1 Aussagenlogik

1.1 Gesetze der Aussagenlogik

Idempotenz	$A \wedge A \equiv A$	$A \vee A \equiv A$
Kommutativ	$A \wedge B \equiv B \wedge A$	$A \vee B \equiv B \vee A$
Assoziativ	$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C) \equiv A \wedge B \wedge C$ $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C) \equiv A \vee B \vee C$	
Absorption	$A \vee (A \wedge B) \equiv A$ $A \wedge (\neg A \vee B) \equiv A \wedge B$ $\neg A \wedge (A \vee B) \equiv \neg A \wedge B$ $A \wedge (B \vee \neg B) \equiv A$	$A \wedge (A \vee B) \equiv A$ $A \vee (\neg A \wedge B) \equiv A \vee B$ $\neg A \vee (A \wedge B) \equiv \neg A \vee B$ $A \vee (B \wedge \neg B) \equiv A$
Neutralität	$A \wedge 1 \equiv A$ $A \wedge 0 \equiv 0$	$A \vee 0 \equiv A$ $A \vee 1 \equiv 1$
Distributiv	$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	
Komplementär	$A \wedge \neg A \equiv 0$	$A \vee \neg A \equiv 1$
De Morgan	$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$	$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
Implikation	$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$	$A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$
Äquivalenz	$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$	

1.2 Bindungsstärke (stark $\rightarrow$ schwach)

$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

1.3 Wahrheitstabellen

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

1.4 Hinweise zur Implikation

$A \rightarrow B$ bedeutet "Wenn A gilt, dann gilt B'.' bzw. "Nur wenn B gilt, dann gilt A."
Aus einer wahren Aussage kann keine falsche Aussage folgen.
TODO: Beispielformulierung aus den Textaufgaben einfügen

1.5 Begriffe

Tautologie ist eine Formel, die stets wahr ist (unabhängig von den Wahrheitswerten ihrer Aussagenvariablen).
Kontradiktion ist eine Formel die stets falsch ist.
logisch äquivalent sind zwei Formeln, wenn sie in jeder Zeile der Wahrheitstafel jeweils die selben Werte haben.

1.6 Normalformen

Disjunktive Normalform (DNF) Disjunktion von Konjunktionen von Literalen
Erstellung: Alle Zeilen der Wahrheitstabelle betrachten, die wahr sind (1). Die Literale dieser Zeilen 1:1 übernehmen

Beispiel:

A	B	F	DNF-Therm
0	1	1	$\neg A \wedge B$
1	0	1	$A \wedge \neg B$

ergibt $(\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$

Konjuktive Normalform (KNF) Konjunktion von Disjunktionen von Literalen
Erstellung: Alle Zeilen betrachten, die unwahr (0) sind. Die Literale dieser Zeilen negieren.

Beispiel:

A	B	F	KNF-Therm
0	1	0	$A \vee \neg B$
1	0	0	$\neg A \vee B$

ergibt $(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B)$

Kanonische Normalform (kanonische NF)
Jeder Klammerausdruck in der Normalform enthält sämtliche Aussagevariablen. – Es gibt nur eine einzige kanonische DNF und nur eine einzige kanonische KNF zur Realisierung einer booleschen Funktion.

2 Matrizen

2.1 Rechenoperationen

Addition / Subtraktion
Elementweise addieren.
Beispiel:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

ergibt $A + B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}, A - B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

skalare Multiplikation
Jedes Element mit dem Skalar multiplizieren
Beispiel:

$-2A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -8 & -10 & -12 \end{pmatrix}$

Rechengesetze	A + B = B + A	Kommutationgesetz
	(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C	Assoziativgesetz
	A + **0** ("Nullmatrix") = A	neutrales Element
	A + (-A) = **0**	
	$1 \cdot A$ = A	
	$0 \cdot A$ = **0**	
	$\lambda \cdot (\mu \cdot$ A) = $(\lambda \cdot \mu) \cdot$ A	
	$\lambda \cdot (A \pm B) = (\lambda \cdot A) \pm (\lambda \cdot B)$	
	$(\lambda \pm \mu) \cdot A = (\lambda \cdot A) \pm (\mu \cdot A)$	

2.2 Transponieren

Eine Matrix transponieren heißt, ihre Zeilen und Spalten vertauschen. Genauer gesagt, die Zeilen werden zu Spalten (und umgekehrt). Aus einer $m \times n$-Matrix A wird dabei eine $n \times m$-Matrix $A^\top$
Kurz gesagt: Spalten werden Zeilen, Zeilen werden Spalten. Symmetrische Matrizen werden entlang der Diagonalen gespiegelt.
Beispiele:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

ergibt

$A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} B^\top = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} C^\top = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Es gilt stets: $(A^\top)^\top = A$

2.3 Skalarprodukt

Seien $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^n$

Das Skalarprodukt von v und w ist wie folgt definiert:
$v \cdot w = a_1 b_1 + ... + a_n b_n$

2.4 Matrixmultiplikation

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$.
Das Produkt $C := A \cdot B \in \mathbb{R}^{m \times k}$ ist definiert durch
$c_{ij} = a_{i*} \cdot b_{*j}$.

Umgangssprachlich: Zeile 1 von Matrix A * Spalte 1 von Matrix B ergibt Element 1. Spalte/1. Zeile der Ergebnismatrix

Wichtig: Die Multiplikation ist nur zwischen Matrizen definiert, wenn die Spaltenanzahl der ersten der Zeilenanzahl der zweiten entspricht
die Dimension der Ergebnismatrix: $(m \times n) \cdot (n \times k) = (m \times k)$

2.5 Rechenregeln Matrixmultiplikation

$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C$
$(\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B) = \lambda(A \cdot B)$
$A \cdot e_j = a_{*j}$
$e_i^\top \cdot A = a_{i*}$
$A \cdot E = E \cdot A = A$
$A \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot A = \mathbf{0}$
$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \; (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
$(A \cdot B)^\top = B^\top \cdot A^\top$
Beispiel:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 3a + 4c & 3b + 4d \end{pmatrix}$

2.6 Determinanten

2×2 Matrix: $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$

3×3 Matrix: $\begin{vmatrix} a_1 1 & a_1 2 & a_1 3 \\ a_2 1 & a_2 2 & a_2 3 \\ a_3 1 & a_3 2 & a_3 3 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 1 & a_1 2 & a_1 3 & a_1 1 & a_1 2 \\ a_2 1 & a_2 2 & a_2 3 & a_2 1 & a_2 2 \\ a_3 1 & a_3 2 & a_3 3 & a_3 1 & a_3 2 \end{array}\right.$

$= a11 \cdot a22 \cdot a33 + a12 \cdot a23 \cdot a31 + a13 \cdot a21 \cdot a32 - a31 \cdot a22 \cdot a13 - a32 \cdot a23 \cdot a11 - a33 \cdot a21 \cdot a12$

Umgangssprachlich: Die Hauptdiagonalen multiplizieren und addieren, dann die Nebendiagonalen multiplizieren und subtrahieren.

La Place Entwicklungssatz: Suche die Zeile/Spalte mit den meisten Nullen. Für jedes Element ungleich 0 berechne die umliegende Determinante und addiere/subtrahiere diese.
Ob addiert oder subtrahiert wird hängt von der Position ab. Positiv und Negativ wechselt sich in der Matrix ab:

$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$

Bedeutung der Determinante in bestimmten Fällen

	Det == 0	$Det \neq 0$
LGS	keine oder unendlich viele Lösungen	eindeutig lösbar
Matrix	nicht invertierbar	invertierbar
Vektoren	linear abhängig (in einer Ebene)	linear unabhängig

Hinweis zur Lösbarkeit von homogenen LGS: Diese haben immer die triviale Lösung, soll man also feststellen welche andere Lösung es gibt, so muss die Determinante == 0 sein, damit es noch andere Lösungen gibt!

2.7 Matrix invertieren

Eine Matrix A ist nur dann invertierbar, wenn gilt $det(A) \neq 0$

Die Inverse lässt sich mit dem Gauß-Algorithmus berechnen. Linke Seite ist die Matrix A und rechts steht die Einheitsmatrix der jeweiligen Dimension.
Nun formt man das LGS solange um, bis
1. links die Einheitsmatrix übrig bleibt, dann kann man rechts die Inverse ablesen
2. links eine Nullzeile entsteht (rechts kann dies nicht passieren!). In diesem Fall ist die Matrix A nicht invertierbar.

2.8 LGS

nichttriviale Lösung bei homogenen LGS
- λ_1, λ_2 und λ_3 berechnen
- das ergibt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$ mit beliebigem reellem t.

3 Analytische Geometrie

3.1 Länge / Betrag eines Vektors

in der Ebene $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} => |v| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{v \cdot v}$

im Raum $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} => |v| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

3.2 Kreuzprodukt

$v \times w = \begin{pmatrix} v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2 \\ v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3 \\ v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1 \end{pmatrix}$

Zur Erstellung kann man auch die beiden Vektoren hinschreiben, dann noch mal den Vektor darunter notieren. Dann ignoriert man die erste und die letzte Zeile und berechnet immer über greuz: “links oben mal rechts unten minus links unten mal rechts oben”

Hinweis: Das Kreuzprodukt zweier Vektoren ergibt immer einen neuen Vektor der senkrecht auf diesen steht.

3.3 Betrag des Kreuzprodukts

$|a \times b| = |a| \cdot |b| \cdot \sin\alpha$

Das entspricht dem doppeltem FLächeninhalt des Dreiecks, das a und b aufspannen.

3.4 Skalarprodukt

$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos\alpha$

3.5 Steigungswinkel eines Veltors

$v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, |\alpha| = \arccos\frac{a}{|v|}, sgn(\alpha) = sgn(b)$

3.6 Winkel zwischen Vektoren

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$
$|\alpha| = \arccos\frac{v \cdot w}{|v| \cdot |w|}, sgn(\alpha) = sgn(\sin\alpha) = sgn(det(v, w)$

$v \cdot w = 0$, dann sind die Vektoren orthogonal
det(v,w) = 0, dann sind die Vektoren parallel

3.7 Hinweis Arkuskosinus

$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y, x \in \{-1 \leq x \leq 1\}, y \in \{0 \leq y \leq \pi\}$

3.8 Ebene

Notmalenvektor: orthogonal auf der Ebene, daher mit dem Kreuzprodukt der Richtungsvektoren herstellbar

3.9 Lineare Abhängigkeit

Zwei Vektoren (a, b) sind linear unabhängig, wenn es kein reelles k gibt mit dem man a multipliziert um b zu erhalten.
Man kann also b mit a mal k gleichsetzen und daraus Gleichungen erstellen.
Beipiel: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -1 = 2k \\ 1 = -2k \\ 2 = -4k \end{matrix} \Leftrightarrow k = -0,5$
Drei Vektoren sind genau dann linear unabhängig, wenn ihre **Determinante** $\neq 0$.
Ist die **Determinante dagegen = 0** dann sind die drei Vektoren in einer Ebene.

3.10 Linearkombination

Ein Vektor wird aus Vielfachen anderer Vektoren hergestellt:
$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + ... + \lambda_n \cdot v_n$

3.11 Abstand Punkt A und B

1. Verbindungsvektor der Punkte bestimmen
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$
2. Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$ berechnen
$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + ... + (b_n - a_n)^2}$

4 Allgemeine Hilfsmittel

4.1 P-Q-Formel

$x^2 + p \cdot x + q = 0$
$x_{1,2} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$

4.2 Binomische Formeln

Erste binomische Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Zweite binomische Formel $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Dritte binomische Formel $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

4.3 verschiedene Winkel

$\alpha°$	rad(α)	$\cos\alpha$
$0°$	0	1
$30°$	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$45°$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$60°$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}$
$90°$	$\frac{1}{2}\pi$	0
$120°$	$\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{1}{2}$
$135°$	$\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$150°$	$\frac{5}{6}\pi$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$180°$	π	-1
$210°$	$\frac{7}{6}\pi$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$225°$	$\frac{5}{4}\pi$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$240°$	$\frac{4}{3}\pi$	$-\frac{1}{2}$
$270°$	$\frac{3}{2}\pi$	0
$300°$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{1}{2}$
$315°$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$330°$	$\frac{11}{6}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$360°$	2π	1