Zauberhafte Normalteiler

Definition (1.1)**.** Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $U \subset G$ eine Untergruppe.
U heißt **Normalteiler** von G $\iff \forall g \in G : gUg^{-1} = U$

Bemerkung. Im Allgemeinen ist $U \subset G$ kein Normalteiler Wir suchen größte Untergruppe von G, in der U Normalteiler ist. Wir wollen also V finden sodass

i) $U \subset V$ (U ist in V enthalten)

ii) U ist Normalteiler in V

iii) Ist V' eine weitere Untergruppe von G die i) und ii) erfüllt, so gilt $V' \subset V$. (V ist größtmöglich)

Definition (2.2)**.** Der **Normalisator** von U in G ist definiert als $N_G(U) := \{g \in G \mid gUg^{-1} = U\}$

Satz (2.3)**.** *$N_G(U)$ ist Untergruppe von G und erfüllt die Eigenschaften i) bis iii).*

Satz (2.4)**.** *Seien G, U und $N_G(U)$ wie gehabt.*
Seien ferner $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in N_G(U)$ und $u_0, \ldots, u_m \in U$. Dann gilt für ein geeignetes $u \in U$:

$$u_m \circ x_m \circ u_{m-1} \circ x_{m-1} \circ \ldots \circ u_1 \circ x_1 \circ u_0 = x_m \circ \ldots \circ x_1 \circ u.$$

Insbesondere:
$x_m \circ \ldots \circ x_1 \in U \implies u_m \circ x_m \circ u_{m-1} \circ x_{m-1} \circ \ldots \circ u_1 \circ x_1 \circ u_0 \in U.$

Definition (3.1)**.** Die Gruppe aller Permutationen mit n Karten heißt die **symmetrische Gruppe** S_n. Jede Permutation lässt sich mit $\mathbb{Z}_n := \{0, \ldots, n-1\}$ als bijektive Abbildung $\phi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ identifizieren.

Definition (3.2)**.** Sei $r \in Z_n$. Die Permutation $s_r : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n, \quad k \longmapsto s_r(k) = k + r \mod n$ entspricht einem zyklischen Shift im Kartenstapel. s_r ist bijektiv, also $s_r \in S_n$.

Satz (3.4)**.** *$S := \{s_r \mid r \in \mathbb{Z}_n\}$ ist kommutative Untergruppe von S_n.*
Das bedeutet insbesondere: Die Reihenfolge von mehrmaligem Abheben ist egal (Kommutativität), und mehrmaliges Abheben bringt die Karten nicht mehr durcheinander als einmaliges Abheben (Abgeschlossenheit).