

4. naloga

Tina Klobas

6. november 2019

1 Model Lotka-Volterra

Opazujemo življenje lisic ter zajcev na določenem ozemlju. Privzamemo, da je za lisico zajec edini vir hrane, za zajca pa je lisica edini naravni plenilec. Ob izolaciji vrst število lisic L , zaradi pomanjkanja hrane, eksponentno pada z naravno konstanto umrljivosti γ , število zajcev Z , zaradi proste rasti brez naravnega plenilca, pa eksponentno narašča z naravno konstanto rodnoti α . Ob sobivanju vrst na istem področju tako dobimo sklopljen sistem enačb, ki opisuje ta pojav:

$$\frac{dZ}{dt} = \alpha L - \beta ZL \quad (1.1)$$

$$\frac{dL}{dt} = -\gamma L + \delta ZL, \quad (1.2)$$

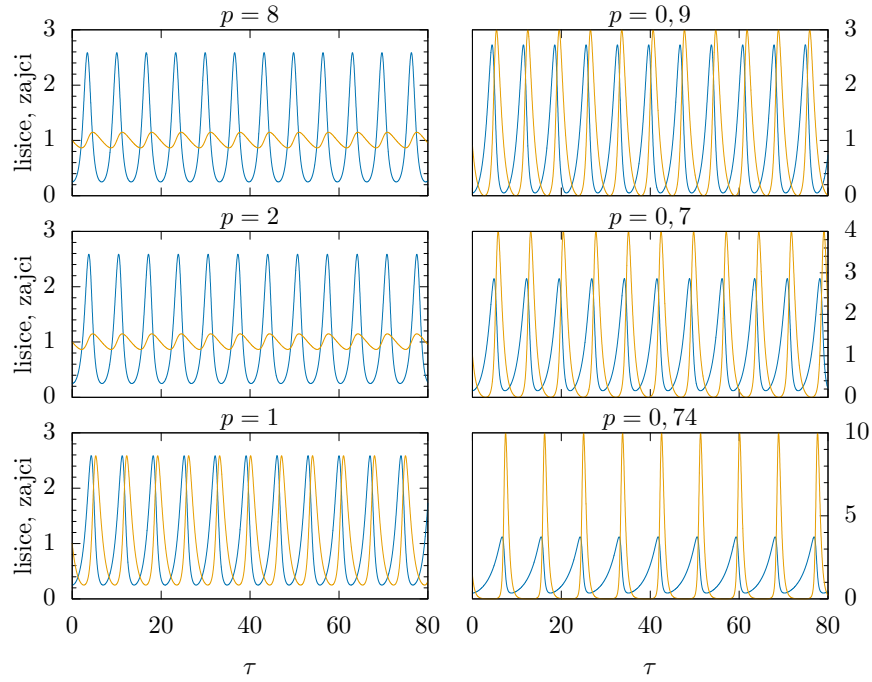
kjer sta β umrljivost plena in δ rodnot plenilcev. Sistem enačb lahko spravimo v brezdimenzijsko obliko, da si zmanjšamo število parametrov s katerimi se moramo ukvarjati. Tako z definiranimi količinama $l = \beta/\alpha L$ in $z = \delta/\gamma Z$ ter brezdimenzijskim časom $\tau = t\sqrt{\alpha\gamma}$ prepišemo sistem 1.1

$$\frac{dz}{d\tau} = pz(1-l) \quad (1.3)$$

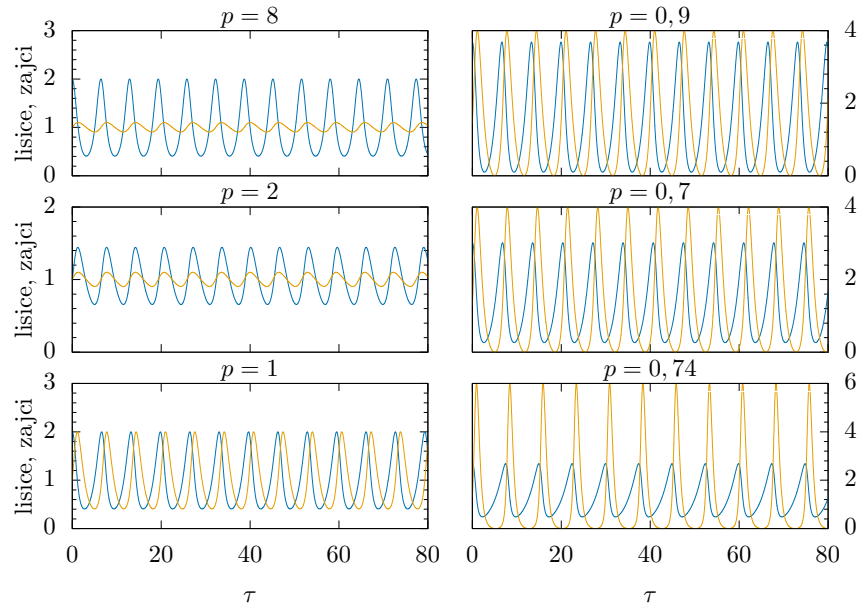
$$\frac{dl}{d\tau} = \frac{l}{p}(z-1). \quad (1.4)$$

$p = \sqrt{\alpha/\gamma}$ je tako edini preostali prosti parameter.

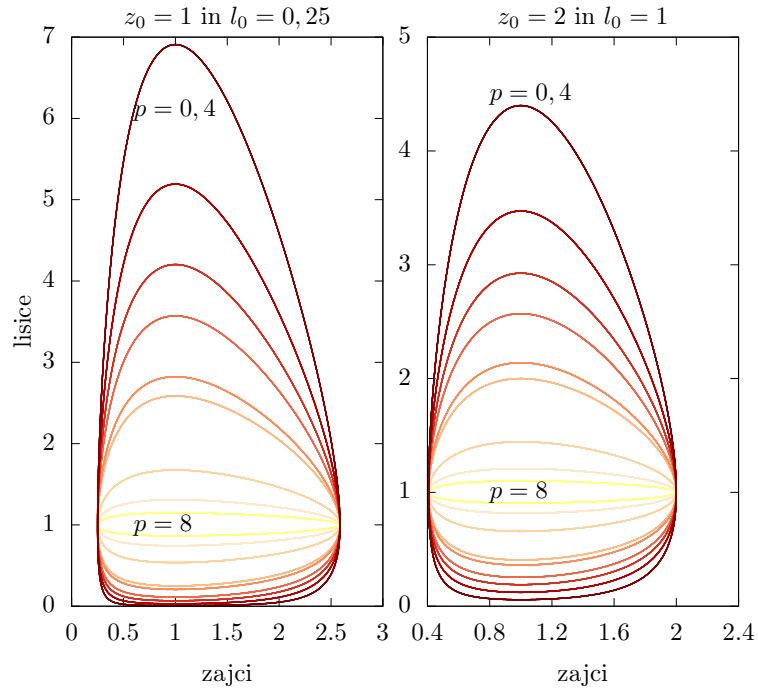
Pri obeh grafih 1.1, 1.2 vidimo podobno obnašanje s spreminjanjem parametra p ; pri visokih p je amplituda nihanja lisic večja pri, majhnih p pa amplituda zajcev. Tako obnašanje je vidno tudi na faznem diagramu 1.3 kjer so temnejši elipsoidi daljši v smeri lisic, svetlejši pa v smeri zajcev. Na grafu 1.4 je narisano spreminjanje populacij plena in lovca pri paroma enakih začetnih vrednostih $z_0 = l_0$. Vidimo, da z nižanjem le-teh premikamo prvi maksimum proti kasnejšim časom, hkrati pa se viša tudi njegova vrednost. Slednje je posledica tega, da ko smo spravili sistem v brezdimenzijsko obliko, smo vzeli $l = L \frac{\beta}{\alpha}$, se pravi smo število lisic pomnožili z razmerjem med njeno smrtnostjo in rodnotjo; nižja kot bo začetna vrednost l_0 večjo rodnot bodo imele lisice. (Enako velja tudi za z_0 .)



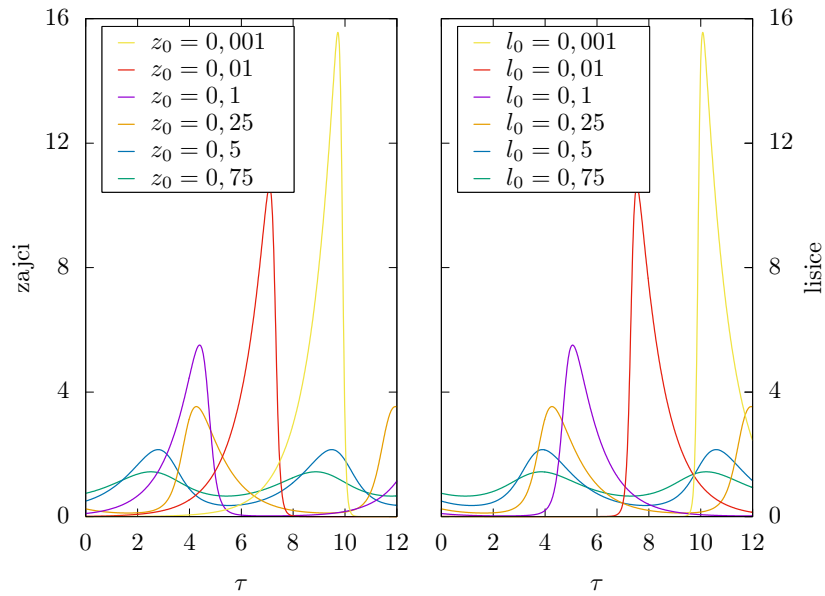
Slika 1.1: Potek spreminjanja populacij (z modro zajci in z oranžno lisice) pri začetnih vrednostih $z_0 = 1$ in $l_0 = 0,25$.



Slika 1.2: Potek spreminjanja populacij (z modro zajci in z oranžno lisice) pri začetnih vrednostih $z_0 = 2$ in $l_0 = 1$.



Slika 1.3: Fazni potek populacij kjer spreminjamo p in imamo konstantne začetne vrednosti.



Slika 1.4: Na levem grafu je prikazano obnašanje populacije zajcev, na desni pa lisic pri različnih začetnih vrednostih ($l_0 = z_0$) in enaki vrednosti $p = 1$.

1.1 Nepremični točki

Pogledamo kje ima sistem enačb 1.3 ničelna odvoda:

$$\begin{aligned} 0 &= pz(1-l) \\ 0 &= \frac{l}{p}(z-1). \end{aligned}$$

Rešitvi sta točki $T_1 = (0, 0)$ in $T_2 = (1, 1)$.

Okolica točke $l = 0, z = 0$:

Za majhne odmike od točke T_1 lahko zanemarimo člena produkti člen zl v enačbah 1.3 in dobimo diferencialni enačbi in rešitvi

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} &= pz \Rightarrow z = z_0 e^{p\tau} \\ \frac{dl}{d\tau} &= -\frac{l}{p} \Rightarrow l = l_0 e^{-\tau/p}, \end{aligned}$$

kar opisuje izumiranje populacije lisic in eksponentno rast populacije zajcev v začetnem opisu izoliranih vrst. To območje je prikazano na grafih 1.5, kjer se tudi vidi eksponentno padanje/naraščanje populacij. Točka T_1 je sedlo; funkcija v eni smeri narašča, v drugi pa pada. To lahko preverimo tudi z Jakobijevo matriko odvodov sistema 1.3:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial l} \\ \frac{\partial \dot{l}}{\partial z} & \frac{\partial \dot{l}}{\partial l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(1-l) & -pz \\ \frac{l}{p} & \frac{z-1}{p} \end{bmatrix}, \quad (1.5)$$

saj, ko vstavimo točko $(0, 0)$ dobimo matriko

$$\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & -\frac{1}{p} \end{bmatrix}, \quad (1.6)$$

ki bo imela vedno nasprotno predznačeni lastni vrednosti, se pravi bo zmeraj nedefinitna (kar je lastnost sedla).

Okolica točke $l = 1, z = 1$:

Podobno naredimo okoli druge točke: $l = 1 + \lambda$ in $z = 1 + \zeta$ in preoblikujemo sistem:

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{d\zeta}{d\tau} = -p(1+\zeta)\lambda \approx -p\lambda \quad (1.7)$$

$$\frac{dl}{d\tau} = \frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{\zeta}{p}(1+\lambda) \approx \frac{\zeta}{p} \quad (1.8)$$

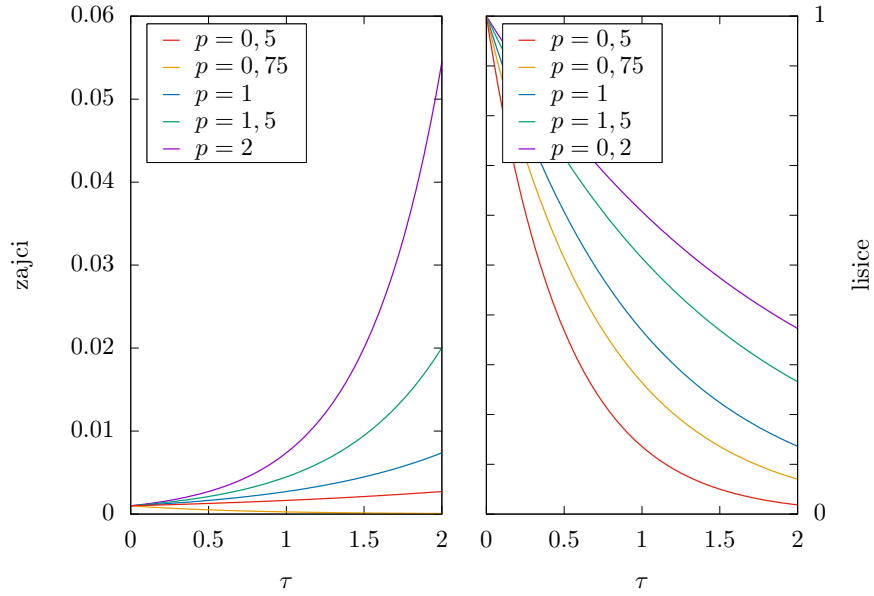
in če naredimo še en odvod po času dobimo rešitev:

$$\ddot{\zeta} = -\zeta \Rightarrow \zeta = A \sin \tau + B \cos \tau \quad (1.9)$$

$$\ddot{\lambda} = -\lambda \Rightarrow \lambda = C \sin \tau + d \cos \tau. \quad (1.10)$$

Preverimo kakšna stacionarna točka je T_2 in s pomočjo odvodov 2.5 dobimo matriko

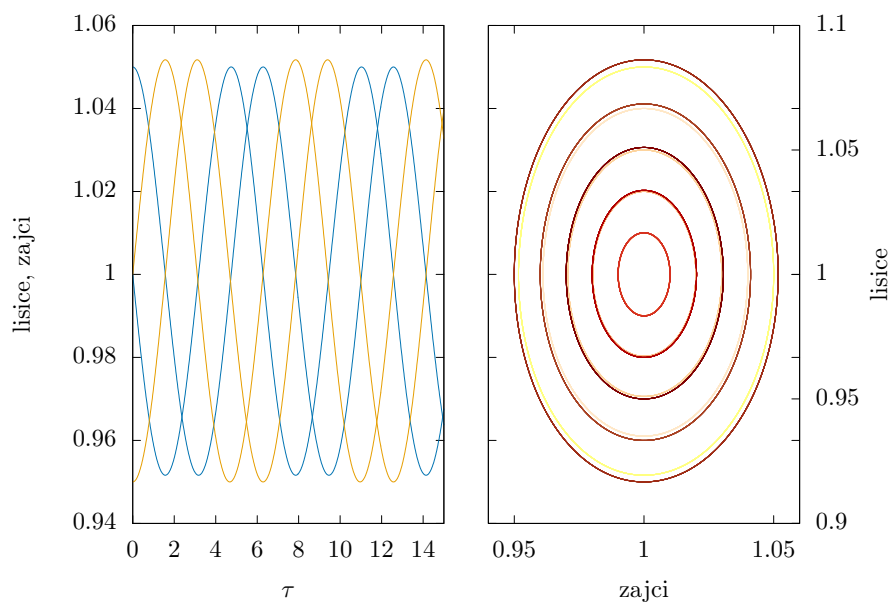
$$\begin{bmatrix} 0 & -p \\ \frac{1}{p} & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.11)$$



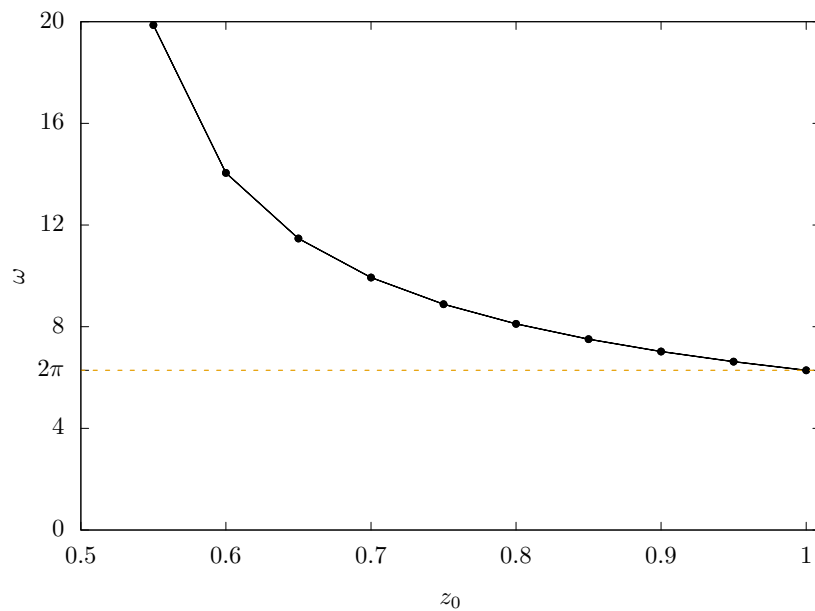
Slika 1.5: Na levem grafu je prikazano obnašanje populacije zajcev, na desni pa lisic pri začetnih pogojih $l_0 = 0,099$, $z_0 = 0,001$ in različnih vrednostih p .

z lastnima vrednostma $\eta_1 = -i$ in $\eta_2 = i$. Ker sta lastni vrednosti imaginarni in nasprotno predznačeni s tem potrdimo, že prej dobljeno periodično obnašanje populacije lisic in zajcev v okolici točke $(1,1)$. Perioda takega nihanja je ravno $\omega = 2\pi/\sqrt{\eta_1\eta_2} = 2\pi$.

Tako obnašanje je razvidno tudi z grafa 1.6, kjer se vidi, da je zakasnitev med nihanjema ravno pol periode. Z grafom 1.7 potrdimo, da se z bližanjem točki T_2 vrednost periode približuje $\omega = 2\pi$.



Slika 1.6: Na levem grafu je prikazano obnašanje populacij pri $p = 1$ za začetni vrednosti $z_0 = 1$, $l_0 = 1.5$ (z modro barvo) ter $z_0 = 1$, $l_0 = 0.95$ (z oranžno). Na desnem grafu je prikazan fazni diagram za $p = 1$ in spreminjanje začetnih vrednosti l_0 od 1,05 (najtemnejše barve) do 0,95 (najsvetlejše barve).



Slika 1.7: Na grafu je prikazano spreminjanje frekvence od začetne vrednosti z_0 .

2 Model laserja

Prejšnjemu problemu je podoben model delovanja laserja, ki ima dodaten člen R zaradi konstantnega dovajanja novih atomov v sistem:

$$\dot{f} = -\alpha f + Baf \quad (2.1)$$

$$\dot{a} = -\beta a - Baf + R. \quad (2.2)$$

Z uvedbo novih količin

$$\begin{aligned} A &= \frac{B}{\alpha} a \\ F &= \frac{B}{\beta} f \\ \tau &= t\sqrt{\alpha\beta} \end{aligned}$$

ter parametra izgub p in črpanja r

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \\ r &= \frac{BR}{\sqrt{\alpha^3\beta}} \end{aligned}$$

dobimo brezdimenzijski sistem spreminjanja količin atomov A in fotonov F :

$$\dot{F} = \frac{F}{p} (A - 1) \quad (2.3)$$

$$\dot{A} = r - pA(F + 1). \quad (2.4)$$

Zapišimo še Jakobijevo matriko sistema enačb, ki jo bomo kasneje uporabili:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{A}}{\partial A} & \frac{\partial \dot{A}}{\partial F} \\ \frac{\partial \dot{F}}{\partial A} & \frac{\partial \dot{F}}{\partial F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p(F + 1) & -pA \\ \frac{F}{p} & \frac{A-1}{p} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Na grafu 2.1 vidimo kaj se dogaja v primerih, ko nimamo črpanja ($r = 0$), imamo pa izgube, torej $p > r$. Sistem zmeraj zamre, kako hitro, pa je odvisno od velikosti izgub p , in sicer večje kot so, krajši je relaksacijski čas atomov, ter daljši fotonov; in obratno pri manjših izgubah. To je vidno tudi iz konveksnosti/konkavnosti desnega grafa.

Naslednji graf 2.2 prikazuje tri različne primere; ko je črpanje manjše, enako in večje kot izgube. Edino pri primeru, ko je $r > p$ vidimo, da se je število fotonov povečalo, in preden se je ustalilo, je nekaj časa osciliralo. Slednje se je zgodilo tudi pri atomih, kar je na desnem grafu vidno kot spirala. S tema grafoma potrdimo, da morajo biti, za delovanje laserja, izgube manjše od črpanja.

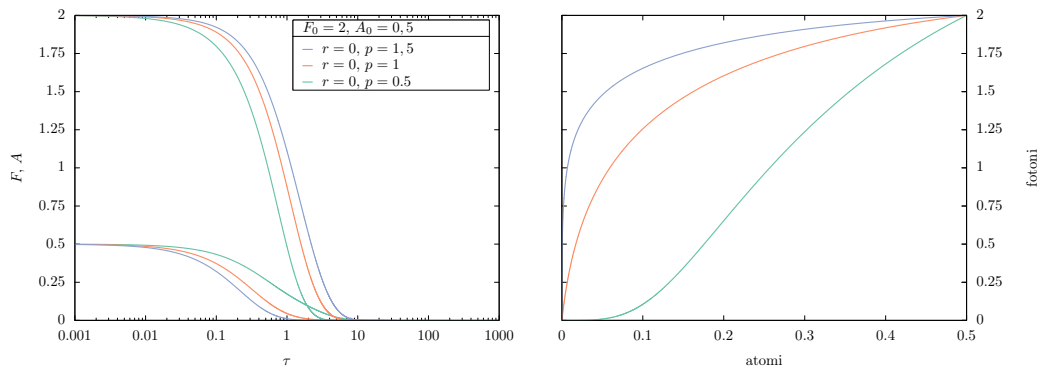
2.1 Zastojni točki

Poglejmo kje ima sistem 2.3 ničelna odvoda:

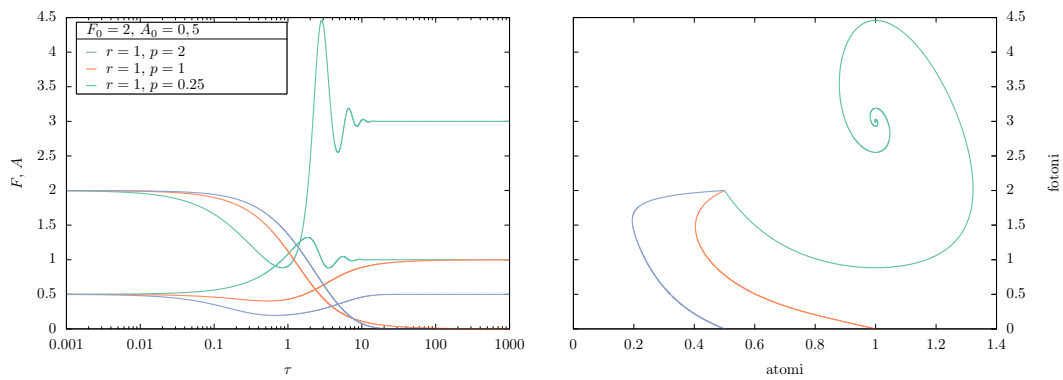
$$0 = \frac{F}{p} (A - 1)$$

$$0 = r - pA(F + 1)$$

in dobimo dve točki $T_1 = (r/p, 0)$ ter $T_2 = (1, r/p - 1)$, obe odvisni od razmerja med črpanjem in izgubami.



Slika 2.1: Na levem grafu narisano spreminjanje količine fotonov in atomov za $r < p$ in $r = 0$. Na desnem grafu je narisani isti časovni potek v odvisnosti ene količine od druge



Slika 2.2: Na levem grafu narisano spreminjanje količine fotonov in atomov za različne r in p . Na desnem grafu je narisani isti časovni potek v odvisnosti ene količine od druge.

Točka $A = \frac{r}{p}$, $F = 0$:

Zapišemo Jakobijevo matriko sistema v tej točki:

$$\begin{bmatrix} -p & -r \\ 0 & \frac{r-p}{p^2} \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Ena lastna vrednost matrike je $\lambda_1 = -p$ in je zmeraj negativna, zato je vse odvisno od druge lastne vrednosti $\lambda_2 = (r-p)/p^2$:

1. $r > p \Rightarrow \text{Re}(\lambda_2) > 0$: sistem ima v taki točko nasprotno predznačeni lastni vrednosti, zato je ta ekstrem sedlo,
2. $r = p \Rightarrow \text{Re}(\lambda_2) = 0$ taka točka je stabilna,
3. $r < p \Rightarrow \text{Re}(\lambda_2) < 0$: obe lastni vrednosti sta negativni, zato je taka točka asimptotsko stabilna.

Za različne primere obnašanja lahko vidimo na grafih 2.1, 2.2, ko se količine sesedejo v točko $(r/p, 0)$, primera, ko sta lastni vrednosti nasprotno predznačeni niti ne opazimo in se sistem sprosti v drugo točko (ki si jo bomo ogledali v naslednjem razdelku). To tudi pričakujemo, saj se bo za primere, ko so izgube večje (ali) enake črpanju, sistem ugasne.

2.1.1 Točka $A = 1$, $F = \frac{r}{p} - 1$:

Jakobijeva matrika sistema v tej točki:

$$\begin{bmatrix} -r & -p \\ \frac{r-p}{p^2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

ima dve lastni vrednosti:

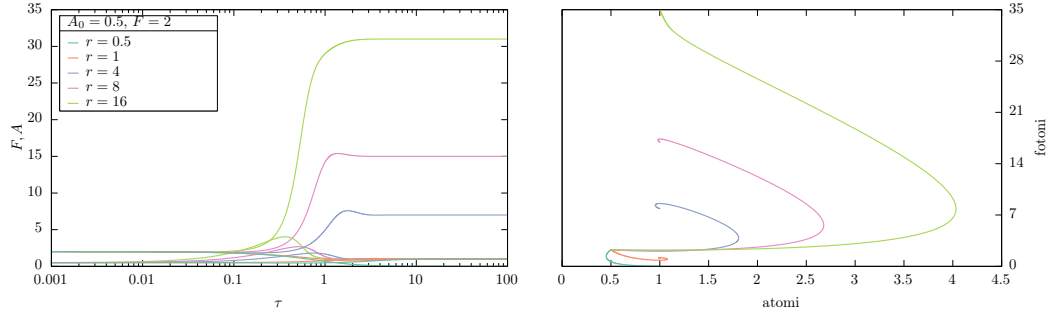
$$\lambda_{1,2} = -\frac{r}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{r^2 - 4 \frac{r-p}{p^2}}. \quad (2.8)$$

Obnašanje je tukaj odvisno od vrednosti, ki stoji pod korenem $D = r^2 - 4 \frac{r-p}{p^2}$:

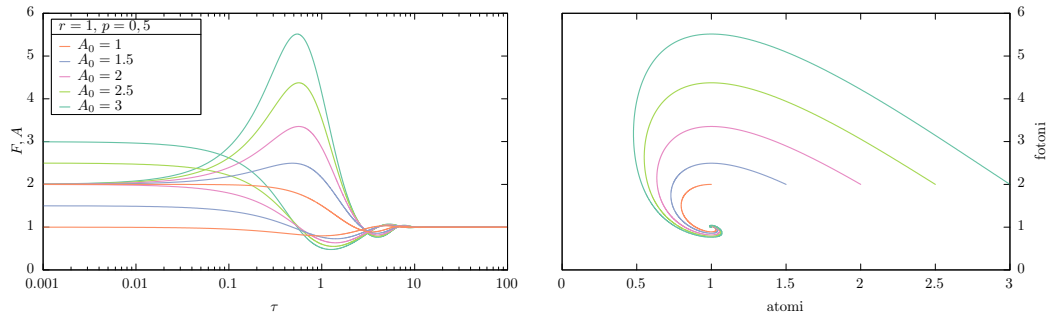
$$D = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \frac{2}{p}(1 \pm \sqrt{1-p^2}), \quad (2.9)$$

seveda hočemo, da je koeficient črpanja realen in tako imamo zahtevo $p^2 < 1$. Poglejmo si kako se obnaša sistem za različne vrednosti D :

1. $D > 0 \Rightarrow r > r_1 \vee 0 < r < r_2$:
 - (a) za $r > \sqrt{D}$ bosta obe lastni vrednosti negativni in točka bo asimptotsko stabilna,
 - (b) za $r < \sqrt{D}$ bosta lastni vrednosti nasprotno predznačeni in v taki točki bo sedlo.
2. $D = 0 \Rightarrow p = 1$ in $r = 2$: lastni vrednosti $\lambda_{1,2} = -1$ sta negativni in je tako tudi ta točka asimptotsko stabilna.
3. $D < 0 \Rightarrow r \in (\frac{2}{p}(1-\sqrt{1-p^2}), \frac{2}{p}(1+\sqrt{1-p^2}))$: lastni vrednosti sta kompleksno konjugirani zato je ta točka center spiralnih orbit (v prvem razdelku smo imeli koncentrične, ker ni bilo realnega dela). Ta fokus bo stabilen, saj je vrednost $\text{Re}(\lambda) = -2r$ negativna.



Slika 2.3: Na levem grafu je narisana potek populacije fotonov in atomov za $p = 0.5$ in za različne r , iz začetne vrednosti $A_0 = 0.5$, $F_0 = 2$. Na desnem je ustrezen fazni diagram.



Slika 2.4: Na levem grafu je narisana potek populacije fotonov in atomov za $F_0 = 2$ in za različne A_0 , pri čemer je $r = 1$ in $p = 0.5$. Na desnem je ustrezen fazni diagram.

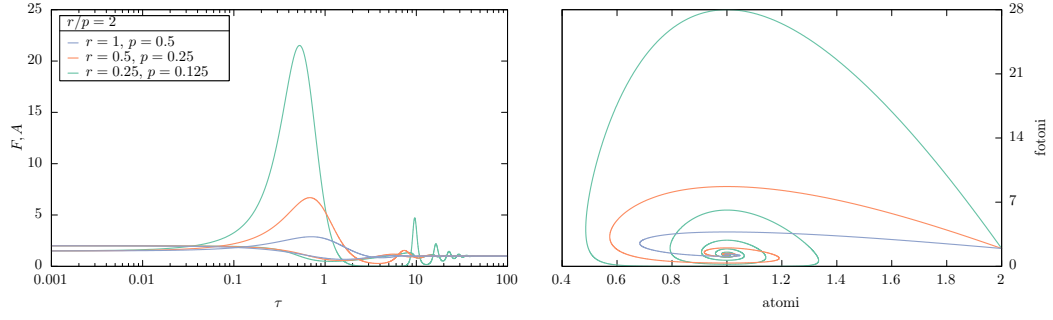
Omenjeno lahko opazimo na grafu 2.3. Graf je bil narisana za $p = 0.5$ in take vrednosti r , da smo zavzeli vse tri prej omenjene primere. Vidimo, da sistem za $r = 0.5 < \sqrt{D}$ nismo prešli v točko T_2 , saj je ta nestabilna za te parametre, in se je raje sesedel v točko T_1 . Za vrednost $r = 16 > 2/p(1 + \sqrt{1 - p^2})$ je diskriminanta D pozitivna in sistem ne oscilira, ampak se eksponentno približa limitni vrednosti T_2 .

Na grafu 2.4 so prikazane oscilacije pri $r = 1$ in $p = 0.5$ za različne začetne vrednosti A_0 . Z večanjem slednjih, višamo maksimum vrednosti fotonov, kar ni presenetljivo; več atomov kot imamo na voljo, več fotonov bo nastalo.

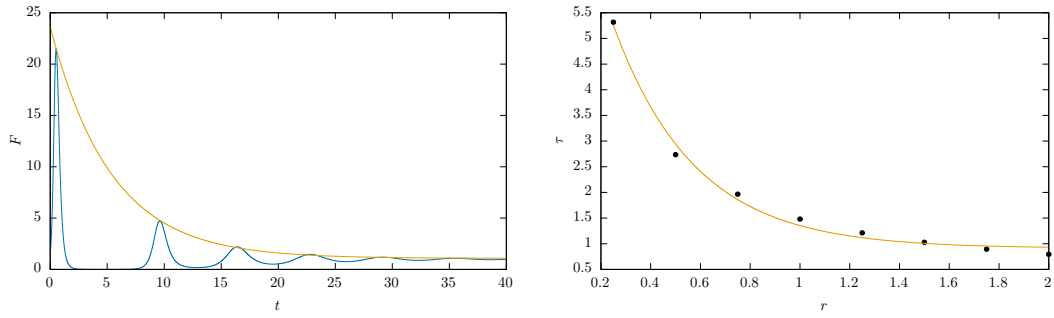
2.2 Dušeno nihanje

Na grafu 2.5 so primeri za konstantno razmerje r/p , le spreminjamo njihove vrednosti. Vidimo, da z manjšanjem obeh parametrov, postajajo spirale vedno večje – sistem potrebuje več časa da se sesede v ravnovesje. To je posledica tega, da je realni del lastnih vrednosti čedalje manjši; manjšamo dušenje sistema. Hkrati se manjša tudi imaginarni del in zgleđa, da se s tem krajšajo periode oscilacij.

Da dobimo relaksacijski čas τ lahko maksimume nihajev interpoliramo z eksponentno funkcijo – prikazano na levem grafu 2.6. To ponovimo za več različnih koeficientov črpanja in dobimo eksponentno odvisnost, na desnem grafu 2.6. To odvisnost lahko tudi opišemo z eksponentno



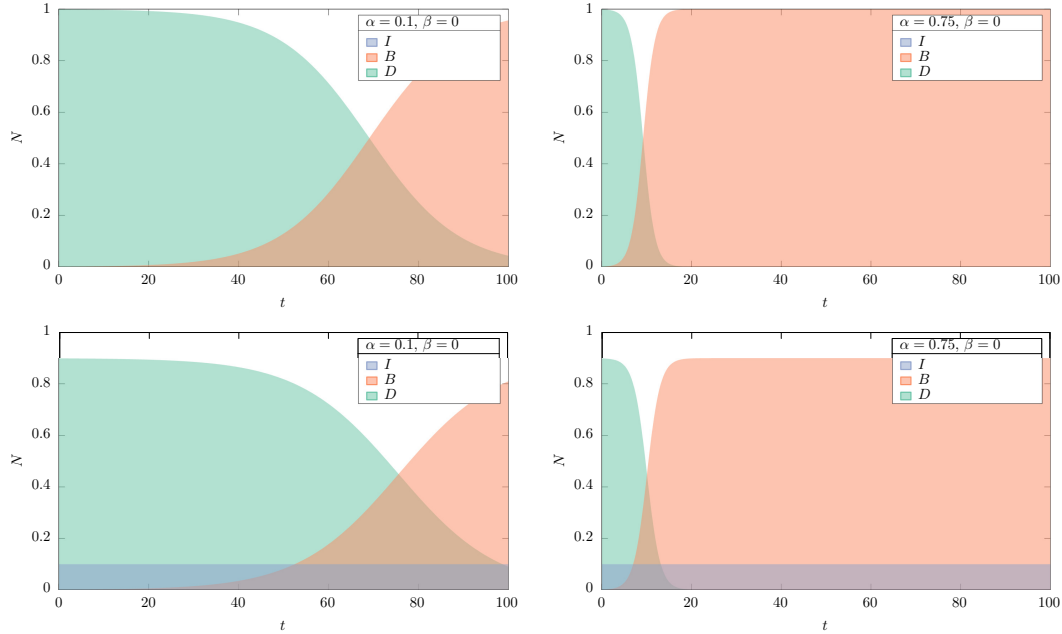
Slika 2.5: Na grafih je narisana potek populacije fotonov in atomov za $F_0 = 1.5$ in za $A_0 = 2$ za različne r, p , pri čemer je razmerje $r/p = 2$. Na desnem je ustrezen fazni diagram.



Slika 2.6: Za primer $p = 0.125$ in $r = 0.25$ je narisana $F(t)$, s *fitom* maksimumov.

funkcijo, za katero dobimo rešitev

$$\tau(r) = 9,3e^{-3r} + 0,9.$$



Slika 3.1: Grafa sta narisana za primera, ko nimamo zdravljenja $\beta = 0$ in za dve različni hitrosti zbolevanja α . Začetna vrednost je bila za zgornja primera $B = 1\text{‰}$, $I = 0$ in $D = N - B$, ter $B = 1\text{‰}$, $I = 1\%$ in $D = N - B - I$ za spodnja.

3 Model epidemije

Model širjenja bolezni opišemo s sistemom

$$\frac{dD}{dt} = -\alpha DB, \quad (3.1)$$

$$\frac{dB}{dt} = \alpha DB - \beta B. \quad (3.2)$$

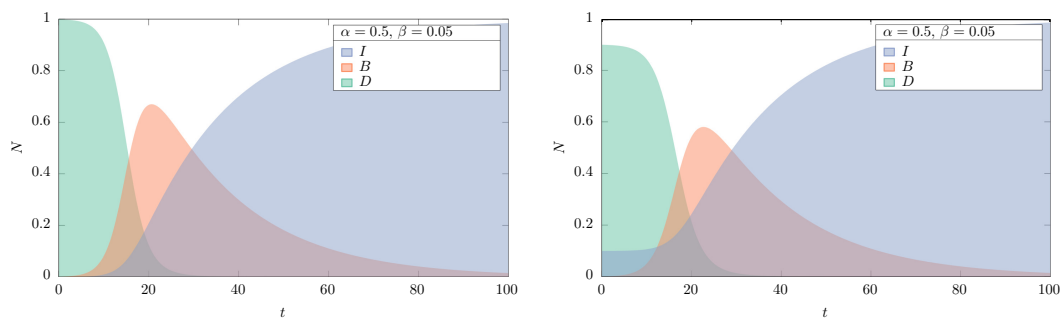
$$\frac{dI}{dt} = \beta B, \quad (3.3)$$

pri čemer gledamo neko konstantno populacijo D predstavlja delež zdravih in dovzetnih na okužbo, B delež obolelih, I pa delež imunih v populaciji, torej tistih ki se ne morejo (več) okužiti. Parameter α opisuje hitrost širjenja bolezni, β pa zdravljenje obolelih. Omejimo se še na konstantno populacijo: $D + B + I = N$.

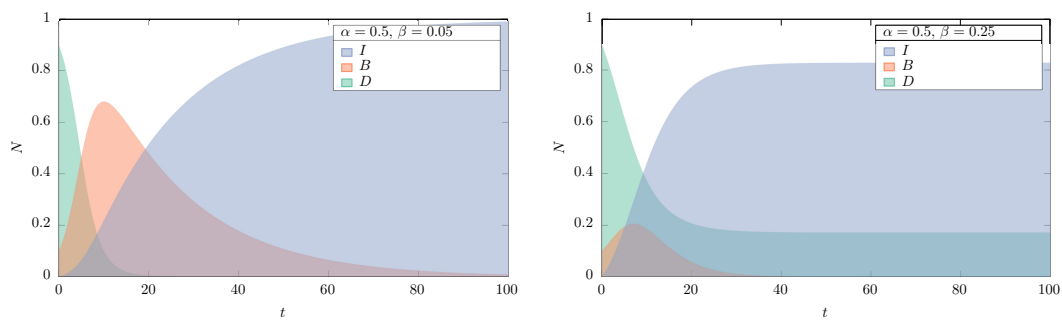
Na zgornjih grafih 3.1 je prikazano obnašanje, ko nimamo zdravljenja za dve različni hitrosti obolevanja. Na spodnjih imamo še nek delež populacije, imune na bolezen in vidimo, da to ne vpliva na hitrost okužbe.

Na grafih 1.4 vidimo kakšna je razlika, če na začetku že cepimo delež populacije. Če delež cepljenja dovolj povečamo, lahko dosežemo da bolezen izumre, brez, da bi vsi dovzetni bolezen preživeli, kar vidimo na grafu 3.3.

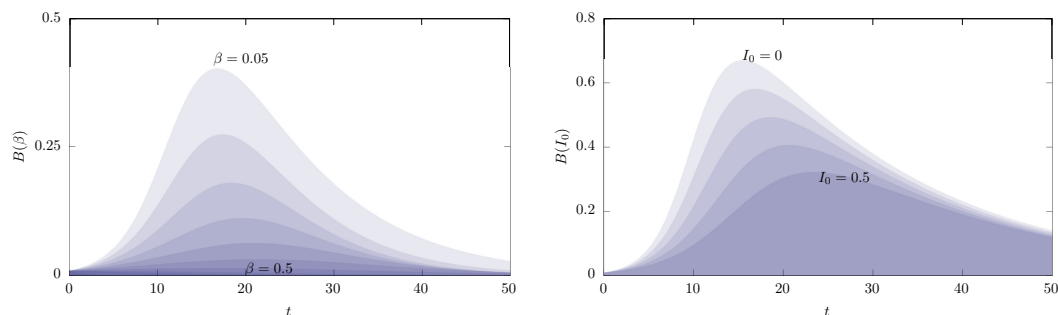
Poglejmo si še kakšen vpliv ima hitrost zdravljenja β na število obolelih 3.4. Vidimo, da se z večanjem parametra β (pri enakih zaletnih pogojih in $\alpha = 0.5$) maksimalno število obolelih



Slika 3.2: Grafa sta narisana za primera z različnima začetnima vrednostma imunih na okužbo; na levi je $I_0 = 0$ na desni pa $I_0 = 1\%$.



Slika 3.3: Grafa sta narisana za primera z $I_0 = 1\%$ in za dva različna β .



Slika 3.4: Na levi je prikazano spreminjanje D za različne vrednosti parametra β , ko je $\alpha = 0.5$ in začetne vrednosti $I_0 = 1\%$ in $D_0 = 1\%$. Na desni je graf $D(I_0)$, kjer sta parametra $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.05$, spreminjamo pa začetno vrednost I_0 .

zmanjšuje in se premika proti daljšim časom. Ko spreminjamo začetno število imunih, vidimo enak trend; z večanjem I_0 se maksimumi nižajo in premikajo h kasnejšim časom.

3.1 Stopnje bolezni

Bolezen lahko razdelimo v več stadijev, tako povečamo sistem diferencialnih enačb:

$$\dot{D} = -\alpha DB, \quad (3.4)$$

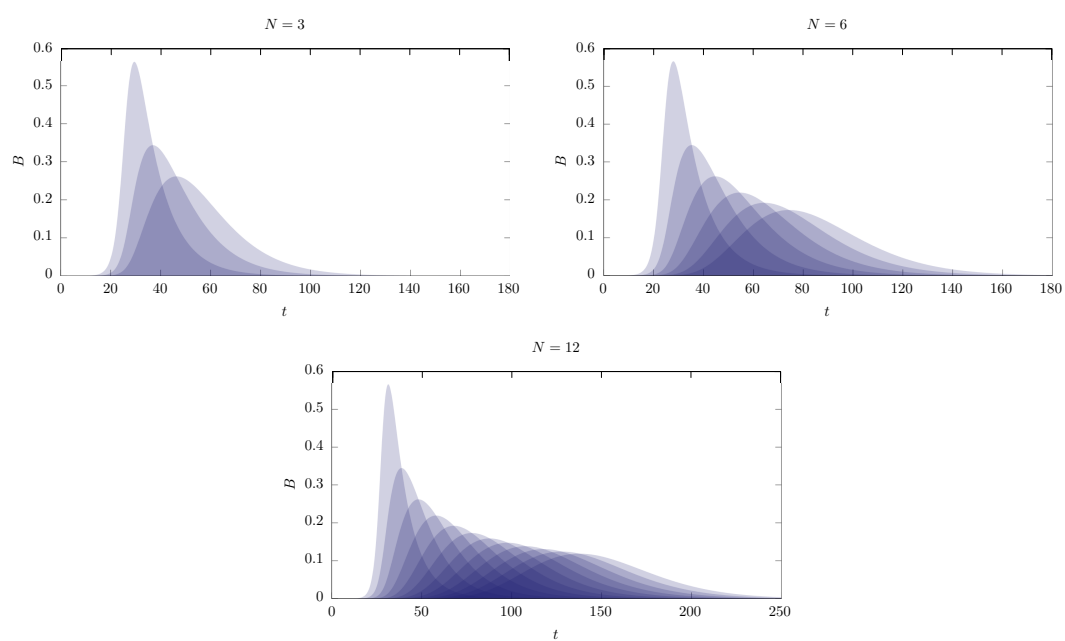
$$\dot{B}_1 = \alpha DB - \beta_1 B_1. \quad (3.5)$$

$$\dot{B}_2 = \beta_1 B_1 - \beta_2 B_2. \quad (3.6)$$

$$\vdots \quad (3.7)$$

$$\dot{I} = \beta_n B_n, \quad (3.8)$$

kjer so $B = \sum_i B_i$ vsota vseh obolelih, β_i pa hitrosti zdravljenja v posameznem stadiju. Z grafom 3.5 lahko vidimo, da se vrh epidemije pomika h krajšim časom, oblika funkcije pa postaja vedno bolj simetrična (vedno bolj Gaussova).



Slika 3.5: Na grafih je prikazano spreminjanje števila obolelih, če jih razdelimo v več razredov.