(T1.) $\xi \sim R(0, \theta)$, $\theta > 0$

$\theta \in \Theta = (0, +\infty)$, $p(x, \theta) = \frac{1}{\theta} \{ (0, \theta) \}$

$$\tilde{\theta}_1 = 2\bar{x} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\tilde{\theta}_2 = x_{min}$$

$$\tilde{\theta}_3 = x_{max}$$

$$\tilde{\theta}_4 = x_1 + \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^{n} x_i$$

	$\tilde{\theta}_1$	$\tilde{\theta}_2$	$\tilde{\theta}_3$	$\tilde{\theta}_4$
несм.	+	−	−	+
сост.	+	−	?	−

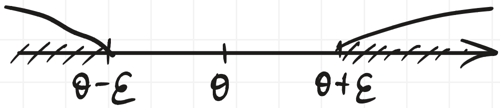
Нужно: 1) доказать по опр. сост. $\tilde{\theta}_3'$
2) посмотреть сост. $\tilde{\theta}_3$

Начнем:

1) Ранее взяли $\tilde{\theta}_3' = \frac{n+1}{n} x_{max}$.

Состоятельность это $\forall$ распр. из вер. модели $\tilde{\theta} \xrightarrow{P} \theta$.

т.е. $\forall \theta > 0 \ \forall \varepsilon > 0 \ P(|\tilde{\theta}_3' - \theta| \geqslant \varepsilon) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$



$$P(|\tilde{\theta}_3' - \theta| \geqslant \varepsilon) = P(\tilde{\theta}_3' \geqslant \theta + \varepsilon) + P(\tilde{\theta}_3' \leqslant \theta - \varepsilon) =$$

$$= P\left(x_{max} \geqslant \frac{n(\theta+\varepsilon)}{n+1}\right) + P\left(x_{max} \leqslant \frac{n(\theta-\varepsilon)}{n+1}\right)$$

Для x_{max}: $\xi \sim (F(z))^n$

$$\Phi(z) = \begin{cases} \left(\frac{x}{\theta}\right)^n, & x \in (0, \theta) \\ 1, & x \geq \theta \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

1) Т.к. $x_{max} \leqslant \theta$, $\frac{n+1}{n} x_{max} \leqslant \frac{n+1}{n} = \theta + \frac{\theta}{n}$

Если $n > \frac{\theta}{\varepsilon}$, то $\theta + \frac{\theta}{n} < \theta + \varepsilon$ и $P(\tilde{\theta}_3' \geq \theta + \varepsilon) \to 0$

$$P(\tilde{\theta}_3' \geqslant \theta + \varepsilon) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

2) левый хвостик:

а) $\varepsilon < \theta$

$$\Phi\left(\frac{n(\theta-\varepsilon)}{n+1}\right) = \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}_{\to e^{-1}} \underbrace{\left(1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n}_{\to 0} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

б) $\varepsilon \geq \theta$; если так, $\theta - \varepsilon \leq 0$, но $\tilde{\theta}_3' \geq 0$, тогда $P(\tilde{\theta}_3' \leq \theta - \varepsilon) = 0$

$$\Rightarrow P(|\tilde{\theta}_3' - \theta| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

А значит, $\tilde{\theta}_3'$ – состоятельна

2) Посмотрим состоятельность исходной оценки $\tilde{\theta}_3$. (тоже по опр.)

$$\forall \theta > 0 \ \forall \varepsilon > 0 \ P(|\tilde{\theta}_3 - \theta| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$P(|x_{max} - \theta| \geq \varepsilon) = P(x_{max} \geq \theta + \varepsilon) +$$
$$+ P(x_{max} \leq \theta - \varepsilon)$$

Ранее показали, что $x_{max} \leq \theta \Rightarrow$ первое слагаемое дает 0.

$$P(x_{max} \leq \theta - \varepsilon) = \Phi(\theta - \varepsilon) = \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n =$$
$$= \left(1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n.$$

Если $\varepsilon \geq \theta$, $\theta - \varepsilon \leq 0$ и $P(x_{max} \leq \theta - \varepsilon) = 0$

Если $\varepsilon < \theta$, то $\left(1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\Rightarrow P(|\tilde{\theta}_3 - \theta| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

ч.т.д