

# 11. naloga - Stohastični populacijski modeli

Tina Klobas

17. avgust 2020

## 1 Opis problema

V nalogi se bomo ukvarjali s Poissonovimi stohastičnimi procesi. S tem se realni situaciji približamo z numeričnimi približki tako, da na vsakem koraku integracije dopuščamo odmike od modela v obliki napake. Na vsakem koraku tako izžrebamo naključno število, porazdeljeno okoli predvidene po Poissonovi porazdelitvi

$$\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad (1)$$

kar bomo označevali z  $\mathcal{P}(\lambda)$ .

## 2 Eksponentni model izumrtja

Radi bi delali statistiko časov izumrtja za preprost eksponentni model ( $\beta = 1/\text{enota časa}$ )

$$\frac{dN}{N} = -\beta dt \quad \rightarrow \quad N(t) = N_0 e^{-\beta t} \quad (2)$$

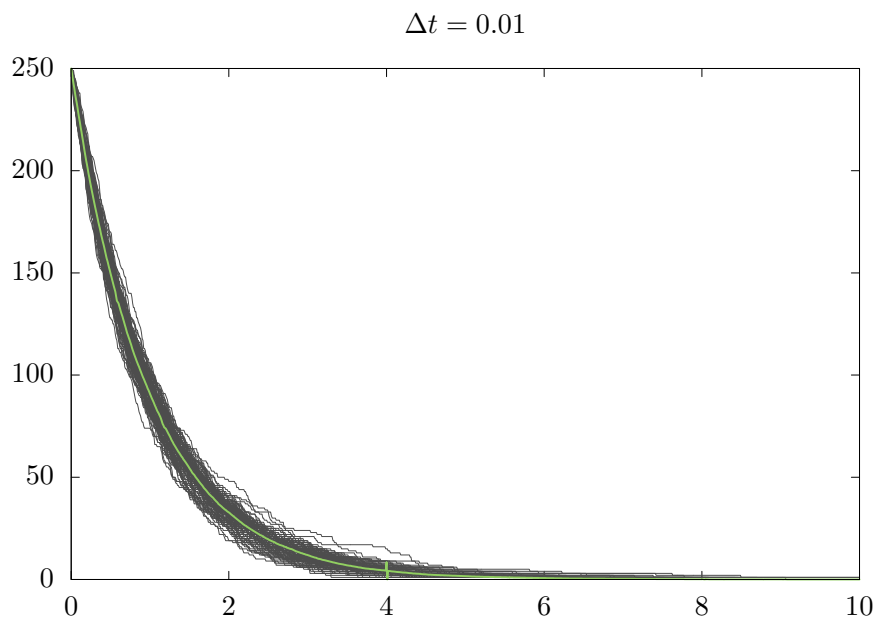
pri različnih začetnih velikostih populacije  $N_0$ . Zanima nas kako je ta čas povezan z velikostjo časovnega koraka  $\Delta t$  in koliko se problem bliža modelu, ki vključuje rojstva in smrti ( $\beta_r = 4\beta$ ,  $\beta_s = 5\beta$ ).

Model 2 spravimo v numerično obliko, tako da na vsakem koraku izračunamo

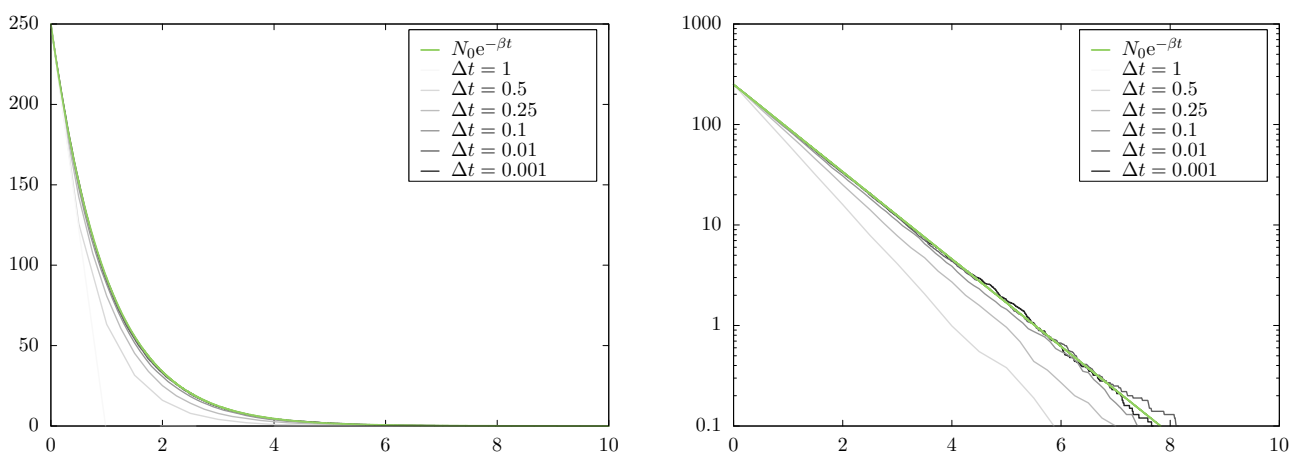
$$N(t + \Delta t) = N(t) - \mathcal{P}(\beta N \Delta t). \quad (3)$$

**Velika začetna populacija:**  $N_0 = 250$

Za fiksno začetno vrednost spreminjamo velikosti korakov  $\Delta t = \{0.001, 0.01, 0.1, 0.25, 0.5, 1\}$ . Na grafu 2.1 je prikazanih 100 ponovitev za korak  $\Delta t = 0,01$  in njihovo povprečje (ki sovпада z eksponentno funkcijo). Za različne korake podobno izračunamo povprečja nekaj ponovitev, kar je prikazano na grafu 2.2. Iz obeh primerov vidimo, da je bolje jemati manjše korake, če se želimo približati realni vrednosti. S tem ko zmanjšamo korak, tudi zožimo Poissonovo funkcijo  $\lambda = \beta N(t) \Delta t$  in s tem zmanjšamo šum, oziroma nihanje okoli povprečne vrednosti.

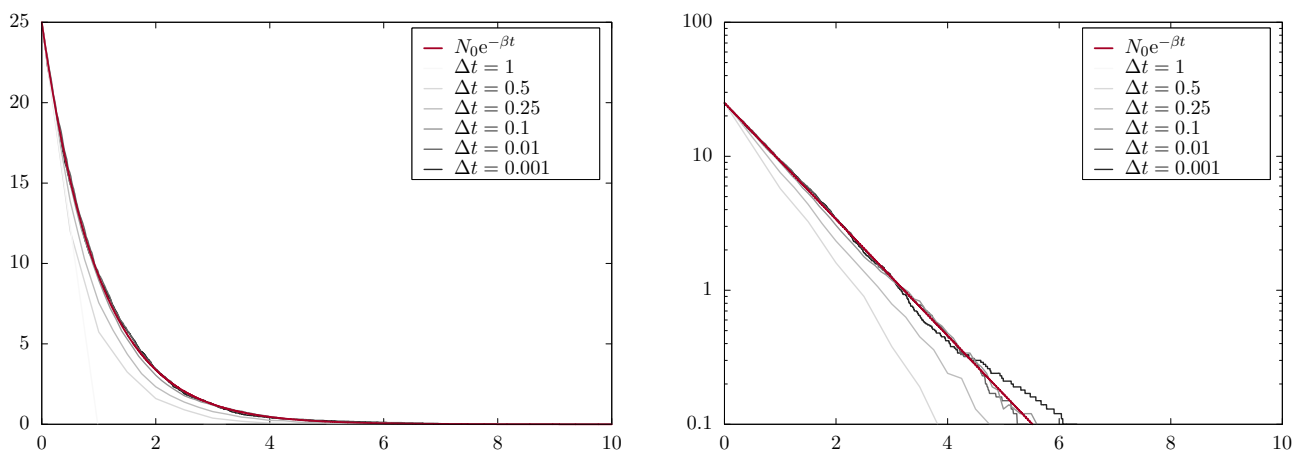


Slika 2.1: 100 poskusov in njihova povprečna vrednost.



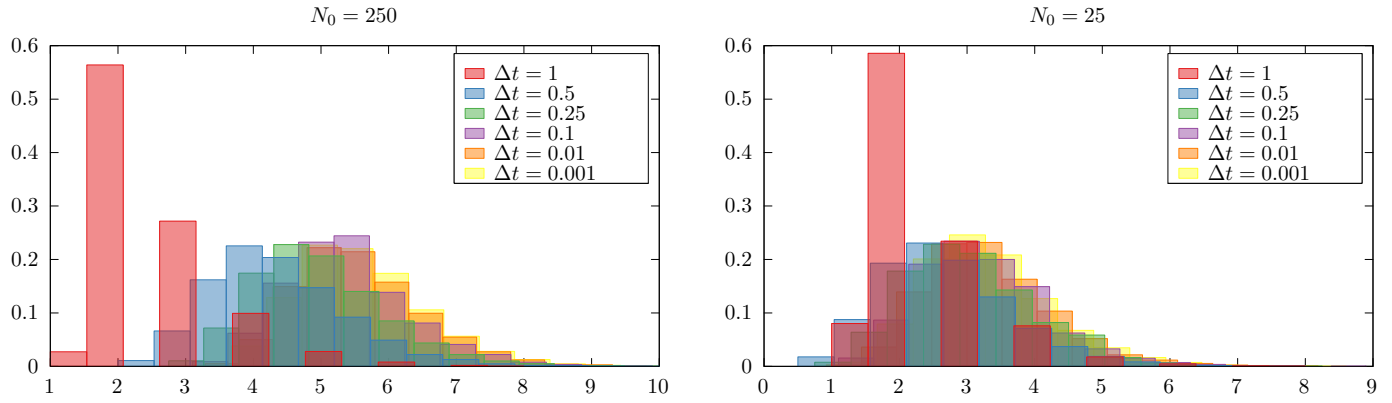
Slika 2.2: Povprečne vrednosti 100 poskusov za različne  $\Delta t$  za  $N_0 = 250$ .

**Majhna začetna populacija:  $N_0 = 25$**



Slika 2.3: Povprečne vrednosti 100 poskusov za različne  $\Delta t$  za  $N_0 = 25$ .

Podobno kot v prejšnjem primeru, tudi tukaj z grafi 2.3 vidimo, da je bolje jemati krajše čase.



Slika 2.4: Histograma časov izumrtja za različno začetno vrednost populacije. Model je osnovni, samo s parametrom, ki zmanjšuje populacijo.

## 2.1 Časi izumrtja

Zanimivo je opazovati čase izumrtja populacije. Na grafih 2.4 je prikazana porazdelitev v odvisnosti od različnih korakov  $\Delta t$  za  $N = 10000$  poskusov. Na prvi pogled lahko že potrdimo prešnje grafe, da koraki, večji od  $\Delta t = 0, 1$ , ne dajo dovolj natančnega rezultata in se precej razlikujejo od ostalih. Pri sliki za  $N_0 = 250$  je odstopanje med različnimi koraki veliko manjše. Celoten graf za manjšo populacijo je pomaknjen v levo, saj manjša populacija prej zamre. Pri tem grafu tudi opazimo, da razen histogram za  $\Delta t = 1$ , so vsi ostali veliko manj razlikujejo.

## Rojstva in smrti

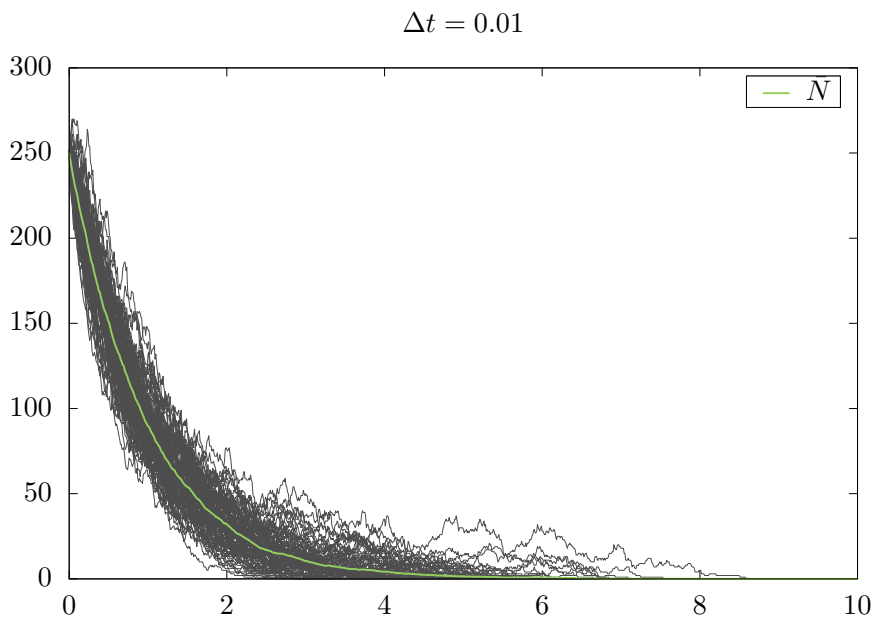
Sedaj spremenimo model in upoštevamo rojstva in smrti (in dodatna parametra  $\beta_r = 4\beta$ ,  $\beta_s = 5\beta$ )

$$\frac{dN}{dt}(t) = -\beta_s t + \beta_r t = -5\beta t + 4\beta t = -\beta t \quad (4)$$

enačba je enaka kot prej, le da sedaj dovolimo, da s stohastičnim računanjem dovolimo tudi občasno rast populacije, kar je tudi bolj podobno realnosti. Stohastična enačba je tako:

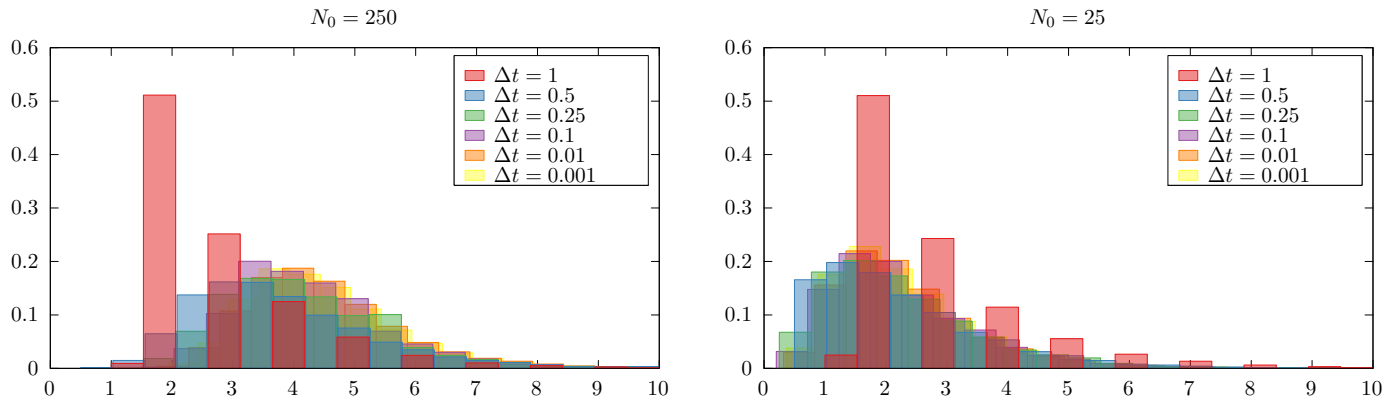
$$N(t + \Delta t) = N(t) - \mathcal{P}(\beta_s N \Delta t) + \mathcal{P}(\beta_r N \Delta t). \quad (5)$$

S to razčlenbo, ki dopušča tudi rojevanje smo tudi dobili večjo razpršenost stohastičnega modela, kar tudi vidimo na grafu 2.5, ki je veliko bolj razsejan, kot ekvivalenten graf 2.1.

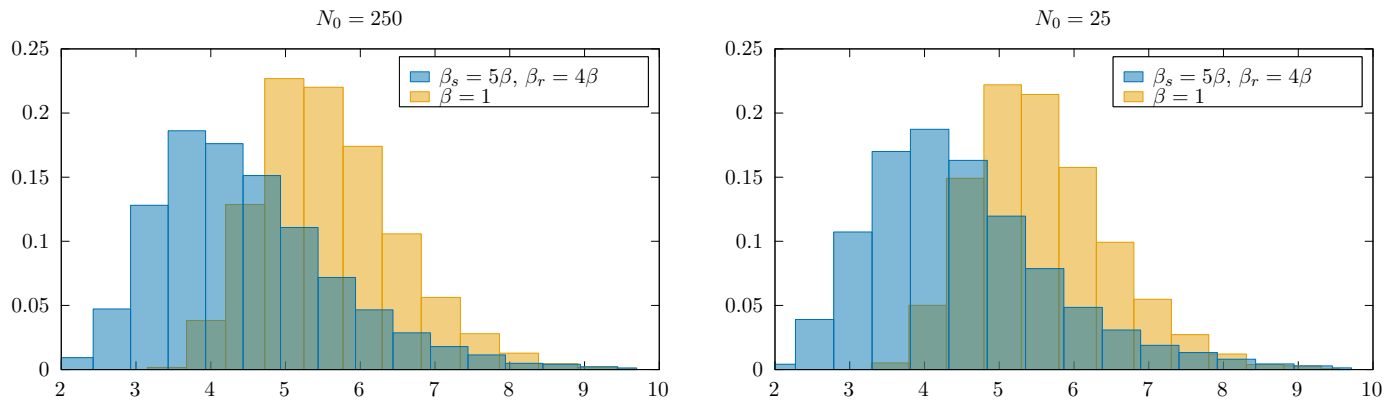


Slika 2.5: 100 poskusov in njihova povprečna vrednost.

Na grafih 2.6 je prikazana porazdelitev časov izumrtja za različne časovne korake in tudi tukaj ugotovimo, da se velikih korakov ne splača delati.



Slika 2.6: Histograma časov izumrtja za različno začetno vrednost populacije. Model dopušča ločena parametra rodnosti in smrtnosti.



Slika 2.7: Primerjava histogramov za oba modela in pri obeh začetnih vrednostih  $N_0$ , pri koraku  $\Delta t = 0,01$ .

Na sliki 2.7 se bolje vidi primerjava med obema modeloma, kjer se tudi dobro opazi, da je tudi čas izumrtja populacije nekoliko bolj razpršen kot prvi model. Poleg tega pa populacija prej izgine, kar je posledica, da sistem bolj moten in vanj vnašamo več šuma. Časi izumrtja s tega grafa so

	$N_0 = 250$	$N_0 = 25$
Združen model:	$t = 4,9$	$t = 3,01$
Ločen model:	$t = 3,68$	$t = 1,65$

### 3 Matrika prehodov

Prejšnji problem lahko zapišemo tudi z matriko prehodov. Za trenutno situacijo zapišemo vektor stanja:  $\mathbf{x}(t) = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N_0})$ . Prehod na vsakem časovnem koraku zapišemo kot:

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) = M\mathbf{x}(t) \quad (6)$$

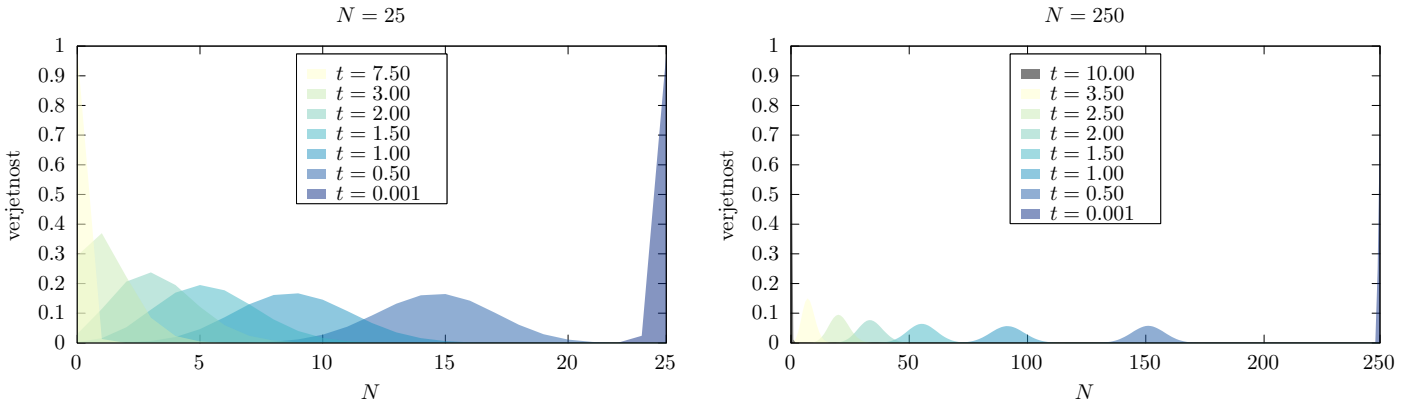
oziroma

$$\mathbf{x}(p\Delta t) = M^p\mathbf{x}(0), \quad (7)$$

kjer je bilo začetno stanje modela  $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0, \dots, 1)$  z enico na  $N_0$ -tem mestu. Vrednost komponente vektorja  $x_i$  predstavlja verjetnost, da bo sistem v  $i$ -tem stanju ob času  $p\Delta t$ . Komponente matrike  $M$  so razvoji Poissonove funkcije za majhne časovne korake in predstavljajo verjetnosti za dogodke v sistemu (imamo 1 smrt, 1 rojstvo, ...). Matrika ima tako tridiagonalno obliko

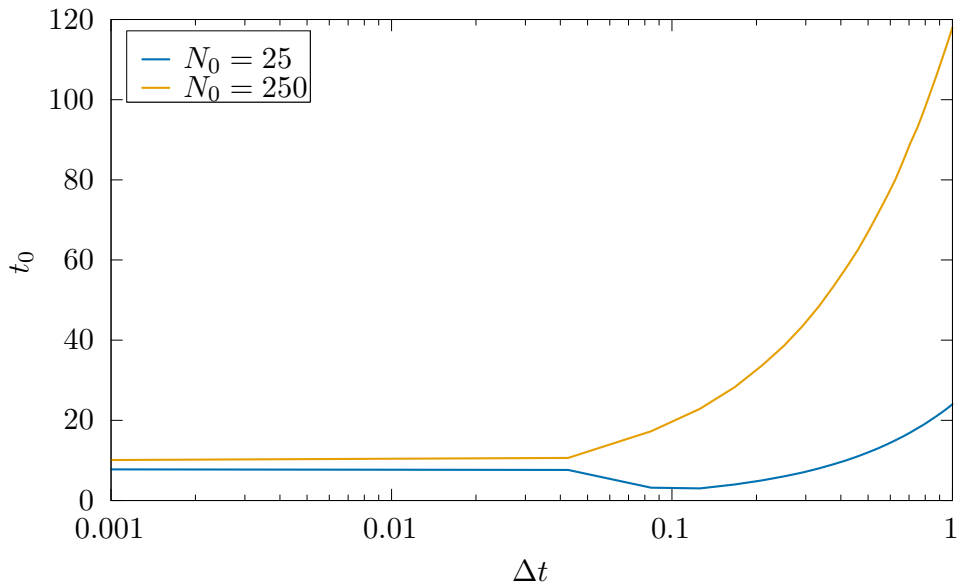
$$M = \begin{bmatrix} 1 - (R_0 + S_0)\Delta t & S_1\Delta t & 0 & \dots \\ R_0\Delta t & 1 - (R_1 + S_1)\Delta t & S_2\Delta t & \dots \\ 0 & R_1\Delta t & 1 - (R_2 + S_2)\Delta t & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (8)$$

kjer so  $R_n = \beta n$  verjetnosti za rojstva,  $S_n = \beta n$  pa za smrti. Za preprost model, kjer je smrtnost  $\beta_s = 1$  in rodnoti ni  $\beta_r = 0$  lahko na grafu 3.1 pogledamo kako se obnaša porazdelitvena funkcija – začnemo z delta funkcijo ob času  $t = 0$  pri najvišji začetni velikosti populacije, ta se nato razvleče in začne pomikati proti levi, dokler ne preidemo spet v delta funkcijo.



Slika 3.1: Verjetnosti, da je ob času  $t$  velikost populacije  $N$ .

Po 500 poskusih povprečimo dobljene čase izumrtja in dobimo spodnji graf 3.2. Po pričakovanjih lahko vidimo, da ta je ta čas za večje korake veliko daljši.



Slika 3.2: Spreminjanje časa izumrtja  $t_0$  pri različnih časovnih koraki  $\Delta t$ .

## 4 Model plen-plenilec

Model življenja populacij lisic in zajcev smo že opazovali, sedaj pa parameter, ki je skrbel, da so se populacije manjšale/večale, tako kot pri prvi nalogi, razdelimo na smrtnost in rodnost. Parametre rojstev zajcev označimo z  $\rho_z$  in lisic z  $\rho_l$ , smrtnosti pa  $\sigma_z$  in  $\sigma_l$ . Tako imamo sklopljeni enačbi

$$\dot{Z} = \rho_z Z - \sigma_z Z - \gamma ZL \quad (9)$$

$$\dot{L} = \rho_l L - \sigma_l L + \delta ZL. \quad (10)$$

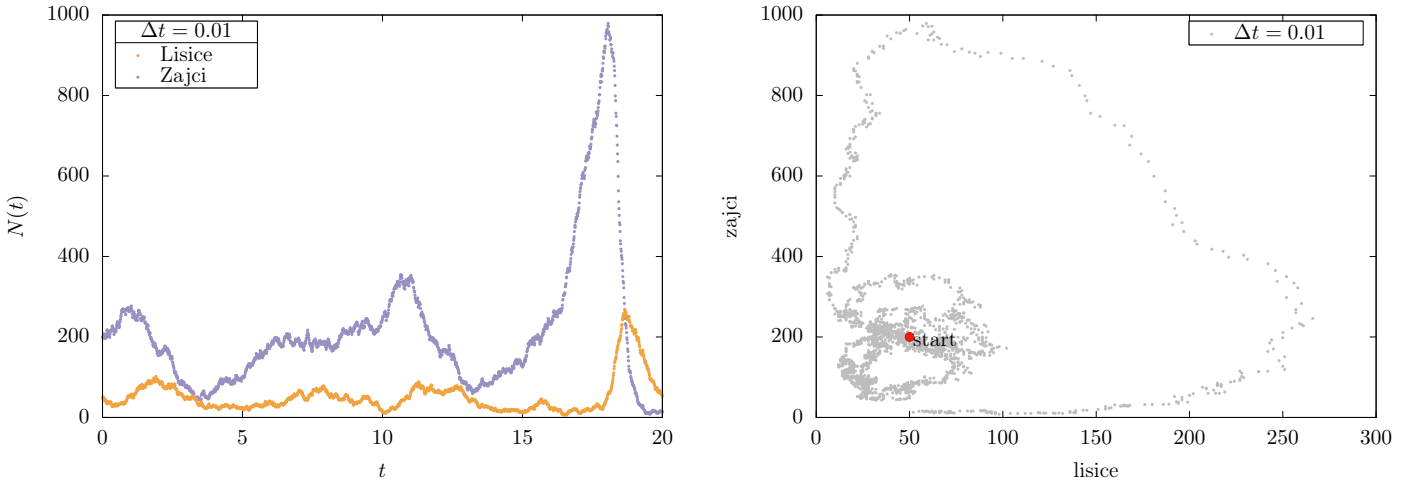
Na začetku imamo stanje z  $Z_0 = 200$  zajci in  $L_0 = 50$  lisicami. Razmerje rodnost/smrtnost za zajce je  $\rho_z/\sigma_z = 5/4$  in za lisice  $\rho_l/\sigma_l = 4/5$ , oziroma  $\rho_z = 5\alpha$ ,  $\sigma_z = 4\alpha$  in  $\rho_l = 4\beta$ ,  $\sigma_l = 5\beta$ . Preostala parametra nastavimo tako, da sta  $\gamma = \alpha/L_0$  in  $\delta = \beta/Z_0$ . Tako dobimo stohastični enačbi za populaciji lisic in zajcev:

$$Z_{n+1} = Z_n + \mathcal{P}(5\alpha Z_n \Delta t) - \mathcal{P}(4\alpha Z_n \Delta t) - \mathcal{P}\left(\frac{\alpha}{L_0} Z_n L_n \Delta t\right) \quad (11)$$

$$L_{n+1} = L_n + \mathcal{P}(4\beta L_n \Delta t) - \mathcal{P}(5\beta L_n \Delta t) + \mathcal{P}\left(\frac{\beta}{Z_0} Z_n L_n \Delta t\right) \quad (12)$$

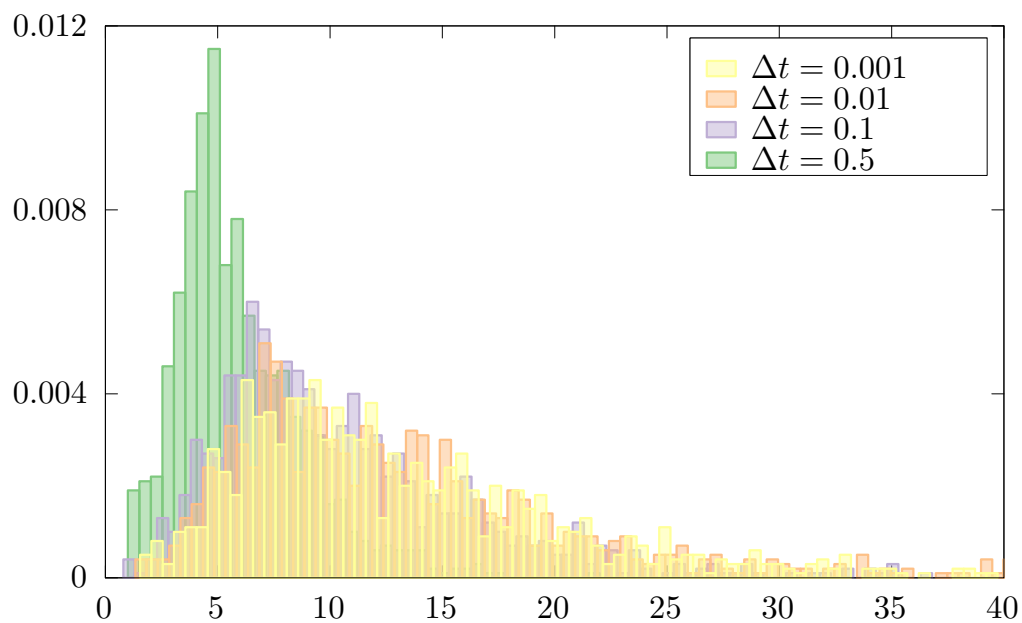
### 4.1 Reševanje

Rešitve Lotka–Volterra problema so periodične eksponentne rasti/padanje za obe populaciji, kar v faznem prostoru predstavljajo elipsoidi – nihanje populacij okoli ravnovesne lege. Tukaj si pogledimo kaj se zgodi, če začnemo v ravnovesnem stanju – 200 zajcev in 50 lisic, kjer spremembo populacije povežemo z naključnim Poissonske izžrebanim številom. Ker imamo stohastičen model pričakujemo, da bosta populaciji ušli iz stacionarne točke, kar opazimo na spodnjem grafu 4.1, kjer smo za časovni korak vzeli  $\Delta t = 0.01$ . Rešitev je spiralne oblike in se zaključi, v tem primeru, z izumrtjem zajcev.



Slika 4.1: Spreminjanje populacije zajcev in lisic pri časovnem koraku  $\Delta t = 0.01$ . Na desni je prikazan fazni diagram.

Zanimivo vprašanje, ki se tukaj pojavi je kdaj populacije zamrejo, oziroma kolikšna je povprečna življenska doba. Poleg tega lahko tudi preverimo katera izmed živalskih vrst prej izumre. Za različne časovne korake naredimo 10000 ponovitev in počakamo, da ena izmed vrst izumre. Dobimo graf porazdelitve časov izumrtja 4.2, kjer vidimo, da z manjšim časovnim korakom dobimo bolj razširjeno porazdelitev, vrh pa dobimo pri kasnejših časih.



Slika 4.2: Spreminjanje populacije zajcev in lisic pri časovnem koraku  $\Delta t = 0.01$ . Na desni je prikazan fazni diagram.

Dobljene življenske dobe  $t_0$  s tega histograma so:

$\Delta t$	0.5	0.1	0.01	0.001
$t_0$	4.7	6.5	7.0	9.2