باسمه تعالی

پروژه‌ی درس آمار و احتمال

استاد درس

دکتر سید محمد کرباسی

دانشکده‌ی مهندسی برق
دانشگاه صنعتی شریف

خرداد ۱۴۰۲

فهرست مطالب

۱ مقدّمه

فرض کنید شما می خواهید در بازار سرمایه فعالیت کنید و از این روش پول دار شوید! احتمالا می دانید که در این بازار، شما باید سهم شرکت های مختلف را بخرید و بفروشید. شما هنگامی سود می کنید که یک سهم را در قیمت پایینی خریداری کرده و در قیمت بالاتری بفروشید. دقیقاً به همین علّت است که وقتی شاخص بورس بالا می رود، همه خوش حال می شوند. زیرا سهم هایی که قبلا خریده بودند ارزشمندتر شده و بعداً می توانند به قیمت بالاتری آن ها را بفروشند. پس تعیین کننده ترین عامل، قیمت است.
بیایید از یک دیدگاه احتمالاتی به این فرآیند بنگریم. فقط یک سهم را در نظر می گیریم قیمت آن را در هر لحظه با $X(t)$ نشان می دهیم. کار کردن با توابع پیوسته کمی سخت است و در نتیجه از قیمت (که در هر لحظه در حال تغییر است) نمونه برداری می کنیم. مثلا هر روز. (این اتّفاق در واقعیت هم رخ می دهد و افرادی که بازار را تحلیل می کنند، با نمونه های قیمت کار می کنند.) حالا یک دنباله ی گسسته داریم: X_n. چرا از حروف بزرگ استفاده کردیم؟ چون می خواهیم هرکدام از X_i ها را با یک متغیر تصادفی مدل کنیم، به تعبیر دیگر یک دنباله از متغیر های تصادفی (یک فرآیند تصادفی) داریم. بازهم برای سادگی فرض می کنیم که X_i ها متغیر های تصادفی گسسته اند (و نه پیوسته). هم چنین فرض می کنیم که قیمت ها از $t = ۰$ (معادلا $n = ۰$) آغاز می شوند. یعنی دنباله ی قیمت ها را می توان به صورت $\{X_n\}_{n=۰}^{\infty}$ نشان داد.
فرض کنید الان در لحظه ی n هستیم و می خواهیم درباره ی قیمت در لحظه ی $n + ۱$ صحبت کنیم که وابسته به قیمت های لحظات قبل می باشد. (وقتی می گویم می خواهیم درباره ی یک متغیر تصادفی صحبت کنیم، یعنی می خواهیم توزیع آن را بیابیم!) وقتی ما در لحظه ی n هستیم، یعنی تاریخچه ی بازار از ابتدا تا لحظه ی n را داریم و مقادیر متغیرهای تصادفی را می دانیم. در نتیجه چیزی که برای ما مهم است، توزیع شرطی است:

$$\mathbb{P}\left[X_{n+۱} \mid X_۰, X_۱, \cdots, X_n\right]$$

اگر این توزیع شرطی را داشته باشیم، می توانیم توزیع را بیابیم و عملا همه ی اطلاعات درباره ی آن را داریم. ولی ما دوست نداریم این قدر مدل پیچیده ای داشته باشیم! برای همین از مدل ساده تر شده ای تحت عنوان زنجیره مارکوف استفاده می کنیم. در ۴ بخش بعدی این پروژه قرار است با این مدل، خواص آن و کاربرد های آن آشنا شویم.

حال فرض کنید دو بانک آرتا و سورنا که از بانک های بزرگ دنیا می باشند، قصد دارند که روی چند شرکت بورسی سرمایه گذاری کنند. اما با توجه به اینکه میزان سرمایه گذاری این دو بانک بسیار زیاد است ، این سرمایه گذاری منجر به تغییر روند قیمت سهام این شرکت ها در بورس خواهد شد. در این حین دولت وارد عمل شده و برای جلوگیری از ایجاد انحصار توسط این دو بانک در بورس یک سری سیاست های محدود کننده در پیش میگیرد که این سیاست ها به شرح زیر اند :

۱. هیچ یک از دو بانک آرتا و سورنا حق سرمایه گذاری روی بیش از یک شرکت بورسی را ندارند.

۲. میزان سرمایه گذاری هر بانک روی هر شرکت دارای محدودیت است.

نکته : دقت کنید که هیچ کدام از این دو بانک از سیاست یکدیگر برای سرمایه گذاری روی سهام ها مطلع نیستند.
در ۳ بخش انتهایی این پروژه قرار است شما ابتدا رفتار سهام های شرکت ها را بدون در نظر گرفتن سرمایه گذاری این دو بانک و به کمک مفاهیم برازش که در فاز های قبلی آموختید مدل کنید. سپس قرار است به کمک توزیع های آماری که میشناسید ، تاثیر سرمایه گذاری این دو شرکت بر قیمت سهام شرکت ها را مدل کنید. در آخر نیز باید به کمک مفاهیم نظریه بازی رفتار این دو شرکت را برای رسیدن به سود ماکزیمم ، با توجه به سیاست های دولت در قبال سرمایه گذاری آن ها را پیش بینی کرده و نقطه تعادل این سیستم را بیابید.
با توجه به اینکه ممکن است همه شما با نظریه بازی آشنایی نداشته باشید، دربخش ۶ قرار است با مفاهیم آن آشنا شده و سپس به چند سوال نظری در این بخش پاسخ دهید.

۲ زنجیره مارکوف

یک فرآیند تصادفی دنباله ای از متغیر های تصادفی مانند $X_0, X_1, X_2 \cdots$ می باشد. زنجیره مارکوف یک نوع فرآیند تصادفی می باشد که در آن به شرط دانستن X_n توزیع X_{n+1} از X_i های قبلی مستقل است. به عبارتی تمام تاریخچه فرآیند در متغیر X_n وجود دارد. یعنی:

$$\mathbb{P}\left[X_{n+1} \mid X_0, X_1, \cdots, X_n\right] = \mathbb{P}\left[X_{n+1} \mid X_n\right]$$

به تعبیر دیگر، داشتن مقدار دنباله در لحظه ی n برای یافتن توزیع در لحظه ی $n+1$ کافیست و نیازی به مقادیر لحظات قبلی نداریم. هم چنین توزیع شرطی $\mathbb{P}\left[X_{n+1} = j \mid X_n = i\right]$ به n وابسته نیست و با گذشت زمان عوض نمی شود. در نتیجه می توان آن را با p_{ij} نشان داد. حال اگر فرض کنیم مقادیر ممکن برای همه ی X_i ها به صورت $\mathcal{X} = \{1, 2, ..., M\}$ هستند، می توان p_{ij} ها را در یک ماتریس $P_{M\times M}$ کنار هم قرار داد. این ماتریس را ماتریس انتقال می نامیم. درایه ی سطر iام و ستون jام این ماتریس عبارتند از p_{ij}. در نتیجه اگر ماتریس انتقال و توزیع X_0 را داشته باشیم، می توانیم توزیع هر X_n را بیابیم. توزیع X_0 را با بردار $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ نشان می دهیم که $\lambda_i = \mathbb{P}\left[X_0 = j\right]$.

تعریف ۲-۱. دنباله $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ را یک زنجیره ی مارکوف با توزیع اولیه λ و ماتریس انتقال $P = [p_{ij}]_{M\times M}$ می نامیم، اگر

۱. X_0 دارای توزیع λ باشد.

۲. برای هر n داشته باشیم:

$$\mathbb{P}\left[X_{n+1} = j \mid X_0 = k_0, X_1 = k_1, \cdots, X_n = i\right] = \mathbb{P}\left[X_{n+1} = j \mid X_n = i\right] = p_{ij} \tag{1}$$

هرکدام از اعضای $\mathcal{X}$ را یک «حالت» از زنجیره ی مارکوف $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ می نامیم. یک زنجیره ی مارکوف را می توان با یک گراف وزن دار و جهت دار نیز نشان داد. رأس های این گراف، حالت های زنجیره ی مارکوف هستند و اگر $p_{ij} > 0$ یک یال از رأس i به راس j وجود دارد و وزن این یال، برابر با p_{ij} است.

~~پرسش تئوری ۱.~~ دو مثال از دنباله های مارکوف بیابید! (مثال هایی که در آن ها استقلال ذکر شده در رابطه (۱) واقعاً برقرار باشد!)

~~پرسش تئوری ۲.~~ اگر در یک دنباله ی مارکوف $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ توزیع X_n را با λ_n نمایش دهیم، نشان دهید

$$\lambda_n = \lambda \mathrm{P}^n$$

~~پرسش تئوری ۳.~~ درایه های ماتریس P^n را با $p_{ij}^{(n)}$ نمایش می دهیم. نشان دهید $p_{ij}^{(n)}$ احتمال رفتن از حالت i به حالت j در دقیقا n گام می باشد. همچنین نشان دهید جمع سطر های ماتریس P^n یک می باشد و این ماتریس حداقل یک مقدار ویژه یک دارد.

~~پرسش تئوری ۴.~~ اگر یک فرآیند دارای حافظه ی محدودی به طول K باشد، یعنی:

$$\mathbb{P}\left[X_{n+1} \mid X_0, X_1, \cdots, X_n\right] = \mathbb{P}\left[X_{n+1} \mid X_n, X_{n-1}, \cdots, X_{n-K+1}\right]$$

این دنباله را می توان به صورت یک زنجیره مارکوف نوشت.

---

۳ کلاس های مخابراتی

این قسمت از تعریف دنبالهٔ مارکوف در قسمت قبل استفاده می‌کند.

فرض کنید در لحظهٔ n، در حالت i از دنبالهٔ مارکوف $\{X_n\}_{n=۰}^{\infty}$ قرار داریم. سؤال این است که آیا حالت j دسترسی‌پذیر است؟ یعنی، آیا مشاهده X_j پس از مشاهده X_i، غیرممکن است یا خیر؟ از طرف دیگر، بعد از چند گام می‌توان از i به j رسید؟

تعریف ۳-۱. فرض کنید در لحظهٔ n، در حالت i از یک زنجیره مارکوف قرار داریم. حالت j را دسترسی‌پذیر می‌گوییم و می‌نویسیم $i \to j$ هرگاه یک $m \geq ۰$ وجود داشته باشد که $\mathbb{P}[X_{n+m} = j | X_n = i] > ۰$.

تعریف ۳-۲. می‌گوییم حالت i و j با هم در ارتباط‌اند و می‌نویسیم $i \leftrightarrow j$ اگر و تنها اگر $[i \to j] \wedge [j \to i]$.

پرسش تئوری ۵. ثابت کنید که $i \to j$، اگر و تنها اگر یک $n \geq ۰$ وجود داشته باشد و حالت‌های $s_۰, s_۱, s_۲, \ldots, s_n$ وجود داشته باشند که در آن‌ها $s_۰ = i$ و $s_n = j$، به طوری که:

$$p_{s_۰ s_۱} p_{s_۱ s_۲} p_{s_۲ s_۳} \cdots p_{s_{n-۱} s_n} = \prod_{i=۱}^{n} p_{s_{i-۱} s_i} > ۰ \qquad (۲)$$

پرسش تئوری ۶. فرض کنید مجموعه تمام حالت‌ها را با χ نشان دهیم. نشان دهید که در ارتباط بودن، یک رابطهٔ هم‌ارزی است. با توجه به این، نتیجه بگیرید که می‌توان χ را به تعدادی مجموعه افراز کرد، که تمام اعضایش با هم در ارتباط‌اند. به این مجموعه‌های افراز شده، کلاس‌های مخابراتی زنجیرهٔ مارکوف $\{X_n\}$ می‌گوییم.

تعریف ۳-۳. یک کلاس مخابراتی مثل C را بسته می‌گوییم هر گاه به ازای هر $i \in C$ که $i \to j$، داشته باشیم $j \in C$.

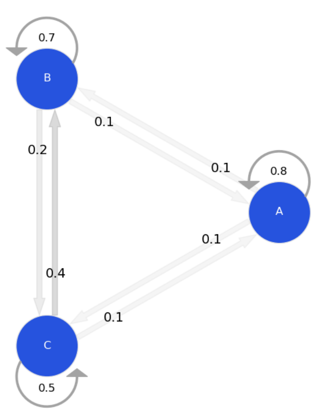
پرسش شبیه‌سازی ۱. در این شبیه‌سازی شما قرار است با استفاده از ماتریس انتقال P، نمودار حالت زنجیره مارکوف را رسم کنید. برای انجام این کار می‌توانید:

۱. از NetworkX استفاده کنید (با استفاده از گراف جهت‌دار).

۲. از این لینک GitHub استفاده کنید (پیشنهادی).

برای مثال از حالت دوم، برای ماتریس انتقال زیر، یک نمودار آورده شده‌است:

$$P = \begin{pmatrix} ۰/۸ & ۰/۱ & ۰/۱ \\ ۰/۱ & ۰/۷ & ۰/۲ \\ ۰/۱ & ۰/۴ & ۰/۵ \end{pmatrix} \qquad (۳)$$



شکل ۱: نمودار حالت ترسیم شده از ماتریس انتقال

برای ماتریس انتقال زنجیرهٔ مارکوف زیر، دیاگرام حالت بکشید. سپس، کلاس‌های مخابراتی آن‌را در گزارش خود مشخص کنید. کدام‌یک از این کلاس‌ها بسته هستند؟

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (4)$$

تعریف ۳-۴. به زنجیرهٔ مارکوفی که فقط یک کلاس مخابراتی دارد، کاهش‌ناپذیر یا irreducible گفته می‌شود. به عبارت دیگر، تمام حالات یک زنجیرهٔ مارکوف کاهش‌ناپذیر با هم در ارتباط‌اند. این خاصیت مطلوبی است، چون تحلیل رفتار حدی را راحت‌تر می‌سازد.

تعریف ۳-۵. برای هر حالت i تعریف می‌کنیم:

$$f_{ii} = \mathbb{P}(X_n = i, n \geq 1 | X_0 = i) \quad (5)$$

اگر $f_{ii} = 1$، به حالت i recurrent گفته می‌شود و اگر $f_{ii} < 1$، به آن transient گفته می‌شود.

پرسش تئوری ۷. ثابت کنید که در هر زنجیرهٔ مارکوف محدود، حداقل یک کلاس recurrent وجود دارد.

پرسش تئوری ۸. نشان دهید اگر V_i تعداد گذار به حالت transient iم باشد، یعنی تعداد دفعاتی که از حالت i می‌گذریم، نشان دهید که V_i یک متغیر تصادفی است که:

$$V_i | X_0 = i \sim Geometric(1 - f_{ii}) \quad (6)$$

تعریف ۳-۶. مجموعه تمام n هایی که در آن $p_{ii}^{(n)} > 0$ را در نظر بگیرید. این مجموعهٔ تمام تعداد گام‌هایی است که از حالت i برمی‌داریم و احتمال این‌که به i برگردیم ناصفر است. تناوب d_i را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$d_i = gcd(\{n \geq 1 | p_{ii}^{(n)} > 0\})$$

که gcd در این‌جا به معنای بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک است. اگر $d_i = 1$ می‌گوییم که حالت i متناوب نیست، و اگر $d_i > 1$ می‌گوییم حالت i متناوب است.

پرسش تئوری ۹. نشان دهید که اگر $j \leftrightarrow i$ آن‌گاه $d_i = d_j$.

پرسش تئوری ۱۰. یک زنجیرهٔ مارکوف $\{X_n\}$ را در نظر بگیرید با مجموعهٔ حالات $\chi = \mathbb{Z}$. فرض کنید $X_0 = 0$ و:

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = i - 1 | X_n = i] = 1 - p, \ \mathbb{P}[X_{n+1} = i + 1 | X_n = i] = p \quad (7)$$

دوره تناوب هر حالت این زنجیره را محاسبه کنید.

پرسش شبیه‌سازی ۲. در این شبیه‌سازی شما دقیقا از زنجیرهٔ پرسش قبل استفاده خواهید کرد.

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = i - 1 | X_n = i] = 1 - p, \ \mathbb{P}[X_{n+1} = i + 1 | X_n = i] = p \quad (8)$$

فرض کنید $p = \frac{1}{2}$، و تا $n = \sigma = 200$ پیش‌روی کنید. این کار را $N = 1000$ بار تکرار کنید؛ و هر بار X_σ را ذخیره داشته‌باشید. سپس، تعداد هر X_σ را بر حسب مقدار خود $X_\sigma = i$ رسم کنید.
با چه توزیعی مواجه می‌شوید؟ این کار را برای σ های کوچک‌تر و بزرگ‌تر تکرار کنید، و همچنین برای p های کوچک‌تر و بزرگ‌تر. تغییر پارامترها چه تاثیری روی توزیع نهایی دارد؟در گزارش خود بیاورید.

۴ توزیع ایستان

در مطالعه ی زنجیره های مارکوف، بسیار علاقه مندیم که به بررسی خواص X_n وقتی n به بی نهایت می رود، بپردازیم. مسائلی از جنس اینکه آیا با افزایش n حالت های ما با توزیع مشخصی ظاهر می شوند یا خیر و نحوه ی محاسبه ی چنین توزیعی از اهمیت کاربردی بسیار زیادی برخوردار هستند. در ادامه تلاش می کنیم به بررسی این نوع مسائل بپردازیم. وجود یک توزیع حدّی برای X_n در $n \to \infty$ ، رابطه ی تنگاتنگی با توزیع ایستان دارد.

تعریف ۴-۱. توزیع ایستان : فرض کنید یک توزیع اولیه λ روی حالت های زنجیره ی مارکوف $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ قرار گرفته است. اگر با گذر زمان توزیع حالت های مختلف تغییری نکند، توزیع λ را توزیع ایستان زنجیره ی مارکوف $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ می نامیم. یعنی توزیع ایستان است، اگر و تنها اگر: $\lambda = \lambda.P$

تعریف ۴-۲. حالت دائمی: حالت j را حالت دائمی می گوییم هرگاه احتمال آن با بزرگ شدن n مستقل از حالت اولیه باشد. به عبارت دیگر

$$\forall i \in \mathcal{X}: \quad \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = w_j.$$

زنجیره مارکوف $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ را دارای حالت دائمی می گوییم هر گاه رابطه ی فوق برای تمام حالت ها برقرار باشد، یعنی

$$\forall i,j \in \mathcal{X}: \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = w_j$$

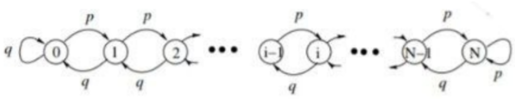
.

پرسش تئوری ۱۱. رابطه ی توزیع ایستان یک زنجیره ی مارکوف را با بردار های ویژه ی ماتریس انتقال آن زنجیر بیان کنید و با توجه به پرسش ۳ نشان دهید توزیع ایستان حتما وجود دارد.

پرسش تئوری ۱۲. نشان دهید زنجیره مارکوف دارای حالت دائمی حتما توزیع ایستان یکتا دارد ولی برعکس این موضوع درست نیست

قضیه ای وجود دارد که شرط لازم برای وجود حالت دائمی بیان می کدد و مطابق این قضیه زنجیره مارکوف با ماتریس انتقال P دارای حالت دائمی است اگر و فقط اگر N ای وجود داشته باشد که ماتریس P^N دارای یک ستون تماما ناصفر باشد.

پرسش تئوری ۱۳. یک زنجیره مارکوف با حالت های ۰ تا N و گراف انتقال حالت آن در شکل زیر نمایش داده شده است. آیا این زنجیره کاهش ناپذیر است؟ دوره تناوب آن را بیابید.



شکل ۲: نمودار حالت ماتریس انتقال

پرسش شبیه‌سازی ۳. در مثال فوق با فرض $N = 10$ توزیع ایستان زنجیره را بدست آورید و با مقداربدست آمده به صورت تئوری تطبیق دهید.

پرسش تئوری ۱۴. یک بیمارستان N پزشک دارد. اگر یک پزشک مریض شود با یک پزشک دیگر جایگزین میشود.و این پروسه یک هفته زمان می برد . اگر X(n) را تعداد پزشکان در شروع هفته n ام بنامیم و y(n) را تعداد پزشکانی که در آن هفته مریض می شوند بنامیم $P(Y(n) = y|X(n) = x)$ را بدست آورید. (فرض کنید هر پزشک مستقل از پزشک دیگر و با احتمال p مریض می شوند.) نشان دهید X(n) یک زنجیره مارکوف می باشد و ماتریس انتقال آن p_{ij} را بدست آورید. با بدست آوردن توزیع ایستان آن امید ریاضی تعداد پزشکان در حالت ایستان را محاسبه کنید.

---

۵ زمان برخورد

~~پرسش شبیه‌سازی ۴~~. یک زنجیرهٔ مارکوف، می‌تواند مقادیر $1,2,3,4,5$ را بگیرد، و فقط در صورتی حالت i می‌تواند به حالت j برود که $i<j$ باشد. احتمال تغییر حالت برای هر حالت، مساوی است. تعداد تغییر حالت‌های متوسط را پس از رسیدن به حالت شماره ۵ با استفاده از شبیه‌سازی به دست آورید. این عدد را با مقدار مورد انتظار مقایسه کنید و در گزارش خود بیاورید.

زنجیره‌ی مارکوف $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ با ماتریس انتقال $\boldsymbol{P}$ را درنظر بگیرید. یک زیرمجموعه از مجموعه‌ی حالت ها مانند A را در نظر می گیریم. زمان برخورد برای این زیرمجموعه که با H^A نشان داده می شود، یک متغیر تصادفی است و برابر است با مینیمم تعداد گام‌هایی که طول می‌کشد تا حالت دنباله، عضوی از مجموعه‌ی A شود.

$$H^A = \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}$$

در تعریف بالا، اینفیمم یک مجموعه‌ی تُهی را بی‌نهایت در نظر می‌گیریم.

اگر حالت اوّلیه‌ی زنجیره را i فرض کنیم، احتمال آن که «بالأخره» حالت مجموعه عضوی از A شود را با h_i^A نشان می‌دهیم.

$$h_i^A = \mathbb{P}[H^A < \infty | X_0 = i]$$

اگر A یک کلاس بسته باشد، h_i^A را «احتمال جذب» می‌نامیم.

هم چنین با شروع از حالت i ، امید ریاضی تعداد گام های لازم برای آن که حالت زنجیره عضو مجموعه ی A شود را زمان برخورد می نامیم و با k_i^A نشان می‌دهیم.

$$k_i^A = \mathbb{E}[H^A | X_0 = i]$$

پرسش تئوری ۱۵. ثابت کنید که برای هر زیرمجموعه‌ی A ، بردار $\boldsymbol{h}^A = \{h_1^A, \cdots, h_M^A\}$ جواب کمینهٔ دستگاه معادلات خطّی زیر است:

$$\begin{cases} h_i^A = 1 & \forall i \in A \\ h_i^A = \sum_{j\in\mathcal{X}} p_{ij} h_j^A & \forall i \notin A \end{cases} \tag{9}$$

(جواب کمینه به آن معناست که اگر دستگاه (۱) جواب یکتا نداشته باشد، جوابی را انتخاب می کنیم که مقدارش در هر $i \in \mathcal{X}$ ، کمینه باشد)

پرسش تئوری ۱۶. ثابت کنید که برای هر زیرمجموعه‌ی A ، بردار $\boldsymbol{k}^A = \{k_1^A, \cdots, k_M^A\}$ جواب کمینهٔ دستگاه معادلات خطّی زیر است:

$$\begin{cases} k_i^A = 0 & \forall i \in A \\ k_i^A = 1 + \sum_{j\in\mathcal{X}} p_{ij} k_j^A & \forall i \notin A \end{cases} \tag{10}$$

(جواب کمینه به آن معناست که اگر دستگاه (۲) جواب یکتا نداشته باشد، جوابی را انتخاب می کنیم که مقدارش در هر $i \in \mathcal{X}$ ، کمینه باشد)

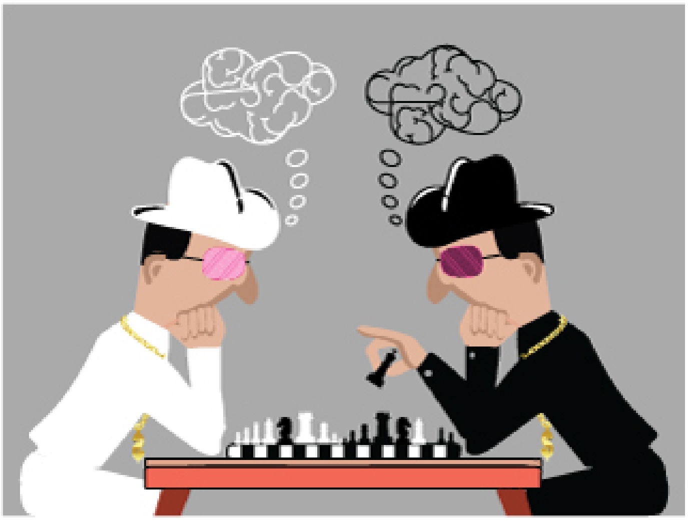
پرسش تئوری ۱۷. زنجیره‌ی مارکوف $\{X_n\}$ با ماتریس انتقال $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. $\boldsymbol{h}^{\{4\}}$ و $\boldsymbol{k}^{\{1,4\}}$ را بیابید.

پرسش تئوری ۱۸. نحوه محاسبه زمان برخورد حالت ها به یک حالت مشخص و را با استفاده از رابطه (۱۰) شرح دهید. برای زنجیره مارکوف ۳ حالته (۳) زمان برخورد بین هر دو حالت را محاسبه نمایید. سپس با فرض قرار داشتن در حالت دائمی زمان برخورد به هر یک از حالت ها را با استفاده از توزیع حالت دائمی بدست آورید.

۶ نظریه بازی

نظریه بازی چیست؟
به زبان ساده، مدلسازی و تحلیل موقعیت هایی که در آن چندین عامل هوشمند (بازیگران) با اهداف متفاوت تصمیم گیری میکنند و تصمیم هرکس بر نتیجه نهایی و موقعیت دیگران تاثیر میگذارد .
در اینجا بصورت خودخواهانه ای هر بازیکن فقط به منفعت خودش فکر میکند یعنی اینگونه نیست که بخواهد به دیگری آسیب بزند و برای این منظور برای هر بازیکن یک تابع مطلوبیت تعریف میشود که هدفش ماکسیمم کردن مقدار آن تابع است. این تابع نشان میدهد که هر عامل و موقعیت به چه شکل بر رضایت بازیکن ها تاثیر میگذارد.
حالا، سوالاتی که پیش میاید
آیا همیشه تابع مطلوبیت وجود دارد؟
آیا تابع مطلوبیت یکتاست؟
مطلوبیت در موقعیت تصادفی چگونه اندازه گیری میشود؟

پیش از شروع پروژه به منظور آشنایی شما با مفاهیم اساسی و اولیه نظریه بازی ها، برخی از کلمه های اساسی تعریف شده اند. برای مطالعه بیشتر میتوانید به رفرنس های انتهای فایل مراجعه کرده یا در گوگل جستجو کنید!



تعاریف برخی اصطلاحات پرکاربرد نظریه بازی:

تعریف ۶-۱. استراتژی(Strategy): در نظریه بازی، استراتژی به معنای طرح عمل یا روشی است که هر بازیکن برای انجام دادن انتخاب‌ها و تصمیم‌گیری‌های خود در بازی اتخاذ می‌کند. استراتژی ممکن است شامل تعیین ترتیب انتخاب‌ها و تصمیم‌گیری‌ها، پاسخ به تصمیم‌های دیگران و نحوه تعامل بازیکنان باشد. در حالت هایی که بازیکن بطور قاطع یک عمل را انتخاب نمیکند بلکه یک توزیع احتمال برای اکشن هایش دارد میگوییم استراتژی ترکیبی است.

تعریف ۶-۲. تعادل نش (NashEquilibrium) : تعادل نش یک مفهوم بسیارمهم در نظریه بازی است. در یک تعادل نش، هیچ بازیکنی انگیزه‌ای برای تغییر استراتژی خود ندارد به شرطی که سایر بازیکنان هم استراتژی خود را تغییر ندهند. به عبارت دیگر، تعادل نش به مجموعه‌ای از استراتژی‌ها اشاره دارد که در آن هیچ بازیکنی نمی‌تواند با تغییر استراتژی فردی خود بهبودی را برای خود به دست آورد.

تعریف ۶-۳. بهترین پاسخ (BestResponse) : بهترین پاسخ، انتخابی است که بازیکن انجام می دهد که با توجه به استراتژی بازیکنان دیگر، تابع مطلوبیت او را به حداکثر می رساند. اگر بیش از یک بهترین پاسخ وجود داشته باشد؛ بهترین پاسخ شما تمام انتخاب های مجموعه خواهد بود

تعریف ۶-۴. پرداخت (Payoff) : پرداخت به نتیجه‌ای اشاره دارد که هر بازیکن در نتیجه ترکیبی از تصمیم‌گیری‌های خود در یک بازی به دست می‌آورد. پرداخت معمولاً میزان سود یا ضرر مالی است.

تعریف ۶-۵. لاتری (lottery) : از آنجایی که نتیجه بازی و تابع مطلوبیت هر بازیکن به عملکرد بازیکن های دیگر نیز بستگی دارد نمیتوان بطور قطع نتیجه را پیش بینی کرد پس هر عملی با احتمالی نتیجه خوهد داشت. لاتری ها توزیع احتمالات بر نتایج هستند. بنابراین استراتژی های ترکیبی لاتری ایجاد می کنند. در حالی که تخصیص اعداد به تدریج بزرگتر به نتایج ترجیحی تر، ترتیب اولویت را حفظ می کند، اعداد خاصی که اختصاص می دهید هنگام در نظر گرفتن اولویت ها (preferences) اهمیت دارند.

تعریف ۶-۶. مطلوبیت (Utility) : در نظریه بازی، مفهوم سودمندی یا utility به معنای میزان ارزش و ترجیحات یک شخص درباره نتایج مختلف یک بازی است. سودمندی در واقع نشان می‌دهد که فرد به چه اندازه از نتایج مختلف بازی راضی است و ترجیح می‌دهد. در نظریه بازی قضیه ای هست که نشان میدهد برای بازی هایی با شرایط مناسب حتما میتوان یک تابع مطلوبیت برای هر بازیکن تعریف کرد به طوری که به ازای هر مجموعه از استراتژی ها یک عدد مناسب به رضایت شخص نسبت میدهد!

~~**پرسش تئوری ۱۹.** دوراهی حیاتی~~

برای شروع قصد داریم یک معمای مشهور را بررسی کنیم.
فرض کنید پت و مت به دلیل فشار برق و ددلاین ها یکروز با ماسک دانشکده برق را به آتش میکشند.
در این بین دانشجویانی که تمارین خود را آپلود کرده بودند برای اجحاف نشدن در حقشان این دو را لو میدهند. ولی چون دانشکده دوربین ندارد و ماسک زده بودند پلیس مدرک کافی برای زندانی کردن پت و مت ندارد!
در این شرایط پلیس اگر نتواند از انها اعتراف بگیرد فقط به مدت یک سال زندانی میشوند ولی افسر ادایی با هوش و ذکاوت خود به آنها پیشنهاد میکند اگر یکی از آنها اعتراف کرده گناه را گردن دیگری میفتد و او آزاد میشود در عوض دیگری بیست سال حبس برایش رد میشود.
اما اگر هر دو اعتراف کنند هردویشان محکوم به پنج سال حبس هستند.
استراتژی پت و مت را مشخص کنید و تعادل نش را در این بازی بیابید.
اگر شما جای پت بودید چه میکردید؟

~~**پرسش تئوری ۲۰.** پنالتی برقی~~

پوتین و زلنسکی میخواهند با هم مسابقه پنالتی بدهند و برنده صاحب شبه جزیره ریمه و دونباس بشود. پوتین پنالتی میزند و زلنسکی دروازه است. پوتین دو انتخاب شوت به سمت راست و به سمت چپ را دارد در حالی که زلنسکی دو انتخاب شیرجه به سمت چپ و راست را دارد. به عبارت دیگر داریم $S_1 = \{SR, SL\}$ و $S_2 = \{DR, DL\}$.

الف) اگر ماتریس احتمال گل شدن پنالتی را بضورت زیر نشان دهیم (سطر استراتژی پوتین و ستون استراتژی زلنسکی است)

$$A = \begin{pmatrix} 0/8 & 0/15 \\ 0/2 & 0/95 \end{pmatrix} \qquad (11)$$

حال تعادل نش را بیابید.

ب) فرض کنید این بار پوتین امکان شوت به وسط را نیز دارد یهنی یک استراتژی به مجموعه استراتژی های او اضافه شده است و داریم $S_۱ = \{SL, SM, SR\}$.
حال تعادل نش را بیابید.

$$A = \begin{pmatrix} ۰٫۸ & ۰٫۱۵ \\ ۰٫۵ & ۰٫۵ \\ ۰٫۲ & ۰٫۹۵ \end{pmatrix} \qquad (۱۲)$$

ج) در یک استراتژی ترکیبی تعادل نش که در آن پوتین با احتمال p به سمت چپ بازی می کند و زلنسکی با احتمال q سمت چپ بازی می کند p و q با تغییر X چگونه تغییر میکنند. (راهنمایی: در یک تعادل استراتژی ترکیبی، پوتین و زلنسکی هر کدام بین چپ و راست بی تفاوت هستند)

پوتین / زلنسکی	Left	Right
Left	$x, ۲$	$۰, ۰$
Right	$۰, ۰$	$۲, ۲$

پرسش تئوری ۲۱. تورنمنت سنگ_کاغذ_قیچی:

فرهاد، پارسا و غزل میخواهند با هم در یک تورنمنت سنگ کاغذ قیچی شرکت کنند و قرار بر این است که برنده توسط دو نفر دیگر در بستنی طرشت مهمان شود. مسابقه طوری است که هر دو نفر دقیقا یک بار با هم بازی میکنند و برنده کسی است که بیشترین امتیاز را کسب کند. فقط برد یک امتیاز دارد

الف) با توجه به توضیح داده شده در فوق درباره ماتریس بازی و قوانین بازی، ماتریس بازی بضورت زیر است که سطرها استراتژی اول و ستون استراتژی دوم است در هر بازی.

$$A = \begin{pmatrix} ۰ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ -۱ & ۱ & ۰ \end{pmatrix} \qquad (۱۳)$$

این ماتریس را تحلیل کنید (این ماتریس اصطلاحا ماتریس بازی Game Matrix نامیده میشود).

ب) اگر استراتژی فرهاد $\sigma_r = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}^T$ باشد یعنی بخواهد سنگ را بازی کند و استراتژی پارسا را بصورت مشابه $\sigma_c = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}^T$ و بخواهد کاغذ را بازی کند utility هر بازیکن را با داشتن σ_c و σ_r و ماتریس A تعیین کنید.

ج) حال اگر پارسا و فرهاد با یک توزیع احتمال استراتژی خود را تعیین (برای مثال بردار استراتژی این بار $\sigma_c p = \begin{pmatrix} ۰٫۲۵ & ۰٫۳۵ & ۰٫۴ \end{pmatrix}^T$ یک Mixed Strategy است) کنند، در این صورت امید utility هر بازیکن را تعیین کنید.

د) در پایان تعادل نش را برای این بازی بیابید.

~~پرسش تئوری ۲۲. سه تفنگدار~~

آلیس و باب و جعفر میخواهند دوئل هوشمند کنند بطوریکه در آن استراتژی ان ها به ترتیب با $y_۱, y_۲, y_۳$ مشخص میشود و توابع مطلوبیت با $U_۱, U_۲, U_۳$ مشخص میشود:

$$\begin{aligned} U_۱(y_۱, y_۲, y_۳) &= y_۱ + y_۱ y_۲ - y_۱^۲ \\ U_۲(y_۱, y_۲, y_۳) &= y_۲ + y_۱ y_۲ - y_۲^۲ \\ U_۳(y_۱, y_۲, y_۳) &= (۱۰ - y_۱ - y_۲ - y_۳).y_۳ \end{aligned}$$

تعادل نش را بدست آوردید (راهنمایی: تابع امتیاز آلیس و باب متقارن است)

۷ NashPy!!

در این قسمت بایستی نوت بوک که در فایل پروژه برایتان تهیه گردیده است را مطالعه کرده و سوالات آن را در همان بخش جواب بدهید.

۸ آنالیز دیتا

حال که مفاهیم نظریه بازی را آموختید، میخواهیم آنالیز داده های بورسی را با کمک نظریه بازی انجام دهیم.

~~**پرسش شبیه‌سازی ۵.**~~ در این قسمت قصد داریم که روند قیمت سهام شرکت ها را بدون در نظر گرفتن سرمایه گذاری این دو بانک تخمین بزنیم. در ابتدا برای داده های هر شرکت با روش کمترین مربعات (که در فاز ۳ آن را فراگرفتید) یک خط برازش کنید و مقادیر پارامتر های خط مربوط به داده های هر شرکت را گزارش کنید.

~~**پرسش شبیه‌سازی ۶.**~~ در قسمت قبل شما برای داده های هر شرکت یک منحنی درجه یک برازش کردید. حال اختلاف مقدار های واقعی و تخمین زده شده توسط منحنی درجه یک را بدست آورید. اگر این اختلاف ها از یک توزیع گاوسی با میانگین صفر پیروی کنند، واریانس این توزیع ها را برای داده های هر شرکت بدست بیاورید.
نکته : این کار را به کمک رسم نمودار هیستوگرام اختلاف ها و نمودار هیستوگرام حاصل از نمونه برداری از توزیع نرمال با واریانس دلخواه و مقایسه دو نمودار انجام دهید. سعی کنید با آزمون و خطا مقدار واریانس را طوری بدست آورید که دو نمودار شبیه یکدیگر باشند.

~~**پرسش تئوری ۲۳.**~~ توزیع u_i را برای شرکت i ام به صورت $u_i = \mathcal{N}(m_i(۱ + \frac{Y}{H_i}), \sigma_i^۲)$ تعریف میکنیم که در آن m_i شیب بدست آمده از برازش منحنی درجه یک و $\sigma_i^۲$ همان واریانس قسمت قبل و Y همان میزان سرمایه گذاری جدید و $H_i = ۲٫۱(۷ - i)$ می باشد. با این توصیفات توزیع u_i را برای هر شرکت بدست آورید. دقت کنید که توزیع های بدست آمده باید پارامتری باشند زیرا مقدار Y نا مشخص است.

~~**پرسش تئوری ۲۴.**~~ در این قسمت میخواهیم به کمک نظریه بازی ها ، نقطه تعادل (تعادل نش) حاصل از سرمایه گذاری این دو بانک روی بورس را بیابیم . همان طور که گفتیم دولت برای سرمایه گذاری هر بانک روی هر شرکت محدودیت گذاشته است. محدویت سرمایه گذاری بانک های آرتا و سورنا روی شرکت i ام به میزان a_i و b_i است.
رابطه محدودیت سرمایه گذاری هر بانک روی هر شرکت در زیر آمده است

$a_i = ۷ - i$.

$b_i = \sqrt{۴۹ - i^۲}$

حال فرض کنید که قیمت روز های آینده سهام شرکت ها را با استفاده از توزیع های بدست آمده تخمین زده ایم(در واقع نمودار قیمت آینده هر سهم را به صورت یک خط با شیب امید ریاضی توزیع ها مدل کرده ایم) .اکنون با توجه به لیست محدودیت های سرمایه گذاری، ماتریس utility سود حاصل از سرمایه گذاری یک روزه بانک ها روی شرکت ها رابدست آورید.
در اینجا برای سادگی، اعداد نهایی بدست آمده را cast کرده و به فرم int نمایش دهید.

~~**پرسش شبیه‌سازی ۷.**~~ با استفاده از کتابخانه nashpy بازی فرم نرمال را حل کرده و نقاط تعادل نش آن را بیابید. باز همان جدول cast شده را به عنوان جدول بازی در نظر بگیرید.

پرسش شبیه‌سازی ۸. در این بخش میخواهیم به جای استفاده از امید ریاضی به عنوان شیب خط، از توزیع های u_i یک مرتبه نمونه تصادفی بگیریم و از آن به عنوان شیب خط قیمت آینده سهام استفاده کنیم. مانند قسمت قبل، ماتریس بازی را تشکیل داده و نقطه تعادل بازی را با استفاده از کتاب خانه nashpy بیابید.
نکته : برای تولید اعداد تصادفی از کتاب خانه numpy استفاده کنید و همچنین مقدار seed را برابر شماره دانشجویی یکی از اعضای گروه قرار دهید.