

# Zauberhafte Normalteiler

**Definition (1.1).** Sei  $(G, \circ)$  eine Gruppe und  $U \subset G$  eine Untergruppe.

$U$  heißt **Normalteiler** von  $G : \Leftrightarrow \forall g \in G : gUg^{-1} = U$

**Bemerkung.** Im Allgemeinen ist  $U \subset G$  kein Normalteiler. Wir suchen größte Untergruppe von  $G$ , in der  $U$  Normalteiler ist. Wir wollen also  $V$  finden sodass:

- i)  $U \subset V$  ( $U$  ist in  $V$  enthalten)
- ii)  $U$  ist Normalteiler in  $V$
- iii) Ist  $V'$  eine weitere Untergruppe von  $G$  die i) und ii) erfüllt, so gilt  $V' \subset V$ . ( $V$  ist größtmöglich)

**Definition (2.2).** Sei  $(G, \circ)$  eine Gruppe und  $U \subset G$  eine Untergruppe. Der **Normalisator** von  $U$  in  $G$  ist definiert als  $N_G(U) := \{g \in G \mid gUg^{-1} = U\}$ .

**Satz (2.3).**  $N_G(U)$  ist Untergruppe von  $G$  und erfüllt die Eigenschaften i) bis iii).

**Satz (2.4).** Seien  $G, U$  und  $N_G(U)$  wie gehabt.

Seien ferner  $m \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_m \in N_G(U)$  und  $u_0, \dots, u_m \in U$ . Dann gilt für ein geeignetes  $u \in U$ :

$$u_m \circ x_m \circ u_{m-1} \circ x_{m-1} \circ \dots \circ u_1 \circ x_1 \circ u_0 = x_m \circ \dots \circ x_1 \circ u.$$

*Insbesondere:*

$$x_m \circ \dots \circ x_1 \in U \implies u_m \circ x_m \circ u_{m-1} \circ x_{m-1} \circ \dots \circ u_1 \circ x_1 \circ u_0 \in U.$$

**Definition (3.1).** Die Gruppe aller Permutationen mit  $n$  Karten entspricht der **symmetrischen Gruppe**  $S_n$ . Jede Permutation lässt sich mit  $\mathbb{Z}_n := \{0, \dots, n-1\}$  als bijektive Abbildung  $\phi : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$  identifizieren.

**Definition (3.2).** Sei  $r \in \mathbb{Z}_n$ . Die Permutation  $s_r : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ ,  $k \mapsto s_r(k) = k + r \pmod n$  entspricht einem zyklischen Shift im Kartenstapel.  $s_r$  ist bijektiv, also  $s_r \in S_n$ .

**Satz (3.4).**  $S := \{s_r \mid r \in \mathbb{Z}_n\}$  ist kommutative Untergruppe von  $S_n$ .

**Definition (4.1).** Wir definieren  $\phi_a : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ ,  $k \mapsto \phi_a(k) = ak \pmod n$ .

$\phi_a$  ist bijektiv  $\Leftrightarrow a$  und  $n$  teilerfremd. In diesem Fall gilt  $\phi_a \in S_n$ .

**Definition (4.2).** Seien  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Definiere  $\phi_{a,b} : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ ,  $k \mapsto \phi_{a,b}(k) = ak + b \pmod n$ .  $\phi_{a,b}$  ist bijektiv  $\Leftrightarrow a$  und  $n$  teilerfremd. In diesem Fall gilt  $\phi_{a,b} \in S_n$ .

**Lemma (4.4).** Sei  $\phi \in S_n$  bijektiv. Dann gilt:

$$\exists a \in \mathbb{Z}_n^*, b \in \mathbb{Z}_n : \phi = \phi_{a,b} \iff \exists a \in \mathbb{Z}_n \forall k \in \mathbb{Z}_n : \phi(k+1) = \phi(k) + a \pmod n.$$

**Satz (4.5).** Der Normalisator von  $S$  in  $S_n$  ist  $N_{S_n}(S) = \{\phi_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd}\}$ .

**Bemerkung (5.1).** Seien  $c, n \in \mathbb{N}$ . Wir definieren folgende Mischoperationen:

- i)  $R_c$ : Teile die  $n$  Karten von links nach rechts auf  $c$  Stapel aus. Danach werden die Karten wieder aufgenommen, und zwar von rechts nach links. Ganz nach oben kommt also der Stapel ganz links.
- ii)  $L_c$ : Von links nach rechts austeilen, dieses Mal von links nach rechts aufnehmen. Ganz nach oben kommt also der Stapel ganz rechts.

**Satz (5.2).**  $R_c$  und  $L_c$  wie gehabt. Dann gilt:

- i) Wenn  $c$  ein Teiler von  $n-1$  und  $a := (n-1)/c$ , dann sind  $a$  und  $n$  teilerfremd und  $R_c$  entspricht  $\phi_{a,a}$ .
- ii) Wenn  $c$  ein Teiler von  $n+1$  und  $a := (n+1)/c$ , dann sind  $a$  und  $n$  teilerfremd und  $L_c$  entspricht  $\phi_{-a,-1}$ .

**Lemma (5.3).** Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $A_n := \{x \mid n-1 \text{ durch } x \text{ teilbar}\}$  und  $B_n := \{x \mid n+1 \text{ durch } x \text{ teilbar}\}$ .

Wähle  $a_1, \dots, a_r \in A_n$  und  $a'_1, \dots, a'_l \in B_n$  aus. Sei  $a$  das Produkt aller  $a_i$  und  $a'_j$ . Wähle  $c_i$  bzw.  $c'_j$  sodass  $c_i a_i = n-1$ , bzw.  $c'_j a'_j = n+1$ .

Führe auf einen Kartenstapel  $R_{c_1}, \dots, R_{c_r}$  und  $L_{c'_1}, \dots, L_{c'_l}$  in beliebiger Reihenfolge durch. Dazwischen darf noch zusätzlich abgehoben werden. Der Kartenstapel befindet sich in der Permutation  $\phi_{a,b}$ , mit unbekanntem  $b$  falls das Abheben beliebig stattfindet.

Für uns von zentraler Bedeutung:  $a = 1$  oder  $a = -1$

$\implies$  Die Karten sind in der gleichen, bzw der gespiegelten zyklischen Reihenfolge.

Im Fall vom Originaltrick:

$n = 9$ ,  $A_n = \{1, 2, 4, 8\}$ . Wir wählen  $a_1 = a_2 = a_3 = 4$  und somit  $c_1 = c_2 = c_3 = 2$ .

Es gilt  $a = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 \equiv 1 \pmod 9$ . Wendet man  $R_2$  also 3 Mal auf den Kartenstapel an, so ist das äquivalent zu  $\phi_{1,r} = s_r$ . Das ganze entspricht also einem zyklischen Shift um  $r$  Stellen.