



گزارش پروژه درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها

دکتر بهروزی

سیده تینا حلیمی 400101078

کیمیا رمضان 400101283

مهدی زینتی 400101323

## بخش ۱: بردار هادی

steering vector که به عنوان spatial signature یا array manifold نیز شناخته می شود، یک نمایش ریاضی است که در پردازش سیگنال و پردازش آرایه، به ویژه در زمینه سیستم های آنتن آرایه ای استفاده می شود. معمولاً در کاربردهایی مانند شکل دهی پرتو، تخمین جهت رسیدن (DOA) و فیلتر فضایی استفاده می شود.

در زمینه آنتن های آرایه ای، یک بردار هادی، رابطه فضایی بین عناصر مختلف آنتن در یک آرایه و جهت رسیدن سیگنال ورودی را توصیف می کند. این کمک می کند تا مشخص شود که چگونه سیگنال ها از جهات مختلف در هر عنصر آنتن دریافت می شود. بردار هادی معمولاً یک بردار با درایه های مختلط است که اختلاف فاز و دامنه را بین آنتن ها ثبت می کند.

در حوزه پردازش سیگنال، با استفاده از بردار هادی می توان ارتباط زیرفضای سیگنال و نویز را بررسی کرد. برای مثال، در پردازش سیگنال های صوتی یا تصویری فرض کنید که سیگنال مورد نظر شامل سیگنال اصلی و نویز است. با استفاده از بردار هادی می توان فاز و جهت سیگنال اصلی را تشخیص داد و نویز را از آن تفکیک کرد.

steering vector تابعی از DOA و هندسه آرایه است و در پردازش سیگنال آرایه، برای تخمین DOA یک سیگنال استفاده می شود.

steering vector معمولاً به عنوان یک ماتریس نشان داده می شود که در آن تعداد ردیف ها با تعداد موقعیت های عنصر در آرایه سنسور (آنتن ها) و تعداد ستون ها با تعداد امواج ورودی مطابقت دارد.

از نظر ریاضی، بیاید یک آرایه خطی از  $N$  آنتن را در نظر بگیریم، که در آن هر آنتن با  $i = 1, 2, \dots, N$  نمایه می شود.  $a(\theta)$ ، به صورت زیر تعریف می شود:

$$a(\theta) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\pi \sin(\theta_1)} \\ e^{j2\pi \sin(\theta_1)} \\ \vdots \\ e^{j(N-1)\pi \sin(\theta_1)} \end{bmatrix}$$

جایی که:

$a(\theta)$  بردار هادی جهت ورود  $\theta$  است،

$e^{j2\pi/\lambda d \sin(\theta)}$  نشان دهنده اختلاف فاز بین عناصر آنتن متوالی در جهت معین  $\theta$  است.

$\lambda$  طول موج سیگنال ورودی است،

$d$  فاصله بین عناصر آنتن مجاور است.

بردار هادی به مهندسان و محققین اجازه می دهد تا الگوریتم های پردازش آرایه را برای کاربردهای مختلف طراحی و بهینه سازی کنند، مانند به حداکثر رساندن توان سیگنال دریافتی در یک جهت خاص (تشکیل پرتو) یا تخمین جهت رسیدن سیگنال های متعدد (تخمین DOA). با دستکاری بردار فرمان، می توان پاسخ آرایه به سیگنال های دریافتی را کنترل کرد و به خواص فیلتر فضایی مطلوب دست یافت.

در زیر محاسبات مربوط به به دست آوردن بردار هادی (در روش MUSIC) که در توتریال درس انجام شد، آمده است: (این محاسبات با فرض narrow band بودن سیگنال و به ازای یک سورس و تعداد N گیرنده انجام شده است).

$$\begin{aligned}
 S(t) &= \begin{bmatrix} s(t) \\ s(t-t_0) \\ s(t-2t_0) \\ \vdots \\ s(t-(N-1)t_0) \end{bmatrix} \xrightarrow{F} S(j\omega) = s(j\omega) \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\omega t_0} \\ e^{j2\omega t_0} \\ \vdots \\ e^{j(N-1)\omega t_0} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{narrow band}} s(j\omega) \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\omega_c t_0} \\ e^{j2\omega_c t_0} \\ \vdots \\ e^{j(N-1)\omega_c t_0} \end{bmatrix} \\
 &= s(j\omega) \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\omega_c \frac{d \sin(\theta_1)}{c}} \\ e^{j2\omega_c \frac{d \sin(\theta_1)}{c}} \\ \vdots \\ e^{j(N-1)\omega_c \frac{d \sin(\theta_1)}{c}} \end{bmatrix} \xrightarrow{\omega_c/c = 2\pi/\lambda} s(j\omega) \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j2\pi \frac{d \sin(\theta_1)}{\lambda}} \\ e^{j4\pi \frac{d \sin(\theta_1)}{\lambda}} \\ \vdots \\ e^{j2(N-1)\pi \frac{d \sin(\theta_1)}{\lambda}} \end{bmatrix} \xrightarrow{d=\frac{\lambda}{2}} s(j\omega) \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\pi \sin(\theta_1)} \\ e^{j2\pi \sin(\theta_1)} \\ \vdots \\ e^{j(N-1)\pi \sin(\theta_1)} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

که ماتریس  $\begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\pi \sin(\theta_1)} \\ e^{j2\pi \sin(\theta_1)} \\ \vdots \\ e^{j(N-1)\pi \sin(\theta_1)} \end{bmatrix}$ ، همان بردار هادی برای یک فرستنده رادیویی می‌باشد. اگر بیش از یک فرستنده داشته باشیم، بردار هادی به صورت یک ماتریس در می‌آید.

در الگوریتم ESPRIT با حذف ردیف اول و آخر بردار هادی، دو بردار  $S_0$  و  $S_1$  تعریف میشود که با رابطه  $S_1 = S_0 \Phi$  به هم مرتبط میشوند و در این الگوریتم در تلاشیم  $\Phi$  را تخمین بزنیم تا زوایا را تخمین بزنیم.

## بخش ۲: تخمین‌های LS و TLS

تخمین‌های LS و TLS دو روش برای تخمین مدل ریاضی در پردازش سیگنال هستند که هدفشان ارائه تخمینی از یک منحنی است که از دیتا‌های داده شده عبور کند.

تفاوت اصلی بین این دو نحوه برخورد آنها با ارور ها و عدم قطعیت ها در دیتا است. در روش LS فرض میشود که خطا ها تنها روی متغیر مستقل (خروجی) اثر گذارند در حالی که متغیر های وابسته (ورودی) بدون خطا فرض میشوند.

از طرفی دیگر الگوریتم TLS هر دو متغیر مستقل و وابسته را دارای ارور در نظر می‌گیرد.

در روش LS الگوریتم تلاش میکند تا مجموع مربعات فواصل عرضی بین نقاط داده ها را مینیمم کند. این روش عمدتاً وقتی استفاده میشود که از صحت داده های مستقل مطمئن باشیم.

در تخمین TLS الگوریتم می‌کوشد تا مجموع مربعات فواصل متعامد را را مینیمم کند که این الگوریتم برای مواقعی که در هر دو نوع متغیر مستقل و وابسته عدم قطعیت هست مناسب تر میباشد.

برای روش ESPRIT عمدتاً از الگوریتم TLS استفاده میشود که به علت این است که الگوریتم ESPRIT طراحی شده است تا پارامترها را در حضور نویز تخمین بزند که با این اوصاف خروجی این الگوریتم دقیق تر خواهد بود.

اما از سویی دیگر پیاده سازی الگوریتم TLS نیازمند ابزار هایی مانند تجزیه مقادیر منفرد (SVD) دارد که از پیچیدگی بیشتری برخوردار است به همین دلیل الگوریتم LS را مورد استفاده قرار دادیم چون در حضور تنها دو منبع رادیویی ارور قابل توجهی رخ نمی‌دهد. روابط ریاضی این دو الگوریتم در حالت خطی در زیر آمده اند:

فرض کنیم نقاط  $(x_i, y_i)$  به ازای  $i = 1, 2, \dots, n$  داده شده باشند الگوریتم TLS سعی میکند زوج مرتب  $(a, b)$  را به گونه ای بیاید که مجموع مربعات فواصل عمودی بین نقاط داده شده  $(d_i)$  و خط مفروض  $(y = ax + b)$  مینیمم شود  $(\sum d_i^2)$ .

$$d_i = \frac{|y_i - ax_i - b|}{\sqrt{a^2 + 1}} \text{ فاصله عمودی از رابطه روبرو قابل محاسبه است.}$$

تخمین TLS به صحت داده ها اطمینان دارد و تنها خروجی را چک میکند پس این مدل زوج مرتب  $(a, b)$  را به صورت  $y = (a + \Delta a)x + (b + \Delta b)$  شبیه سازی میکند که  $\Delta a$  و  $\Delta b$  نمایانگر ارور در متغیر های خروجی اند.

### بخش ۳: الگوریتم ESPRIT

توضیح کلی روش ESPRIT و روابط موجود در آن :  
این روش مانند سایر روشها برای DOA Estimation به کار می رود که در بردار هادی یا همان steering vector هر المان دارای یک تاخیر فاز یا شیفتی نسبت به المان قبلی است.  
بردار هادی یا steering vector به شکل زیر می باشد:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-1} & \dots & z_M^{N-1} \end{bmatrix}$$

که در آن  $z_M = e^{jkd \sin(\phi_m)}$  و  $S$  یک ماتریس  $N \times M$  می باشد. دو ماتریس  $S_0$  و  $S_1$  به صورت زیر تعریف میشوند که دو ماتریس  $(N-1) \times M$  می باشند.

$$S_0 = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-1} & \dots & z_M^{N-1} \end{bmatrix}$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-1} & \dots & z_M^{N-1} \end{bmatrix}$$

و رابطه بین این دو ماتریس اینگونه است:  $S_1 = S_0 \Phi$  ،  $\Phi$  یک ماتریس  $M \times M$  است.

$$\Phi = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & z_M \end{bmatrix}$$

$Q_s$  ماتریس بردارهای ویژه سیگنال می باشد و داریم :  $Q_s = SC$  که یک ماتریس  $N \times M$  است.  
همچنین داریم :  $Q_0 = S_0 C$  و  $Q_1 = S_1 C$

$$Q_1 C^{-1} \Phi^{-1} C = S_0 \Phi C C^{-1} \Phi^{-1} C = S_0 C = Q_0$$

$$\Psi^{-1} = C^{-1} \Phi^{-1} C$$

$$Q_1 \Psi^{-1} = Q_0$$

$$Q_1 = Q_0 \Psi$$

$$\Psi = C^{-1} \Phi C$$

پس به طور کلی در این روش گام های زیر را باید طی کنیم :

(۱) ماتریس همبستگی یا همان  $R$  را تخمین می زنیم با استفاده از فرمول زیر و با تجزیه آن داریم:

$$R = Q \Lambda Q^H = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} x_k x_k^H$$

(۲) با استفاده از  $Q$ ،  $Q_s$  را بدست می آوریم .

(۳) از تخمین LS برای حل معادله ۷۱ استفاده می کنیم تا ماتریس  $\Psi$  که ماتریسی  $M \times M$  است را تخمین بزنیم.

(۴) مقادیر ویژه ماتریس  $\Psi$  را پیدا می کنیم و از عناصر روی قطر اصلی آن به عنوان تخمینی برای  $Z$  ها استفاده می کنیم.

(۵) در آخر با استفاده از فرمول زیر جهت یا زاویه سیگنال های دریافتی را تخمین می زنیم.

$$\phi_m = \cos^{-1} \left[ \frac{\Im \ln(z_m)}{kd} \right], \quad m = 1, \dots, M$$

توضیحات بیشتر مطالب:

۱. تخمین ماتریس همبستگی ( $R$ ):

مرحله اول محاسبه ماتریس همبستگی،  $R$ ، داده های دریافتی است. ماتریس همبستگی با استفاده از داده های سیگنال دریافتی تخمین زده می شود و همبستگی فضایی بین عناصر آنتن را نشان می دهد. از نظر ریاضی،  $R$  به صورت زیر داده می شود:

$$R = Y'Y$$

همانطور که در پاسخ های قبلی توضیح داده شد،  $Y$  ماتریس داده های تقویت شده است، و  $Y'$  هرمیشین آن است.

۲. تجزیه ویژه  $R$ :

مرحله بعدی انجام تجزیه ویژه بر روی ماتریس همبستگی  $R$  است. تجزیه ویژه ماتریس را به مقادیر ویژه آن ( $\lambda$ ) و بردارهای ویژه مربوطه ( $Q$ ) تجزیه می کند. از نظر ریاضی:

$$R = Q \Lambda Q'$$

جایی که  $\Lambda$  یک ماتریس مورب حاوی مقادیر ویژه  $R$  است و  $Q$  ماتریسی است که ستون های آن بردارهای ویژه  $R$  هستند.

۳. پارتیشن  $Q$  برای به دست آوردن  $Q_s$ :

از ماتریس بردار ویژه  $Q$ ، ستون های مربوط به  $M$  بزرگترین مقادیر ویژه را انتخاب می کنیم. این ماتریس به عنوان  $Q_s$  نشان داده می شود و زیر فضای سیگنال را در بر می گیرد.

۴. حل برای  $\Psi$ :

با استفاده از روش حداقل مربعات، ماتریس  $M \times M$   $\Psi$  را حل می کنیم، که بردارهای فرمان را به بردارهای ویژه سیگنال مرتبط می کند. رابطه با معادله به دست می آید:

$$Q_1 = Q_0 \Psi$$

۵. مقادیر ویژه  $\Psi$  را پیدا کنید:

در مرحله بعد، مقادیر ویژه ماتریس  $\Psi$  را پیدا می کنیم. این مقادیر ویژه اطلاعات بزرگی مرتبط با هر DOA را در اختیار ما قرار می دهند که نشان دهنده قدرت یا دامنه سیگنال هایی است که از جهات مختلف می رسند.

۶. DOA ها را برآورد کنید:

عناصر مورب ماتریس  $\Psi$  مطابق با تخمین فازهای سیگنال است که با  $z_m$  نشان داده شده است. با استفاده از این تخمین ها، می توانیم DOA منابع را با استفاده از معادله محاسبه کنیم:

$$DOA = \arcsin (p(z_m) / (2\pi/\lambda d))$$

که در آن  $Im(z_m)$  قسمت موهومی  $z_m$  تخمینی است،  $d$  فاصله بین عناصر آنتن و  $\lambda$  طول موج سیگنال ورودی است.

با دنبال کردن این مراحل، ESPRIT تخمین DOA دقیق و کارآمد را برای چندین منبع ارائه می کند و آن را به یک انتخاب محبوب در برنامه های مختلف پردازش آرایه تبدیل می کند.

## بخش ۴: روش‌های جهت‌یابی active و passive

روش‌های جهت‌یابی active و passive روشی هستند که برای تعیین موقعیت و حرکت وسیله نقلیه یا جسم در فضا استفاده می‌شوند.

جهت‌یابی passive به فرآیند استفاده از سیگنال‌های خارجی مانند سیگنال‌های رادیویی یا سیگنال‌های نوری برای تعیین موقعیت و حرکت وسیله نقلیه یا شیء اطلاق می‌شود. سیستم‌های جهت‌یابی passive خود هیچ سیگنالی را منتشر نمی‌کنند و به دریافت سیگنال از منابع خارجی متکی هستند و منتظر دریافت سیگنالی از هدف میمانند. نمونه‌هایی از سیستم‌های ناوبری غیرفعال شامل سیستم‌های GPS است.

جهت‌یابی active شامل انتقال سیگنال از وسیله نقلیه یا شیء مورد هدایت است که سپس برای تعیین موقعیت و حرکت استفاده می‌شود. سیستم‌های جهت‌یابی active می‌توانند از سیگنال‌هایی استفاده کنند که از اجسام دیگر (مانند رادار) منعکس می‌شوند یعنی در کنار آرایه‌ی گیرنده‌ها از رادار یا از چراغ‌هایی که در محیط قرار می‌گیرند نیز استفاده می‌کنند (مانند چراغ‌های سونار در ناوبری زیر آب).

تفاوت بین روش‌های جهت‌یابی active و passive در این است که جهت‌یابی passive به سیگنال‌های خارجی متکی است، در حالی که جهت‌یابی active سیگنال‌های خود را تولید می‌کند. جهت‌یابی passive به طور کلی دقیق‌تر و قابل اطمینان‌تر است، زیرا تحت تأثیر تداخل یا تخریب سیگنال ناشی از ارسال سیگنال قرار نمی‌گیرد.

به طور کلی، جهت‌یابی passive دقیق‌تر از جهت‌یابی active در نظر گرفته می‌شود. این به این دلیل است که سیستم‌های جهت‌یابی passive به سیگنال‌های خارجی متکی هستند که توسط منابع شناخته شده و کالیبره شده مانند ماهواره‌های GPS منتقل می‌شوند. این سیگنال‌ها را می‌توان به طور دقیق اندازه‌گیری و تجزیه و تحلیل کرد. از سوی دیگر، جهت‌یابی active شامل انتقال سیگنال از وسیله نقلیه یا شیء مورد هدایت است که می‌تواند در معرض خطا و نادرستی باشد. به عنوان مثال، سیگنال ممکن است تحت تأثیر بازتاب، تداخل یا تضعیف در هنگام حرکت در محیط قرار گیرد. علاوه بر این، دقت سیستم‌های جهت‌یابی active ممکن است تحت تأثیر کیفیت سنسورهای مورد استفاده برای اندازه‌گیری سیگنال‌ها قرار گیرد.

الگوریتم ESPRIT تکنیکی است که در پردازش سیگنال برای تخمین پارامترهای یک سیگنال مانند فرکانس و فاز آن استفاده می‌شود. الگوریتم ESPRIT معمولاً در سیستم‌های جهت‌یابی passive مانند GPS برای تخمین موقعیت و حرکت خودرو بر اساس سیگنال‌های دریافتی از منابع خارجی استفاده می‌شود.



## بخش ۵: پهنای باند سیگنال

الگوریتم ESPRIT برای کار با سیگنال های باند باریک طراحی شده است. سیگنال های باند باریک پهنای باند نسبتاً کمی در مقایسه با فرکانس حامل دارند. پهنای باند مورد نیاز خاص برای استفاده از ESPRIT به جزئیات اجرای الگوریتم و سطح دقت مطلوب بستگی دارد.

چند دلیل وجود دارد که چرا ESPRIT معمولاً با سیگنال های باند باریک استفاده می شود:

۱. فرض سیگنال های باند باریک: ESPRIT فرض می کند که سیگنال های مورد نظر باریک هستند. این فرض برای ساده سازی فرمول بندی ریاضی الگوریتم لازم است و مفروضات خاصی را در مورد مدل سیگنال ایجاد می کند. در مراحل الگوریتم برای محاسبه بردار هادی همانطور که در بخش ۱ توضیح داده شد با فرض باند باریک بودن سیگنال به جای  $\omega_c$ ،  $\omega$  قرار داده ایم.

۲. پردازش سیگنال مبتنی بر فضای فرعی: ESPRIT برای تخمین DOA به تکنیک های پردازش سیگنال مبتنی بر فضای زیرین، مانند تجزیه مقادیر ویژه، متکی است. این تکنیک ها زمانی مؤثر هستند که سیگنال ها باند باریک باشند و ساختار طیفی کاملاً مشخصی داشته باشند.

۳. وضوح و دقت: وضوح الگوریتم های تخمین DOA تحت تأثیر پهنای باند سیگنال قرار دارد. سیگنال های باند باریک وضوح بهتری را در تخمین DOA منابع نزدیک ارائه می دهند. استفاده از سیگنال های باند باریک به جلوگیری از ابهامات کمک می کند و توانایی الگوریتم را برای تمایز بین منابع با فاصله نزدیک بهبود می بخشد.

توجه به این نکته مهم است که پهنای باند مورد نیاز دقیق برای ESPRIT می تواند بسته به پیاده سازی خاص و زمینه برنامه متفاوت باشد. با این حال، به عنوان یک دستورالعمل کلی، ESPRIT معمولاً برای سیگنال هایی استفاده می شود که پهنای باند آن در مقایسه با فرکانس حامل کوچک است.

اگر با سیگنال های باند پهن کار می کنید، سایر الگوریتم های تخمین DOA، مانند الگوریتم طبقه بندی سیگنال چندگانه (MUSIC) یا الگوریتم Root-MUSIC، ممکن است مناسب تر باشند، زیرا به طور خاص برای کنترل سیگنال های باند پهن طراحی شده اند.

## بخش ۶: coherent signals

الگوریتم ESPRIT و انواع آن به طور گسترده در طرح های پیش پردازش استفاده می شود که عملکرد بالایی از الگوریتم های تخمین پارامتر با وضوح بالا را برای سیگنال های منسجم ارائه می دهد. با این حال، در حضور تفاوت های فاز مشخص بین سیگنال های منسجم و زوایای سیگنال، این روش دچار تخریب جدی عملکرد و حتی شکست می شود. دارای فرکانس و فاز یکسان بودن سیگنال های ورودی باعث می شود که ماتریس کوواریانس سیگنال های ورودی از حالت full-rank خارج شده و دیگر مثبت معین نباشد و برخی از مقدار ویژه های آن صفر می شود. برای اصلاح این موضوع، می توان ماتریس کوواریانس را به صورت مجموعی از ماتریس هایی با رنک ۱ نوشت و تخمین DOA را به کمک مقادیر ویژه این ماتریس ها انجام داد. از این روش بعضاً با نام **Matrix Pencil** نیز یاد می شود. همچنین چندین نسخه اصلاح شده از الگوریتم ESPRIT وجود دارد که برای تخمین DOA سیگنال های منسجم پیشنهاد شده است. هدف این نسخه های اصلاح شده بهبود دقت و عملکرد الگوریتم در حضور سیگنال های منسجم است. در اینجا چند نمونه از نسخه های اصلاح شده الگوریتم ESPRIT آورده شده است:

الگوریتم بهبود یافته شبیه ESPRIT (Improved ESPRIT-like algorithm): این الگوریتم اصلاح شده مبتنی بر میانگین گیری رو به جلو و عقب است و نشان داده شده است که عملکرد تخمین DOA بهتری نسبت به الگوریتم استاندارد ESPRIT ارائه می دهد.

الگوریتم اصلاح شده UCA-ESPRIT: این الگوریتم برای تخمین DOA سیگنال های منسجم با استفاده از یک عکس فوری طراحی شده است. الگوریتم مبتنی بر هموارسازی فضایی و روش ماتریس DOA است و نشان داده شده است که در تخمین DOA سیگنال های منسجم موثر است.

الگوریتم ESPRIT اصلاح شده بر اساس روش SVD جدید: این الگوریتم مبتنی بر روش جدید تجزیه ارزش تکی (SVD) است و نشان داده شده است که عملکرد تخمین DOA بهتری نسبت به الگوریتم استاندارد ESPRIT ارائه می دهد.

الگوریتم ESPRIT مبتنی بر جبر هندسی: این الگوریتم بر اساس جبر هندسی (GA) است و برای تخمین دو بعدی DOA استفاده می شود. الگوریتم سازگاری چند بعدی GA را در ESPRIT ترکیب می کند و نشان داده شده است که تخمین  $2D - DOA$  دقیقی را ارائه می دهد.

تکنیک هموارسازی فضایی پیشرفته با الگوریتم ESPRIT: این الگوریتم مبتنی بر تکنیک هموارسازی فضایی پیشرفته (ESS) است که هم از ماتریس های کوواریانس زیرآرایه ها و هم از ماتریس کوواریانس متقاطع بین زیرآرایه ها استفاده می کند. نشان داده شده است که این الگوریتم تخمین DOA دقیق را در سناریوهای منسجم ارائه می دهد.

الگوریتم بهبود یافته TLS-ESPRIT: این الگوریتم بر اساس حداقل مجذورات مجموع (TLS) و الگوریتم های ESPRIT است و نشان داده شده است که از الگوریتم TLS-ESPRIT در برآورد DOA دقیق تر است.

هدف این نسخه های اصلاح شده الگوریتم ESPRIT بهبود دقت و عملکرد الگوریتم در حضور سیگنال های منسجم است. نشان داده شده است که آنها عملکرد تخمین DOA بهتری نسبت به الگوریتم استاندارد ESPRIT در سناریوهای مختلف ارائه می دهند.

## بخش ۷: تعداد سورها

حداکثر تعداد سوری که می توان با روش ESPRIT جهت یابی کرد به تعداد درجات آزادی (DOF) که می توان تخمین زد مربوط می شود و هر دو کمیت به تعداد آرایه آنتن ها بستگی دارد.

در روش ESPRIT درجه آزادی (DOF)، تعداد جهات مستقلی است که منابع می توانند در آنها قرار گیرند. DOF مربوط به تعداد معادلات موجود برای تخمین DOA های سورها است که با تعداد زیرآرایه هایی که می توان از آرایه آنتن های گیرنده که دارای  $N$  عنصر است، تعیین می شود.

در روش ESPRIT، ماتریس کوواریانس به دو بخش زیرفضای سیگنال و زیرفضای نویز تجزیه می شود. فضای فرعی سیگنال توسط بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه سیگنال گسترش می یابد، در حالی که فضای فرعی نویز توسط بردارهای ویژه مربوط به مقادیر ویژه نویز گسترش می یابد.

برای تخمین DOA های سورها، روش ESPRIT زیرآرایه های  $N - 1$  را می سازد که هر کدام از دو آنتن مجاور تشکیل شده است. هر زیرآرایه دو معادله برای تخمین DOA منابع ارائه می دهد. بنابراین، ۲

( $N - 1$ ) معادله برای تخمین DOA منابع موجود است.

با این حال، زیرفضای سیگنال فقط دارای ابعاد  $N - 1$  است، زیرا همیشه یک مقدار ویژه وجود دارد که با زیرفضای نویز مطابقت دارد. بنابراین، حداکثر تعداد جهات مستقلی که منابع می توانند در آنها قرار گیرند برابر با تعداد ابعاد در زیرفضای سیگنال است که  $N - 1$  است. بنابراین با توجه به تجزیه ی ماتریس کوواریانس به بردارهای ویژه اش، DOF در روش ESPRIT برابر با  $N - 1$  است.

بنابراین با توجه به تعداد آنتن هایی که داریم، تعداد درجه ی آزادی ما  $N - 1$  میشود.

یعنی حداکثر تعداد سورها هایی که میتوانیم شناسایی کنیم برابر  $N - 1$  است و اگر تعداد سورها بیشتر از  $N - 1$  شود، برخی از سورها را نمی توان با استفاده از روش ESPRIT جهت یابی کرد. این محدودیت در تعداد منابعی که می توان با روش ESPRIT جهت گیری کرد، به این دلیل است که تعداد معادلات موجود برای تخمین DOA منابع به  $2(N - 1)$  محدود می شود، در حالی که تعداد مجهول ها (یعنی، تعداد DOA های مستقل) به  $N - 1$  محدود شده است. در نتیجه، روش ESPRIT فقط می تواند DOA های تعدادی از منابع را که کمتر یا مساوی  $N - 1$  هستند، تخمین بزند.

لازم به ذکر است که این حداکثر نظری تعداد منابع ممکن است در عمل به دلیل عواملی مانند نویز، تداخل و دقت آرایه آنتن گیرنده قابل دستیابی نباشد. بنابراین، تعداد واقعی منابعی که می توان با روش ESPRIT جهت گیری کرد، ممکن است کمتر از حداکثر نظری باشد.

## بخش ۸: آرایش المان‌ها

الگوریتم ESPRIT (تخمین پارامترهای سیگنال از طریق تکنیک‌های تغییر ناپذیر چرخشی) یک تکنیک پردازش سیگنال است که برای تخمین پارامترهای سیگنال‌های سینوسی تعبیه شده در نویز استفاده می‌شود. معمولاً در پردازش آرایه و برآورد جهت رسیدن (DOA) استفاده می‌شود. در زمینه ESPRIT، هندسه عناصر به آرایش فیزیکی حسگرها یا آنتن‌ها در یک آرایه اشاره دارد. هندسه نقش مهمی در تخمین دقیق DOA سیگنال‌ها دارد.

الگوریتم ESPRIT از ساختار خاصی به نام آرایه مجازی استفاده می‌کند که از تقسیم آرایه فیزیکی به دو زیرآرایه تشکیل می‌شود. زیرآرایه‌ها معمولاً به موازات یکدیگر قرار می‌گیرند و یک جدایی فضایی مشخص بین آنها وجود دارد. هندسه عناصر باید شرایط خاصی را برای اطمینان از برآورد دقیق DOA با استفاده از ESPRIT برآورده کند:

۱. آرایه خطی یکنواخت (ULA): آرایه فیزیکی باید یک آرایه خطی یکنواخت باشد، به این معنی که عناصر به طور مساوی در امتداد یک خط مستقیم قرار دارند. این امر مدلسازی و تحلیل ریاضی آرایه را ساده می‌کند.
  ۲. فاصله نیم طول موج: فاصله بین عناصر مجاور در ULA باید تقریباً نصف طول موج سیگنال مورد نظر باشد. این فاصله امکان نمونه‌گیری موثر سیگنال را فراهم می‌کند و اثرات همسان سازی فضایی را کاهش می‌دهد.
  ۳. دو زیرآرایه موازی: ULA باید به دو زیرآرایه موازی با اندازه مساوی تقسیم شود. جدایی بین زیرآرایه‌ها باید مشخص و ثابت باشد. این تقسیم‌بندی، تخمین DOA را با بهره‌برداری از ویژگی تغییرناپذیری چرخشی زیرفضای سیگنال امکان‌پذیر می‌سازد.
- با ارضای این الزامات هندسی، الگوریتم ESPRIT می‌تواند DOA سیگنال‌ها را با بهره‌برداری از ساختار زیرآرایه و ویژگی تغییرناپذیری چرخشی به‌طور دقیق تخمین بزند. ساختار آرایه مجازی ایجاد شده توسط زیرآرایه‌ها به جداسازی زیرفضای سیگنال از زیرفضای نویز کمک می‌کند و منجر به تخمین DOA قوی می‌شود. توجه به این نکته مهم است که الزامات هندسی خاص ممکن است بسته به اجرا و ویژگی‌های سیگنال و آرایه متفاوت باشد.
- با توجه به توضیحات بالا، نمیتوان از الگوریتم ESPRIT برای آرایش دایروی استفاده کرد. آرایه‌های دایره‌ای هندسه متفاوتی نسبت به ULA دارند، زیرا عناصر به جای یک خط مستقیم در امتداد یک مسیر دایره‌ای قرار می‌گیرند. فاصله بین عناصر در یک آرایه دایره‌ای ثابت نیست، که آن را با مفروضات ساخته شده توسط الگوریتم ESPRIT ناسازگار می‌کند.
- با این حال، الگوریتم‌های دیگری در دسترس هستند که به طور خاص برای آرایه‌های دایره‌ای طراحی شده‌اند، مانند الگوریتم طبقه بندی سیگنال‌های چندگانه (MUSIC). الگوریتم MUSIC می‌تواند آرایه‌های غیریکنواخت از جمله آرایه‌های دایره‌ای را مدیریت کند و DOA را با دقت بالایی تخمین بزند.

## بخش ۹:

### مزایای الگوریتم ESPRIT:

وضوح بالا: ESPRIT به دلیل قابلیت‌های وضوح بالا شناخته شده است، به این معنی که می‌تواند DOA سیگنال‌های نزدیک به هم را تخمین بزند. این به ویژه در سناریوهایی که چندین منبع در نزدیکی قرار دارند مفید است.

عملکرد در حضور نویز: ESPRIT در حضور نویز عملکرد خوبی دارد، به خصوص زمانی که سطح نویز متوسط تا کم باشد. این می‌تواند به طور موثر اجزای سیگنال را از نویز تشخیص دهد که منجر به تخمین فرکانس قوی می‌شود.

مقیاس پذیری: این الگوریتم مقیاس پذیر است و می‌تواند برای تخمین DOA سیگنال‌ها در طیف گسترده‌ای از کاربردها از جمله سیستم‌های رادار، سیستم‌های سونار و سیستم‌های ارتباطی بی سیم استفاده شود.

کارایی محاسباتی: ESPRIT در مقایسه با سایر الگوریتم‌های با وضوح بالا مانند MUSIC (طبقه‌بندی سیگنال چندگانه) یا root-MUSIC، ز نظر محاسباتی کارآمدتر است. به محاسبات کمتری نیاز دارد و برای برنامه‌های بلادرنگ یا با محدودیت منابع مناسب است. از تجزیه مقدار ویژه استفاده می‌کند که امکان تخمین کارآمد را بدون پیچیدگی محاسباتی بیش از حد فراهم می‌کند.

بهره برداری از ساختار زیرآرایه: ESPRIT از ساختار زیرآرایه یک آرایه خطی یکنواخت (ULA) بهره می‌برد. با تقسیم ULA به دو زیرآرایه موازی با جدایی مشخص و ثابت، ESPRIT می‌تواند DOA را با دقت بهبود یافته تخمین بزند.

### معایب الگوریتم ESPRIT:

هندسه آرایه: الگوریتم به یک آرایه خطی یکنواخت (ULA) یا یک هندسه آرایه مسطح برای تخمین دقیق DOA نیاز دارد. عملکرد الگوریتم ممکن است تحت تأثیر هندسه آرایه قرار گیرد.

محدود به سیگنال‌های باند باریک: ESPRIT سیگنال‌های باند باریک را فرض می‌کند، به این معنی که سیگنال‌ها پهنای باند نسبتاً کمی در مقایسه با فرکانس حامل دارند. اگر سیگنال‌های مورد نظر پهنای باند وسیعی داشته باشند، ESPRIT ممکن است برآوردهای DOA دقیقی ارائه ندهد.

حساسیت به خطاهای مدل: ESPRIT به انحرافات از مدل سیگنال فرضی، به ویژه در تعداد اجزای سیگنال یا ویژگی‌های نویز حساس است. اگر مدل نادرست باشد، می‌تواند منجر به تخمین فرکانس بایاس (biased estimation) شود.

الزامات کالیبراسیون: برای دستیابی به تخمین فرکانس دقیق با استفاده از ESPRIT، عناصر آرایه سنسور باید دقیقاً کالیبره شوند. هر گونه خطا یا مغایرت در فرآیند کالیبراسیون می‌تواند بر دقت تخمین تأثیر منفی بگذارد.

پیچیدگی برای پیاده‌سازی‌های تطبیقی: در حالی که ESPRIT از نظر محاسباتی برای پارامترهای سیگنال ثابت کارآمد است، پیاده‌سازی آن در هنگام برخورد با سناریوهای سیگنال تطبیقی یا متغیر با زمان پیچیده‌تر می‌شود.

به طور خلاصه، الگوریتم ESPRIT تخمین فرکانس با وضوح بالا و کارایی محاسباتی را ارائه می‌کند و آن را برای پردازش آرایه و کاربردهای تحلیل سیگنال مناسب می‌کند. با این حال، محدودیت‌های مربوط به دقت مدل، الزامات کالیبراسیون، و فرض سیگنال‌های باند باریک دارد. درک نقاط قوت و ضعف آن برای انتخاب الگوریتم مناسب برای وظایف پردازش سیگنال خاص ضروری است.

محققان روش‌ها و اصلاحات مختلفی را برای رفع معایب و محدودیت‌های الگوریتم ESPRIT ایجاد کرده‌اند. برخی از این روش‌ها عبارتند از:

۱. انتخاب ترتیب مدل: برای مقابله با حساسیت به خطاهای مدل، می توان از تکنیک های انتخاب ترتیب مدل استفاده کرد. این روش ها تعداد اجزای سیگنال موجود در داده ها را قبل از اعمال الگوریتم ESPRIT تخمین می زنند. با انتخاب صحیح ترتیب مدل، می توان دقت تخمین فرکانس را بهبود بخشید.

۲. Robust ESPRIT: الگوریتم های Robust ESPRIT برای بهبود عملکرد در حضور نویز و عدم قطعیت های مدل پیشنهاد شده است. این الگوریتم ها از robust statistics یا تکنیک های بهینه سازی برای کاهش اثرات نقاط پرت یا خطا در داده ها استفاده می کنند.

۳. کالیبراسیون بهبود یافته: برای افزایش دقت کالیبراسیون، محققان تکنیک های کالیبراسیون را بررسی کرده اند که نسبت به خطاها در هندسه آرایه حسگر و پاسخ های عنصر حساسیت کمتری دارند. این روش ها شامل الگوریتم های خود کالیبراسیون است که پارامترهای کالیبراسیون را از روی خود داده ها تخمین می زند.

۴. ESPRIT پهن باند: برای گسترش کاربرد ESPRIT به سیگنال های باند پهن، انواعی مانند Broadband ESPRIT توسعه یافته است. پهنای باند ESPRIT از چندین تخمین ESPRIT باند باریک در زیر باندهای فرکانس مختلف برای تخمین پارامترهای سیگنال های باند پهن استفاده می کند.

۵. ESPRIT متغیر با زمان: برای برخورد با سیگنال های متغیر با زمان، روش های ESPRIT متغیر با زمان پیشنهاد شده است. این الگوریتم ها به طور تطبیقی پارامترهای سیگنال را هنگام تغییر در طول زمان تخمین می زنند و امکان ردیابی اجزای فرکانس متغیر با زمان را فراهم می کنند.

۶. ESPRIT غیر یکنواخت: الگوریتم های ESPRIT غیر یکنواخت برای مدیریت هندسه آرایه های نامنظم ابداع شده اند. این الگوریتم ها فاصله گیری یکنواخت بین عناصر آرایه را برای بهبود دقت تخمین فرکانس در نظر می گیرند.

۷. برازش زیرفضا: تکنیک های برازش زیرفضا ESPRIT را با سایر روش های مبتنی بر زیرفضا، مانند MUSIC یا root-MUSIC، ترکیب می کند تا در سناریوهای خاص، عملکرد بهتری حاصل شود. این روش های ترکیبی می توانند وضوح و استحکام بهتری ارائه دهند.

۸. رویکردهای بیزین: تکنیک های تخمین بیزین برای ترکیب دانش قبلی در مورد پارامترهای سیگنال و آمار نویز در چارچوب ESPRIT به کار گرفته شده است. روش های بیزین می توانند تخمین های بهتری را ارائه دهند، به ویژه زمانی که با داده های محدود یا سیگنال های پر نویز سروکار داریم.

## بخش ۱۰: پیاده‌سازی

در ابتدای کد ما دیتاست را در متلب لود کردیم. دیتاست ما به صورت استراکت است که با دستور `recieve`. متلب آن را به صورت ماتریس در می‌آوریم. پارامتر تعداد آنتن از ماتریس استخراج شده و میدانیم که تعداد منابع رادیویی ۲ تا است.

در بخش ۳، مراحل الگوریتم ESPRIT کامل توضیح داده شده‌است و در ادامه کد، ما الگوریتم را در متلب پیاده سازی کردیم که مراحل را مجدداً به طور مختصر آن را توضیح می‌دهیم:

(۱) ماتریس همبستگی  $R$  از داده‌ها استخراج شده‌است. (ضرب ماتریس سیگنال در ماتریس هرمیشین آن) همچنین تجزیه بردار ویژه با استفاده از دستور `eig` متلب روی آن اعمال شده‌است.

(۲) ماتریس  $Q$  به صورت نزولی سورت شده است زیرا  $Q_s$  شامل  $M$  درایه بزرگتر آن است. سپس همانطور که در بخش ۳ توضیح داده شد در این مرحله ما ماتریس  $Q_s$  را، از ماتریس  $Q$  که در قسمت قبل از `eigen decomposition` به دست آورده‌ایم، پیدا می‌کنیم و سپس با پارتیشن کردن، ماتریس‌های  $Q_0$  و  $Q_1$  که در الگوریتم استفاده می‌شوند به دست آمده‌است.

(۳) حال باید ماتریس  $\Psi$  را تخمین بزنیم که با استفاده از روش LS این کار را انجام داده‌ایم. ( $Q_1 = Q_0 \Psi$ )

(۴) همانطور که در محاسبات توضیح داده شده‌است، مقادیر ویژه ماتریس  $\Psi$  همان درایه‌های روی قطر ماتریس  $\Phi$  است که از بردار هادی استخراج شده و با استفاده از آن می‌توان زوایای ورود را تخمین زد.

$$\Phi = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & z_M \end{bmatrix}$$

(۵) در این مرحله، با استفاده از دستور `angle` متلب فاز درایه‌های  $\Phi$  محاسبه شده‌است که همانطور که در بخش ۱ برای بردار هادی توضیح دادیم، مقدار آن برحسب  $\theta$  است. پس می‌توانیم  $\theta$  را از روی آن محاسبه کنیم.

$$z_k = e^{j\pi \sin(\theta_k)}$$

نتیجه پیاده‌سازی:

Estimated angles of arrival:

-10.0939

27.7523

کد شبیه سازی در فایل با نام `project.m` قرار دارد.

## پیاده‌سازی با روش TLS:

در روش TLS، بردارهای ویژه انتخاب شده  $Q_S$  به ترتیب به دو زیرماتریس با ابعاد  $(N - 1) \times M$  و  $(N - 1) \times (M - N)$  تقسیم می‌شوند. اولین زیرماتریس  $Q_0$  از اولین  $N - 1$  ردیف  $Q_S$  تشکیل شده است، در حالی که زیرماتریس دوم ( $Q_1$ ) حاصل تفریق حاصل ضرب  $Q_0$  در شبه معکوس آن (pseudo-inverse) از  $N - 1$  ردیف اول ماتریس  $Q_S$  محاسبه می‌شود. این کار برای حذف هر گونه خطا در داده‌های ورودی و آرایه آنتن گیرنده انجام می‌شود. سپس ماتریس  $\Psi$  با استفاده از ماتریس‌های  $Q_1$  و  $Q_0$  با محاسبه شبه معکوس (pseudo-inverse)  $Q_0$  ضرب در  $Q_1$  تخمین زده می‌شود. سپس مقادیر ویژه  $\Psi$  با استفاده از تابع  $\text{eig}()$  محاسبه می‌شود و ادامه الگوریتم مانند روش LS است.

## نتیجه پیاده‌سازی TLS:

**Estimated angles of arrival:**

**17.3262**

**-82.5963**

کد شبیه‌سازی در فایل با نام **TLS.m** قرار دارد.



## لیست منابع:

<https://www.comm.utoronto.ca/~rsadve/Notes/DOA.pdf>  
<https://www.eit.lth.se/fileadmin/eit/courses/eti051/docs/app08.pdf>  
<https://www.antenna-theory.com/definitions/steering.php>  
<https://www.mathworks.com/help/phased/ref/steervec.html>  
<https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/steering-vector>  
[https://www.cs.princeton.edu/courses/archive/spring19/cos463/labs/lab5\\_preview.html](https://www.cs.princeton.edu/courses/archive/spring19/cos463/labs/lab5_preview.html)  
<https://ieeexplore.ieee.org/iel5/5347305/5353118/05353153.pdf>  
<https://commons.und.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=2558&context=theses>  
<https://ieeexplore.ieee.org/document/8286556>  
<https://ieeexplore.ieee.org/document/5948966>  
[https://www.researchgate.net/publication/241185461\\_A\\_modified\\_ESPRIT\\_algorithm\\_based\\_on\\_a\\_new\\_SV\\_D\\_method\\_for\\_coherent\\_signals](https://www.researchgate.net/publication/241185461_A_modified_ESPRIT_algorithm_based_on_a_new_SV_D_method_for_coherent_signals)  
<https://www.mathworks.com/help/phased/ref/esprit.html>  
([https://en.wikipedia.org/wiki/ESPRIT\\_algorithm](https://en.wikipedia.org/wiki/ESPRIT_algorithm))  
<http://dsp-book.narod.ru/DSPMW/63.PDF>  
<https://ieeexplore.ieee.org/document/8286556>  
[https://www.researchgate.net/figure/An-example-of-array-geometry-for-generalized-ESPRIT\\_fig1\\_289690081](https://www.researchgate.net/figure/An-example-of-array-geometry-for-generalized-ESPRIT_fig1_289690081)  
<https://people.duke.edu/~hpgavin/SystemID/CourseNotes/TotalLeastSquares.pdf>  
[https://drive.google.com/drive/folders/1kzAO9LGjFWF\\_AGiJ8qn\\_i-iAclci6CKk?usp=sharing](https://drive.google.com/drive/folders/1kzAO9LGjFWF_AGiJ8qn_i-iAclci6CKk?usp=sharing)  
[https://drive.google.com/drive/folders/1QEluXH2\\_cricfUX41OSfatwQaCs5P8uW?usp=sharing](https://drive.google.com/drive/folders/1QEluXH2_cricfUX41OSfatwQaCs5P8uW?usp=sharing)  
<https://www.comm.utoronto.ca/~rsadve/Notes/ArrayTheory.pdf>

همچنین در بخش‌های تئوری با گروه دیگر در مواردی مشورت انجام شده است.

«پایان»