1 Relationen

1.1 Definitionen der Eigenschaften

R linkstotal	Jedes Element x steht mit mindestens einem Element y in Relation. ∀x ∃y : (x, y) ∈ R
R rechtstotal	Für jedes Element y existiert mindestens ein Element x, das mit y in Relation steht. ∀y ∃x : (x, y) ∈ R
R linkseindeutig	Keine zwei verschiedenen Elemente x_1 und x_2 stehen mit dem selben Element y in Relation. $\forall x_1\ \forall x_2\ \forall y$: ($(x_1,\ y)$ ∈ R ∧ $(x_2,\ y)$ ∈ R ⇒ $(x_1 = x_2)$)
R rechtseindeutig	Kein Element x steht mit zwei verschiedenen Elementen y_1 und y_2 in Relation. ∀x $\forall y_1\ \forall y_2$: ((x, y_1) ∈ R ∧ (x, y_2) ∈ R ⇒ $(y_1 = y_2)$)
R reflexiv	Jedes Element x steht mit sich selbst in Relation. ∀x : (x, x) ∈ R
R irreflexiv	Kein Element x steht mit sich selbst in Relation ∀x : (x, x) ∉ R ⇔ ¬∃x : (x, x) ∈ R
R symmetrisch	Wenn x mit y in Relation steht, dann steht auch y mit x in Relation. ∀x ∀y : ((x, y) ∈ R ⇒ (y, x) ∈ R)
R asymmetrisch	Wenn x mit y in Relation steht, dann steht y nicht mit x in Relation. ∀x ∀y : ((x, y) ∈ R ⇒ (y, x) ∉ R)
R antisymmetrisch	Wenn x mit y und y mit x in Relation stehen, dann sind x und y identisch. ∀x ∀y : ((x, y) ∈ R ∧ (y, x) ∈ R ⇒ (x = y))
R transitiv	Wenn x mit y und y mit z in Relation stehen, dann steht auch x mit z in Relation. ∀x ∀y ∀z : ((x, y) ∈ R ∧ (y, z) ∈ R ⇒ (x, z) ∈ R)

1.2 Beweisen der Eigenschaften

TODO TODO TODO

2 Funktionen

2.1 Polinomdivision

TODO TODO TODO

2.2 Horner Schema:

Beispiel: x^4 - x^3 - $3x^2$ + 5x -2 = 0
Hinweis zum Finden einer Lösung: Nur Koeffizienten betrachten, sollte das 0 ergeben, dann ist 1 eine Lösung:
$1 - 1 - 3 + 5 - 2 = 0$
Damit dann das Horner Schema abarbeiten
Schematisch:
$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, mit möglicher Lösung x=n

	a	b	c	d	
n	↓	na	n(b+na)	n(c+n(b+na))	
	a	b+na	c+n(b+na)	0	←(sollte 0 sein, damit es aufgeht)

Danach hat man eine neue Lösung mit veringertem Exponenten. Darauf kann man dann wieder das Hoener Schema anwenden oder direkt die pq-Formel.
Am obigen Beispiel betrachtet:

	1	-1	-3	5	-2
1	↓	1	0	-3	2
	1	0	-3	2	0

Das ergibt: $x^3 + 0x^2 - 3x + 2 = 0$
Hierfür wieder eine Nullstelle erraten (kann die gleiche sein wie eben), und wieder das HS anwenden:

	1	0	-3	2
1	↓	1	1	-2
	1	1	-2	0

Ergibt also: $1x^2 + 1x - 2 = 0$
Und das lässt sich nun mit pq-Formel lösen.

2.3 Definitionsbereich etc.

Definitionsbereich bei Brüchen: alles außer den Stellen wo der Nennen 0 wäre
Definitionsbereich bei Wurzeln: alles wo unter der Wurzel etwas ≥ 0 steht
Definitionsbereich bei Exponenten: egal, ganz $\mathbb{R}$
Definitionsbereich bei Logarithmen: der Numerus (das x bei ln(x)) muss $>$ 0 sein
Definitionsbereich ohne z.B. die 1: $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$

2.4 Ableitungen

Konstantenregel	$c' = 0$
Faktorregel	$(c \cdot u(x))' = cu'(x)$
Potenzregel	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'\ (n \in \mathbb{R},\ n \neq 0)$
Summenregel	$(u \pm v)' = u' \pm v'$
Produktregel für zwei Funktionen	$(uv)' = uv' + u'v$
Produktregel für drei Funktionen	$(uvw)' = uvw' + uv'w + u'vw$
Produktregel für N Funktionen	$(u_1 u_2 ... u_N)' = \sum_{i=1}^{N} u_1 ... u_i' ... u_N$
Quotientenregel	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2},\ \left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$
Kettenregel für zwei Funktionen	$\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}} = \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dv}} \cdot \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dx}}$ für $u(v(x))$
Kettenregel für drei Funktionen	$\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}} = \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dv}} \cdot \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dw}} \cdot \frac{\mathrm{dw}}{\mathrm{dx}}$ für $u(v(w(x)))$

Regeln:

$y = f(x)$	$y' = f'(x)$	Einschränkungen
c(const.)	0	
x	1	
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
x^r	$r \cdot x^{r-1}$	$r \in \mathbb{R},\ r \neq 0, x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	sin → cos → -sin → -cos → sin
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$
$\cot x$	$-(1 + \cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
a^x	$a^x \ln a$	$a > 0$
e^{x}	e^{x}	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a > 0,\ a \neq 1;\ x > 0$

2.5 Kurvendiskussion

Symmetrie:
Achsensymmetrie: f(x) = f(-x) (alle Exponenten von x sind gerade)
Punktsymmetrie: f(x) = -f(-x) (alle Exponenten von x sind ungerade)

Nullstellen:
f(x) = 0 und dann ausrechnen
Strategien:
- x ausklammern, wenn x überall auftaucht. Dann ist x=0 eine Lösung und das was die Klammer = 0 setzt
- eine Nullstelle durch Probieren ermitteln und dann Polinomdivision
- z.B. x^2 durch z ersetzen und dann pq-Formel

Bedeutung von Nullstellen:
Einfach Nullstelle: Kurve kreuzt die Achse
doppelte Nullstelle: Extremwert (Hoch- oder Tiefpunkt)
dreifache Nullstelle: Sattelpunkt

Schnitt mit y-Achse:
x = 0, also f(0) berechnen

Extremwerte:
Ein lokales Minimum ist dort wo die 1. Ableitung = 0 ist und die 2. Ableitung $\neq 0$
f$'(x) = 0\wedge$ f$'' \neq 0$
wenn $f''(x) < 0$ dann ist es ein Hochpunkt (lokales Maximum)
wenn $f''(x) > 0$ dann ist es ein Tiefpunkt (lokales Minimum)

Ein Wendepunkt liegt dort wo die 2. Ableitung = 0 und die 3. Ableitung $\neq$ 0 ist
f$''(x) = 0\wedge$ f$'''(x) \neq 0$

Verhalten im Unendlichen:
Hier geht es darum zu schauen wie sich f(x) bei x → +unendlich und bei x → -unendlich verhält.
Dazu beachten ob die Exponenten von x gerade oder ungerade sind!

Andere Option: Asymptote berechnen
Bei gebrochen rationalen Funktionen kann man den Bruch durch Polinomdivision berechnen und erhält evtl. eine Konstante und einen Rest der anzeigt wo sich die Funktion annähert.

Skizze:
- Nullstellen einzeichnen
- Schnitt mit der y-Achse einzeichnen
- Extremwerte einzeichnen
- Wendepunkte einzeichnen
- Hoch- und Tiefpunkte schon mal andeuten
- dann die Kurven durchziehen

Wertebereich:
Den kann man dann in der Skizze ablesen. Sprich man betrachtet ob es eine Asymptote im Negativen oder im Positiven gibt. Diese begrenzen dann den Wertebereich. Am Ende kommt dann z.B. sowas raus: $\mathbb{W} = [-4; \infty)$

3 Diverses

- Logarithmusregeln - Potenzregel