ТИПЫ ЗАДАЧ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО
ДОКАЖИТЕ, ЧТО...

1) ПРЯМЫЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫ	- теорема Фалеса (2) - подобие (2) - признаки параллельности прямых
2) ПРЯМАЯ ПАРАЛЛЕЛЬНА ПЛОСКОСТИ	ПРИЗНАК ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ (5) (Найти в плоскости прямую, параллельную данной)
3) ПЛОСКОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫ	ПРИЗНАК ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПЛОСКОСТЕЙ (5) (две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости)
4) ПРЯМЫЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫ	- теорема о трех перпендикулярах (6) - одна прямая перпендикулярна плоскости, в которой лежит другая (6) - координатно (скалярное произведение равно нулю) (7)
5) ПРЯМАЯ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНА ПЛОСКОСТИ	ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ (6) (прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым из плоскости)
6) ПЛОСКОСТИ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫ	ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПЛОСКОСТЕЙ (6) (одна плоскости содержит в себе перпендикуляр к другой плоскости)
7) ПЛОСКОСТЬ ДЕЛИТ ОТРЕЗОК В ОТНОШЕНИИ...	- теорема Фалеса (2) - подобие (2) - теорема Менелая (2)

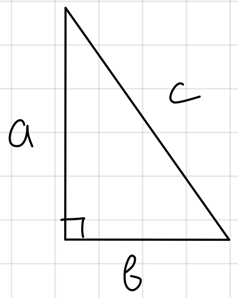
ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЯ
НАЙДИТЕ...

1) УГОЛ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ (9)	- геометрически: построить пересекающиеся прямые, параллельные данным и найти угол по теореме косинусов из треугольника - координатно: по формуле косинуса угла между векторами - если прямые перпендикулярны, то доказать это
2) УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ (9)	- геометрически: это угол между прямой и ее проекцией на плоскость - координатно: найти угол между прямой и нормалью к плоскости - если прямая перпендикулярна плоскости, то доказать это
3) УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ (10)	- геометрически: угол между перпендикулярами к линии пересечения - координатно: угол между нормалями - метод площадей: отношение площади проекции фигуры и площади самой фигуры
4) РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ (11)	геометрически: длина высоты треугольника, составленного из точки и прямой
5) РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ (11)	- геометрически: длина перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость - координатно: формул расстояния от точки до плоскости - метод объемов: через объем пирамиды
6) РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ (12)	- геометрически: длина общего перпендикуляра к прямым - через одну прямую провести плоскость, параллельную другой прямой и свести к расстоянию от точки до плоскости
7) ПЛОЩАДЬ СЕЧЕНИЯ (13)	- сумма площадей стандартных фигур - через площадь проекции и косинус угла наклона сечения к основанию
8) ОБЪЕМ МНОГОГРАННИКА (ЧАСТЕЙ МНОГОГРАННИКА) (14)	- формулы объемов стандартных многогранников - свойства объемов

от @prosto_math

ПЛАНИМЕТРИЯ

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА



$a^2+b^2=c^2$

$c=\sqrt{a^2+b^2}$

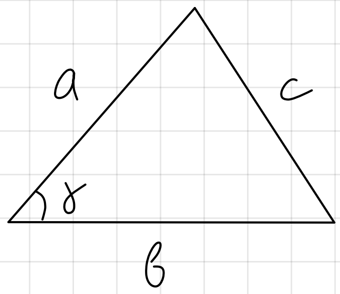
$a=\sqrt{c^2-b^2}$

$b=\sqrt{c^2-a^2}$

ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

$a^2+b^2=c^2 \Rightarrow \Delta$ прямоугольный

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ



$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$

$\cos\gamma=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

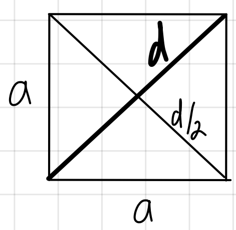
$\cos\gamma=0 \Rightarrow \gamma$ – прямой

$\cos\gamma>0 \Rightarrow \gamma$ – острый

$\cos\gamma<0 \Rightarrow \gamma$ – тупой

КВАДРАТ

Все стороны a
Все углы 90°

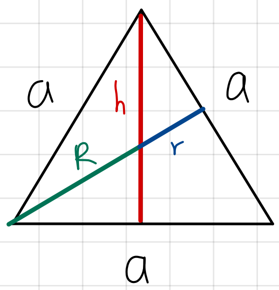


$d=a\sqrt{2}$

$\dfrac{d}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

ПРАВИЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Все стороны a
Все углы 60°



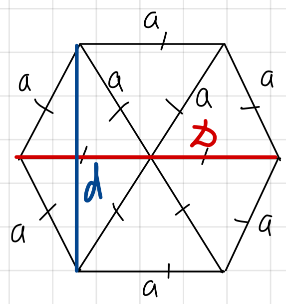
$h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$R=\dfrac{2}{3}h=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

$r=\dfrac{1}{3}h=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

ПРАВИЛЬНЫЙ ШЕСТИУГОЛЬНИК

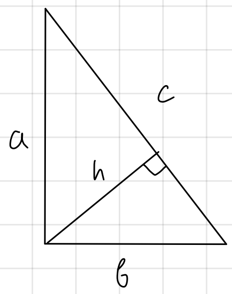
Все стороны a
Все углы 120°



$D=2a$

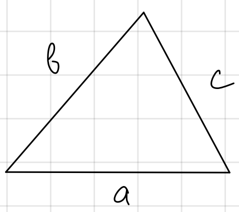
$d=a\sqrt{3}$

ВЫСОТА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ



$h=\dfrac{ab}{c}$

ПЛОЩАДЬ ПРОИЗВОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА ПО ТРЕМ СТОРОНАМ

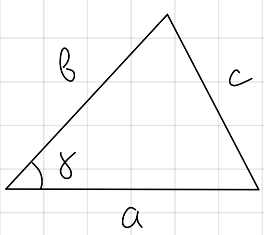


ФОРМУЛА ГЕРОНА

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

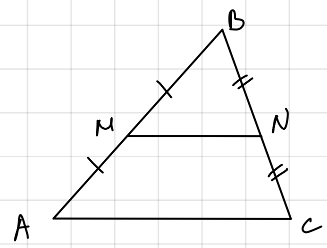
$p=\dfrac{a+b+c}{2}$ – полупериметр

ЧЕРЕЗ ДВЕ СТОРОНЫ И УГОЛ МЕЖДУ НИМИ



1) Найти $\cos\gamma$ по т. косинусов
2) Найти $\sin\gamma$
3) $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$

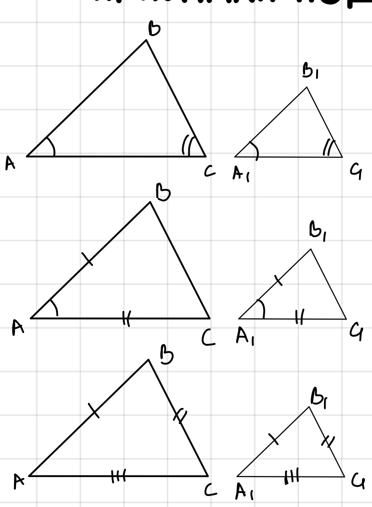
СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА



$MN \parallel AC$

$MN=\frac{1}{2}AC$

ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ

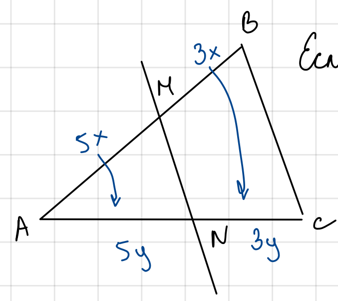


$\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$

$\angle A=\angle A_1$, $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AC}{A_1C_1}$

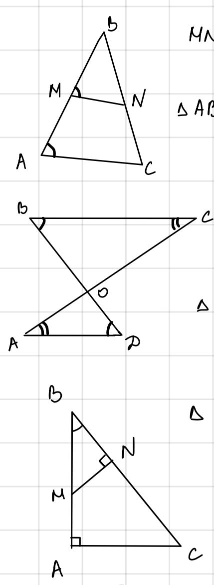
$\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AC}{A_1C_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}$

ТЕОРЕМА ФАЛЕСА



Если $MN \parallel BC$, то $\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{AN}{NC}$

ПОПУЛЯРНЫЕ ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ



$MN \parallel AC \Downarrow \Delta ABC \sim \Delta MBN$

$BC \parallel AD \Downarrow \Delta AOD \sim \Delta COB$

$\Delta ABC \sim \Delta NBM$

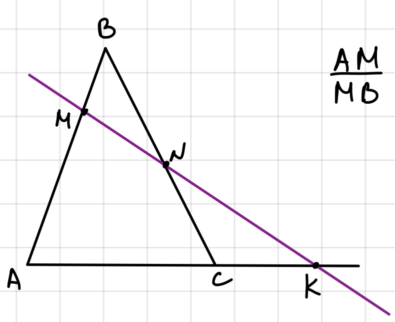
ПЕРЕХОД МЕЖДУ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$1+tg^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$1+ctg^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

ТЕОРЕМА МЕНЕЛАЯ

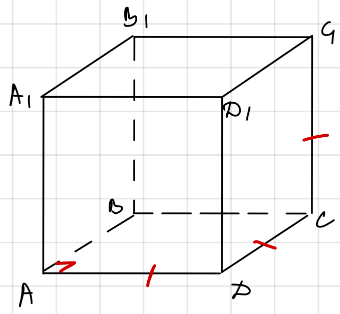


$\dfrac{AM}{MB}\cdot\dfrac{BN}{NC}\cdot\dfrac{CK}{KA}=1$

от @prosto_math

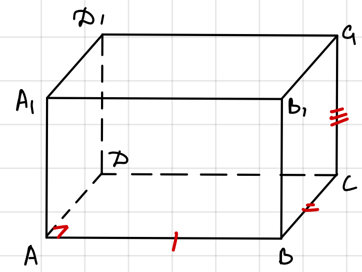
ТИПЫ ОБЪЕМНЫХ ФИГУР

КУБ



все грани – квадраты
все плоские углы – прямые

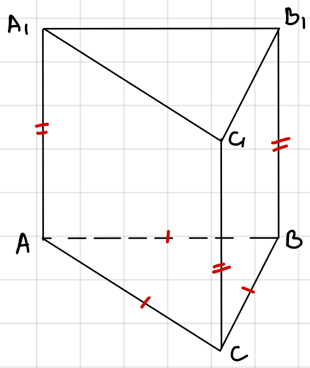
ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД



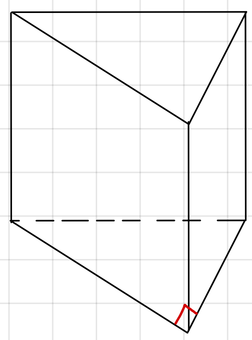
Все грани – прямоугольники
все плоские углы – прямые

ПРИЗМЫ

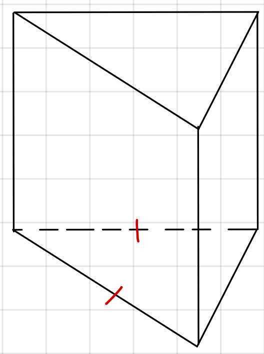
1) ТРЕУГОЛЬНЫЕ



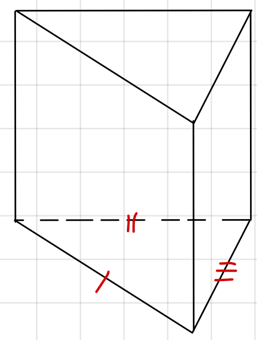
ПРАВИЛЬНАЯ ТРЕУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА
(в основании правильный треугольник)



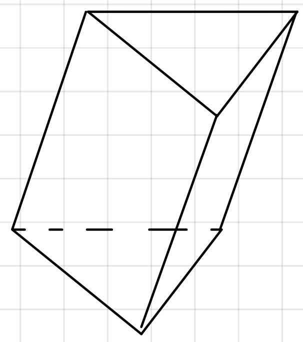
ТРЕУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА
(в основании прямоугольный треугольник)



ТРЕУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА
(в основании равнобедренный треугольник)

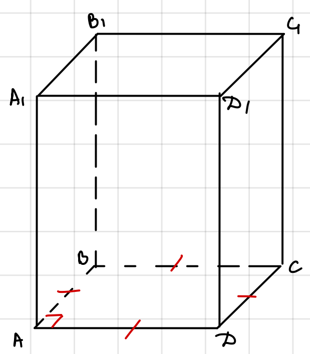


ТРЕУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА
(в основании произвольный треугольник)

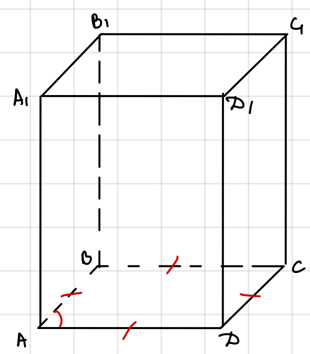


НАКЛОННАЯ ТРЕУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

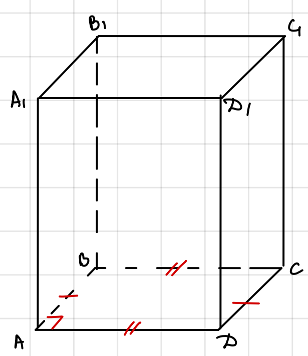
2) ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНЫЕ



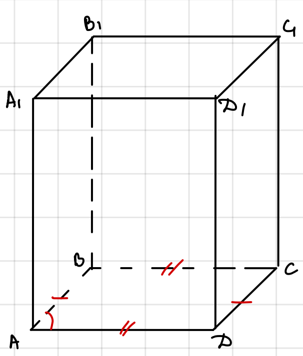
ПРАВИЛЬНАЯ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА
(в основании квадрат)



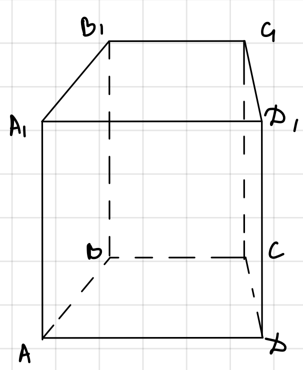
ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА
(в основании ромб)



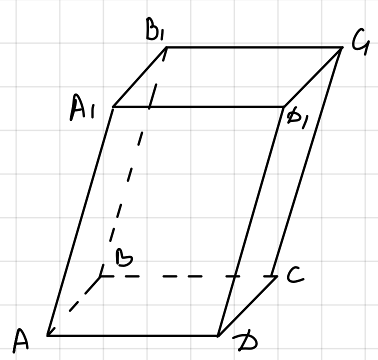
ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА
(в основании прямоугольник)



ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА
(в основании параллелограмм)

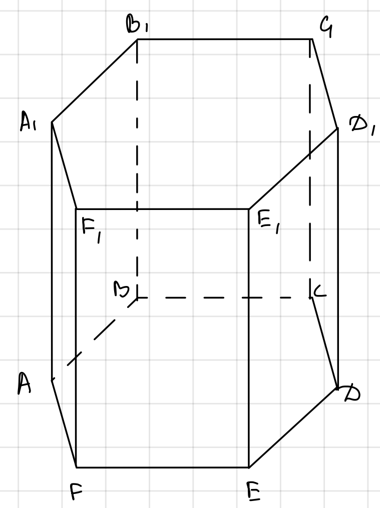


ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА
(в основании трапеция)



НАКЛОННАЯ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

3) ШЕСТИУГОЛЬНАЯ

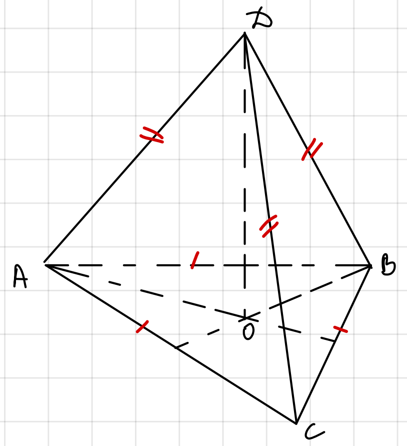


ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА
(в основании правильный шестиугольник)

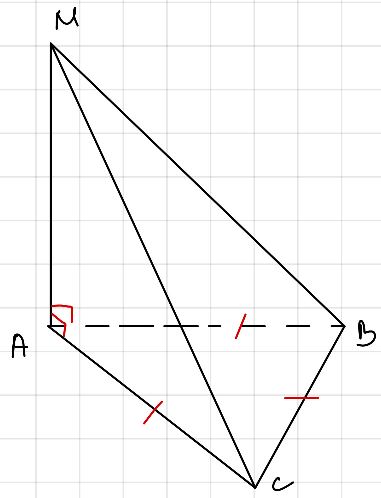
ПИРАМИДЫ

1) ТРЕУГОЛЬНЫЕ

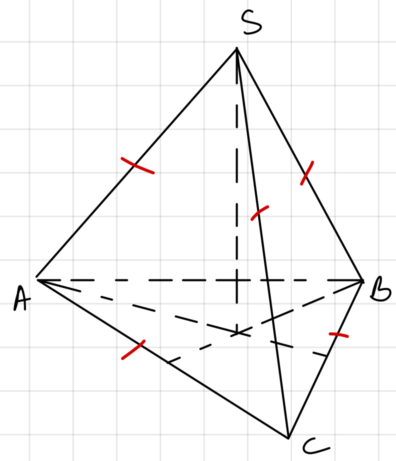
(в основании треугольник любой формы, высота попадает в точку, заданную условием задачи)



ПРАВИЛЬНАЯ ТРЕУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА
(в основании правильный Треугольник)



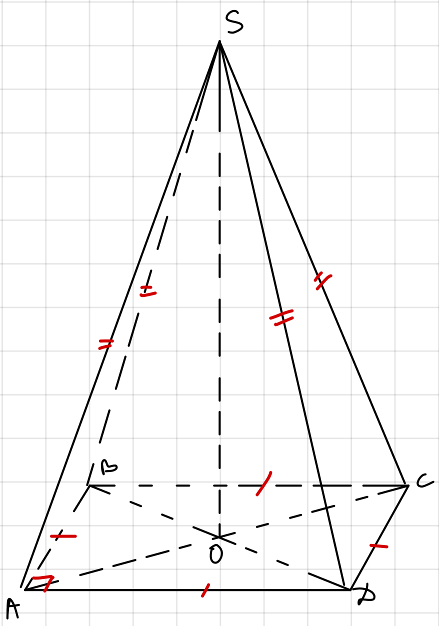
ТРЕУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА
(высота попадает в вершину А)



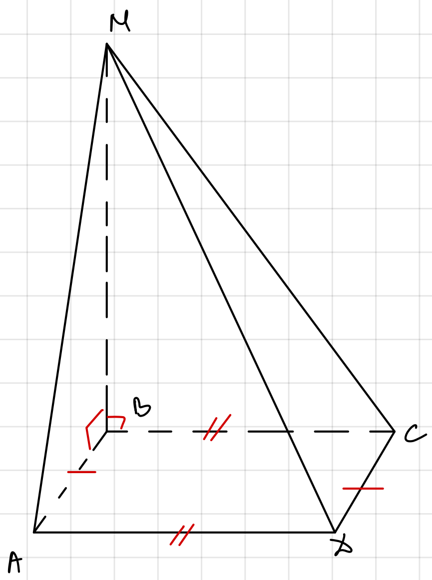
ТЕТРАЭД
(все ребра равны)

2) ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНЫЕ

(в основании четырехугольник любой формы, высота попадает в точку, заданную условием задачи)

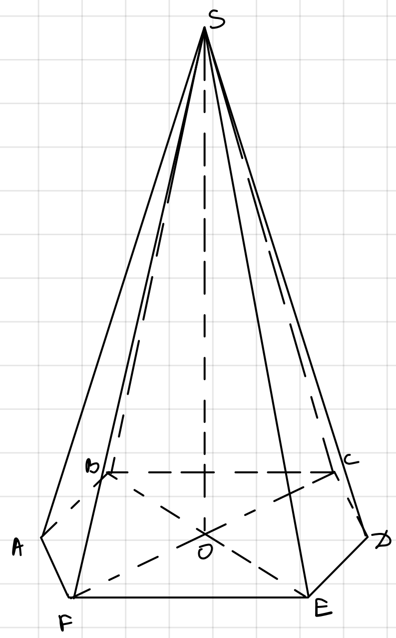


ПРАВИЛЬНАЯ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА
(В основании квадрат, высота попадает в центр)



ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА
(в основании прямоугольник, высота попадет в вершину В)

3) ШЕСТИУГОЛЬНАЯ

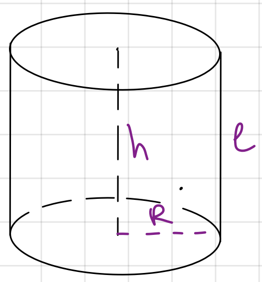


ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

от @prosto_math

ФИГУРЫ ВРАЩЕНИЯ

ЦИЛИНДР

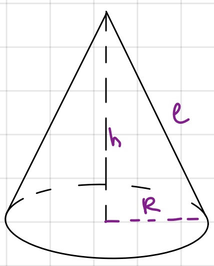


$V = \pi R^2 h$

$S_{бок} = 2\pi R h$

$S_{полн.пов} = 2\pi R h + 2\pi R^2$

КОНУС

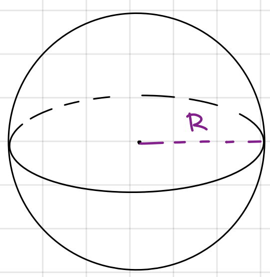


$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

$S_{бок} = \pi R l$

$S_{полн.пов} = \pi R l + \pi R^2$

ШАР

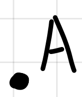


$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

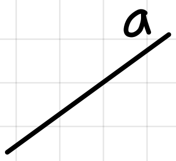
$S = 4\pi R^2$

СТЕРЕОМЕТРИЯ

ТРИ ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЯ



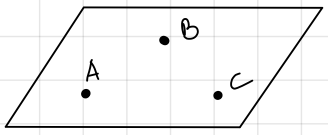
ТОЧКА



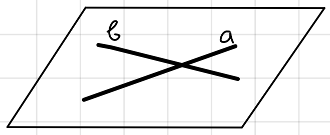
ПРЯМАЯ

ПЛОСКОСТЬ

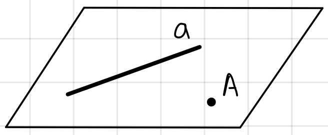
СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ПЛОСКОСТИ



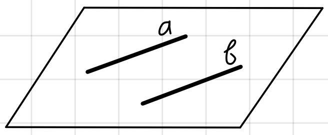
ТРИ ТОЧКИ



ДВЕ ПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ

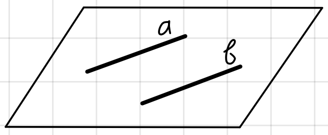


ПРЯМАЯ И ТОЧКА

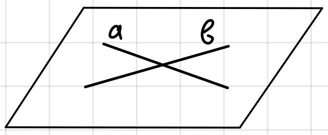


ДВЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

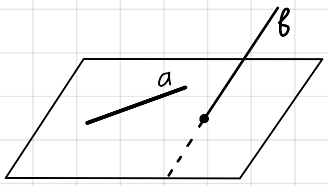
ВИДЫ ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ



ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ (лежат в одной плоскости)

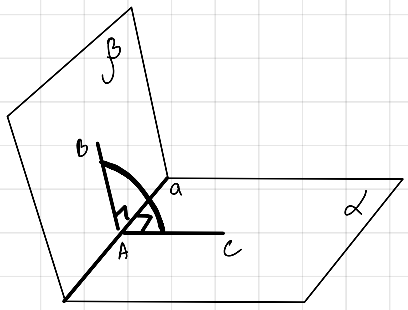


ПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ (лежат в одной плоскости)



СКРЕЩИВАЮЩИЕСЯ (не лежат в одной плоскости)

ДВУГРАННЫЙ УГОЛ



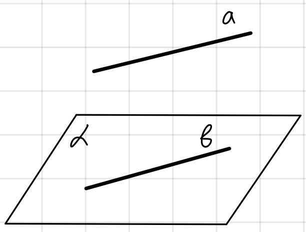
$$\left.\begin{array}{l}\alpha \cap \beta = a \\ AC \subset \alpha,\ AC \perp a \\ AB \subset \beta,\ AB \perp a\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\angle BAC$ линейный угол двугранного угла между α и β

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

ПРИЗНАК (КАК ДОКАЗАТЬ, ЧТО ПРЯМАЯ ПАРАЛЛЕЛЬНА ПЛОСКОСТИ)

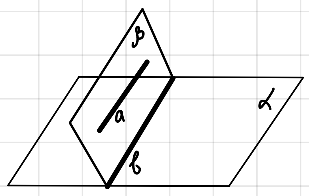
Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна некоторой прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости



$$\left.\begin{array}{l}b \subset \alpha \\ a \parallel b\end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel \alpha$$

СВОЙСТВО (ЕСЛИ ПРЯМАЯ ПАРАЛЛЕЛЬНА ПЛОСКОСТИ, ТО...)

Если плоскость проходит через прямую, параллельную второй плоскости, и пересекает эту вторую плоскость, то линия пересечения параллельна первой прямой.

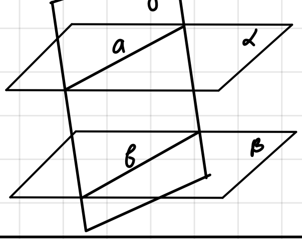


$$\left.\begin{array}{l}a \parallel \alpha \\ a \subset \beta \\ \beta \cap \alpha = b\end{array}\right\} \Rightarrow b \parallel a$$

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

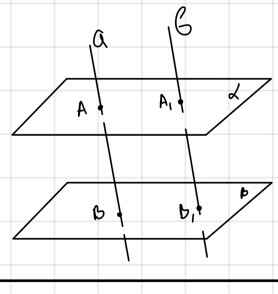
СВОЙСТВА

Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны



$$\left.\begin{array}{l}\alpha \parallel \beta \\ \gamma \cap \alpha = a \\ \gamma \cap \beta = b\end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel b$$

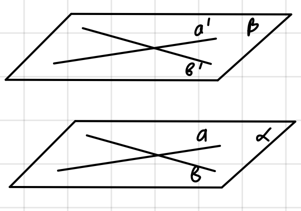
Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.



$$\left.\begin{array}{l}\alpha \parallel \beta \\ a \parallel b\end{array}\right\} \Rightarrow AB = A_1B_1$$

ПРИЗНАК (КАК ДОКАЗАТЬ, ЧТО ПЛОСКОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫ)

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то такие плоскости параллельны.

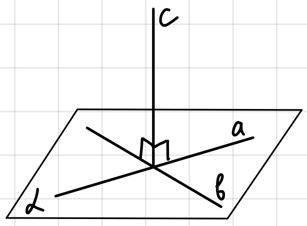


$$\left.\begin{array}{l}a \parallel a' \\ b \parallel b'\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$$

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

ПРИЗНАК
(КАК ДОКАЗАТЬ, ЧТО ПРЯМАЯ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНА ПЛОСКОСТИ)

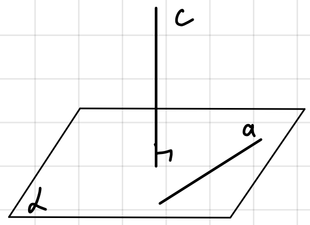
Если прямая, перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна всей плоскости



$$\left.\begin{array}{l} a, b \subset \alpha \\ c \perp a \\ c \perp b \end{array}\right\} \Rightarrow c \perp \alpha$$

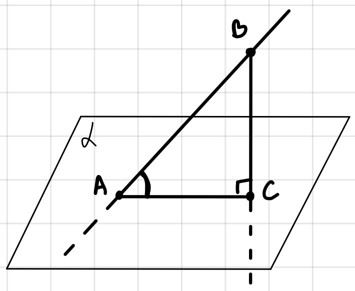
СВОЙСТВО
(ЕСЛИ ПРЯМАЯ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНА ПЛОСКОСТИ, ТО...)

Если прямая перпендикулярна плоскости, то она перпендикулярна ЛЮБОЙ прямой, лежащей в этой плоскости



$$\left.\begin{array}{l} c \perp \alpha \\ a \subset \alpha \\ (a - \text{любая прямая}) \end{array}\right\} \Rightarrow c \perp a$$

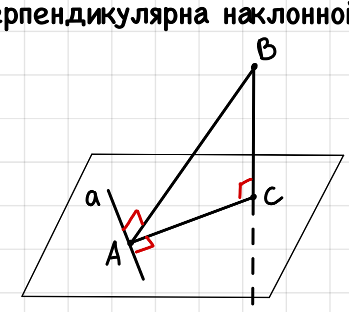
НАКЛОННАЯ, ПРОЕКЦИЯ, ПЕРПЕНДИКУЛЯР



AB - наклонная
BC - перпендикуляр
AC - проекция наклонной на плоскость α
$\angle BAC$ - угол между прямой AB и плоскостью α

ТЕОРЕМА О ТРЕХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ

Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна проекции, то она перпендикулярна наклонной. И наоборот.



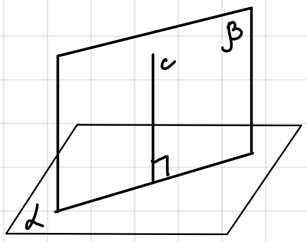
$a \perp AC \Rightarrow a \perp AB$

$a \perp AB \Rightarrow a \perp AC$

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

ПРИЗНАК
(КАК ДОКАЗАТЬ, ЧТО ПЛОСКОСТИ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫ)

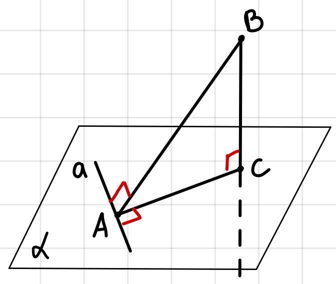
Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.



$$\left.\begin{array}{l} c \perp \alpha \\ c \subset \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \beta \perp \alpha$$

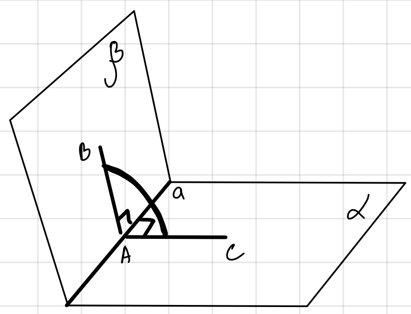
ПРИМЕРЫ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

1) в теореме о трех перпендикулярах



$(ABC) \perp \alpha$

2) в двугранном угле

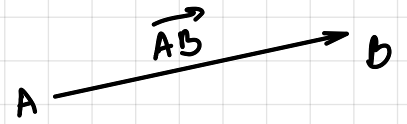


$(ABC) \perp \alpha$

$(ABC) \perp \beta$

МЕТОД КООРДИНАТ

КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА



$A(x_1; y_1; z_1)$ – начало

$B(x_2; y_2; z_2)$ – конец

$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$

ИЩЕМ РАЗНОСТЬ МЕЖДУ КООРДИНАТАМИ КОНЦА И НАЧАЛА
ИЗ КОНЦА ВЫЧИТАЕМ НАЧАЛО

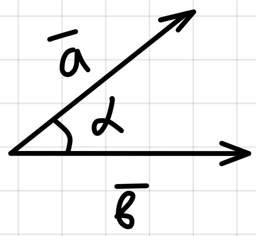
ДЛИНА ВЕКТОРА

$\overrightarrow{AB}(x; y; z)$

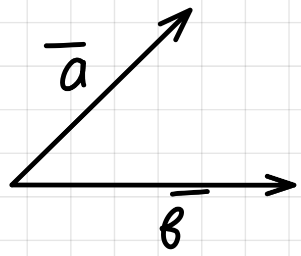
$|AB| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

ДЛИНА ВЕКТОРА – ЭТО КОРЕНЬ ИЗ СУММЫ КВАДРАТОВ КООРДИНАТ

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ



или



$|\bar{a}|$ – длина $\bar{a}$

$|\bar{b}|$ – длина $\bar{b}$

α – угол между $\bar{a}$ и $\bar{b}$

$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\alpha$

ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДЛИН НА КОСИНУС УГЛА МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ

$\bar{a}(x_1; y_1; z_1)$

$\bar{b}(x_2; y_2; z_2)$

$\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$

СУММА ПРОИЗВЕДЕНИЕ КООРДИНАТ

УГОЛ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ

$\bar{a}(x_1; y_1; z_1) \quad \bar{b}(x_2; y_2; z_2)$

$$\cos(\widehat{\bar{a}; \bar{b}}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$$

$$\cos(\widehat{\bar{a}; \bar{b}}) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ, ДЕЛЕННОЕ НА ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДЛИН

СВОЙСТВО СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

ЕСЛИ СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ РАВНО НУЛЮ,
ТАКИЕ ТАКИЕ ВЕКТОРЫ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫ

$\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$

$\Downarrow$

$\bar{a} \perp \bar{b}$

УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ И ВЕКТОР НОРМАЛИ

$\alpha: \; Ax + By + Cz + D = 0$

(A, B, C, D – числа)

$\bar{n}(A; B; C)$ – вектор нормали

$\bar{n} \perp \alpha$

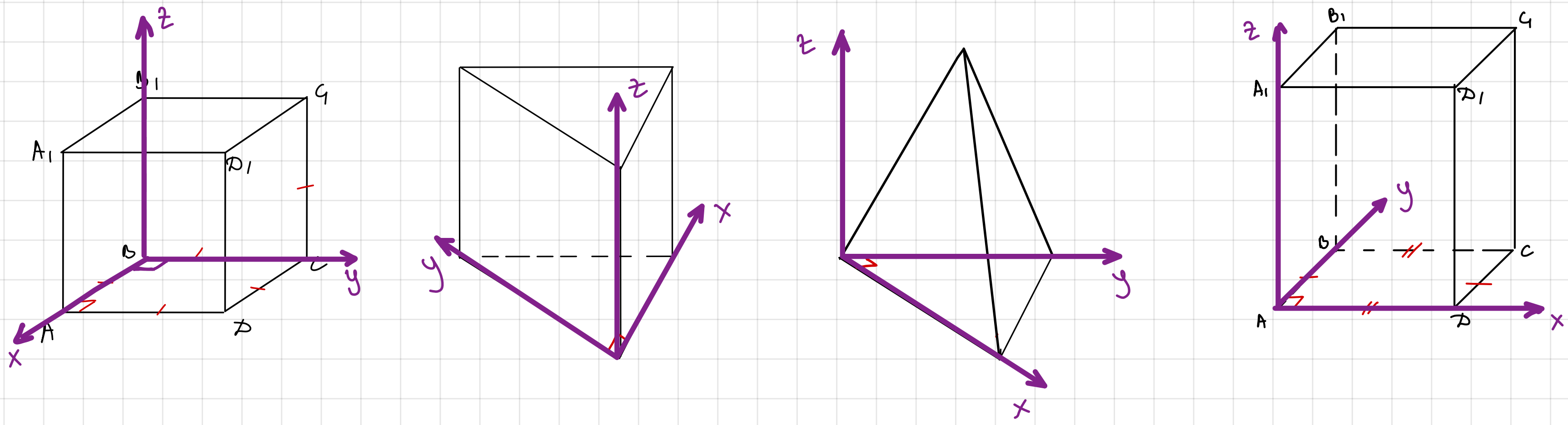
РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ

$M(x_0; y_0; z_0)$

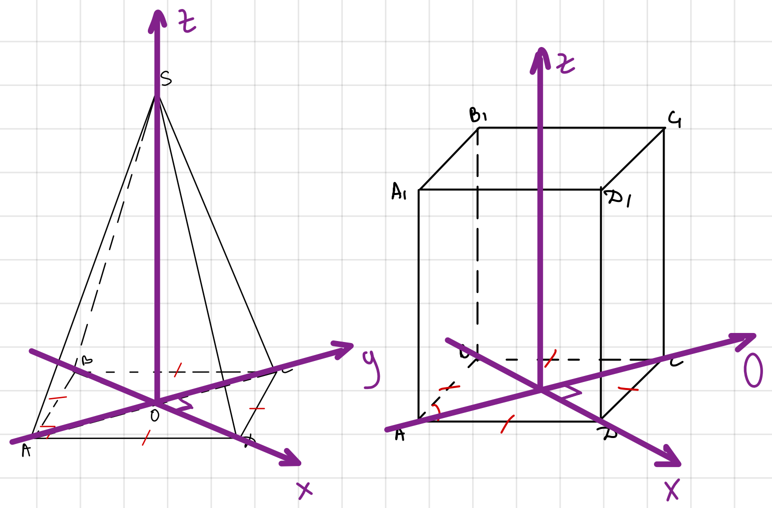
$\alpha: \; Ax + By + Cz + D = 0$

$$\rho(M; \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

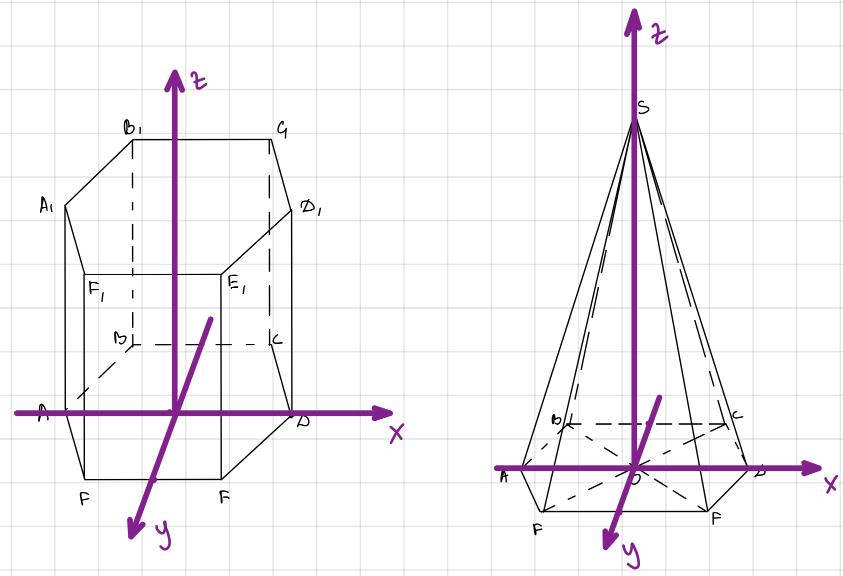
ВВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ ДЛЯ КАЖДОЙ ФИГУРЫ



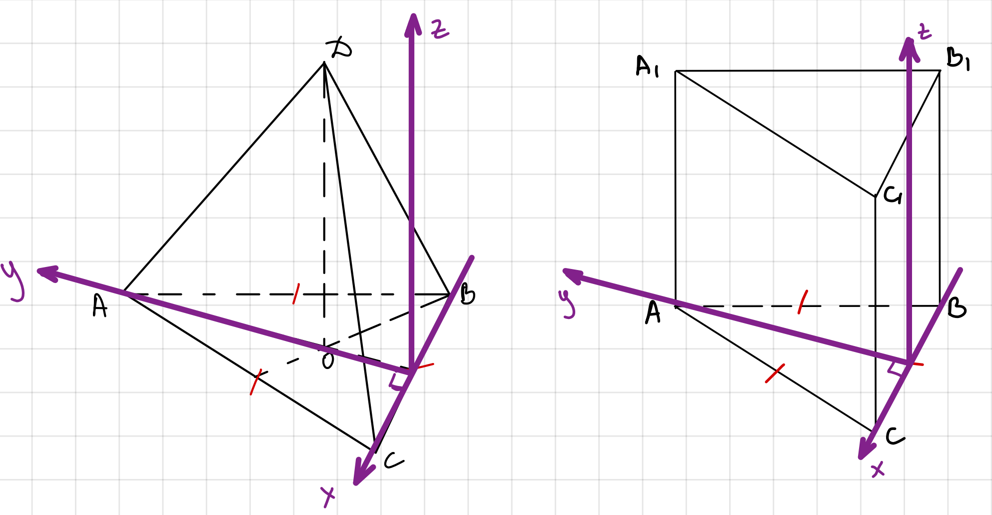
Если две какие-либо стороны основания перпендикулярны, то оси x и y пускаем по этим сторонам, а ось z из их точки пересечения вертикально вверх.



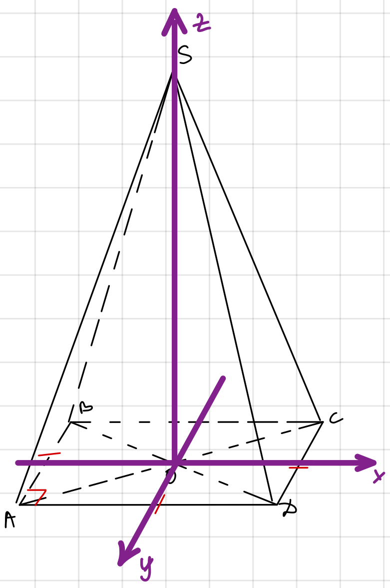
Если диагонали основания перпендикулярны, то оси x и y идут по диагоналям, ось z - вертикально вверх



Если в основании шестиугольник, то одна ось идет по длинной диагонали, а вторая - через середины параллельных сторон. Ось z - из их точки пересечения вертикально вверх.



Если в основании правильный или равнобедренный треугольник, то оси x и y идут по стороне и медиане, проведенной к этой стороне. Ось z - из их точки пересечения вертикально вверх.



Если в пирамиде основание - прямоугольник, то x и y идут через центр параллельно сторонам. Ось z из точки их пересечения вертикально вверх по высоте.

В остальных случаях система координат подбирается индивидуально. Главное, чтобы оси x, y, z были перпендикулярны!

УГОЛ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

РАВЕН ОСТРОМУ УГЛУ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ИМ ПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД

1) построить прямые, параллельные данным скрещивающимся так, чтобы они пересекались. Угол между новыми прямыми и будет искомым плоским углом.
2) нарисовать треугольник, содержащий искомый плоский угол, найти все его стороны и определить форму
3) Найти угол либо по теореме косинусов, либо (если треугольник прямоугольный) через любую тригонометрическую функцию.

КООРДИНАТНЫЙ МЕТОД

1) ввести систему координат
2) найти координаты концов отрезков
3) найти координаты векторов (прямых)
4) найти косинус угла между векторами
5) если косинус больше нуля, то искомый угол равен арккосинусу
6) если косинус меньше нуля, то мы по ошибке нашли тупой угол. Искомый острый угол равен арккосинусу положительного числа

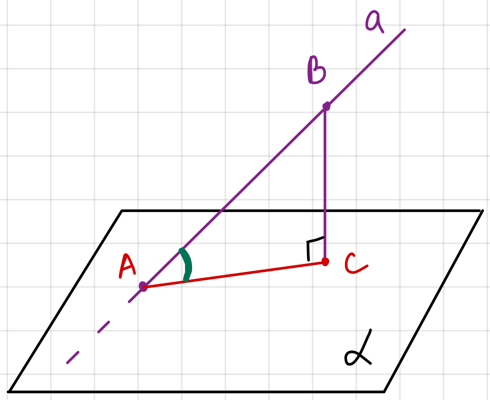
ЕСЛИ ПРЯМЫЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫ

Доказать перпендикулярность:
— по теореме о трех перпендикулярах
— используя признак и свойство перпендикулярности прямой и плоскости
— через свойство скалярного произведения векторов

УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

РАВЕН УГЛУ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ЕЕ ПРОЕКЦИЕЙ НА ПЛОСКОСТЬ

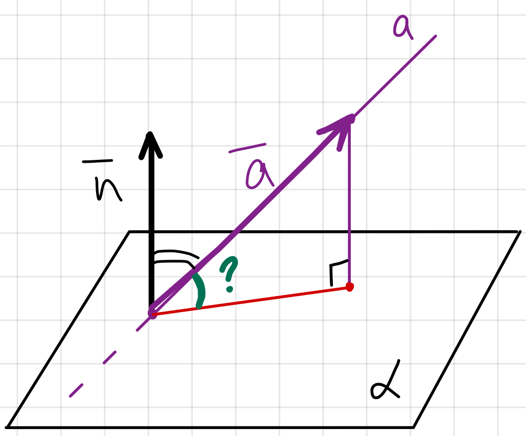
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД



$\angle(a;\alpha) = \angle(AB;AC) = \angle BAC$

1) если прямая и плоскость не пересекаются, то найти новые прямую и плоскость, параллельные старым, но такие, чтобы они пересекались
2) найти общую точку прямой и плоскости, это будет один конец проекции (A)
3) через какую-нибудь точку прямой (B) опустить перпендикуляр (BC) на плоскость и доказать перпендикулярность
4) провести проекцию (AC) (основание перпендикуляра - это второй конец проекции)
5) найти угол между прямой и проекцией, рассмотрев полученный прямоугольный треугольник (треугольник ABC)

КООРДИНАТНЫЙ МЕТОД



$\sin\angle(a;\alpha) = \cos\angle(\bar{a};\bar{n})$

1) ввести систему координат
2) найти координаты двух точек на прямой и координаты соответствующего вектора
3) найти координаты трех точек на плоскости
4) найти уравнение плоскости
5) найти координаты вектора нормали
6) вычислить косинус угла между вектором-прямой и нормалью
7) данное значение будет равно синусу угла между прямой и плоскостью

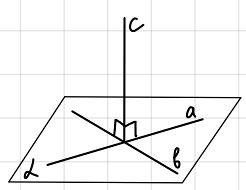
от @prosto_math

ЕСЛИ ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫ

Доказать перпендикулярность по признаку перпендикулярности прямой и плоскости

ПРИЗНАК (КАК ДОКАЗАТЬ, ЧТО ПРЯМАЯ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНА ПЛОСКОСТИ)

Если прямая, перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна всей плоскости

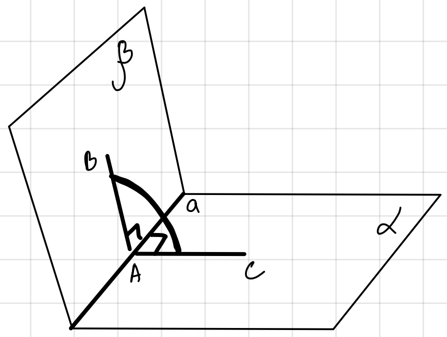


$\left.\begin{array}{l} a, b \subset \alpha \\ c \perp a \\ c \perp b \end{array}\right\} \Rightarrow c \perp \alpha$

УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ

РАВЕН УГЛУ МЕЖДУ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАМИ К ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ

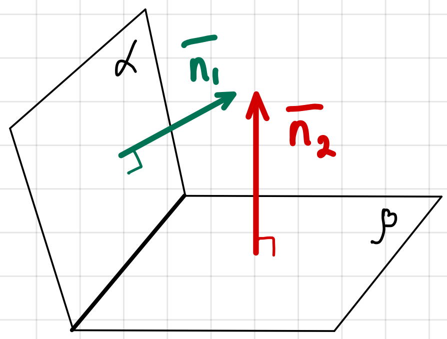
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД



$$\angle(\alpha;\beta) = \angle(AB; AC) = \angle BAC$$

1) если плоскости не пересекаются, то найти новые плоскости, параллельные старым, но такие, чтобы они пересекались
2) найти линию пересечения плоскостей
3) в каждой плоскости построить перпендикуляры к линии пересечения так, чтобы они образовали угол
4) рассмотреть треугольник, содержащий искомый угол и найти все его стороны
5) найти угол из треугольника по теореме косинусов

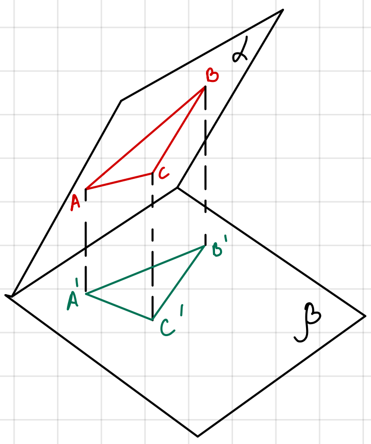
КООРДИНАТНЫЙ МЕТОД



$$\cos\angle(\alpha;\beta) = \cos\angle(\bar{n}_1; \bar{n}_2)$$

1) ввести систему координат
2) найти координаты трех точек на первой плоскости и составить уравнение плоскости
3) найти координаты вектора нормали n1
4) найти координаты трех точек на второй плоскости и составить уравнение плоскости
5) найти координаты вектора нормали n2
6) вычислить косинус угла между векторами нормали n1 и n2
7) данное значение будет равно косинусу угла между плоскостями

МЕТОД ПЛОЩАДЕЙ



1) спроецировать одну плоскость (или ее часть) на другую плоскость
2) найти площади изначальной плоскости (S) и ее проекции (S')
3) косинус угла между плоскостями равен отношению площади проекции к площади изначальной фигуры.

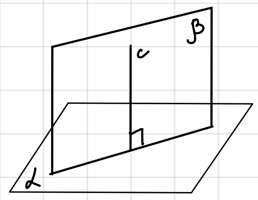
$$\cos\angle(\alpha;\beta) = \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}$$

ЕСЛИ ПЛОСКОСТИ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫ

Доказать перпендикулярность по признаку перпендикулярности плоскостей

ПРИЗНАК (КАК ДОКАЗАТЬ, ЧТО ПЛОСКОСТИ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫ)

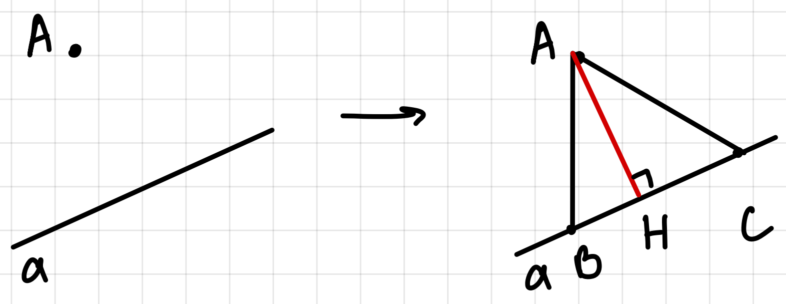
Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.



$$\left.\begin{matrix} c \perp \alpha \\ c \subset \beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \beta \perp \alpha$$

РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ

ЭТО ДЛИНА ПЕРПЕНДИКУЛЯРА, ОПУЩЕННОГО ИЗ ТОЧКИ НА ПРЯМУЮ



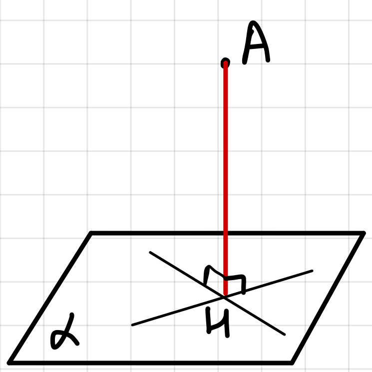
$$\rho(A;a) = AH$$

1) соединяем точку и прямую в треугольник
2) находим все стороны треугольника и определяем его вид
3) находим высоту треугольника с помощью теоремы Пифагора (прямоугольный и равнобедренный треугольник) или с помощью площади (треугольник другого вида)

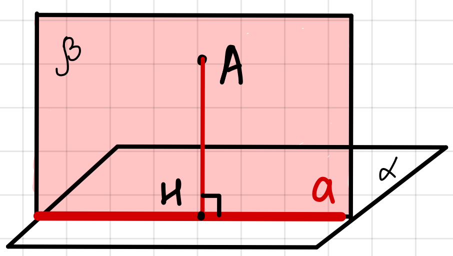
РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ

ЭТО ДЛИНА ПЕРПЕНДИКУЛЯРА, ОПУЩЕННОГО ИЗ ТОЧКИ НА ПЛОСКОСТЬ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД



$$\rho(A;\alpha) = AH$$



1) $\beta \perp \alpha$, $A \in \beta$
2) $\beta \cap \alpha = a$
3) $AH \perp a$
4) $\rho(A;\alpha) = AH$

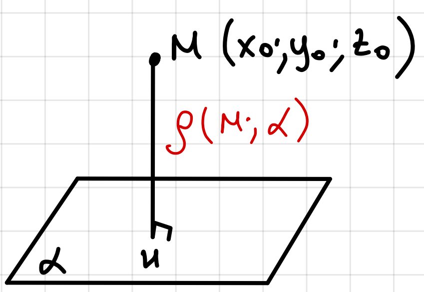
1 СПОСОБ:

1) провести из точки перпендикуляр к плоскости (доказать, что это действительно перпендикуляр по признаку!!!)
2) найти длину этого перпендикуляра как высоту некоторого треугольника

2 СПОСОБ:

1) через точку провести плоскость, перпендикулярную данной (доказать перпендикулярность плоскостей по признаку!!!)
2) найти линию пересечения двух плоскостей (a)
3) искомое расстояние - перпендикуляр из точки на линию пересечения ($AH \perp a$)
4) найти длину перпендикуляра (AH) как высоту треугольника

КООРДИНАТНЫЙ МЕТОД



РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ

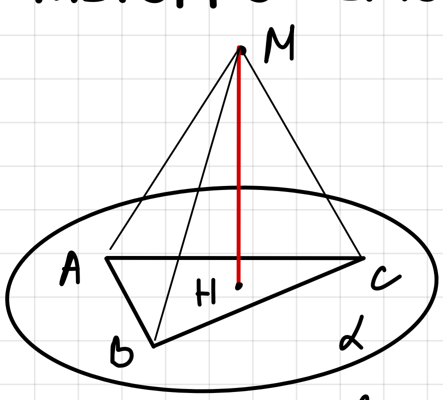
$M(x_0;y_0;z_0)$

$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$

$$\rho(M;\alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

1) ввести систему координат
2) найти координаты точки (M)
3) найти координаты трех точек на плоскости (α) и составить уравнение плоскости
4) найти расстояние от точки (M) до плоскость (α) по формуле

МЕТОД ОБЪЕМОВ



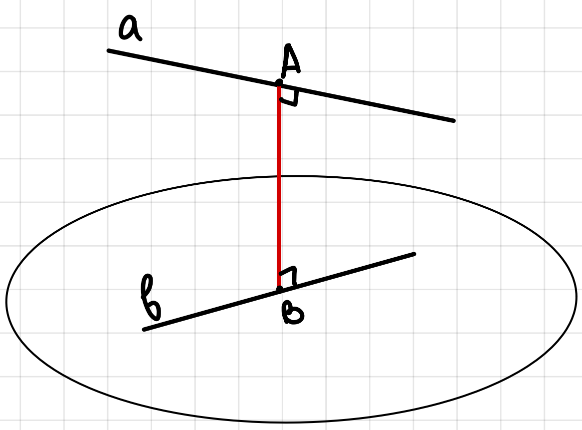
$\rho(M;\alpha) = MH$ - высота пирамиды MABC

1) найти в плоскости треугольник (на рисунке для примера взят треугольник ABC)
2) соединить точку M со всеми вершинами треугольника и получить пирамиду (MABC)
3) искомое расстояние — высота пирамиды, опущенная из вершины M (высота MH)
4) каким-то образом вычислить объем этой пирамиды
5) вычислить площадь основания (треугольника ABC)
6) найти расстояние (MH) из формулы объема пирамиды $V_{MABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot MH$

от @prosto_math

РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

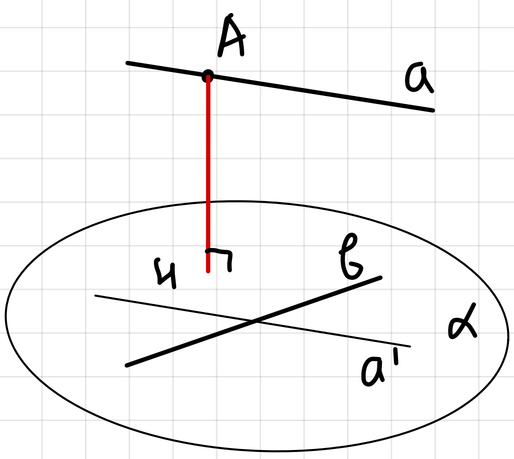
ЭТО ДЛИНА ОБЩЕГО ПЕРПЕНДИКУЛЯРА К ЭТИМ ПРЯМЫМ



$$\begin{matrix} AB \perp a \\ AB \perp b \end{matrix} \Rightarrow \rho(a; b) = AB$$

1 СПОСОБ:

1) построить перпендикуляр к обеим прямым (и доказать, что это действительно общий перпендикуляр
2) найти его длину



$$\begin{matrix} a' \parallel a \\ a' \cap b \end{matrix} \Rightarrow \alpha$$

2 СПОСОБ:

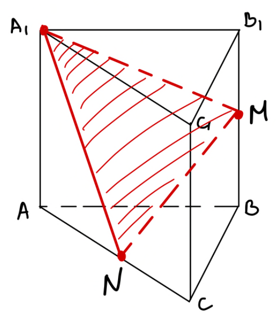
1) Через прямую b провести плоскость, параллельную прямой a. Для этого необходимо построить прямую a', параллельную a так, чтобы она пересеклась с b. Прямые a и b образуют плоскость α.
2) так как прямая a параллельна плоскости α, то расстояние от прямой a до плоскости равно расстоянию от любой точки прямой a до плоскости
3) задача сведена к задаче по поиску расстояния от точки до плоскости (см предыдущий раздел)

$$\rho(a; b) = \rho(a; \alpha) = \rho(A; \alpha)$$

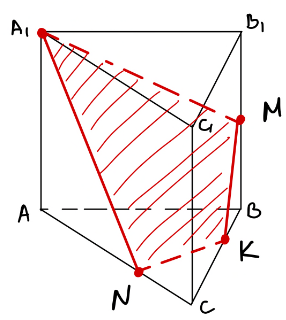
СЕЧЕНИЕ МНОГОГРАННИКА

ЭТО ПЛОСКОСТЬ, ПЕРЕСЕКАЮЩАЯ МНОГОГРАННИК.
РЕЗУЛЬТАТОМ ПОСТРОЕНИЯ СЕЧЕНИЯ ЯВЛЯЕТСЯ МНОГОУГОЛЬНИК, ВСЕ СТОРОНЫ КОТОРОГО ЛЕЖАТ В ГРАНЯХ МНОГОГРАННИКА, А ВЕРШИНЫ — НА РЕБРАХ

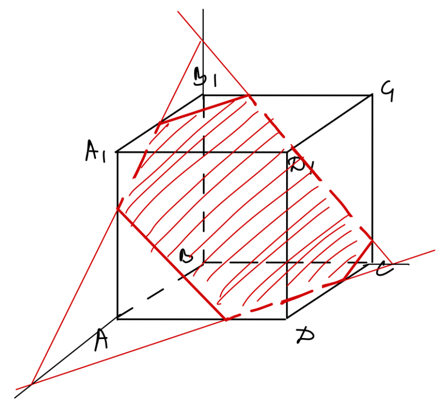
НЕ СЕЧЕНИЕ ❌



СЕЧЕНИЕ ✅



СЛЕДЫ СЕЧЕНИЯ НЕ МОГУТ РАСПОЛАГАТЬСЯ ВНУТРИ ФИГУРЫ, ТОЛЬКО НА ГРАНЯХ.

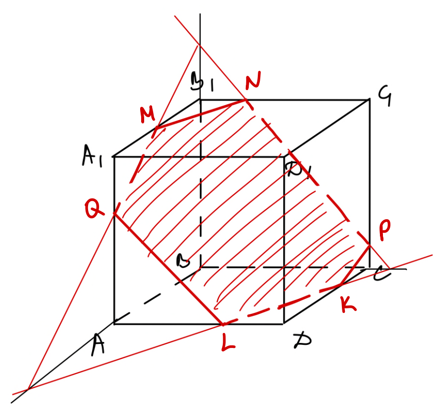


ПЛОСКОСТЬ СЕЧЕНИЯ И ПЛОСКОСТИ ГРАНЕЙ БЕСКОНЕЧНЫ, ПОЭТОМУ МЫ ИМЕЕМ ПРАВО ИХ ПРОДОЛЖАТЬ

ПОСТРОЕНИЕ СЕЧЕНИЙ

1) соединить точки, лежащие в одной грани
2) продолжить след сечения до пересечения с каким-нибудь ребром для перехода из одной грани в другую (метод следов)
3) если нет точек, лежащих в одной грани, то спроецировать 2 точки на плоскость, содержащую третью точку (метод проецирования), пересечь прямую, принадлежащую сечению, и ее проекцию, а дальше действовать методом следов.
4) если плоскость сечения должна быть параллельна некоторой прямой, то в сечении должна содержаться прямая, параллельная данной
5) если плоскость сечения должна быть перпендикулярна плоскости, то сечение должно содержать в себе перпендикуляр к плоскости.

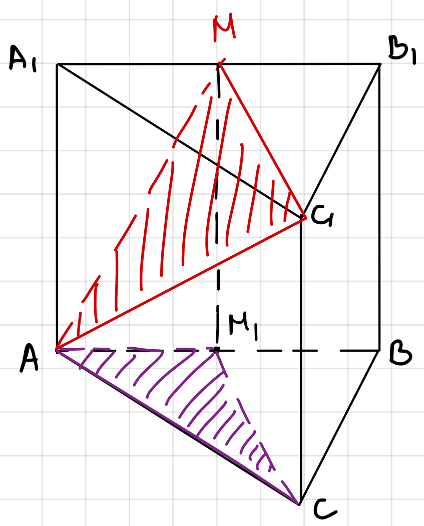
СВОЙСТВО СЕЧЕНИЯ



СЛЕДЫ СЕЧЕНИЯ, ЛЕЖАЩИЕ В ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ГРАНЯХ, ПАРАЛЛЕЛЬНЫ

$$\left.\begin{array}{l}(ABC)\parallel(A_1B_1C_1)\\ MN\in(A_1B_1C_1)\\ KL\in(ABC)\end{array}\right\} \Rightarrow MN\parallel KL$$

ПЛОЩАДЬ СЕЧЕНИЯ ЧЕРЕЗ ПЛОЩАДЬ ПРОЕКЦИИ

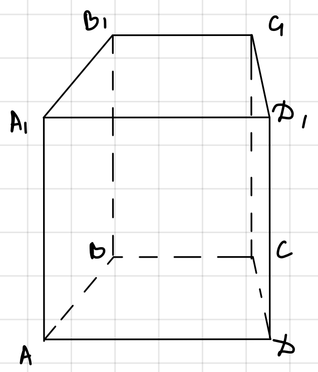


$$S_{\text{сечения}} = \frac{S_{\text{проекции}}}{\cos\alpha}$$

α – угол между плоскостью сечения и плоскостью основания

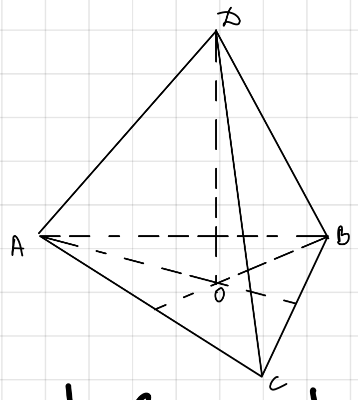
ОБЪЕМ МНОГОГРАННИКА

ПРИЗМА



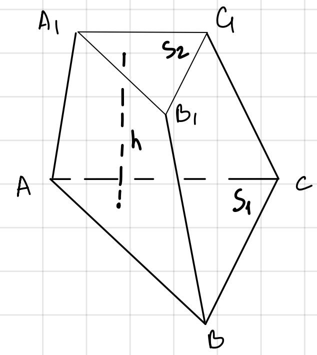
$$V = S_{осн} \cdot h$$

ПИРАМИДА



$$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$$

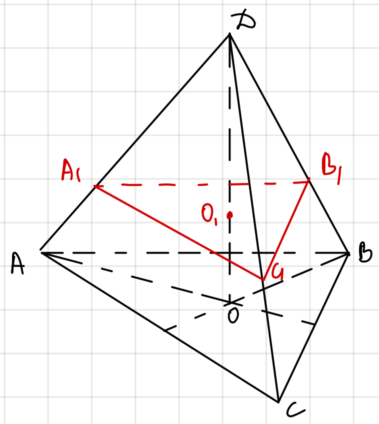
УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА



$$V = \frac{1}{3} h \left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2 \right)$$

ПОЛЕЗНЫЕ СВОЙСТВА ОБЪЕМОВ

1

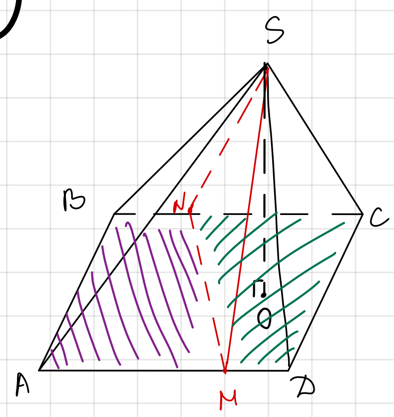


Плоскость, параллельная основанию многогранника, отсекает от него подобный многогранник, причем отношение объемов равно кубу коэффициента подобия

$$(A_1B_1C_1) \parallel (ABC) \qquad DA_1B_1C_1 \sim DABC$$

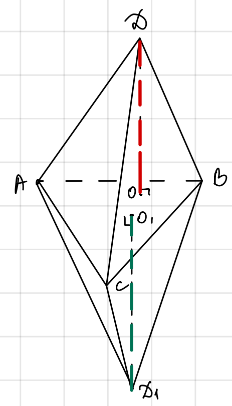
$$k = \frac{DA_1}{DA} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{DO_1}{DO} \qquad \frac{V_{DA_1B_1C_1}}{V_{DABC}} = k^3$$

2



Если две пирамиды имеют общую высоту, то отношение их объемов равно отношению площадей их оснований

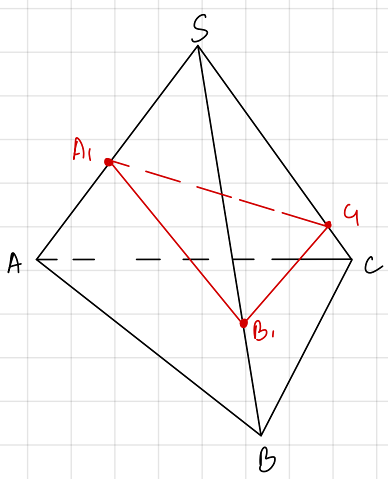
$$\frac{V_{SABNM}}{V_{SCDMN}} = \frac{S_{ABNM}}{S_{CDMN}}$$



Если две пирамиды имеют общее основание, то отношение их объемов равно отношению их высот, проведенных к общему основанию.

$$\frac{V_{DABC}}{V_{D_1ABC}} = \frac{DO}{D_1O_1}$$

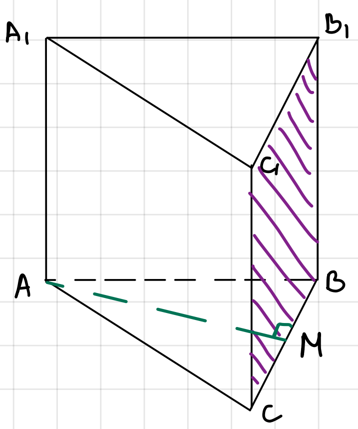
3



Если плоскость пересекает боковые ребра SA, SB и SC треугольной пирамиды SABC в точках A_1, B_1, C_1 соответсвенно, то отношение объемов пирамид можно записать так:

$$\frac{V_{SA_1B_1C_1}}{V_{SABC}} = \frac{SA_1}{SA} \cdot \frac{SB_1}{SB} \cdot \frac{SC_1}{SC}$$

4



Объем треугольной примы можно вычислить по формуле:

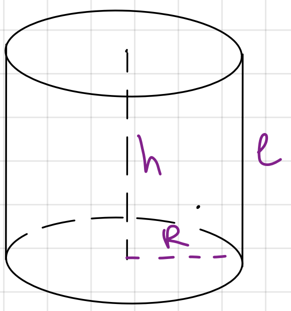
$$V = \frac{1}{2} P d$$

P — Площадь боковой грани (например CBB_1C_1)

d — Расстояние от этой грани до противоположного ребра призмы (например AM)

ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

ЦИЛИНДР

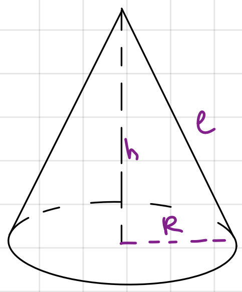


$V = \pi R^2 h$

$S_{бок} = 2\pi R h$

$S_{полн.пов} = 2\pi R h + 2\pi R^2$

КОНУС

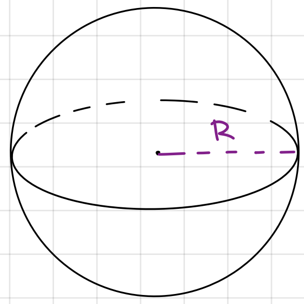


$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

$S_{бок} = \pi R l$

$S_{полн.пов} = \pi R l + \pi R^2$

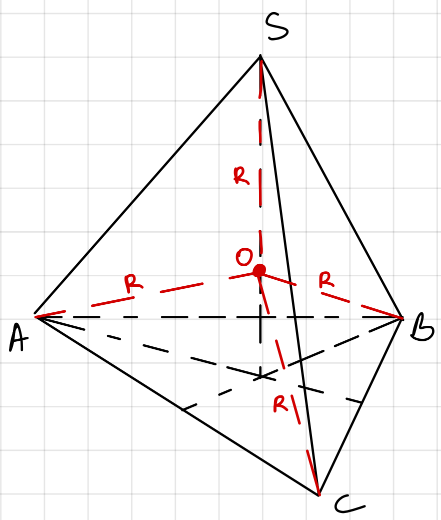
ШАР



$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

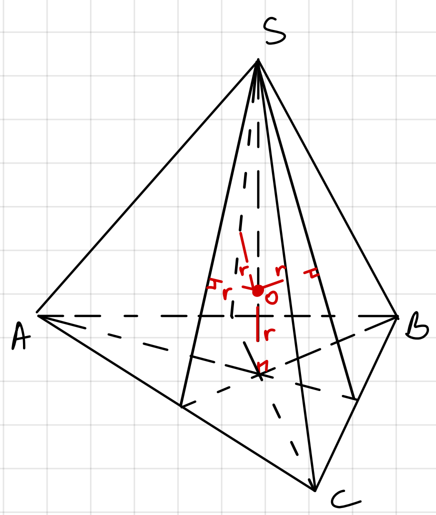
$S = 4\pi R^2$

ОПИСАННЫЙ ШАР



1) касается все вершин пирамиды
2) центр равноудален от всех вершин пирамиды
3) центр шара находится над центром описанной окружности основания

ВПИСАННЫЙ ШАР



1) касается всех граней пирамиды
2) центр равноудален от всех граней пирамиды
3) центр шара находится над центром вписанной окружности основания