

MODELSKA ANALIZA 1

Linearna napoved in model maksimalne entropije

Avtor:
Jan KREN
28182013

Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta za *matematiko in fiziko*



14. januar 2020

1 Frekvenčni spekter

1.1 Naloga

Določi frekvenčni spekter signalov iz datotek val2.dat, val3.dat in co2.dat z metodo maksimalne entropije. V slednji datoteki s koncentracijo CO₂ v zraku upoštevaj splošen (linearen) letni trend. Preizkusi delovanje metode v odvisnosti od števila polov in od gostote prikaza. Pri CO₂ si oglej še njihovo lego. Primerjaj natančnost metode z rezultati, ki jih da FFT ob uporabi filtrov.

Sestavi tudi testni signal iz vsote sinusnih členov z bližnjimi frekvencami ter razišči ločljivost metode.

1.2 Rešitev

Za določanje frekvenčnega spektra s to metodo, bomo potreboval avtokorelacijske funkcije signala definirane kot

$$R(i) = \frac{1}{N-k} \sum_{n=0}^{N-1-k} s_n s_{n+k}$$

Tekom metode skušamo minimizirati

$$\min = E[s_n^2] + \sum_{k=1}^p a_k E[S_n S_{n-k}]$$

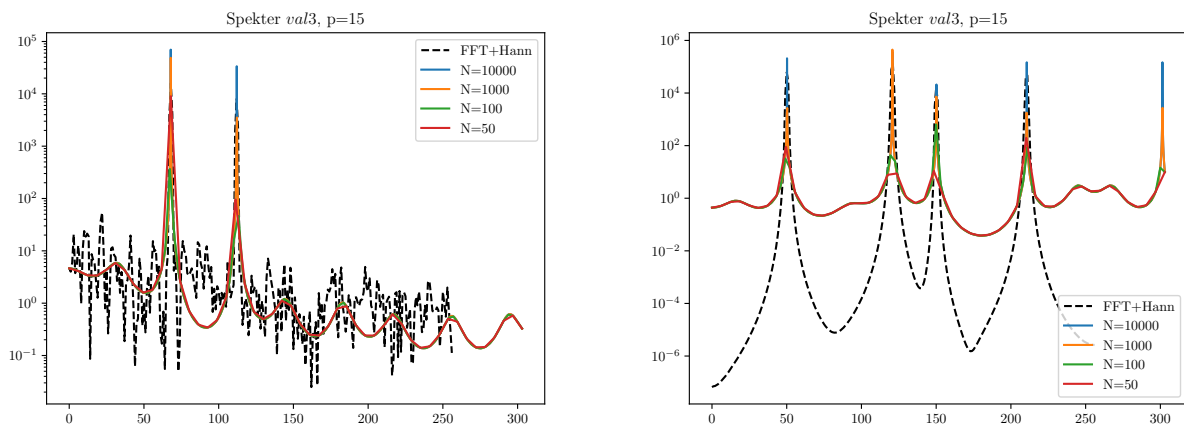
s pomočjo česa bomo določili red metode p . Koeficiente a_k določimo z reševanjem Toeplitzovega sistema:

$$\begin{bmatrix} R(0) & R(1) & \cdots & R(p-1) \\ R(1) & R(0) & \cdots & R(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(p-1) & R(p-2) & \cdots & R(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R(1) \\ R(2) \\ \vdots \\ R(p) \end{bmatrix}$$

In tako lahko s koeficienti a_k potem določimo gostoto spektra kot:

$$P(\omega) = \frac{1}{|1 + \sum_{k=1}^p a_k e^{-i\omega k}|^2}$$

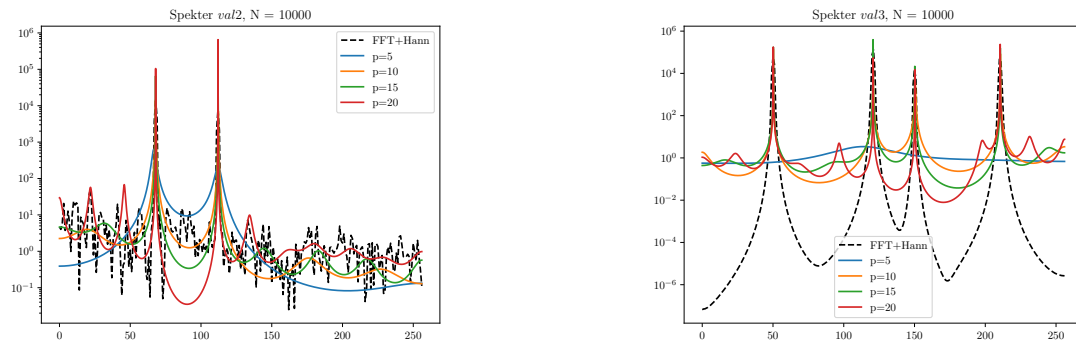
Poskusimo sedaj to poračunati na naših signalih, s tem da bomo najprej preverili kako vpliva gostota frekvenc na rezultat, torej parameter N .



Slika 1: Levo: spekter signala val2 in desno: spekter signala val3

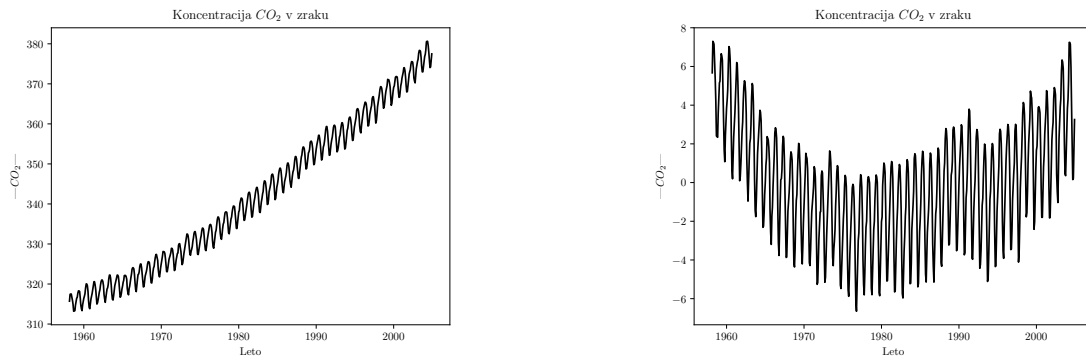
Opazimo, da nam večji N prinese bolj oster vrh, metem ko v preostalem delu spektra skorajda nimamo nekih razlik. FFT + Hann nam je sploh pri bolj zašumljenem signalu prinesel slabši spekter kot pa smo dobili z metodo MEM.

Poskusimo sedaj spreminjati število polov in si pogledimo rezultate: Tudi pri številu polov opazimo, da že zelo



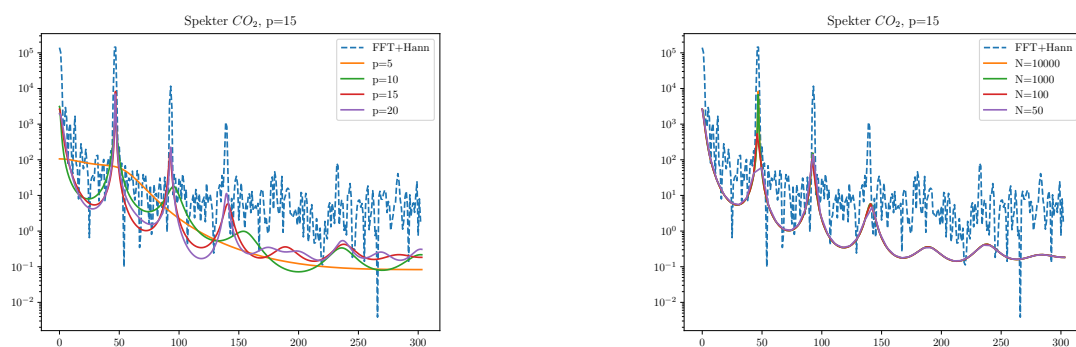
Slika 2: Levo: spekter signala val2 in desno: spekter signala val3

hitro pridemo do pravilnega rezultata, torej pri $p = 10$ že imamo spodoben rezultat. Če pa vzamemo prenizko število polov pa ne ujamemo vrhov. Poglejmo si še koncentracijo CO_2 v zraku.



Slika 3: Levo: signal CO_2 in desno: odštet linearen trend, ki bi naš spekter le motil.

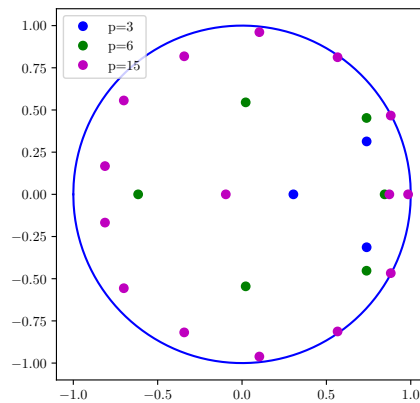
Še spekter signala:



Slika 4: Levo: spekter signala v odvisnosti od p in desno: odvisnost od N

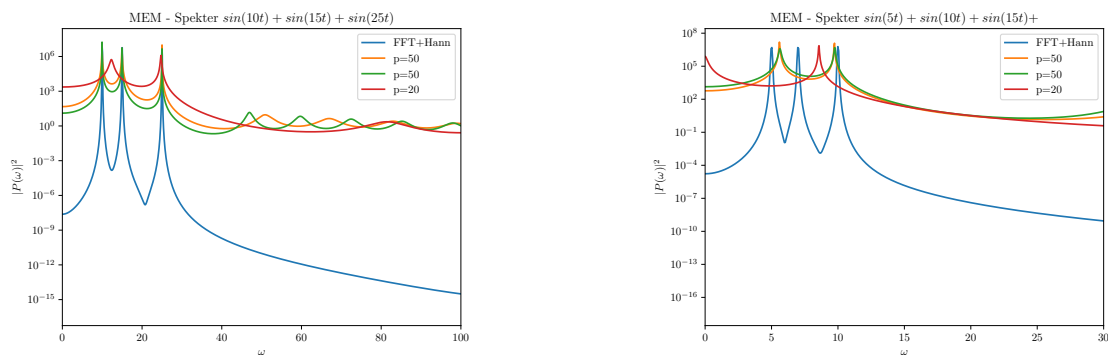
Tudi tukaj dobimo podobna opažanja. Večje število polov nam morda da kakšen majhen vrh več, a hkrati dobimo tudi večjo natančnost pri pravih frekvencah. S FFT-jem pa dobimo tukaj bolj ostre vrhove.

Zanima nas še, kako so porazdeljeni poli:



Slika 5: Porazdelitev polov pri CO_2 koncentraciji.

Opazimo, da ob večjem številu polov poli vedno bolj silijo navzven, v bližino enotske krožnice. Za konec še preverimo ločljivost te metode. To sem naredil tako, da sem naredil frekvenčno analizo seštetih treh sinusov z različnimi frekvencami.



Slika 6: Levo: Spekter signalov z daljnimi frekvencami in desno: frekvence so si bližje skupaj

Opazimo, da je ločljivost metode precej slabša. Z višjim številom polov se sicer izboljšuje, a ima zelo velik problem razlikovati med sabo frekvence, ki so zelo blizu 0. Z nizkim številom polov se tudi graf rahlo zamakne, saj ne uspemo ujeti vse frekvence.

2 Linearna napoved

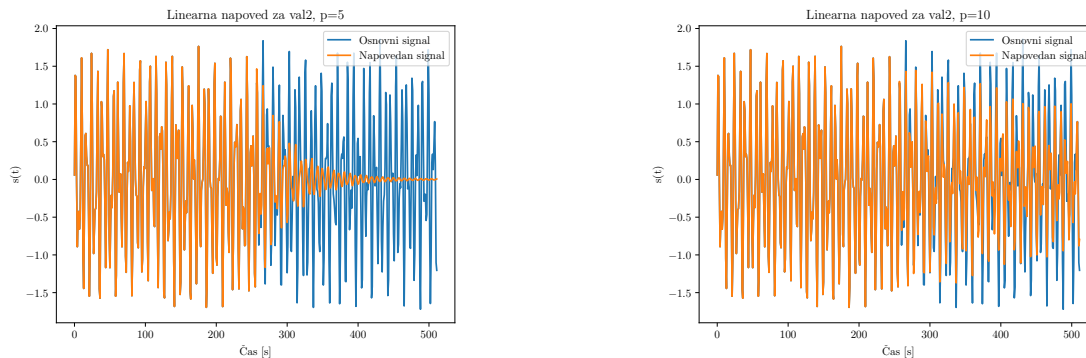
2.1 Naloga

Koeficiente metode maksimalne entropije na signalih iz prve naloge uporabi za linearno napoved: koeficiente določi iz prve polovice zapisa signala, drugo polovico pa uporabi za primerjavo z napovedjo. Priporočljivo je majhno število polov. Ugotovi, kako vpliva na napoved šum! Podobno preuci datoteko borza.dat in podatke za lune efemeride v luna.dat, oziroma sončni cikel Wolf_number.dat.

Preveri, ali so vsi koreni preslikavne funkcije znotraj enotnega kroga, in jih po potrebi preslikaj vanj!

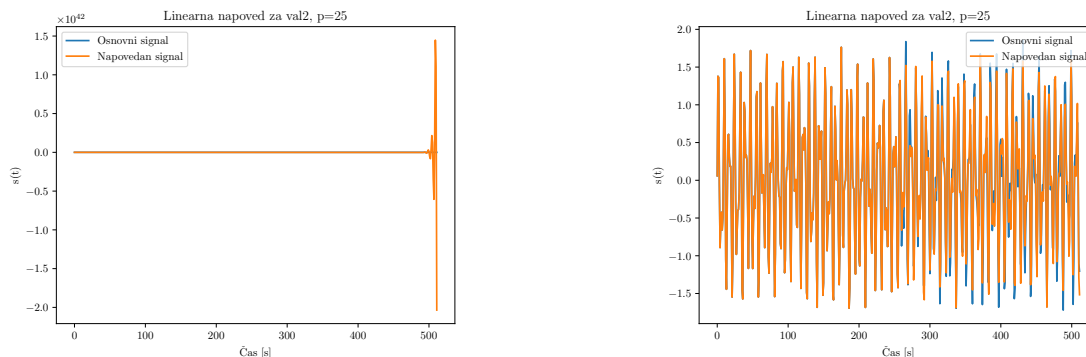
2.2 Rešitev

Poskusimo najprej napovedati signal val2 z majhnim številom polov.



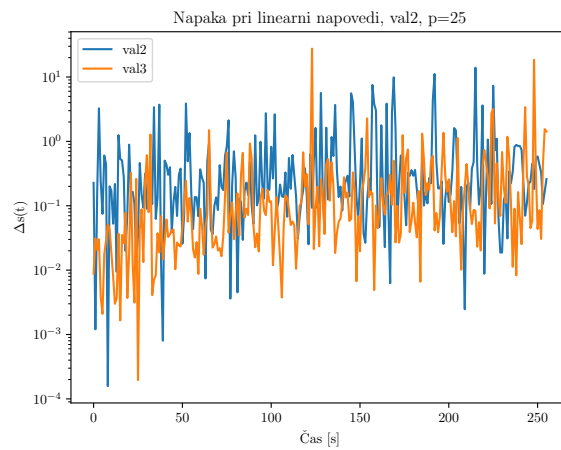
Slika 7: Levo: signal val2 in napoved s $p=5$ ter desno napoved s $p=10$.

Vidimo, da z večjim številom polov dobimo vedno boljšo napoved. Stvar ponovimo še za število polov = 25.



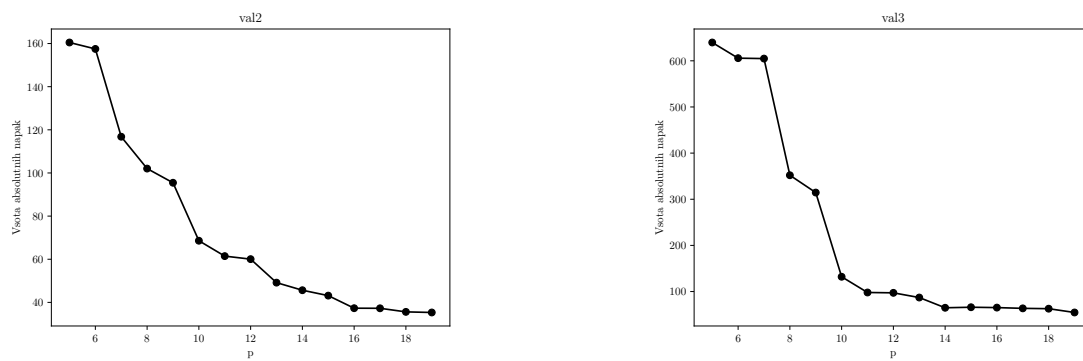
Slika 8: Levo: pri številu polov 25 je šlo nekaj močno narobe. Ob boljšem pogledu na pole, smo ugotovili, da so bili zunaj enotske krožnice. S preslikavo le-teh navznoter smo napoved močno izboljšali (desno).

Poglejmo si napako skozi čas za signala val2 in val3.



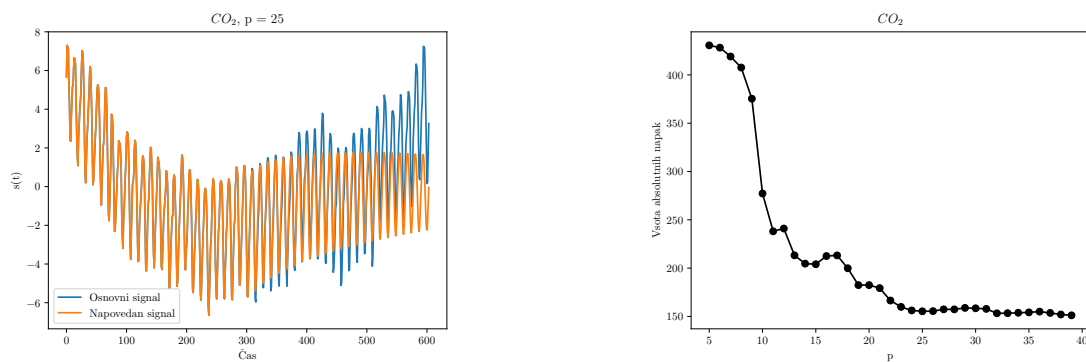
Slika 9: Napaka skozi čas za val2 in val3 pri $p = 25$.

Zanima nas pa tudi kako se napaka spreminja glede na število polov.



Slika 10: Levo: napaka od števila polov za val2 in desno: za val3.

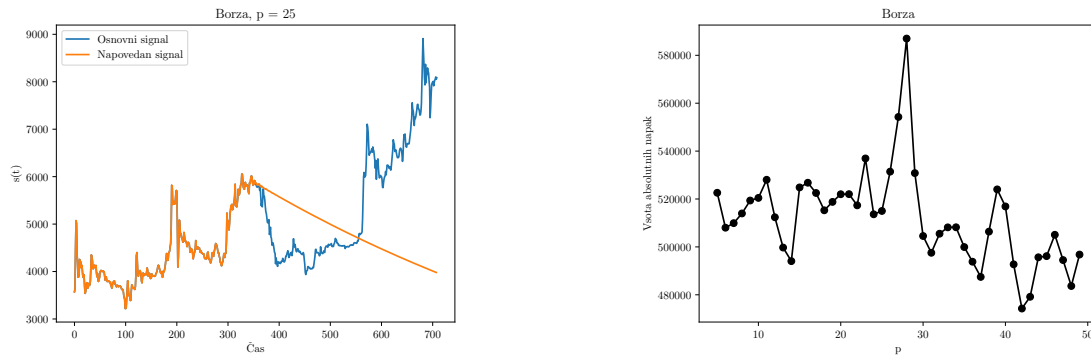
Podobno še lahko preverimo za signal koncentracije CO_2 .



Slika 11: Levo: napoved za $p = 25$ in desno: odvisnost napake od števila polov.

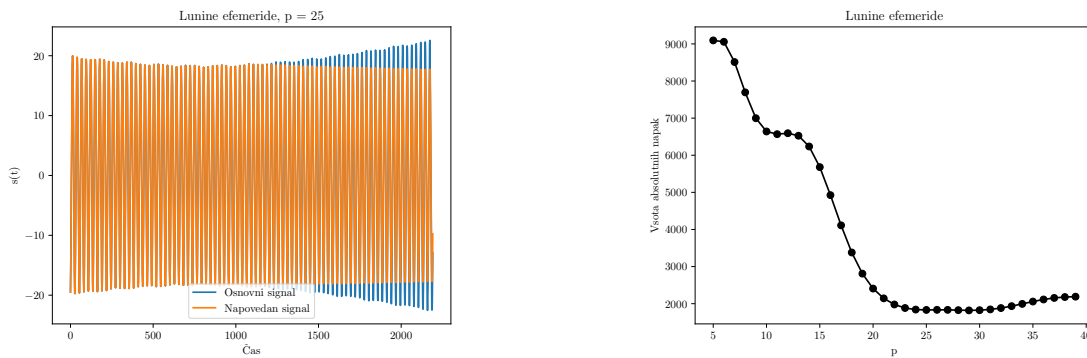
Rezultati so tudi za CO_2 podobni. Najprej je napoved vedno boljša in potem doseže neko spodnjo mejo.

Dobili smo pa še tri druge signale in sicer signal iz borze, lunine efemeride in sončni cikel. Poglejmo si, kako dobro linearna napoved deluje v teh primerih.



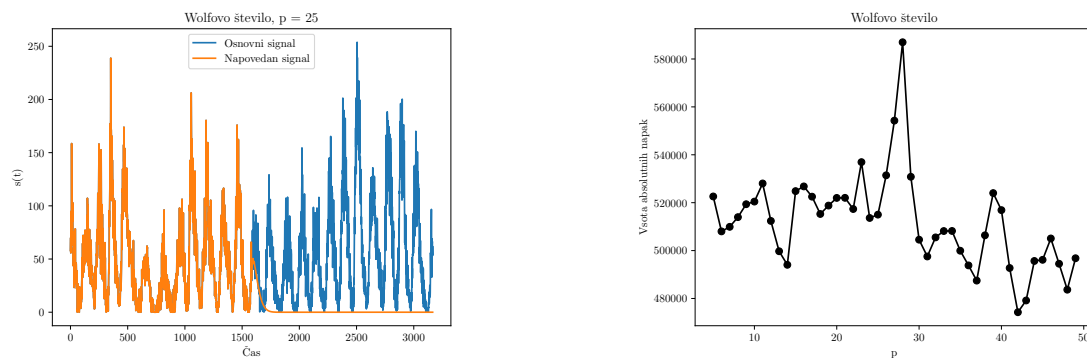
Slika 12: Levo: napoved s $p = 25$ in desno: odvisnost napake od števila polov.

Vidimo, da pri napovedi borze linearna napoved ne uspeva najboljšje, kar je bilo tudi za pričakovati.



Slika 13: Levo: napoved s $p = 25$ in desno: odvisnost napake od števila polov.

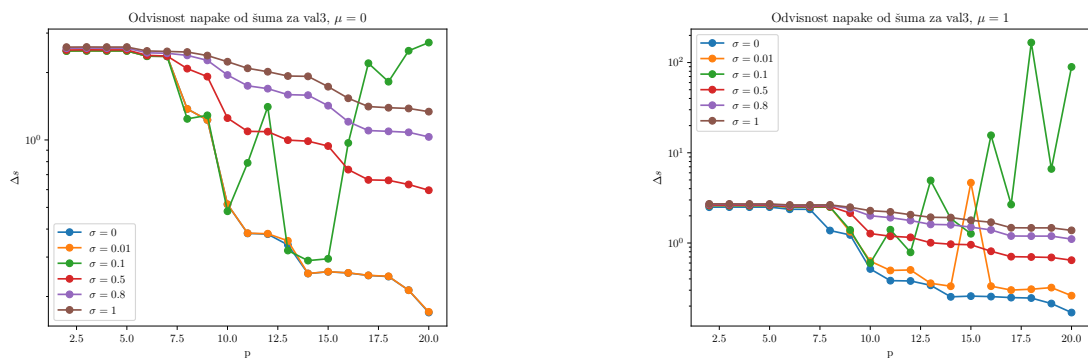
Pri luninih efemeridah imamo že veliko boljšo napoved, ki se v bistvu zelo dobro primerja s prejšnjimi signali.



Slika 14: Levo: spekter signala val2 in desno: spekter signala val3

Pri Wolfovem številu pa spet ne uspemo tako dobro zadeti z napovedjo. Tukaj sicer nisem popolnoma prepričan, kaj je šlo narobe, saj bi morali dobiti boljši rezultat kot to.

Za konec si še pogledjmo kako nam dodatek šuma vpliva na našo napoved. Signalu smo primešali Gaussovski šum s povprečjem 0 oziroma 1 in različnim σ . Pogledjmo si kako to vpliva na našo napoved.



Slika 15: Levo: odvisnost napake od σ in p za $\mu = 0$ ter desno: za $\mu = 1$

Vidimo da večji šum pomeni večjo napako pri napovedi, le pri $\sigma = 0.1$ se dogaja nekaj čudnega, saj nam napaka z večjim p -jem raste.