Modelska analiza 1

1. naloga

Tina Klobas

10. oktober 2018

1 Opis problema

Pri tej nalogi nas zanima kakšne oblika mora biti funkcija hitrosti vožnje, da je vožnja čimbolj udobna hkrati pa želimo prevoziti razdaljo do semaforja ravno v trenutku, ko se prižge zelena luč. Za pogoj udobne vožnje minimiziramo integral kvadrata pospeška:

$$\int_0^{t_0} \dot{v}^2 \, \mathrm{d}t, \tag{1.1}$$

ob pogoju, da prevozimo razdaljo v določenem časovnem intervalu:

$$\int_0^{t_0} v \, \mathrm{d}t \leq l. \tag{1.2}$$

2 Brezdimenzijska oblika problema

Da problem spravimo v brezdimenzijsko obliko, zapišemo novi količini:

$$\tau = \frac{t}{t_0} \quad \text{in} \quad u = v\frac{t_0}{l}.$$

Tako iz enačb 1.1 ter 1.2 dobimo:

$$\int_0^1 \dot{u}^2 \, \mathrm{d}\tau = \min \tag{2.1}$$

in

$$\int_0^1 u \, \mathrm{d}\tau \leq 1. \tag{2.2}$$

3 Optimalna vožnja

Da minimiziramo funkcijo, ki nastopa v enačbi 2.1 sestavimo Lagrangejevo funkcijo: $\mathcal{L} = \dot{u}^2 - \lambda u$ iz česar po uporabi Euler-Lagrangejevih enačb

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \tag{3.1}$$

dobimo diferencialno enačbo

$$2\ddot{u} + \lambda = 0. \tag{3.2}$$

Ob upoštevanju robnih pogojev

$$1.\ u(0) = u_0 \qquad 2.\ \dot{u}(1) = 0, \tag{3.3}$$

kjer je u_0 neka poljubna začetna hitrost, in vezi 2.2 dobimo rešitev za brezdimenzijsko hitrost:

$$u(\tau) = -\frac{3}{2}\left(1 - u_0\right)\tau^2 + 3(1 - u_0)\tau + u_0. \tag{3.4}$$

Rešitve se razlikujejo zaradi prostega parametra začetne hitrosti u_0, vendar jim je vsem skupno to, da je njihov integral enak ena kar je na grafu 3.1 razvidno v tem da imajo vsi enako ploščino pod grafom.

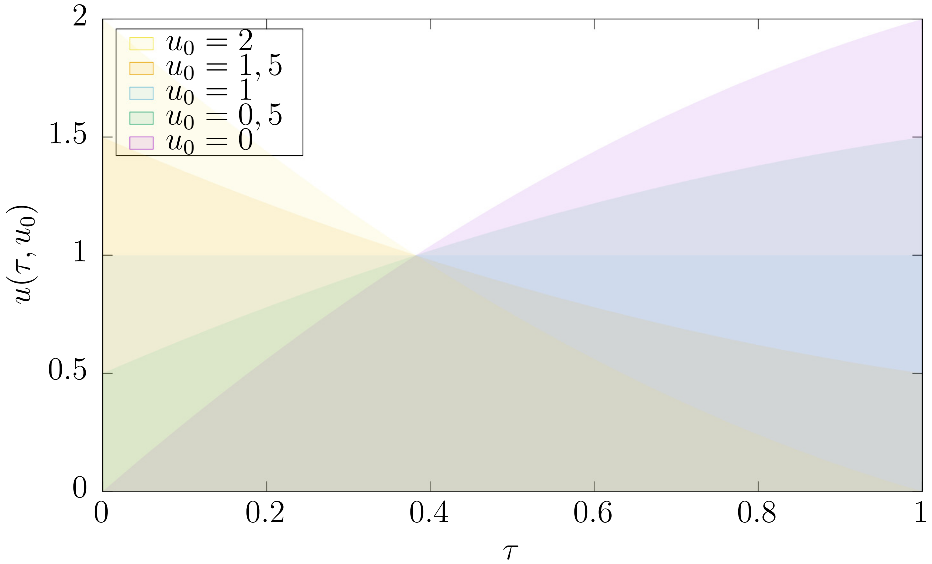
3.1 Radar tik za semaforjem

Če omejimo še končno hitrost dobimo 2. robni pogoj:

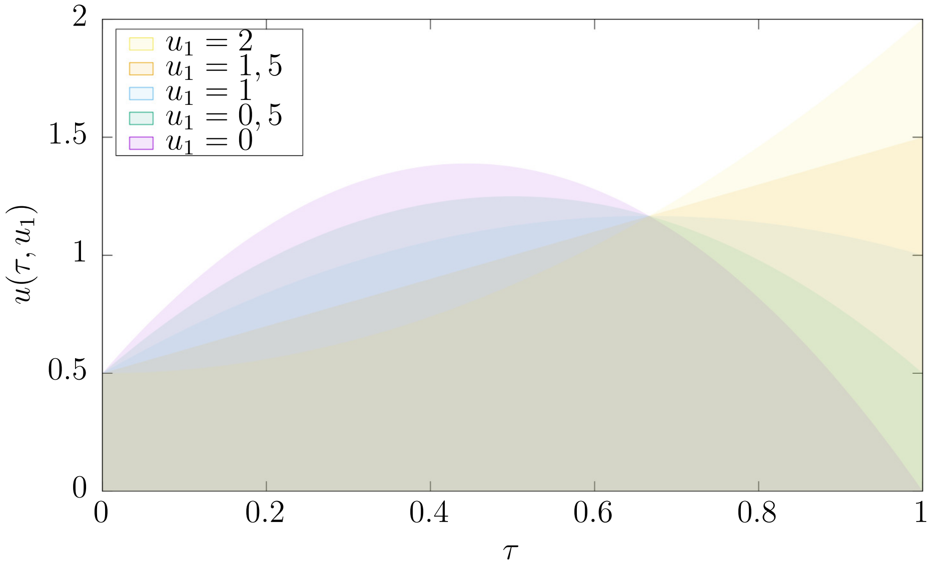
$$u(1) = u_1 \tag{3.5}$$

s čimer dobimo dodaten prosti parameter katerega lahko spreminjamo. Na sliki 3.2 smo si izbrali različne končne hitrosti pri enakih začetnih, funkcija u pa je oblike:

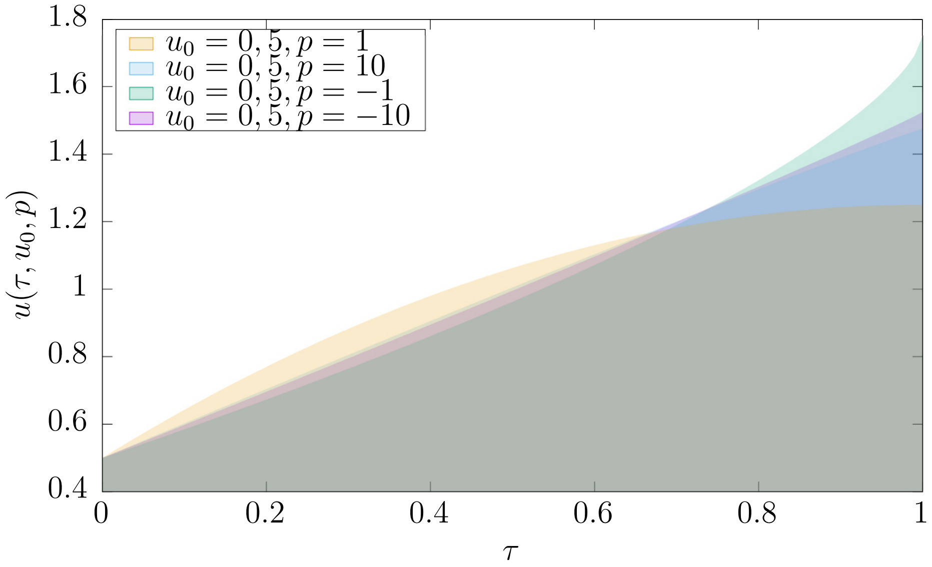
$$u = -6\left(1 - \frac{u1 + u0}{2}\right)\tau^2 + 2(3 - u_1 - 2u_0)\tau + u_0. \tag{3.6}$$



Slika 3.1: Hitrost u ob različnih začetnih hitrostih u_0



Slika 3.2: Hitrost u ob različnih končnih hitrostih u_1 in pri začetni $u_0 = 0,5$.



Slika 4.1: Hitrost u ob začetnem pogoju $u_0 = 0,5$ in pri različnih izbirah p.

4 Višje potence pospeška

Posplošimo problem udobne vožnje na sode potence pospeška;

$$\int_0^1 \dot{u}^{2p} \, \mathrm{d}\tau = \min, \tag{4.1}$$

kjer naj bo $p \in \mathbb{Z}$. Na enak način kot prej z uporabo 3.1 dobimo enačbo za hitrost:

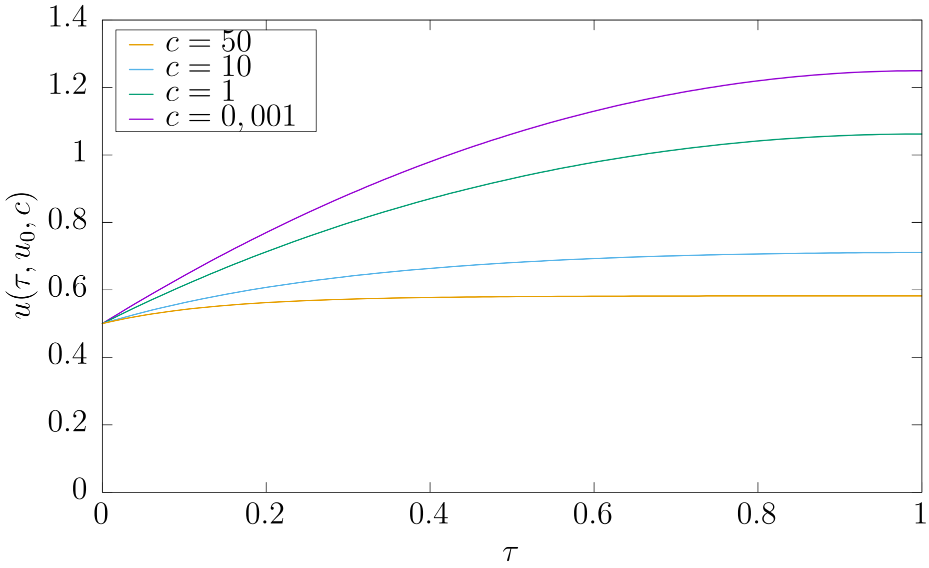
$$u = \frac{4p-1}{2p}(1-u_0)\left[1-(1-\tau)^{\frac{2p}{2p-1}}\right] + u_0. \tag{4.2}$$

Z grafa 3.2, kjer so prikazane funkcije hitrosti pri štirih različnih izbirah p, vidimo, da sta limiti, ko gre p proti zelo velikim vrednostim ter proti zelo majhnim, isti. To tudi računsko potrdimo, saj je:

$$\lim_{p\to\pm\infty} u = 2\tau + u_0.$$

5 Višje potence hitrosti

Zanimiv problem je razširitev problema, kjer omejimo tudi kvadrat hitrosti v funkcionalu: $\mathcal{L} = \dot{u}^2 + cu^2 - \lambda u$. Spet delamo na podoben način kot prej



Slika 5.1: Hitrost u ob različnih vrednostih konstante c in pri začetni hitrosti $u_0 = 0,5$.

in pridelamo enačbo:

$$u = (u_0 - u_c)\left[\cosh(\sqrt{c}t) - \tanh(\sqrt{c})\sinh(\sqrt{c}t)\right] + u_c, \tag{5.1}$$

kjer je $u_c = (1 - u_0)/(1 - \tanh(\sqrt{c})/\sqrt{c})$. Z grafa 5.1 vidimo, da funkcija s padanjem c proti 0 pričakovano limitira k rešitvi začetnega problema 3.4.

6 Zaporedni semaforji

Dodatna razširitev osnovnega problema je primer zaporednih semaforjev. V splošnem imamo na vsakem intervalu med zaporednima semaforjema funkcijo hitrosti oblike:

$$u^{(i)} = -\frac{\lambda_i}{4}\tau^2 + A_i\tau + B_i. \tag{6.1}$$

Koeficiente A_i in B_i določimo iz robnega pogoja za prvi semafor $u^{(0)}(0) = u_0$ ter za zadnjega $\dot{u}^{(n)}(t_0^{(i)}/t_0^{(0)}) = 0$, kjer smo na podoben način kot na začetku vse normirali na konstante iz začetnega problema $t_0^{(0)}$ in $l_0^{(0)}$. Na mejah med zaporednimi semaforji morata veljati še pogoja:

$$1.\, u^{(i)}(\text{zg.}) = u^{(i+1)}(\text{sp.}) \quad \text{in} \quad 2.\, \dot{u}^{(i)}(\text{zg.}) = \dot{u}^{(i+1)}(\text{sp.}) \tag{6.2}$$

kjer smo z *zg.* označili zgornji rob s *sp.* pa spodnjega.

6.1 Primer za 2 semaforja

Imamo dveh sistem enačb

$$u_1 = \frac{\lambda_1}{4}\tau^2 + A_1\tau + B_1 \tag{6.3}$$

$$u_2 = \frac{\lambda_2}{4}\tau^2 + A_2\tau + B_2 \tag{6.4}$$

s štirimi robnimi pogoji:

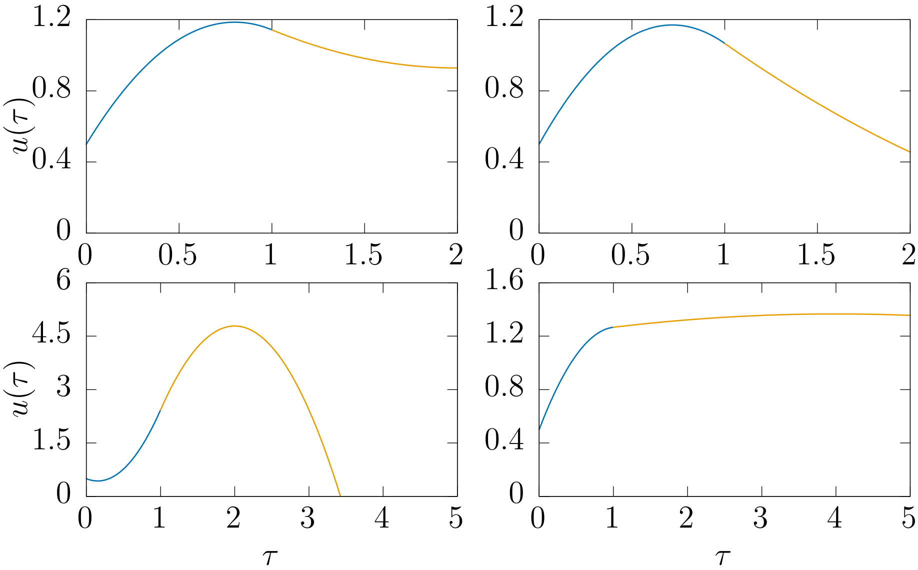
$$u_1(0) = u_0, \tag{6.5}$$

$$u_2\left(\frac{t_1}{t_1}\right) = 0, \tag{6.6}$$

$$u_1(1) = u_2(1) \text{ in} \tag{6.7}$$

$$\dot{u}_1(1) = \dot{u}_2(1) \tag{6.8}$$

(velja $t_1 = t_0$ in $l_1 = l$ iz začetnega problema). Vpeljemo še nove oznake $T = (t_2)/(t_1)$ in $L = (l_2)/l_1$. Vključno z obemi vezmi (oblike 2.2) imamo tako 6 enačb za 6 neznank in (s pomočjo priljubljenega računala) pridemo do rešitve, prikazane na sliki 6.1. Vidimo, da se z izbrano Lagrangejevo funkcijo ne izognemo negativnim hitrostim in bi jo morali prilagoditi. Lahko pa pogledamo za kakšne izbire prostih parametrov u_0, T ter L ostanemo v območju pozitvinih hitrosti. Pri fiksni začetni hitrosti u_0 in npr. $L = 4$ dobimo iz pogoja $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u = 0$.



Slika 6.1: Na grafu so z modrim prikazane rešitve za u_1 ter z oranžnim za u_2 ob začetnem pogoju $u_0 = 0,5$ za različne parametre T ter L. V zgornji vrsti je $L = 1$, T pa 2 in 4, v spodnji pa $L = 4$ ter isto kot zgoraj zaporedoma $T = 2$ in $T = 4$.