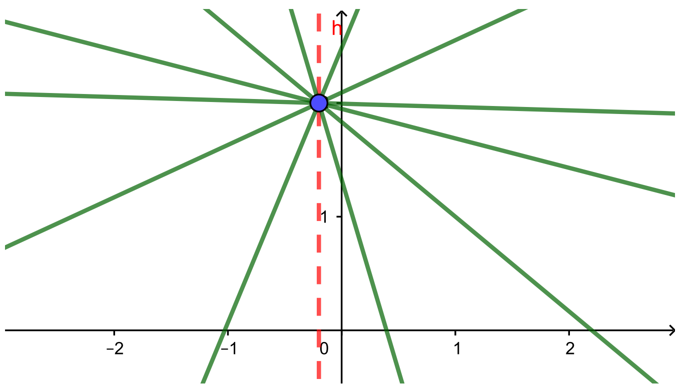


Как это делать: фиксируем несколько точек. Не меняя у этих точек координату x, координату y увеличиваем на 4. Таким образом, если график $y = -\frac{1}{2}\log_2(2x+5)$ проходил через точку $(-0,5;-1)$, то график $y = -\frac{1}{2}\log_2(2x+5)+4$ будет проходить через точку $(-0,5;-1+4) = (-0,5;3)$.

4.2 Пучок прямых

$$y = 5ax + 2 + a = 5a\left(x+\frac{1}{5}\right)+2$$

При любом фиксированном a мы получим уравнение прямой, более того, любая такая прямая будет проходить через точку $(-\frac{1}{5};2)$, т.к. если мы подставим $x = -\frac{1}{5}, y = 2$ в уравнение, то независимо от a левая часть будет тождественно равна правой. То есть семейство таких функций — это семейство прямых, проходящих через точку $(-\frac{1}{5};2)$ с произвольными угловыми коэффициентами (т.к. a может быть любым), за исключением вертикальной прямой h (обозначена красным). Такое семейство называют пучком прямых.



4.3 Задачи

№4 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{-7 - 8x - x^2} = 2a + 3$$

имеет единственное решение.

Решение

Преобразуем уравнение

$$\sqrt{-7 - 8x - x^2} = -a(x - 2) + 3$$

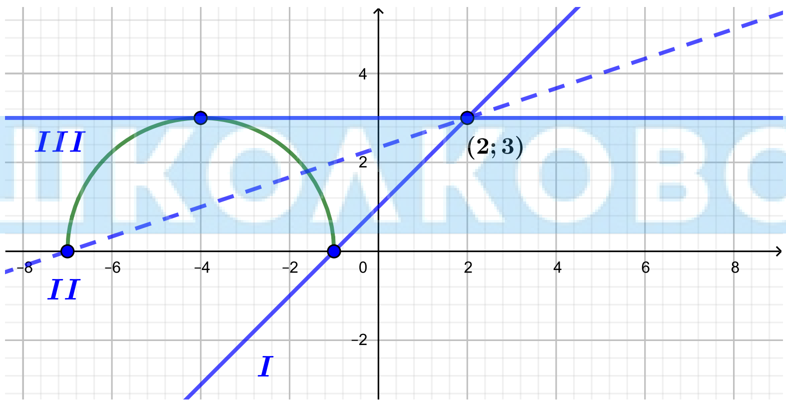
Справа имеем пучок прямых через точку $(2; 3)$.

Преобразуем левую часть

$$y = \sqrt{-7 - 8x - x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y^2 = -7 - 8x - x^2 \\ y \geqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y^2 + x^2 + 8x + 16 = 9 \\ y \geqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x + 4)^2 + y^2 = 3^2 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

Это полуокружность, лежащая в положительной полуплоскости с центром $(-4; 0)$ и радиусом 3.

Построим графики.



Очевидно, что положения прямой не между I и III нам не подходят, потому что не пересекают полуокружность. Между положениями I и II, не включая положение II, будет ровно одна точка пересечения. Между положениями II и III, включая положение II будет две точки пересечения. В положении III будет одна точка пересечения. Осталось найти значения a, соответствующие положениям I, II и III.

Положению III соответствует $a = 0$, т.к. радиус окружности равен расстоянию от точки $(2; 3)$ до оси Ox (то есть касательная параллельна оси Ox).

В положении II прямая проходит через точку $(-7; 0)$, найдем a, подставив эту пару в уравнение прямой

$$-a(-7 - 2) + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{1}{3}$$

В положении II прямая проходит через точку $(-1; 0)$, найдем a, подставив эту пару в уравнение прямой

$$-a(-1 - 2) + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -1$$

Тогда ответ

$$a \in \left[-1; -\frac{1}{3}\right) \cup \{0\}$$

№2 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений неравенства

$$\sqrt{5-x} \leqslant 3-|x-a|$$

является отрезок.

Решение

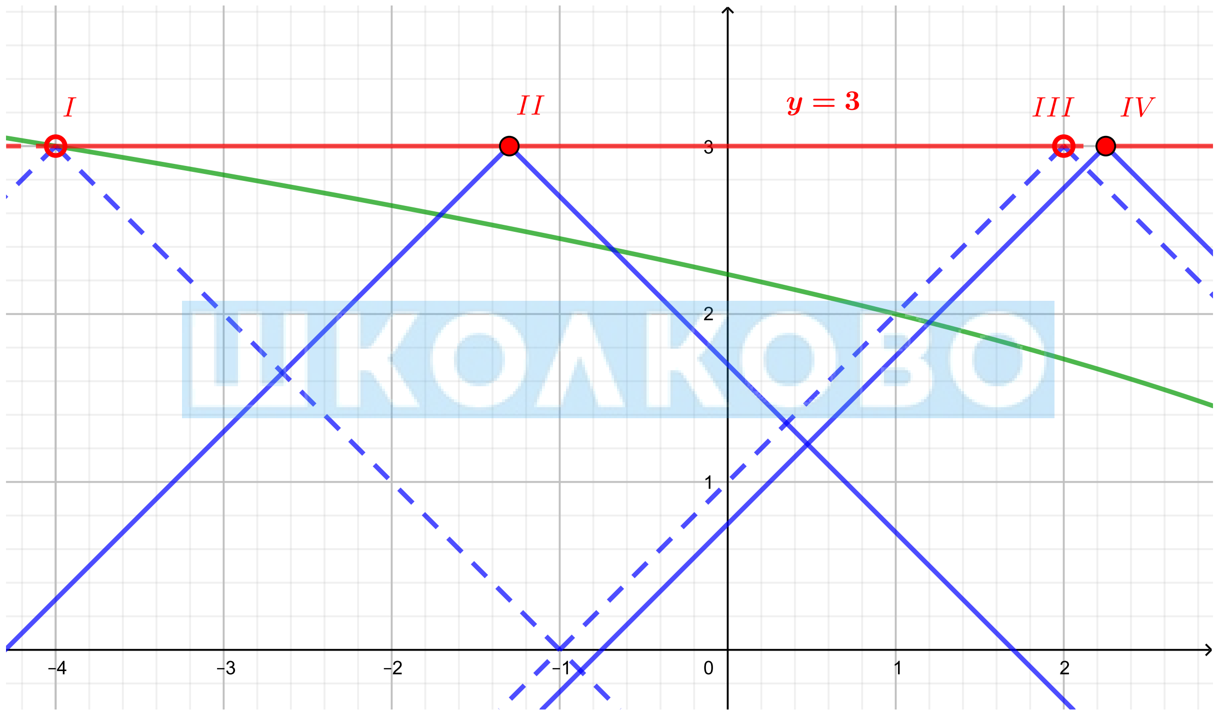
Обозначим

$$f(x)=\sqrt{5-x}; \qquad g(x)=3-|x-a|$$

График g — это отраженный относительно оси ординат график корня, сдвинутый на 5 вправо, график f — уголок ветвями вниз с вершиной в точке с координатами $(a;3)$ (то есть его вершина может лежать в произвольной точке прямой $y=3$).

Множество решений неравенства — это множество таких точек x_0 на оси Ox, в которых $g(x_0)\geqslant f(x_0)$, или, иначе говоря, функция g «выше» функции f.

Построим графики.



На самом деле, множество решений — это проекции части графика корня, которая лежит внутри нашего уголка, на ось абсцисс. Нам нужно, чтобы эта проекция была отрезком.

Левее положения I ни одна точка графика корня не лежит внутри уголка, значит решений нет.

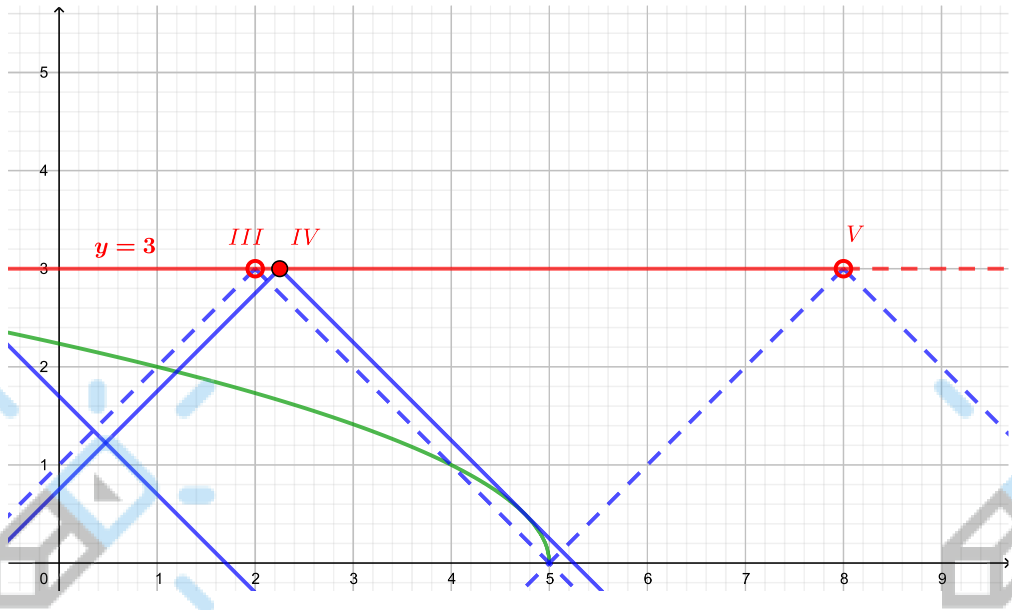
В положении I ровно одно решение.

Между положениями I и III (не включая их) проекцией непрерывного кусочка графика корня, который лежит внутри уголка, будет как раз отрезок. Для наглядности изображен частный случай — положение II.

Положению III соответствует уголок, правая ветвь которого проходит через точку «начала» графика корня $(5;0)$. В этом положении проекцией части графика корня, лежащей внутри уголка, будут отрезок и точка, что нам не подходит.

Между положениями III и IV (не включая их) уголок будет высекать из графика корня два несвязных кусочка, их проекции на ось абсцисс будут двумя непересекающимися отрезками, что нам снова не подходит.

Продолжение графика.



В положении IV правая сторона уголка касается графика корня, и внутри уголка снова оказывается непрерывная его часть с проекцией, являющейся отрезком. Это верно вплоть до положения V (не включая его), когда внутри уголка остается лишь одна точка графика корня.

Осталось найти a, которые соответствуют перечисленным положениям уголка.

В положении $I : 3 = \sqrt{5-x} \Rightarrow x = -4 = a$.

В положении II правая сторона уголка (т.е. $x \geqslant a$, модуль раскрывается с плюсом) проходит через точку $(5; 0)$.

$$0 = -5 + a + 3 \quad \Rightarrow \quad a = 2$$

В положении V левая сторона уголка (т.е. $x \leqslant a$, модуль раскрывается с минусом) проходит через точку $(5; 0)$.

$$0 = 5 - a + 3 \quad \Rightarrow \quad a = 8$$

В положении IV правая сторона уголка с уравнением $y = -x + a + 3$ касается графика корня.

$$\begin{cases} -x + a + 3 = \sqrt{5-x} \\ -1 = \frac{-1}{2\sqrt{5-x}} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + a + 3 = \sqrt{5-x} \\ x = 4\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$-4\frac{3}{4} + a + 3 = \sqrt{5 - 4\frac{3}{4}} \quad \Leftrightarrow \quad a = 2,25$$

Подставив вместо положений значения a, получим ответ

$$a \in (-4; 2) \cup [2,25; 8)$$

№1 При каких a уравнение

$$2|x - 2a| - a^2 + 15 + x = 0$$

не имеет решений?

Решение

Преобразуем уравнение

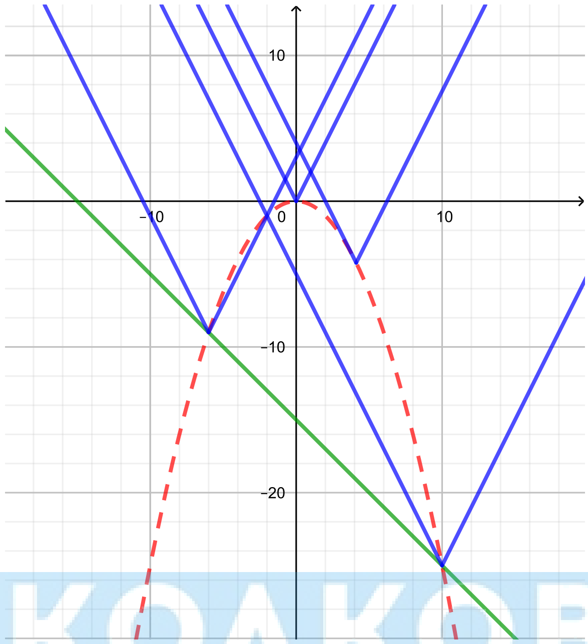
$$2|x - 2a| - a^2 = -x - 15$$

Правая часть это прямая, а левая — галочка ветвями наверх, растянутая вдвое вдоль оси ординат, с вершиной в точке $(2a; -a^2)$. Найдем траекторию вершины галочки

$$\begin{cases} x = 2a \\ y = -a^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = \frac{x}{2} \\ y = -\frac{1}{4}x^2 \end{cases}$$

Таким образом, вершина галочки может лежать в произвольной точке параболы $y = -\frac{1}{4}x^2$.

Построим графики.



В качестве вершины галочки нам подойдет любая точка красной параболы, лежащая строго выше зеленой прямой, тогда уравнение не будет иметь решений.

$$-\frac{1}{4}x^2 > -x - 15 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-6; 10)$$

При этом $x = 2a$, значит, ответ

$$a \in (-3; 5)$$

5 Задачи формата ЕГЭ

№4 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = ax - a - 1 + |x^2 - 4x + 3|$$

меньше -2.

Решение

Переформулируем задачу. Данная в условии формулировка эквивалентна следующей: найти все значения параметра a, при которых неравенство

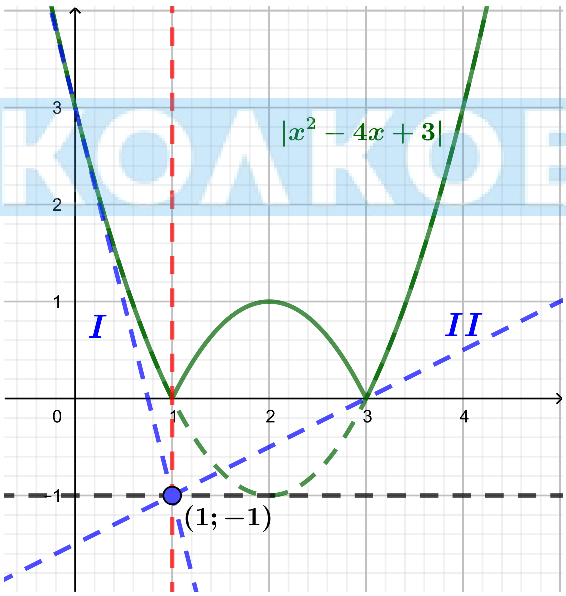
$$ax - a - 1 + |x^2 - 4x + 3| < -2$$

имеет хотя бы одно решение.

Перепишем полученное неравенство в следующем виде

$$|x^2 - 4x + 3| < a(1 - x) - 1$$

Справа имеем пучок прямых через точку $(1; -1)$, слева парабола под модулем.



Очевидно, что для любой прямой между положениями I и II некоторая часть зеленого графика будет ниже этой прямой, то есть наше неравенство будет иметь решения. В остальных положениях прямая будет целиком ниже зеленого графика. Также не забываем, что вертикальная прямая не задается пучком.

В положении II прямая проходит через точку $(3; 0)$, найдем a, при котором это достигается

$$0 = a(1 - 3) - 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{1}{2}$$

Тогда угол между положением II и красной прямой достигается при $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ (коэффициент при x равен $-a$, поэтому при убывании a угловой коэффициент возрастает).

Теперь найдем a, при котором прямая касается параболы. Рассмотрим обычную параболу без модуля, а затем выкинем лишнее положение, которого нет для отраженной версии параболы.

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 = a(1-x) - 1 \\ (x^2 - 4x + 3)' = (a(1-x) - 1)' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4 - a(1-x) = 0 \\ 2x - 4 = -a \end{cases}$$

$$x^2 - 4x + 4 + (2x-4)(1-x) = 0$$

$$-x^2 + 2x = 0$$

$$x = 0; 2$$

При $x = 2$ y-координата точки касания будет равна

$$2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1,$$

то есть именно это решение уравнения дает нам горизонтальную прямую и не интересует нас, т.к. такая касательная не является касательной отраженной версии параболы (на графике обозначена черным пунктиром).

При $x = 0$ y-координата точки касания будет равна 3. Найдем a, при котором прямая $y = a(1-x) - 1$ проходит через точку $(0; 3)$.

$$3 = a(1-0) - 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = 4$$

При $a > 4$ прямая будет лежать между положением I и красной прямой, это как раз те случаи, которые нам нужны (коэффициент при x равен $-a$, поэтому при возрастании a угловой коэффициент убывает).

Объединяя ответы, получим

$$a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (4; +\infty)$$

<u>№3</u> Найдите все значения параметра a, при каждом из которых существует хотя бы одна пара чисел x и y, удовлетворяющая неравенству

$$4|x+3| + 3|x-a| \leqslant \sqrt{16 - y^2} + 2$$

Решение

Допустим, нам дали некоторое фиксированное a, и мы хотим найти пару $(x; y)$ такую, что неравенство выполняется. x и y мы можем выбирать независимо, поэтому очевидно, что нам всегда выгодно выбрать такое y, при котором правая часть максимальна. Действительно, ведь если даже при таком y (для которого правая часть максимальна) не найдется x, для которого неравенство выполняется, то не найдется и для остальных. Очевидно, что правая часть достигает своего максимума 6 при $y = 0$.

Осталось найти a, для которых существует x, при котором левая часть не больше 6.

Обозначим $f(x) = 4|x+3| + 3|x-a|$. По методу главного модуля видим, что знак коэффициента при x зависит только от раскрытия первого модуля, т.е. при $x < -3$ коэффициент будет отрицателен, и функция будет убывать, а при $x > -3$ коэффициент будет положителен, и функция будет возрастать. Таким образом при $x = -3$ достигается глобальный минимум функции f. Осталось найти a, при которых этот глобальный минимум не превосходит 6.

$$
\begin{aligned}
&f(-3) \leqslant 6\\
&4|-3+3|+3|-3-a| \leqslant 6\\
&|-3-a| \leqslant 2\\
&-2 \leqslant -3-a \leqslant 2\\
&a \in [1;5]
\end{aligned}
$$

№6 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых при любом значении параметра b следующая система имеет хотя бы одно решение:

$$
\begin{cases}
2(1+|y|)^a + (b^2-2b+2)^z = 3\\
zy(z+b-1) = 2a^2-3a+1
\end{cases}
$$

Решение

Нас интересуют a, при которых система имеет решение независимо от выбора b. Выберем какое-нибудь конкретное $b = b_0$ и посмотрим, при каких a система будет иметь решения. Это поможет сократить диапазон поиска, ведь если для некоторого a при $b = b_0$ система не имеет решения, то такое a нам точно не подходит.

Попробуем выбрать $b = 1$. Получим систему

$$
\begin{cases}
2(1+|y|)^a + (1^2-2\cdot 1+2)^z = 3\\
zy(z+1-1) = 2a^2-3a+1
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
2(1+|y|)^a + 1 = 3\\
z^2y = 2a^2-3a+1
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
(1+|y|)^a = 1\\
z^2y = 2a^2-3a+1
\end{cases}
$$

Рассмотрим два случая:

I. $a = 0$

В этом случае решением первого уравнения будет любой y, при котором основание степени не обращается в 0, т.е. $y \in \mathbb{R}$.

Второе уравнение обратится в $z^2y = 1$, очевидно, что найдутся пары $(y; z)$, которые ему удовлетворяют.

Таким образом, $a = 0$ *потенциально* может войти в ответ.

II. $a \neq 0$

В этом случае основание степени в левой части первого уравнения обязано равняться 1, т.к. иначе $1+|y| \neq 1$ в ненулевой степени никогда не будет равно единице. Значит, $y = 0$.

Посмотрим на второе уравнение, при $y = 0$ оно примет вид

$$
0 = 2a^2-3a+1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{2}; 1
$$

Значит, только $a = \frac{1}{2}$ и $a = 1$ добавляются в список *потенциальных* ответов.

Теперь для каждого из трех потенциальных ответов нужно проверить, что система будет иметь решение для любого b, если для какого-то b это неверно, то такой потенциальный ответ должен быть исключен.

I. $a = 0$

Система примет вид

$$\begin{cases}(b^2-2b+2)^z=1\\ zy(z+b-1)=1\end{cases}$$

При $b\neq 1$ основание степени в первом уравнении не будет равно 1, тогда показатель степени обязан быть равен 0. Однако тогда второе уравнение обратится в неверное равенство $0=1$, значит, $a=0$ не прошло проверку.

II. $a=1$

Система примет вид

$$\begin{cases}2(1+|y|)^1+(b^2-2b+2)^z=3\\ zy(z+b-1)=2\cdot 1^2-3\cdot 1+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(b^2-2b+2)^z=1-2|y|\\ zy(z+b-1)=0\end{cases}$$

В этом случае независимо от b решением системы будет пара $y=0, z=0$. Значит, $a=1$ можем добавить в ответ.

III. $a=\frac{1}{2}$

Система примет вид

$$\begin{cases}2(1+|y|)^{\frac{1}{2}}+(b^2-2b+2)^z=3\\ zy(z+b-1)=2\cdot\frac{1}{4}-3\cdot\frac{1}{2}+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(1+|y|)^{\frac{1}{2}}+(b^2-2b+2)^z=3\\ zy(z+b-1)=0\end{cases}$$

В этом случае тоже независимо от b решением системы будет пара $y=0, z=0$. Поэтому $a=\frac{1}{2}$ идет в ответ.

Итого, ответ

$$a\in\left\{1;\frac{1}{2}\right\}$$