1 Normalteiler

Definition 1.1. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe.
H heißt Normalteiler

$$
\begin{aligned}
&:\Longleftrightarrow \forall g \in G \; \forall u \in H : g \circ u \circ g^{-1} \in H \\
&\Longleftrightarrow \forall g \in G : gHg^{-1} = H \\
&\Longleftrightarrow \forall g \in G : gH = Hg.
\end{aligned}
$$

Beispiel 1.1. Einige Beispiele für Normalteiler:

- Die triviale Untergruppe $\{e\}$ ist immer Normalteiler, denn es gilt für alle $g \in G : g \circ \{e\} = \{g\} = \{e\} \circ g$.
- G ist immer Normalteiler in sich selbst, denn es gilt $\forall g \in G \; \forall g' \in G : g \circ g' \circ g^{-1} \in G$.
- Ist G kommutativ, so ist jede Untergruppe $H \subset G$ Normalteiler, denn es gilt $\forall g \in G \; \forall u \in H : g \circ u \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} \circ u = e \circ u = u \in H$.

$\diamondsuit$

TODO: Faktorgruppe einbauen, ggf. zweite und dritte Definition in Definition 1 entsprechend verschieben

2 Normalisator

Sei $(G, \circ)$ Gruppe, $U \subset G$ Untergruppe.
Im Allgemeinen ist U kein Normalteiler in G. Also suchen wir uns eine größtmögliche Untergruppe von G, sodass U in dieser Untergruppe Normalteiler ist. Formal wollen wir eine Untergruppe $V \subset G$ finden, sodass

1. $U \subset V$ (U ist in V enthalten)
2. U ist Normalteiler in V
3. Ist V' eine weitere Untergruppe von G die 1. und 2. erfüllt, so gilt $V' \subset V$. (V ist größtmöglich)

Bemerkung 2.1. V existiert immer.
Ist U Normalteiler in G, so wähle $V = G$.
Ist U kein Normalteiler in G, so erfüllt $V' = U$ die ersten beiden Eigenschaften, also lässt sich auch eine größtmögliche Untergruppe V finden, die die ersten beiden Eigenschaften erfüllt. $\triangle$

Definition 2.1.

$$N_G(U) := \{g \in G \mid gUg^{-1} = U\}$$

heißt Normalisator von U in G.

Satz 2.1. *$N_G(U)$ ist Untergruppe von G und erfüllt die Eigenschaften 1. bis 3.*
.

Beweis: <u>Untergruppe:</u>
Die Assoziativität wird vererbt.

Es gilt $e \in N_G(U)$, denn $e \in G$ und $eUe^{-1} = eUe = U$.

Sei $n \in N_G(U)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & nUn^{-1} = U \\ \iff & n^{-1}nUn^{-1}n = n^{-1}Un \\ \iff & U = n^{-1}Un, \end{aligned}$$

also auch $n^{-1} \in N_G(U)$.

Seien $n_1, n_2 \in N_G(U)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (n_1n_2)U(n_1n_2)^{-1} &= n_1n_2Un_2^{-1}n_1^{-1} \\ &= n_1(n_2Un_2^{-1})n_1^{-1} \\ &= n_1Un_1^{-1} \\ &= U, \end{aligned}$$

also auch $n_1 \circ n_2 \in N_G(U)$.

Damit ist $N_G(U)$ Untergruppe von G.

<u>1</u>:
U ist Normalteiler in sich selbst, also gilt $\forall u \in U : uUu^{-1} = U$. Zudem gilt $U \subset G$. Per Definition von $N_G(U)$ folgt sofort $U \subset N_G(U)$.

<u>2</u>:
Es gilt per Definition $\forall n \in N_G(U) : nUn^{-1} = U$, d.h. U ist Normalteiler in $N_G(U)$.

<u>3</u>:
Sei $V' \subset G$ eine weitere Untergruppe mit $U \subset V'$ und sodass U Normalteiler in V' ist.
Sei $v \in V'$. Da U Normalteiler in V' ist, gilt $vUv^{-1} = U$, also per Definition $v \in N_G(U)$.
$\implies V' \subset N_G(U)$. ■