Formale Sprachen // Alphabete

$L_1 = \{0^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ und $L_2 = \{1^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ seien formale Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{0,1\}$. Berechnen Sie:

(a) $L_1 \cup L_2 = \{\epsilon, 0, 00, \dots, 1, 11, \dots\} = \{w \mid w = 0^i \lor w = 1^i \text{ mit } i \in \mathbb{N}_0\}$
(b) $L_1 \cap L_2 = \{\epsilon\}$
(c) $L_1 \setminus L_2 = \{0, 00, 000, \dots\} = \{0^i \mid i \in \mathbb{N}\}$
(d) $L_1 \cap \Sigma^* = L_1$
(e) $(L_1 \cup L_2) \cap \Sigma^3 = \{000, 111\}$

Anzahl Worte

Sei Σ ein Alphabet aus n Zeichen, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Wie viele Wörter enthält Σ^m, $m \in \mathbb{N}_0$?
(b) Wie viele Wörter enthält $\bigcup_{i=0}^{m} \Sigma^i$, $m \in \mathbb{N}_0$?
(c) Wie viele Wörter enthält Σ^*?

(a) n^m
(b) $\sum_{i=0}^{m} n^i = \frac{n^{m+1}-1}{n-1}$
(c) abzählbar unendlich

NEA->DEA // Teilmengenkonstruktion a la Chat

Man hält im DEA fest in welchen Zuständen sich der Automat nach Lesen (oder bei Epsilon: Nicht-Lesen) eines Zeichens befinden könnte. Das macht man für jedes Zeichen des Alphabets. Am Ende markiert man alle neuen Zustände als Endzustände die zumindest einen Endzustand des NEAs aufweisen.
ACHTUNG: Immer gucken ob ein Epsilon an dem betrachteten Zustand hängt, dann gehört nämlich der nächste Zustand zur Liste dazu!

Beispiel Teilmengenkonstruktion mit Tabellen

Gegeben sei der nichtdeterministische endliche Automat $N = (\{1,2,3\}, \{a,b\}, \delta, 1, \{2\})$ mit

δ:

		a	b	ϵ
$\rightarrow$	1	$\{3\}$	$\emptyset$	$\{2\}$
$*$	2	$\{1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
	3	$\{2\}$	$\{2,3\}$	$\emptyset$

I. Ohne Berücksichtigung von ϵ-Überführungen:

	a	b
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{1\}$	$\{3\}$	$\emptyset$
$\{2\}$	$\{1\}$	$\emptyset$
$\{3\}$	$\{2\}$	$\{2,3\}$
$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\emptyset$
$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{2,3\}$	$\{1,2\}$	$\{2,3\}$
$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{2,3\}$

II. Unter Berücksichtigung von ϵ-Überführungen:

		$\delta'(R,x)$:	
R	$E(R)$	a	b
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{3\}$	$\emptyset$
$\{2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$	$\emptyset$
$\{3\}$	$\{3\}$	$\{2\}$	$\{2,3\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2,3\}$	$\emptyset$
$\{1,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{2,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2\}$	$\{2,3\}$
$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{2,3\}$

Reguläre Sprachen // Reguläre Ausdrücke

Stellen Sie die nachfolgenden Sprachen als reguläre Ausdrücke dar:

(a) $L = \{ w \mid w \in \{0,1\}^* \text{ und } w \text{ beginnt mit 0 und endet mit 1} \}$
(b) $L = \{ w \mid w \in \{0,1\}^* \text{ und } w \text{ enthält 11 mindestens einmal} \}$
(c) $L = \{ w \mid w \in \{0,1\}^* \text{ und } w \text{ enthält 11 genau einmal} \}$
(d) $L = \{ w \mid w \in \{0,1\}^* \text{ und } w \text{ enthält 11 höchstens einmal} \}$

(a) $0\,(0 \mid 1)^*\,1$
(b) $(0 \mid 1)^*\,11\,(0 \mid 1)^*$
(c) $(0 \mid 10)^*\,11\,(0 \mid 01)^*$
(d) $(0 \mid 10)^*\,(11 \mid 1 \mid \epsilon)\,(0 \mid 01)^*$

Pumping Lemma

Betrachte die Sprache $L = \{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$.

Annahme: L sei regulär.

Dann muss es eine Konstante $n \in \mathbb{N}$ geben, so dass jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n$ in drei Teilwörter $w = xyz$ zerlegt werden kann, für die die Bedingungen des Pumping Lemmas erfüllt sind.

Betrachte das Wort $w = a^m b^m$ mit $m \geq n$:

Es gilt $|w| = |a^m b^m| = 2m > m \geq n$. Wegen $|xy| \leq n \leq m$, besteht dann xy ausschließlich aus a's. Daraus ergibt sich die folgende Zerlegung von $w = xyz$:

I. $x = a^r$ mit $r < n$, da $y \neq \epsilon$, d. h. $|y| > 0$.

II. $y = a^s$ mit $s > 0$ und $r + s \leq n$.

III. $z = a^t b^m$ mit $r + s + t = m$.

Nach dem Pumping Lemma muss nun für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ $xy^k z \in L$ sein.

Mit $k = 0$ gilt

$$xy^0 z = a^r (a^s)^0 a^t b^m = a^r a^t b^m = a^{r+t} b^m.$$

Da aber $r + t < m$, ist $xy^0 z \notin L$. Es ergibt sich also ein Widerspruch zum Pumping Lemma.

Die Annahme, L sei regulär, muss also falsch sein.

Kontextfreie Sprachen // Kontextfreie Grammatiken

(a) $L_1 = \{a^n b^n c^m \mid m, n \in \mathbb{N}_0\}$
(a) $G_1 = (\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, R_1, S)$

$$R_1: \quad \begin{aligned} S &\rightarrow AB \\ A &\rightarrow aAb \mid \epsilon \\ B &\rightarrow cB \mid \epsilon \end{aligned}$$

(b) $L_2 = \{a^m b^n c^n \mid m, n \in \mathbb{N}_0\}$
(b) $G_2 = (\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, R_2, S)$

$$R_2: \quad \begin{aligned} S &\rightarrow AB \\ A &\rightarrow aA \mid \epsilon \\ B &\rightarrow bBc \mid \epsilon \end{aligned}$$

Kellerautomat // Beispiel

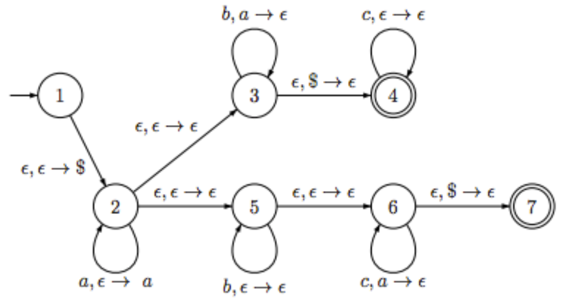
Es sei der Kellerautomat $K = (\{1,2,3,4,5,6,7\}, \{a,b,c\}, \{a,\$\}, \delta, 1, \{4,7\})$ gegeben, der die kontextfreie Sprache

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ und } i = j \text{ oder } i = k\}$$

erkennt. Die Überführungsfunktion δ ist wie folgt definiert:

Q	Σ_ϵ	Γ_ϵ	$\mathcal{P}(Q \times \Gamma_\epsilon)$
1	ϵ	ϵ	$\{(2,\$)\}$
2	a	ϵ	$\{(2,a)\}$
2	ϵ	ϵ	$\{(3,\epsilon),(5,\epsilon)\}$
3	b	a	$\{(3,\epsilon)\}$
3	ϵ	$\$$	$\{(4,\epsilon)\}$
4	c	ϵ	$\{(4,\epsilon)\}$
5	b	ϵ	$\{(5,\epsilon)\}$
5	ϵ	ϵ	$\{(6,\epsilon)\}$
6	c	a	$\{(6,\epsilon)\}$
6	ϵ	$\$$	$\{(7,\epsilon)\}$

Überführungsgraph



(c) $abbcc \notin L(K)$.

i	Q	$y_{i+1} \dots y_m \in \Sigma_\epsilon^*$	$s_i \in \Gamma_\epsilon^*$
0	1	$\epsilon a \epsilon bb \epsilon cc \epsilon$	ϵ
1	2	$a \epsilon bb \epsilon cc \epsilon$	$\$$
2	2	$\epsilon bb \epsilon cc \epsilon$	$a\$$
$\vdots$			
$\vdots$			
3	3	$bb \epsilon cc \epsilon$	$a\$$
4	3	$b \epsilon cc \epsilon$	$\$$
$\vdots$			
3	5	$bb \epsilon cc \epsilon$	$a\$$
4	5	$b \epsilon cc \epsilon$	$a\$$
5	5	$\epsilon cc \epsilon$	$a\$$
6	6	$cc \epsilon$	$a\$$
7	6	$c \epsilon$	$\$$

Kein Wort $abbcc = y_1 y_2 \dots y_m$, $y_i \in \Sigma_\epsilon$ wird nach Abarbeitung der Eingabe in einem akzeptierenden Zustand enden. Also wird $abbcc$ nicht akzeptiert.

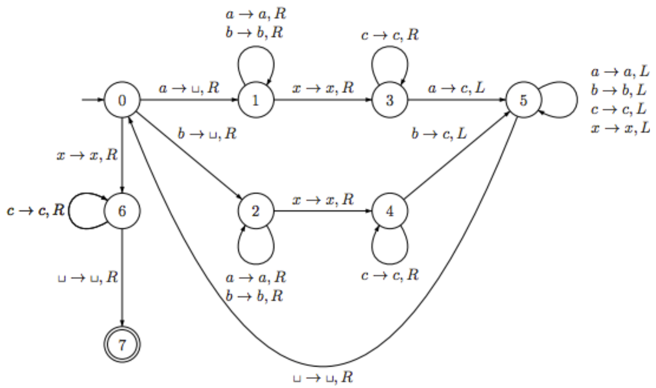
(b) Eingabewort $aabcc$:

i	Q	$y_{i+1} \dots y_m \in \Sigma_\epsilon^*$	$s_i \in \Gamma_\epsilon^*$
0	1	$\epsilon aa \epsilon b \epsilon cc \epsilon$	ϵ
1	2	$aa \epsilon b \epsilon cc \epsilon$	$\$$
2	2	$a \epsilon b \epsilon cc \epsilon$	$a\$$
3	2	$\epsilon b \epsilon cc \epsilon$	$aa\$$
4	5	$b \epsilon cc \epsilon$	$aa\$$
5	5	$\epsilon cc \epsilon$	$aa\$$
6	6	$cc \epsilon$	$aa\$$
7	6	$c \epsilon$	$a\$$
8	6	ϵ	$\$$
9	7		

$aabcc \in L(K)$, wegen obiger Berechung und $7 \in F$.

Turingmaschinen

Beispiel



Hierarchie der Sprachfamilien