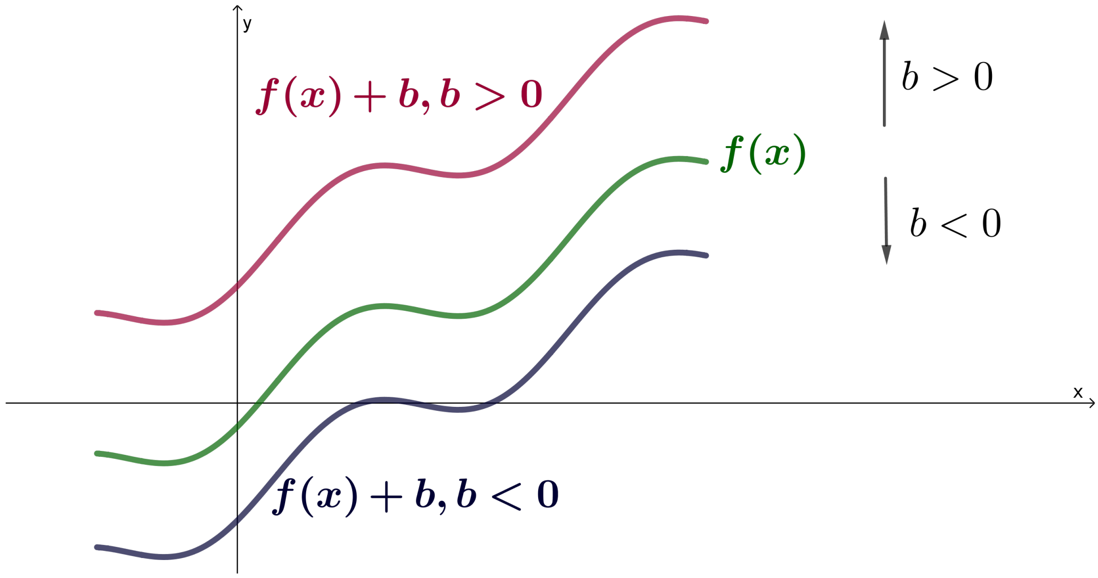
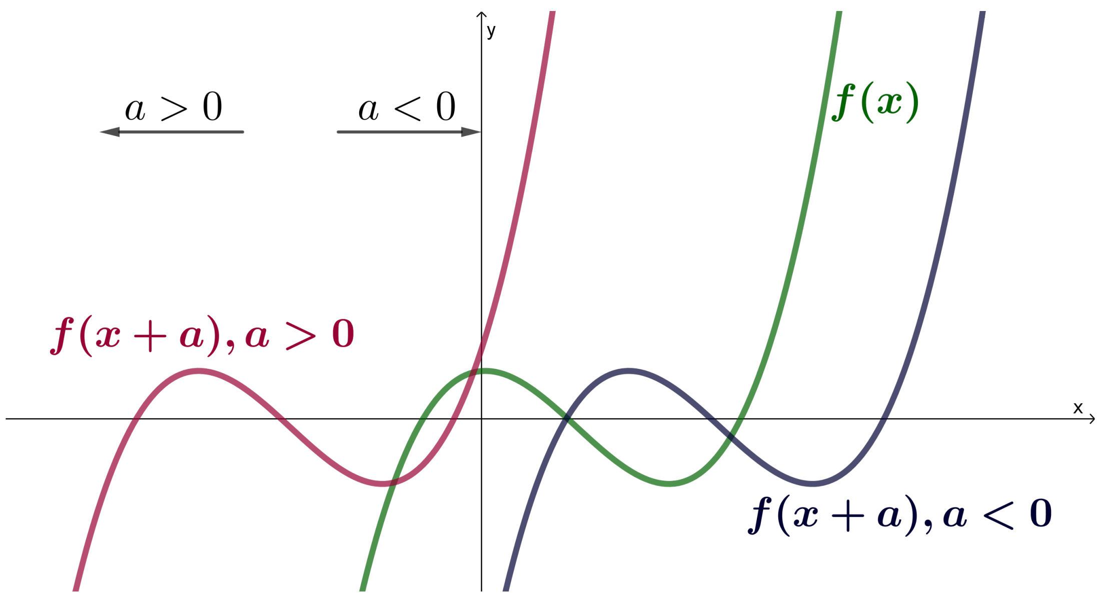
• График функции $f(x)+b$ получается из графика функции $f(x)$ путем поднятия на b единиц вверх по оси Oy, если $b>0$, и опускания на $|b|$ единиц вниз по оси Oy, если $b<0$.



Пример. Чтобы построить график функции $y=x^2+2$, нужно параболу $y=x^2$ поднять на 2 единицы вверх. Чтобы построить график функции $y=\sin x-3$, нужно синусоиду $y=\sin x$ опустить на 3 единицы вниз.

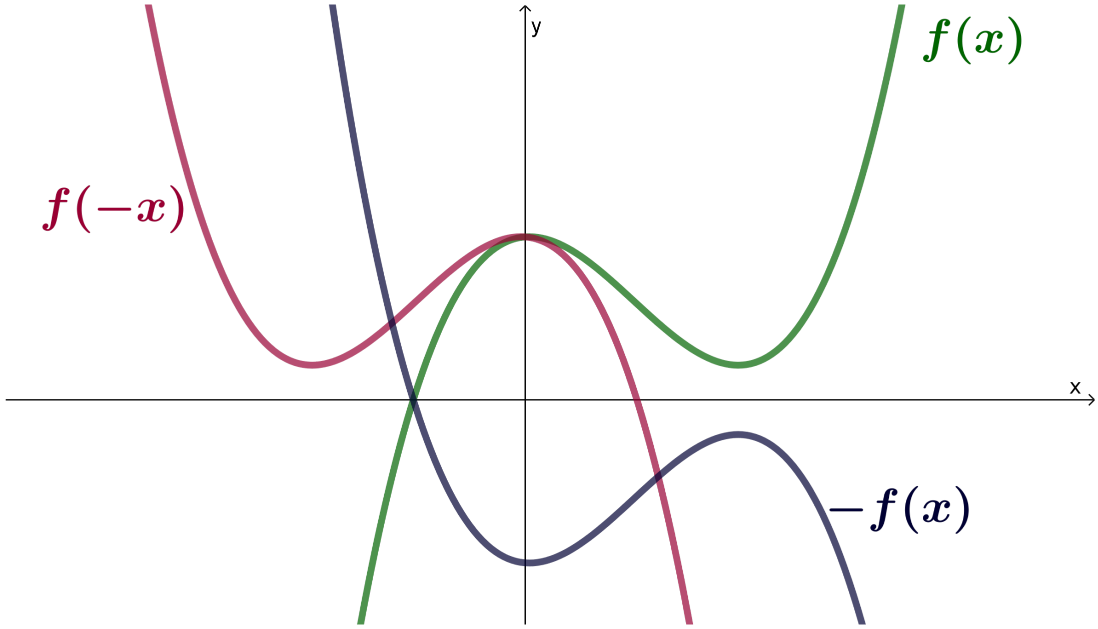
• График функции $f(x+a)$ получается из графика функции $f(x)$ путем сдвига на a единиц влево по оси Ox, если $a>0$, и сдвига на $|a|$ единиц вправо по оси Ox, если $a<0$.



Таким образом, число точек пересечения графика функции $f(x+a)$ будет таким же, как и у графика $f(x)$.

Пример. Чтобы построить график функции $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right)$, нужно график функции $y = \cos x$ сдвинуть на $\frac{\pi}{5}$ единиц влево. Чтобы построить график функции $y = (x-5)^5$, нужно график функции $y = x^5$ сдвинуть на 5 единиц вправо.

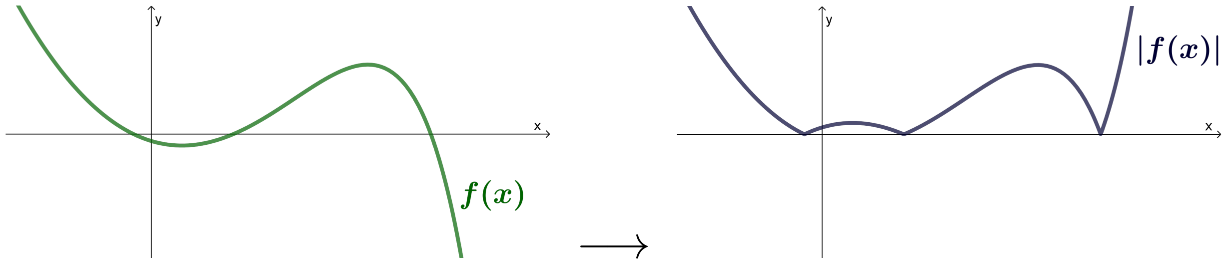
• График функции $-f(x)$ получается из графика функции $f(x)$ отражения симметрично относительно оси Ox. График функции $f(-x)$ получается из графика функции $f(x)$ путем отражения симметрично относительно оси Oy.

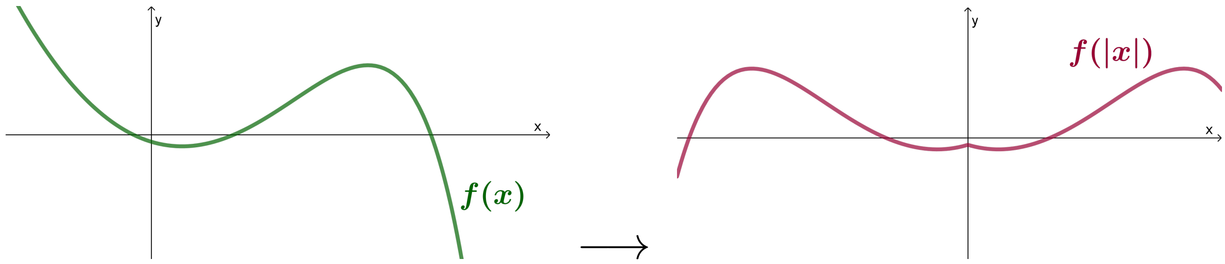


Соответственно график $-f(x)$ пересекает ось Ox в тех же точках, что и график $f(x)$. График $f(-x)$ пересекает ось Oy в тех же точках, что и график $f(x)$.

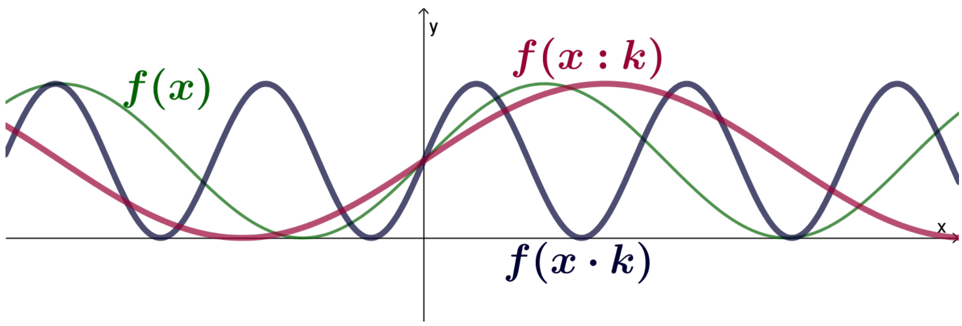
Пример. Чтобы построить график функции $y = -x^2$, нужно параболу $y = x^2$ отразить симметрично относительно оси Ox. Чтобы построить график $y = \ln(-x)$, нужно график $y = \ln x$ отразить симметрично относительно оси Oy.

• График функции $|f(x)|$ получается из графика функции $f(x)$ отражением той части графика, что находится ниже оси Ox, симметрично относительно оси Ox. График функции $f(|x|)$ получается из графика функции $f(x)$ путем отражения той части графика, что находится правее оси Oy, симметрично относительно оси Oy.





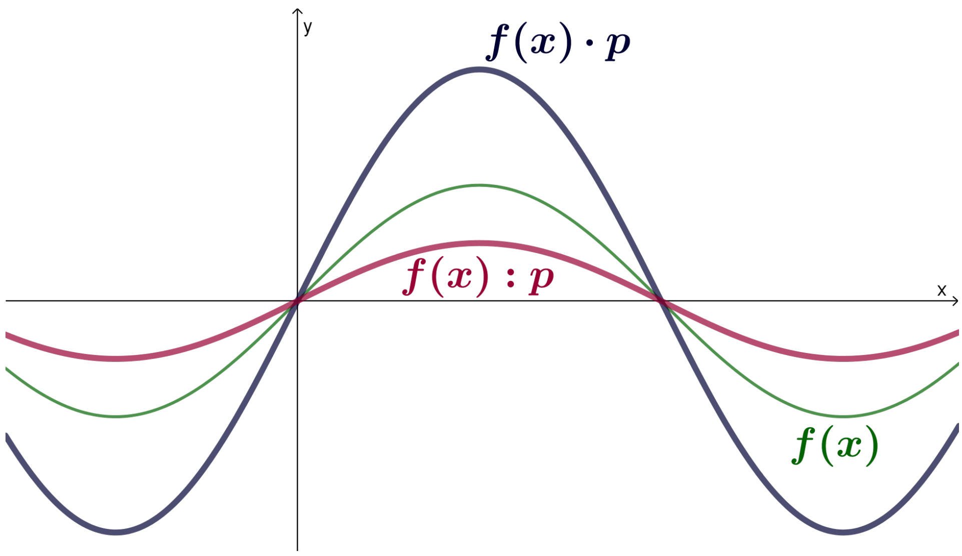
• График функции $f(x \cdot k)$ получается из графика функции $f(x)$ путем сжатия его в k раз к оси Oy, если $k > 1$. График функции $f(x : k)$ получается из графика функции $f(x)$ путем растяжения в k раз от оси Oy, если $k > 1$.



В таком случае область значений функции $f(x \cdot k)$, как и $f(x : k)$, остается такой же, как и у функции $f(x)$. Точки пересечения графиков с осью Oy также остаются неизменными.

• График функции $f(x) \cdot p$ получается из графика функции $f(x)$ путем растяжения его в p раз от оси Ox, если $p > 1$. График функции $f(x) : p$ получается из графика функции $f(x)$ путем сжатия в p раз к оси Ox, если $p > 1$.

В таком случае область определения функции $f(x \cdot k)$, как и $f(x : k)$, остается такой же, как и у функции $f(x)$. Точки пересечения графиков с осью Ox остаются неизменными.



Как построить график функции $p \cdot f(kx+a)+b$, базируясь на функции $f(x)$?

1) Выполняем все преобразования, связанные с **аргументом**: сначала делаем сложение, то есть сдвигаем график вправо/влево на $|a|$ по оси Ox. Получаем график $f(x+a)$. Затем делаем умножение на k, то есть сжимаем/растягиваем график к/от оси Oy. Получаем график функции $f(kx+a))$.

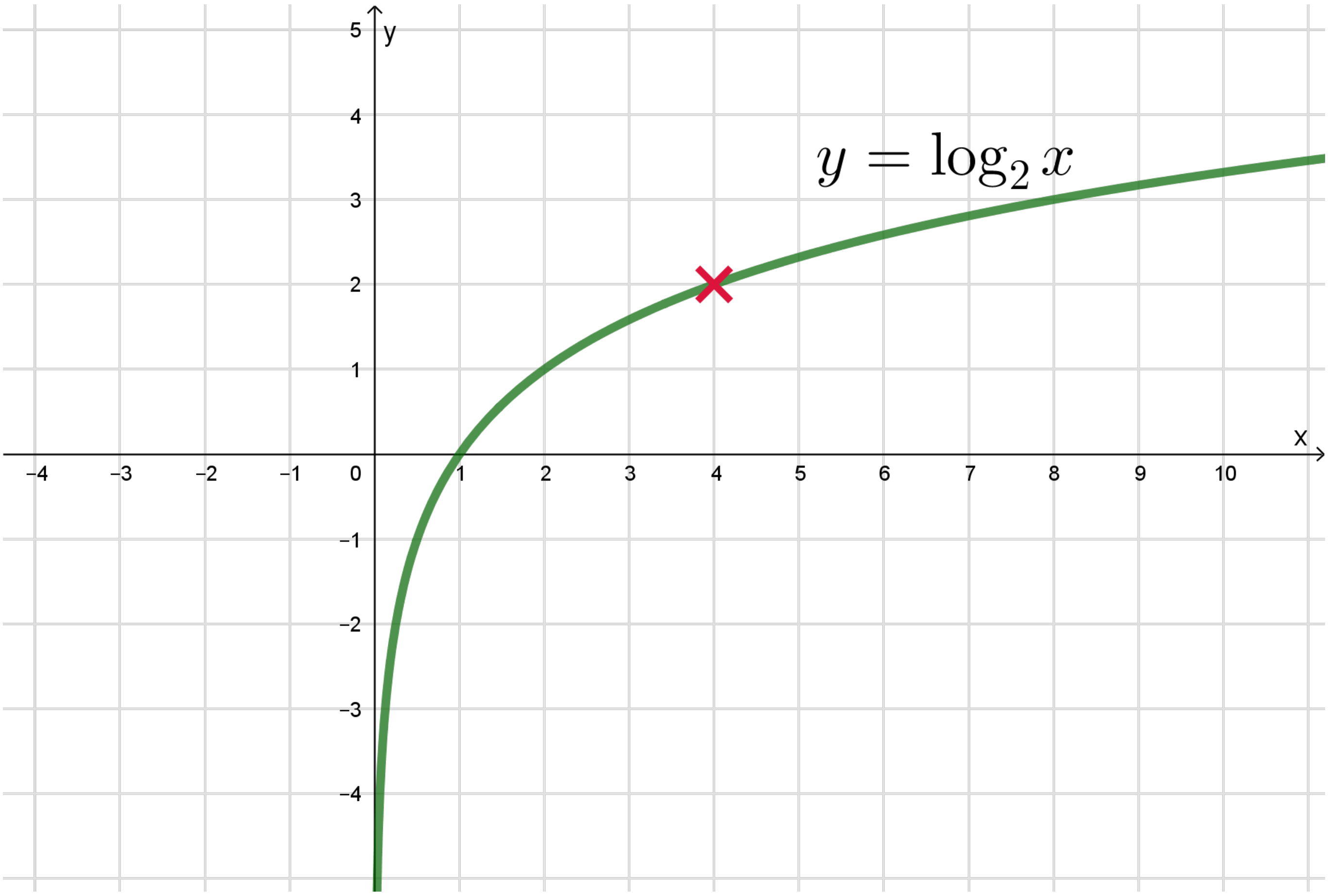
2) Выполняем все преобразования, связанные с **функцией**. Сначала делаем умножение на p, то есть сжимаем/растягиваем график к/от оси Ox. Получаем график $p \cdot f(kx+a)$. Затем делаем сложение, то есть сдвигаем график вверх/вниз по оси Oy. Получаем график функции $p \cdot f(kx+a)+b$.

Заметим, что все действия с аргументом "цепляются" именно к переменной x! Соответственно, если вы хотите получить, например, в аргументе $-2|x|+1$, то нужно сделать сначала $x+1$ (сдвинуть на 1 влево по Ox), затем $2x+1$ (уменьшить координаты x всех точек в 2 раза), затем $2 \cdot (-x)+1 = -2x+1$ (отразить график симметрично относительно Oy), затем $-2|x|+1$ (отразить часть графика, находящую правее Oy, симметрично относительно Oy).

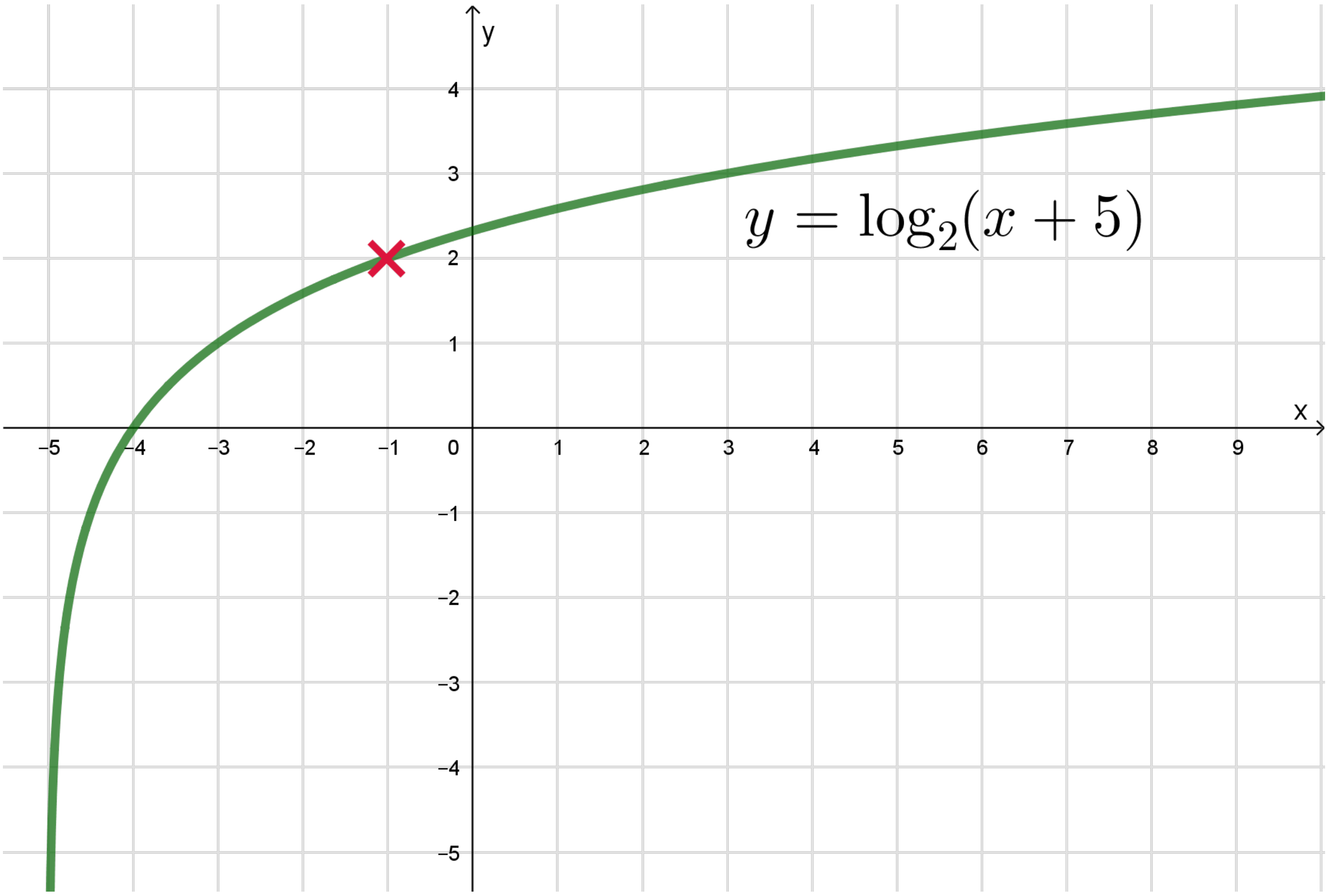
Как и в начальной математике, в первую очередь делаются дей-

ствия в скобках, затем умножение, затем сложение. Поэтому сначала делаем действия с аргументом (он в скобках). Затем переходим к функции.

Пример. Построить график функции $y = -\frac{1}{2}\log_2(2x+5)+4$. Будем строить график этой функции, опираясь на функцию $y = \log_2 x$.

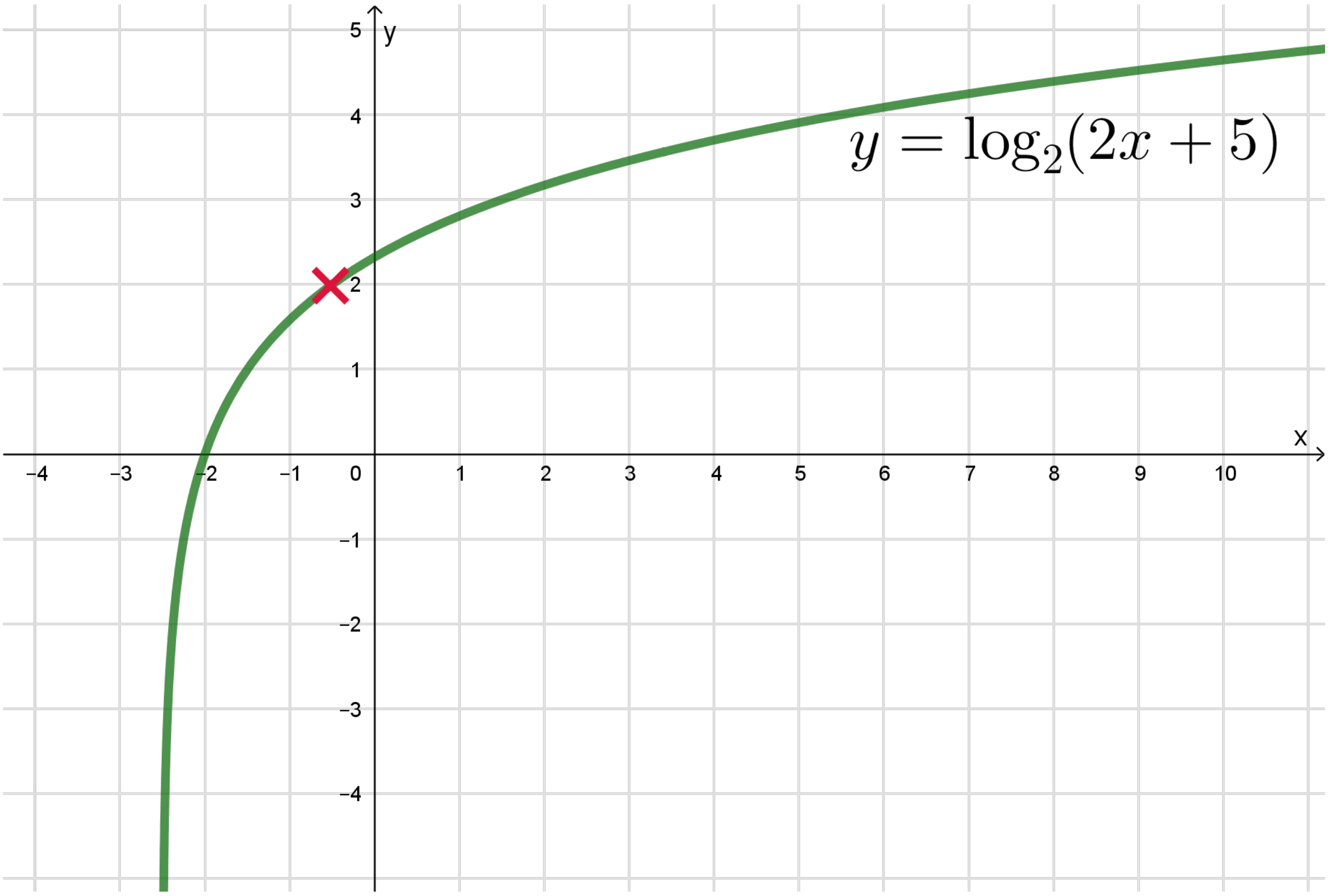


1) Строим график функции $y = \log_2(x+5)$. Сдвигаем график на 5 единиц влево по оси Ox:



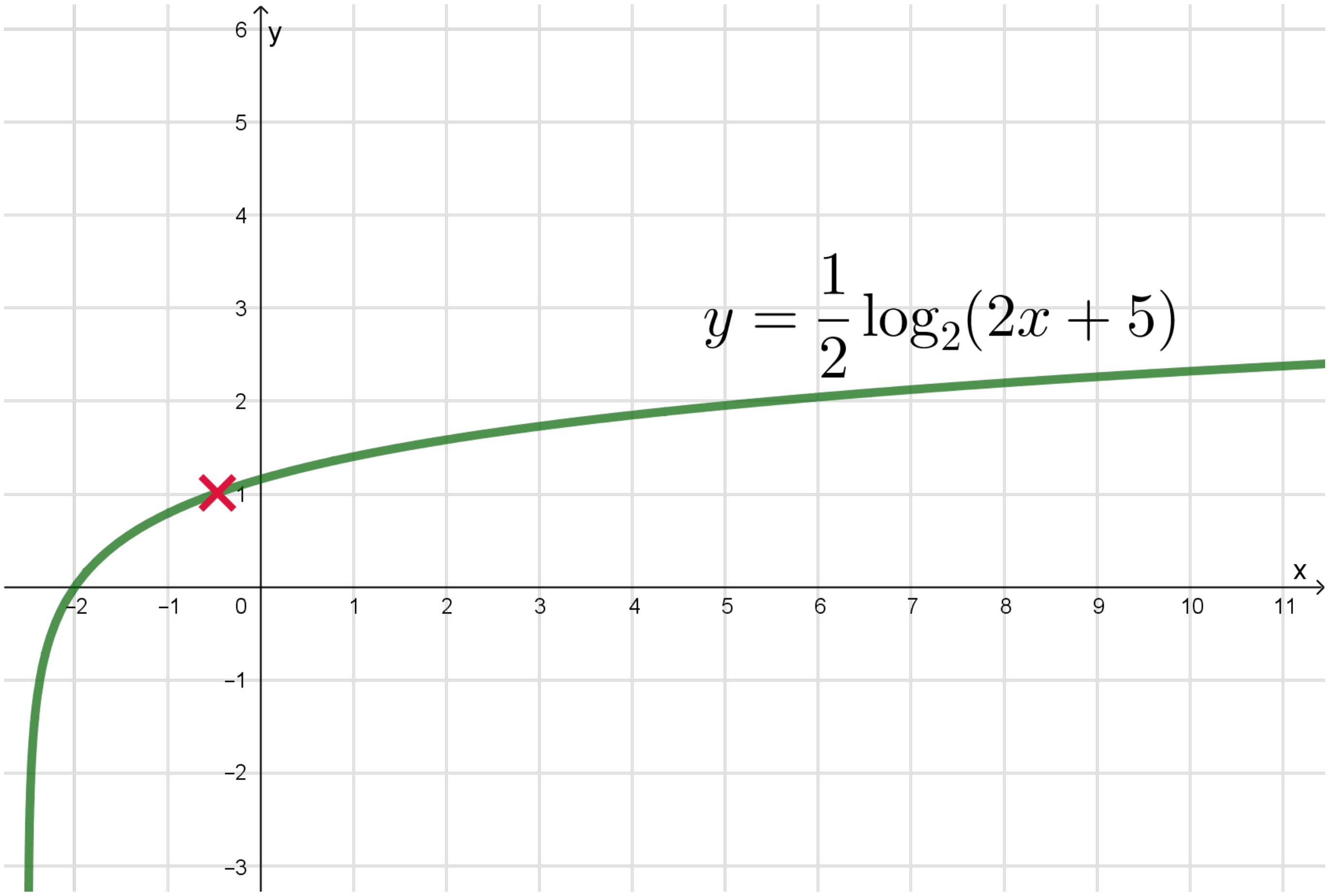
Как это делать: фиксируем несколько точек. Не меняя у этих точек координату y, уменьшаем координату x на 5. Таким образом, если график $y = \log_2(x)$ проходил через точку $(4; 2)$, то график $y = \log_2(x+5)$ будет проходить через точку $(4-5; 2) = (-1; 2)$.

2) Строим график функции $y = \log_2(2x+5)$. Сжимаем график $y = \log_2(x+5)$ в 2 раза к оси Oy:



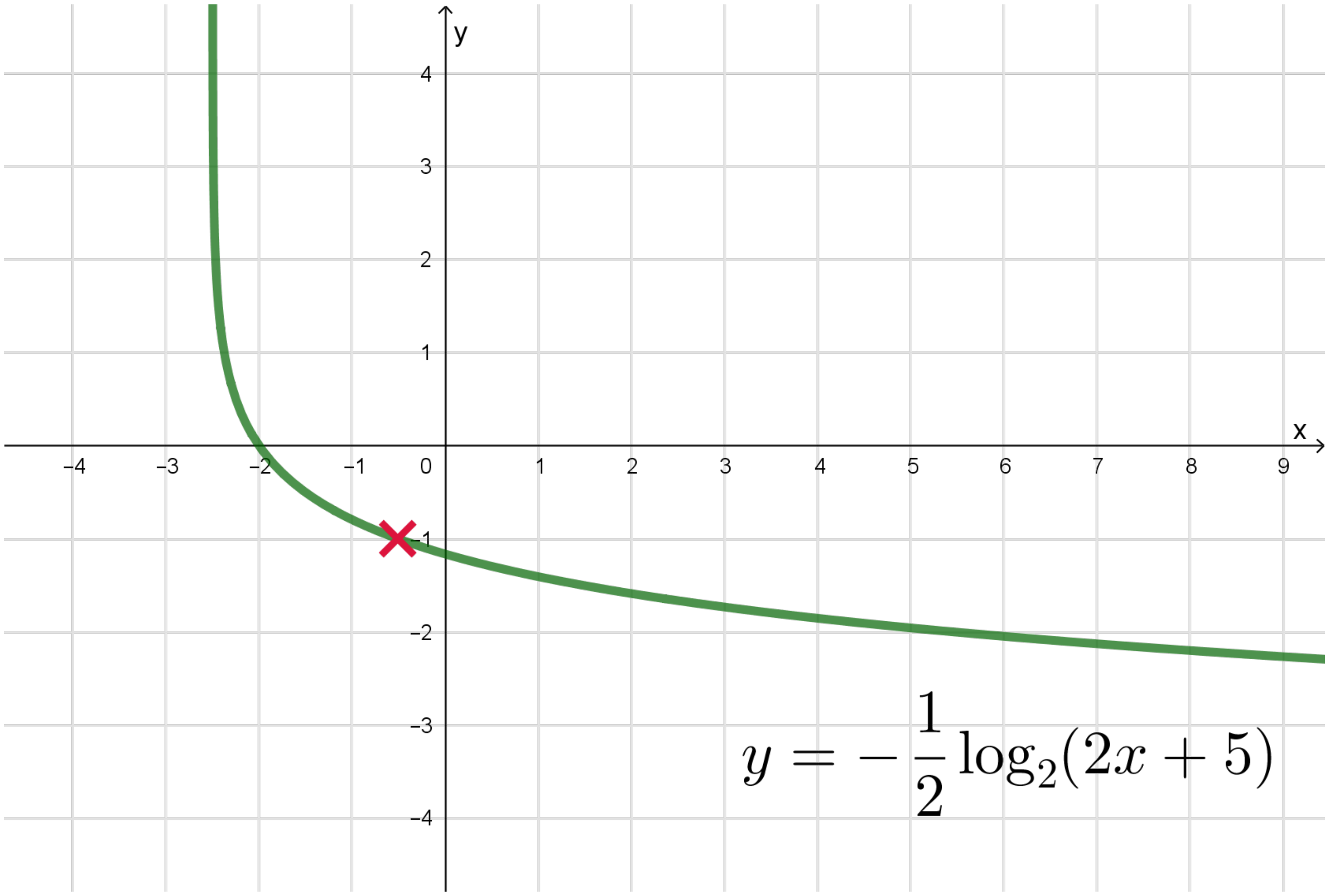
Как это делать: фиксируем несколько точек. Не меняя у этих точек координату y, уменьшаем координату x в 2 раза. Таким образом, если график $y = \log_2(x+5)$ проходил через точку $(-1; 2)$, то график $y = \log_2(2x+5)$ будет проходить через точку $(-1 : 2; 2) = (-0,5; 2)$.

3) Строим график функции $y = \frac{1}{2}\log_2(2x+5)$. Сжимаем предыдущий график в 2 раза к оси Ox:



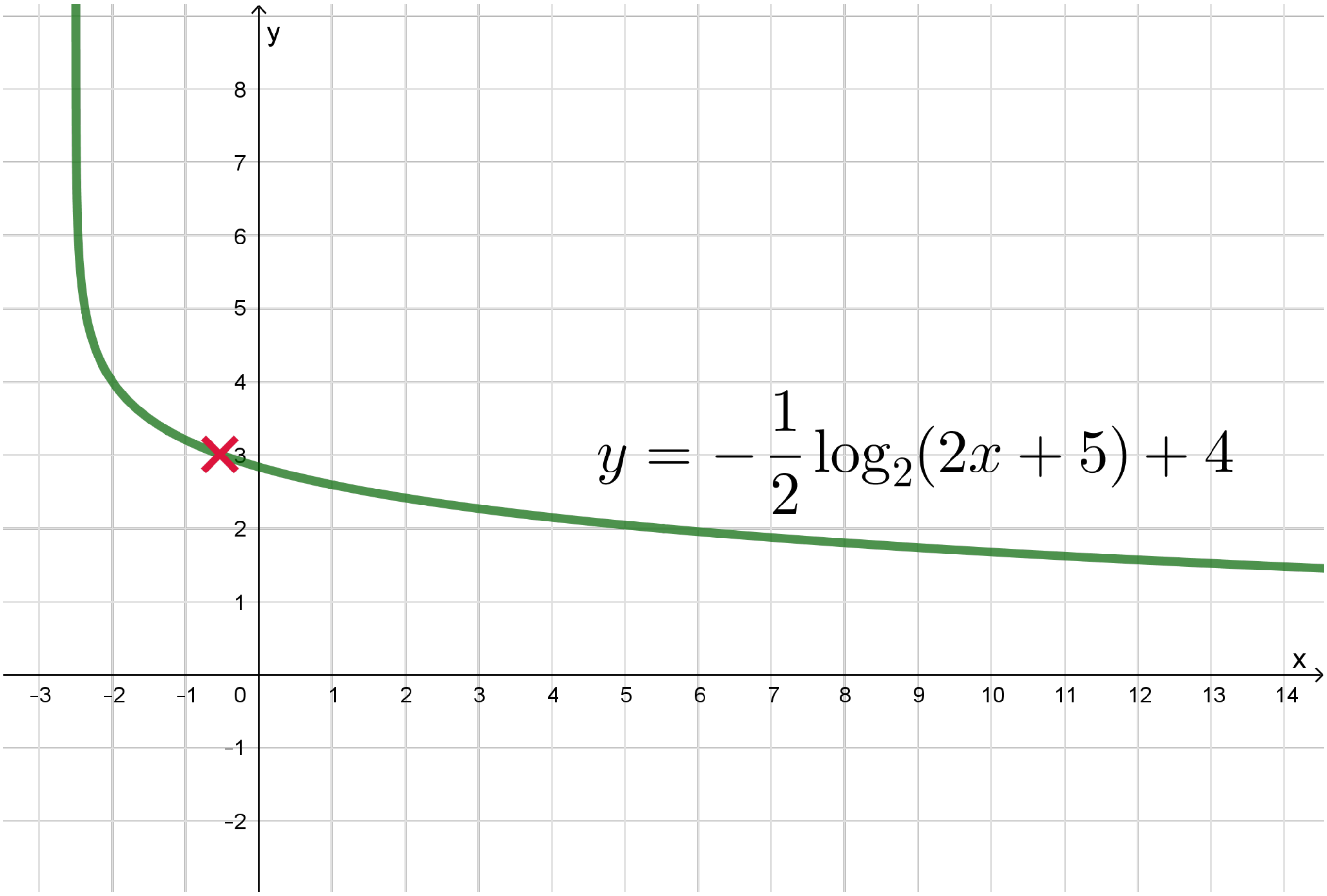
Как это делать: фиксируем несколько точек. Не меняя у этих точек координату x, уменьшаем координату y в 2 раза. Таким образом, если график $y = \log_2(2x+5)$ проходил через точку $(-0,5;2)$, то график $y = \frac{1}{2}\log_2(2x+5)$ будет проходить через точку $(-0,5;2:2) = (-0,5;1)$.

4) Строим график функции $y = -\frac{1}{2}\log_2(2x+5)$. Отражаем предыдущий график относительно оси Ox.



Как это делать: фиксируем несколько точек. Не меняя у этих точек координату x, координату y умножаем на -1. Таким образом, если график $y = \frac{1}{2}\log_2(2x+5)$ проходил через точку $(-0,5;1)$, то график $y = -\frac{1}{2}\log_2(2x+5)$ будет проходить через точку $(-0,5;-1)$.

5) Строим график функции $y = -\frac{1}{2}\log_2(2x+5)+4$. Поднимаем предыдущий график на 4 единицы вверх по оси Oy:



Как это делать: фиксируем несколько точек. Не меняя у этих точек координату x, координату y увеличиваем на 4. Таким образом, если график $y = -\frac{1}{2}\log_2(2x+5)$ проходил через точку $(-0,5;-1)$, то график $y = -\frac{1}{2}\log_2(2x+5)+4$ будет проходить через точку $(-0,5;-1+4) = (-0,5;3)$.

Вспомогательные задачи

1. Постройте графики следующих функций с помощью сдвигов, сжатий/растяжений или отражений:

   (a) $y = \dfrac{1}{2x-1} + 3$;

   (b) $y = -(|x| + 3)^2$.

2. Определите траекторию движения графика функции, следя за движением некоторой его точки:

   (a) $y = |2a - x + 3| - a^2$;

   (b) $y = x^2 + 4ax - 2$.

3. Найдите фиксированную точку, через которую проходит множество прямых, заданное следующим уравнением, если это возможно (такое множество прямых называют “пучком прямых”):

   (a) $y = 5ax + 2 + a$;

   (b) $y = -2ax + a^2$.

Основные задачи

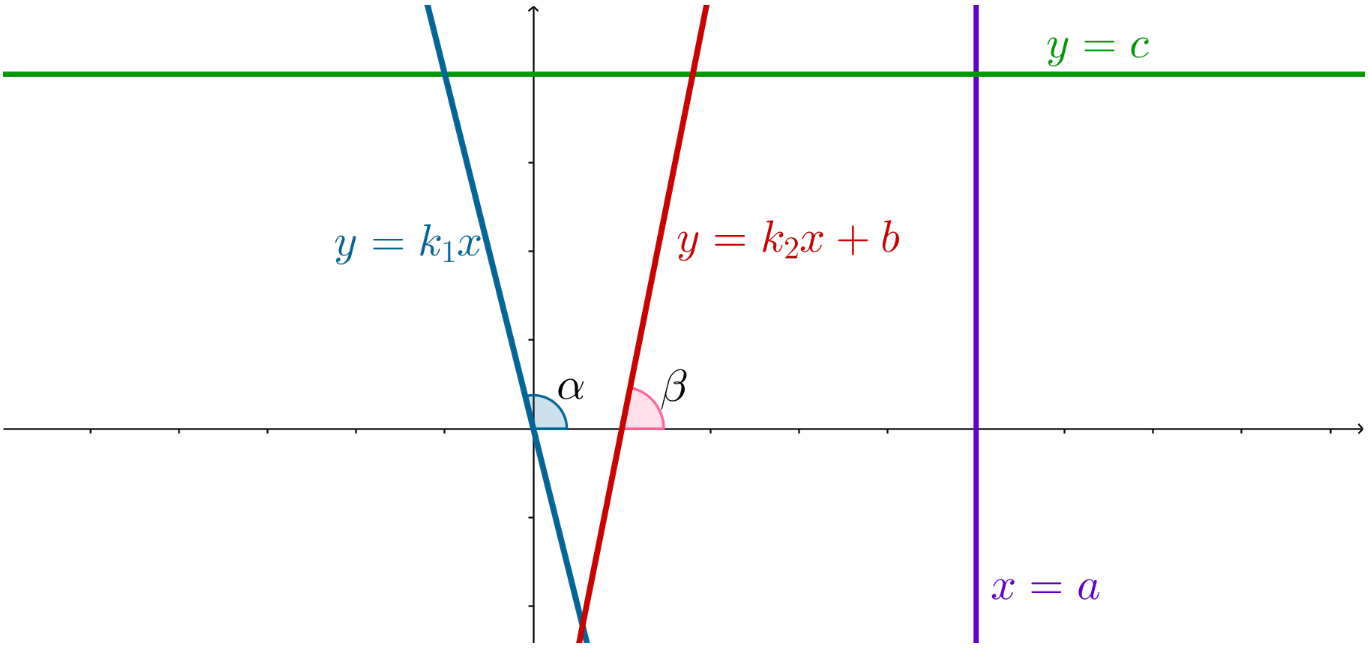
1. При каких a уравнение

$$2|x - 2a| - a^2 + 15 + x = 0$$

не имеет решений?

$a \in (-3; 5)$ – нет решений

- Линейная функция – функция вида $f(x) = kx + b$, где k, b – некоторые числа.
- Графиком линейной функции является прямая.
- Если $b = 0$, то прямая проходит через начало координат.
- Графиком $x = a$ является прямая, параллельная оси Oy.
- Графиком $y = c$ является прямая, параллельная оси Ox.
- Для $f(x) = kx + b$ угловой коэффициент k равен тангенсу угла наклона прямой к положительному направлению оси Ox (сокращенно будем говорить "угол наклона").



$k_1 = \mathrm{tg}\alpha$, $k_2 = \mathrm{tg}\beta$.

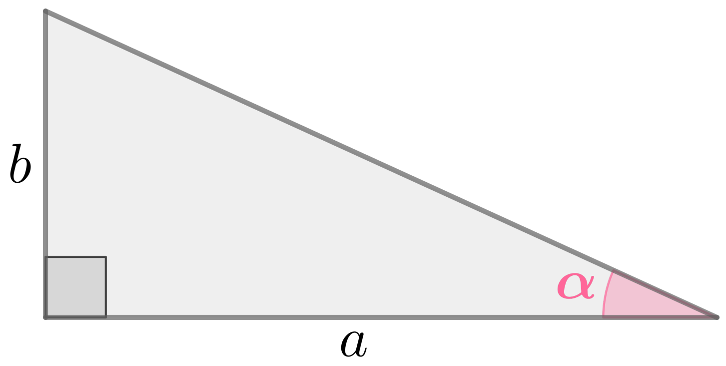
Если $\alpha < 90°$, то $k > 0$;

если $\alpha > 90°$, то $k < 0$;

если $\alpha = 0°$, то $k = 0$ (уравнение прямой имеет вид $y = b$ и она параллельна оси Ox);

если $\alpha = 90°$, то уравнение прямой имеет вид $x = a$ и она перпендикулярна оси Ox.

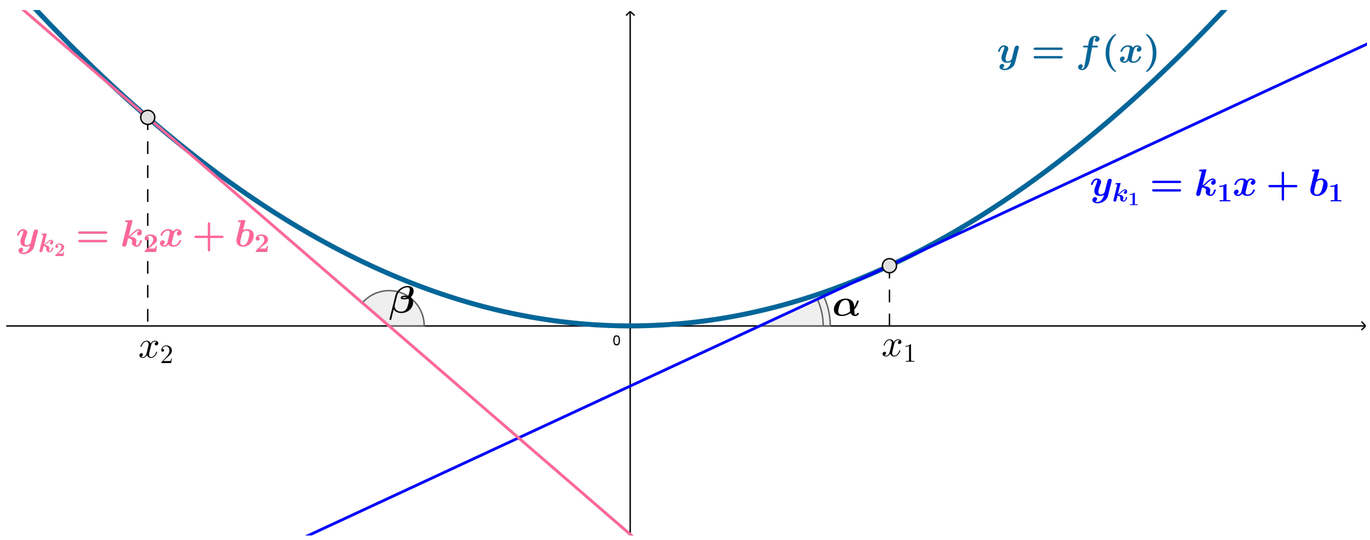
Напомним, что тангенс острого угла в прямоугольном треугольнике – это отношение противолежащего катета к прилежащему:



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$$

• Если две прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ параллельны, то $k_1 = k_2$.
• Если эти прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ взаимно перпендикулярны, то $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Если функция в точке x_0 имеет производную, то это значит, что в этой точке можно провести касательную к графику данной функции. Касательная – это некоторая прямая, которая графически выглядит так:



На чертеже изображены две различные касательные y_{k_1} и y_{k_2}, проведенные к графику функции $f(x)$.
Угол наклона первой касательной равен α, угол наклона второй равен β.

Если нам известно уравнение $y = f(x)$ функции, то, выбрав точку

x_0, в которой мы хотим провести касательную к графику этой функции, можно записать уравнение этой касательной:

$$y_k = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Если переписать уравнение касательной так, чтобы первое слагаемое было kx, второе слагаемое было b, то есть записать в виде $y_k = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$, то видно, что

$$\begin{cases} k = f'(x_0) \\ b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 \end{cases}$$

Таким образом, мы видим, что, с одной стороны, угловой коэффициент k касательной, как и любой прямой, равен тангенсу угла наклона α, а с другой стороны, если эта прямая касается графика функции $f(x)$ в точке x_0, то угловой коэффициент k также равен числу $f'(x_0)$:

$$k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$$

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множеством решений неравенства

$$\sqrt{5-x} \leqslant 3 - |x-a|$$

является отрезок.

$\boxed{a \in (-4; 2) \cup [2{,}25; 8)}$

3. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$|x^2+2x-3| - 2a = |x-a| + 3$$

имеет ровно три различных корня.

$\boxed{a = -2; \frac{1}{12}}$

Уравнение окружности: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$, **где** $(x_0; y_0)$ **– центр окружности,** R **– радиус.**

Если задано уравнение прямой $Ax + By + C = 0$**, то расстояние** ρ **от точки** $O(x_0; y_0)$ **до этой прямой вычисляется по формуле**

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

---

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{-7-8x-x^2} = 2a+3$$

имеет единственное решение.

$\boxed{a \in [-1; -1/3) \cup \{0\}}$

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x+2)^2 + y^2 = a^2 \\ |x| + |y-1| = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$\boxed{a \pm \sqrt{2}; \pm\sqrt{10}}$