ИНТЕНСИВ ПО ПАРАМЕТРАМ. Домашнее задание №5
Задачи формата ЕГЭ

---

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$25^x - (a+6)\cdot 5^x = (5+3|a|)\cdot 5^x - (a+6)(3|a|+5)$$

имеет единственное решение.

$\boxed{a \in (-\infty; -6] \cup \{-0,25; 0,5\}}$

Решение

Сделаем замену $t = 5^x, t > 0$ и перенесем все слагаемые в одну часть:

$$t^2 - \Big((a+6) + (5+3|a|)\Big)\cdot t + (a+6)(3|a|+5) = 0$$

Получили квадратное уравнение, корнями которого по теореме Виета являются $t_1 = a+6$ и $t_2 = 5+3|a|$. Для того, чтобы исходное уравнение имело один корень, достаточно, чтобы полученное уравнение с t тоже имело один (положительный!) корень.

Заметим сразу, что t_2 при всех a будет положительным. Таким образом, получаем два случая:

1) $t_1 = t_2$:

$$a+6 = 5+3|a| \quad \Leftrightarrow \quad 3|a| = a+1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3a = a+1 \\ 3a = -a-1 \end{array}\right. \\ a+1 \geqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{1}{2} \\ a = -\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$$

2) Так как t_2 всегда положителен, то t_1 должен быть $\leqslant 0$:

$$a+6 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \leqslant -6.$$

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$|x - a^2 + 4a - 2| + |x - a^2 + 2a + 3| = 2a - 5$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $[5; 23]$.

$\boxed{4 \leqslant a \leqslant 7}$

Решение

Так как $|-x| = |x|$, то уравнение можно переписать в виде

$$|x - a^2 + 4a - 2| + |-x + a^2 - 2a - 3| = 2a - 5$$

Заметим, что сумма подмодульных выражений равна $2a - 5$. Как известно, для любых A и B верно: $|A| + |B| \geqslant |A + B|$ (причем равенство достигается, если A и B одного знака или кто-то из них равен 0).

Следовательно, для левой части нашего равенства верно

$$|x - a^2 + 4a - 2| + |-x + a^2 - 2a - 3| \geqslant |2a - 5| \geqslant 2a - 5$$

Следовательно, равенство возможно тогда и только тогда, когда:

$$\begin{cases} (x - a^2 + 4a - 2)(-x + a^2 - 2a - 3) \geqslant 0 \\ 2a - 5 \geqslant 0 \end{cases}$$

Рассмотрим первое неравенство при $a \geqslant 2,5$:

$$(x - (a^2 - 4a + 2))(x - (a^2 - 2a - 3)) \leqslant 0$$

Заметим, что $(a^2 - 4a + 2) - (a^2 - 2a - 3) = -2a + 5 \leqslant 0$ при $a \geqslant 2,5$. Следовательно, решением неравенства будут $x \in [a^2 - 4a + 2; a^2 - 2a - 3]$. Условие задачи будет выполняться, если данный отрезок (который вырождается в точку при $a = 2,5$) будет иметь пересечение с отрезком $[5; 23]$. Для этого нужно:

$$\begin{cases} a^2 - 4a + 2 \leqslant 23 \\ a^2 - 2a - 3 \geqslant 5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a \in [-3; -2] \cup [4; 7]$$

Учитывая, что $a \geqslant 2,5$, получаем $a \in [4; 7]$.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$\boxed{a \in \{\pm\sqrt{2}\}}$

Решение

Так как $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$, то система равносильна

$$\begin{cases} xy = \dfrac{a^2 - 1}{2} \\ x + y = a \end{cases}$$

Данная система будет иметь единственное решение, если единственное решение будет иметь следующее квадратное уравнение (обратная теорема Виета):

$$t^2 - at + \frac{a^2 - 1}{2} = 0$$

Следовательно, его дискриминант должен быть равен нулю. Значит,

$$D = a^2 - 2(a^2 - 1) = -a^2 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \pm\sqrt{2}$$