

# 11. naloga - Stohastični populacijski modeli

Tina Klobas

10. januar 2019

## 1 Opis problema

V nalogi se bomo ukvarjali s Poissonovimi stohastičnimi procesi. S tem se realni situaciji približamo z numeričnimi približki tako, da na vsakem koraku integracije dopuščamo odmik od modela v obliki napake. Na vsakem koraku tako izžrebamo naključno število, porazdeljeno okoli predvidene po Poissonovi porazdelitvi

$$\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad (1)$$

kar bomo označevali z  $\mathcal{P}(\lambda)$ .

## 2 Eksponentni model izumrtja

Radi bi delali statistiko časov izumrtja za preprost eksponentni model ( $\beta = 1/\text{enota časa}$ )

$$\frac{dN}{N} = -\beta dt \quad \rightarrow \quad N(t) = N_0 e^{-\beta t} \quad (2)$$

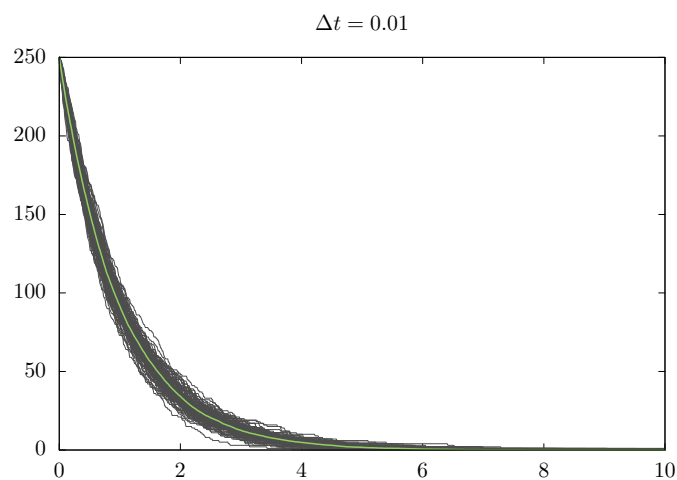
pri različnih začetnih velikostih populacije  $N_0$ . Zanima nas kako je ta čas povezan z velikostjo časovnega koraka  $\Delta t$  in koliko se problem bliža modelu, ki vključuje rojstva in smrti ( $\beta_r = 4\beta$ ,  $\beta_s = 5\beta$ ).

Model 2 spravimo v numerično obliko, tako da na vsakem koraku izračunamo

$$N(t + \Delta t) = N(t) - \mathcal{P}(\beta N \Delta t). \quad (3)$$

**Velika začetna populacija:**  $N_0 = 250$

Za fiksno začetno vrednost spreminjamo velikosti korakov  $\Delta t = \{0.001, 0.01, 0.1, 0.25, 0.5, 1\}$ . Na grafu 2.1 je prikazanih 100 ponovitev za korak  $\Delta t = 0,01$  in njihovo povprečje (ki sovпада z eksponentno funkcijo). Za različne

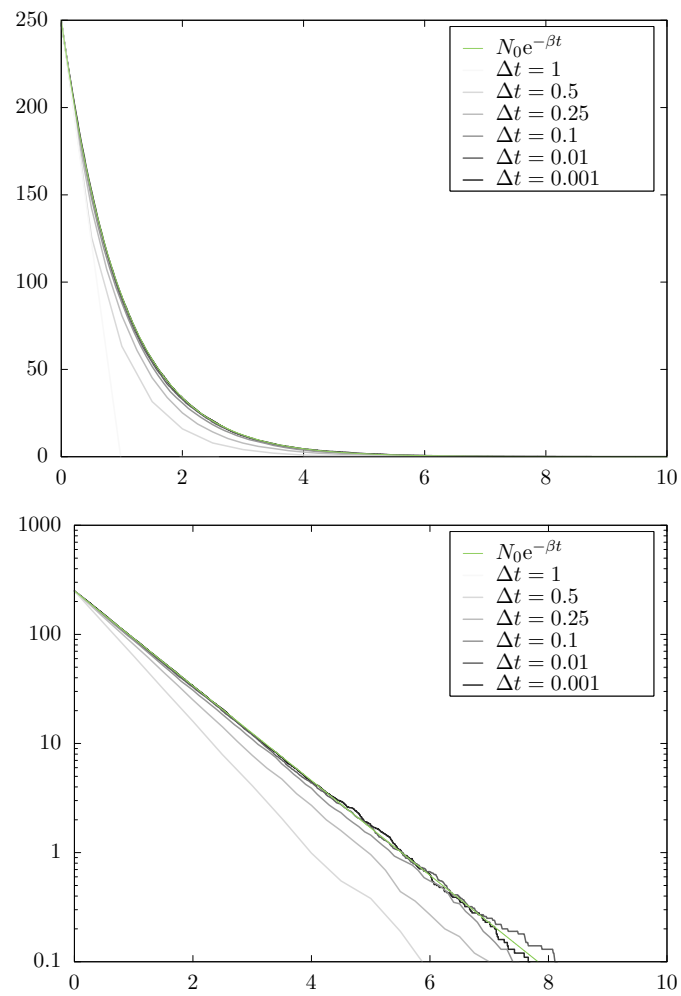


Slika 2.1: 100 poskusov in njihova povprečna vrednost.

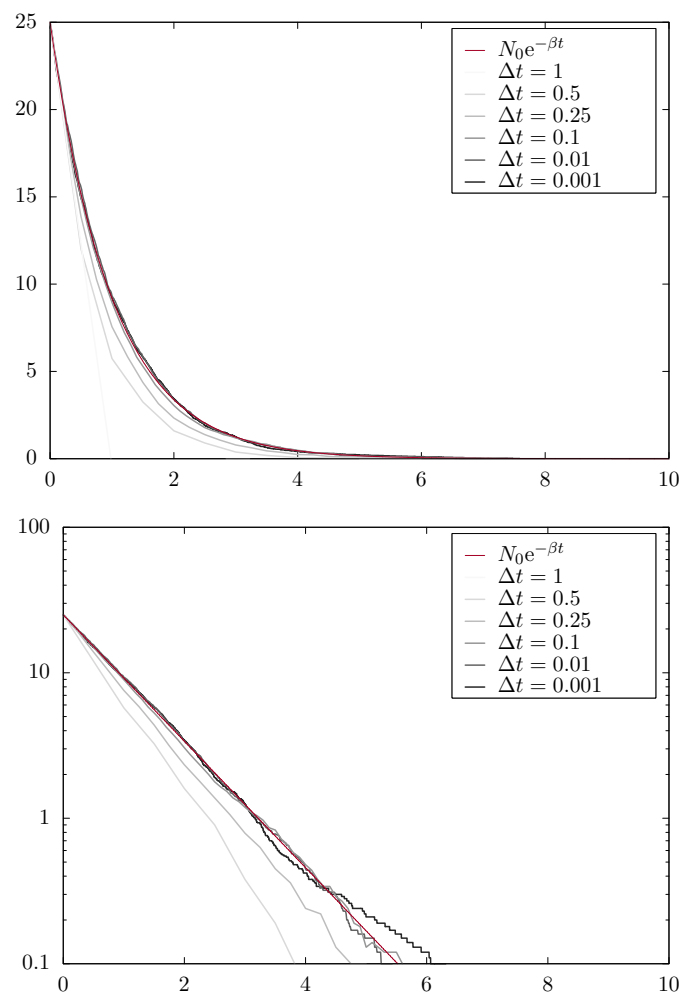
korake podobno izračunamo povprečja nekaj ponovitev, kar je prikazano na grafu 2.2. Z obeh grafov je vidno, da je bolje jemati manjše korake, če se želimo približati realnim vrednostim. S tem ko zmanjšamo korak, tudi zožamo poissonovo funkcijo  $\lambda = \beta N(t)\Delta t$  in s tem zmanjšamo šum, oziroma nihanje okoli povprečne vrednosti.

### **Majhna začetna populacija: $N_0 = 25$**

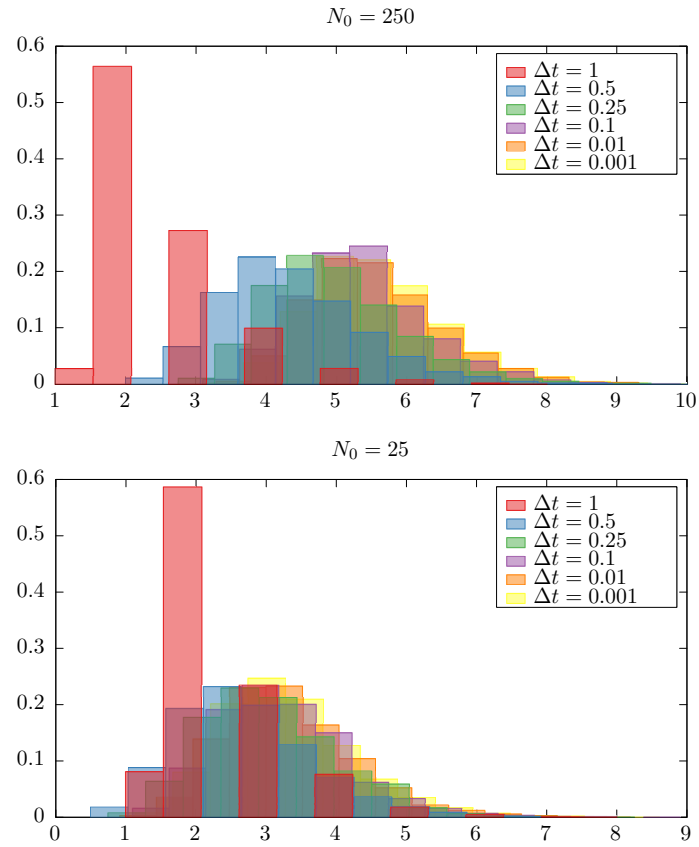
Podobno kot smo v prejšnjem primeru videli, tudi tukaj vidimo s pomočjo grafov 2.3, da je bolje jemati krajše čase.



Slika 2.2: Povprečne vrednosti 100 poskusov za različne  $\Delta t$  za  $N_0 = 250$ .



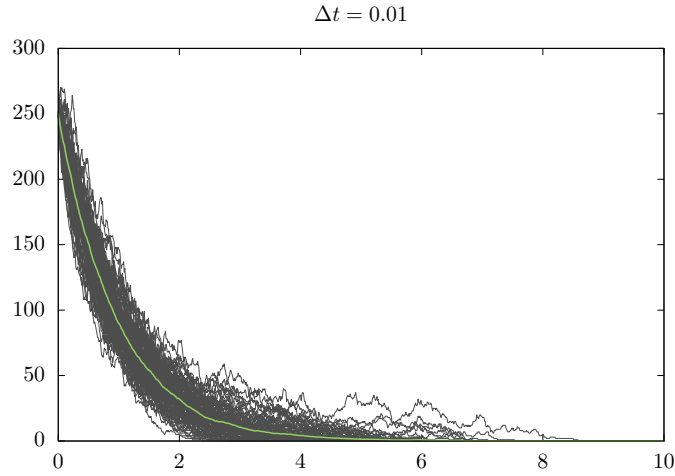
Slika 2.3: Povprečne vrednosti 100 poskusov za različne  $\Delta t$  za  $N_0 = 25$ .



Slika 2.4: Histograma časov izumrtja za različno začetno vrednost populacije. Model je osnoven, samo s parametrom, ki zmanjšuje populacijo.

## 2.1 Časi izumrtja

Zanimivo je opazovati čase izumrtja populacije. Na grafih 2.4 je prikazana porazdelitev v odvisnosti od različnih korakov  $\Delta t$  za  $N = 10000$  poskusov. Na prvi pogled lahko že potrdimo prešnje grafe, da koraki, večji od  $\Delta t = 0, 1$ , ne dajo dovolj natančnega rezultata in se precej razlikujejo od ostalih. Pri sliki za  $N_0 = 250$  je odstopanje med različnimi koraki veliko manjše. Celoten graf za manjšo populacijo je pomaknjen v levo, saj manjša populacija prej zamre. Pri tem grafu tudi opazimo, da razen histogram za  $\Delta t = 1$ , so vsi ostali veliko manj razlikujejo.



Slika 2.5: 100 poskusov in njihova povprečna vrednost.

### Rojstva in smrti

Sedaj spremenimo model in upoštevamo rojstva in smrti (in dodatna parametra  $\beta_r = 4\beta$ ,  $\beta_s = 5\beta$ )

$$\frac{dN}{dt}(t) = -\beta_s t + \beta_r t = -5\beta + 4\beta = -\beta t \quad (4)$$

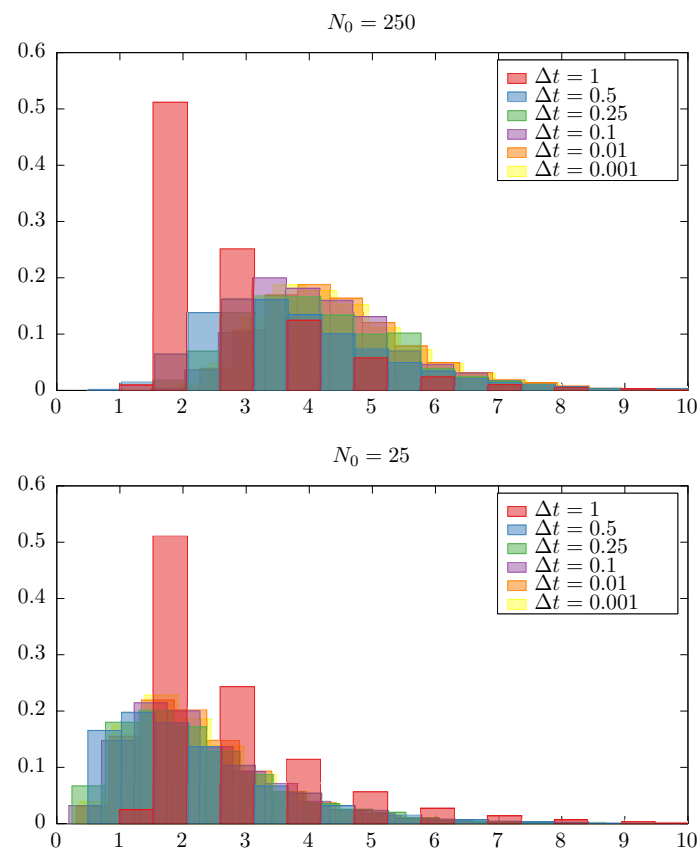
enačba je enaka kot prej, le da sedaj dovolimo, da s stohastičnim računanjem dovolimo tudi občasno rast populacije, kar je tudi bolj podobno realnosti. Stohastična enačba je tako:

$$N(t + \Delta t) = N(t) - \mathcal{P}(\beta_s N \Delta t) + \mathcal{P}(\beta_r N \Delta t). \quad (5)$$

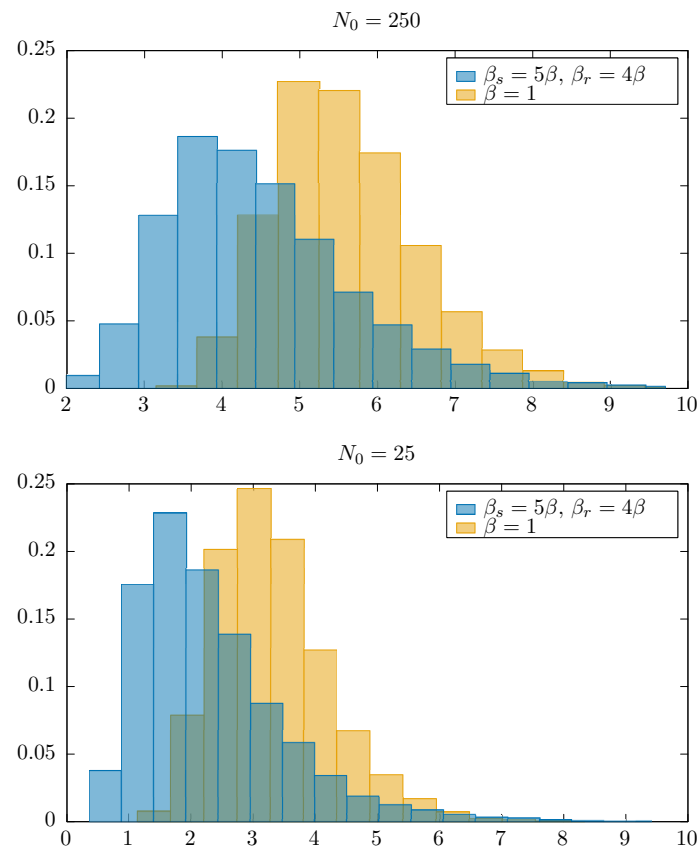
S tem razčlenjenim členom smrti, ki dopušča tudi rojevanje smo tudi dopustili večjo razpršenost stohastičnega modela, kar tudi vidimo na grafu 2.5, ki je veliko bolj razšpršen, kot ekvivalenten graf 2.1.

Na grafih 2.6 je zopet prikazana porazdelitev časov izumrtja za različne časovne korake in spet ugotovimo, da se velikih korakov ne splača uporabljati. Na sliki 2.7 se bolje vidi primerjava med obema modeloma, kjer se tudi dobro opazi, da je tudi čas izumrtja populacije nekoliko bolj razpršen kot prvi model. Poleg tega pa populacija prej izgine, kar je posledica, da sistem bolj moten in vanj vnašamo več šuma. Časi izumrtja s tega grafa so

	$N_0 = 250$	$N_0 = 25$
Združen model:	$t = 4,9$	$t = 3,01$
Ločen model:	$t = 3,68$	$t = 1,65$



Slika 2.6: Histograma časov izumrtja za različno začetno vrednost populacije. Model dopušča ločena parametra rodnosti in smrtnosti.



Slika 2.7: Primerjava histogramov za oba modela in pri obeh začetnih vrednostih  $N_0$ , pri koraku  $\Delta t = 0,01$ .



### 3 Matrika prehodov

Prejšnji problem lahko zapišemo tudi z matriko prehodov. Za trenutno situacijo lahko zapišemo vektor stanja:  $\mathbf{x}(t) = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N_0})$ . Prehod na vsakem časovnem koraku lahko zapišemo

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) = M\mathbf{x}(t) \quad (6)$$

oziroma

$$\mathbf{x}(p\Delta t) = M^p\mathbf{x}(0), \quad (7)$$

kjer je bilo začetno stanje modela  $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0, \dots, 1)$  z enko na  $N_0$ -tem mestu. Vrednost komponente vektorja  $x_i$  predstavlja verjetnost, da bo sistem v  $i$ -tem stanju ob času  $p\Delta t$ . Komponente matrike  $M$  so razvoji Poissonove funkcije za majhne časovne korake in predstavljajo verjetnosti za dogodke v sistemu (imamo 1 smrt, 1 rojstvo, ...). Matrika ima tako tridiagonalno obliko

$$M = \begin{bmatrix} 1 - (R_0 + S_0)\Delta t & S_1\Delta t & 0 & & \\ R_0\Delta t & 1 - (R_1 + S_1)\Delta t & S_2\Delta t & \dots & \\ 0 & R_1\Delta t & 1 - (R_2 + S_2)\Delta t & & \\ & \vdots & & \ddots & \end{bmatrix} \quad (8)$$

kjer so  $R_n = \beta n$  verjetnosti za rojstva,  $S_n = \beta n$  pa za smrti.

## 4 Model plen-plenilec

Model življenja populacij lisic in zajcev smo že opazovali, sedaj pa parameter, ki je skrbel, da so se populacije manjšale/večale, tako kot pri prvi nalogi, razdelimo na smrtnost in rodnost. Parametre rojstev zajcev označimo z  $\rho_z$  in lisic z  $\rho_l$ , smrtnosti pa  $\sigma_z$  in  $\sigma_l$ . Tako imamo sklopljeni enačbi

$$\dot{Z} = \rho_z Z - \sigma_z Z - \gamma Z L \quad (9)$$

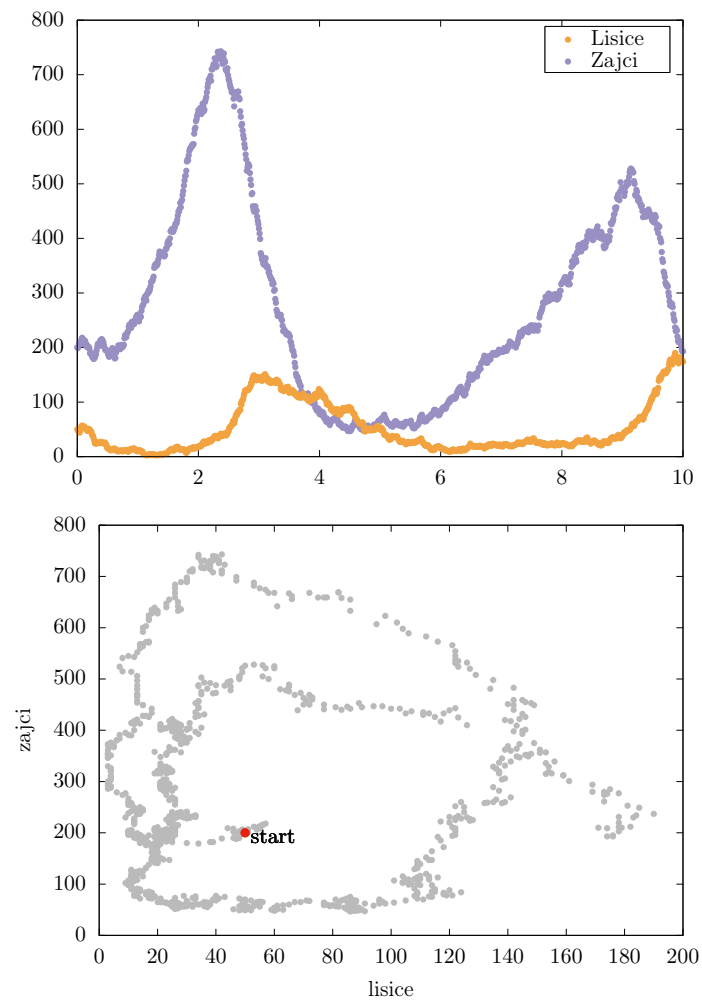
$$\dot{L} = \rho_l L - \sigma_l L + \delta Z L. \quad (10)$$

Na začetku imamo stanje z  $Z_0 = 200$  zajci in  $L_0 = 50$  lisicami. Razmerje rodnost/smrtnost za zajce je  $\rho_z/\sigma_z = 5/4$  in za lisice  $\rho_l/\sigma_l = 4/5$ , oziroma  $\rho_z = 5\alpha$ ,  $\sigma_z = 4\alpha$  in  $\rho_l = 4\beta$ ,  $\sigma_l = 5\beta$ . Preostala parametra nastavimo tako, da sta  $\gamma = \alpha/L_0$  in  $\delta = \beta/Z_0$ . Tako dobimo stohastični enačbi za populaciji lisic in zajcev:

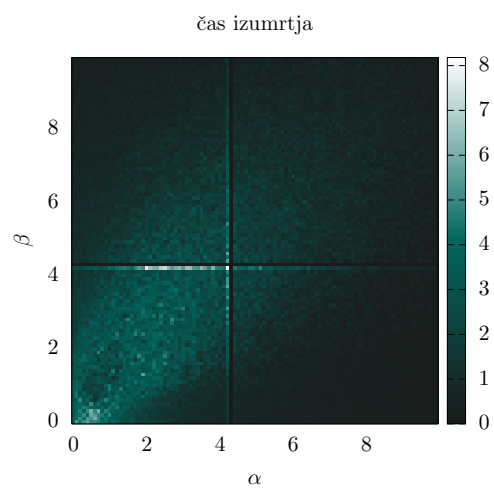
$$Z_{n+1} = Z_n + \mathcal{P}(5\alpha Z_n \Delta t) - \mathcal{P}(4\alpha Z_n \Delta t) - \mathcal{P}\left(\frac{\alpha}{L_0} Z_n L_n \Delta t\right) \quad (11)$$

$$L_{n+1} = L_n + \mathcal{P}(4\beta L_n \Delta t) - \mathcal{P}(5\beta L_n \Delta t) + \mathcal{P}\left(\frac{\beta}{Z_0} Z_n L_n \Delta t\right) \quad (12)$$

Potek numerične rešitve enačb je prikazan na sliki 4.1. Vidimo, da sta populaciji na začetku v ravnovesni legi in po nekaj korakih padeta iz ravnovesja in začneta nihati.



Slika 4.1: Graf  $Z(t)$  in  $L(t)$  za  $\beta = \alpha = 1$ . Spodaj je prikazan fazni diagram  $Z(L)$ .



Slika 4.2: Prikaz časov izumrtja, povprečenih po 25 poskusih, za različne  $\alpha$  in  $\beta$ . Premik med sosednjimi vrednostmi je 0, 1.