فصل ۱

اعداد مختلط

۱.۱ مقدمه

معادله‌ی درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ که $a, b, c \in \mathbb{R}$ در حالت $\Delta = b^۲ - ۴ac < ۰$ در دستگاه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ دارای جواب نیست.برای آنکه این نوع معادلات دارای جواب باشند باید $\mathbb{R}$ را به دستگاه اعداد مختلط توسیع داد.برای اینکار i را عددی موهومی در نظر می‌گیریم به طوری که $\mathrm{i}^۲ = -۱$ است و بنابراین $\mathrm{i}^۳ = -\mathrm{i}$ و $\mathrm{i}^۴ = ۱$ خواهد بود.

تعریف ۱.۱.۱. : مجموعه‌ی اعداد مختلط را که با $\mathbb{C}$ نمایش می دهیم به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mathbb{C} = \{x + y\mathrm{i} : x, y \in \mathbb{R}, \mathrm{i}^۲ = -۱\}$$

هر عدد مختلط را به صورت $z = x + y\mathrm{i}$ نشان می‌دهیم که x را قسمت حقیقی z گفته با $Re(z)$ و y را قسمت موهومی z گفته و با $Im(z)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. : دو عدد مختلط $z_۱$ و $z_۲$ مساوی اند اگر و تنها اگر

$$Re(z_۱) = Re(z_۲), Im(z_۱) = Im(z_۲)$$

مثال ۳.۱.۱. فرض کنید $z_۱ = \frac{a}{۳} + ۱ - \mathrm{i}$ و $z_۲ = ۲ + b\mathrm{i}$ دو عدد مختلط باشند.اگر $z_۱ = z_۲$ باشد،مقدار a و b را تعیین کنید. حل: $z_۱ = z_۲$ است اگر و تنها اگر $\frac{a}{۳} + ۱ = ۲$ و $b = -۱$ در اینصورت $a = ۳$ و

$b = -1$ است.

۲.۱ اعمال جبری روی اعداد مختلط

تعریف ۱.۲.۱. : اگر $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}$ و $z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$ دو عدد مختلط باشند؛در این صورت جمع z_1 و z_2 را با $z_1 + z_2$ و ضرب z_1 و z_2 را به صورت $z_1 z_2$ نمایش داده و اینگونه تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\mathrm{i} \\ z_1 z_2 &= (x_1 + y_1\mathrm{i})(x_2 + y_2\mathrm{i}) = x_1x_2 + x_1y_2\mathrm{i} + x_2y_1\mathrm{i} + y_1y_2\mathrm{i}^2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\mathrm{i} \end{aligned}$$

اگر $\alpha \in \mathbb{R}$ دلخواه باشد؛آنگاه داریم:

$$\alpha z_1 = \alpha(x_1 + y_1\mathrm{i}) = (\alpha x_1) + (\alpha y_1)\mathrm{i}$$

قضیه ۲.۲.۱. : *(ویژگی‌های جمع اعداد مختلط)اگر z_1 ، z_2 و z_3 سه عدد مختلط باشند؛آنگاه:*

الف) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ *جابه‌جایی*

ب) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ *شرکت‌پذیری*

پ) $z_1 + 0 = 0 + z_1 = z_1$ *عضو خنثی*

ت) $z_1 + (-z_1) = (-z_1) + z_1 = 0$ *عضو وارون(قرینه)*

قضیه ۳.۲.۱. : *(ویژگی ضرب اعداد مختلط)اگر z_1 ، z_2 و z_3 سه عدد مختلط باشند؛آنگاه:*

الف) $z_1 z_2 = z_2 z_1$ *جابه‌جایی*

ب) $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2)z_3$ *شرکت‌پذیری*

پ) $z_1 1 = 1 z_1 = z_1$ *عضو خنثی*

پ) اگر $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i} \neq 0$ *باشد؛آنگاه* $z_1^{-1} = \frac{x_1}{x_1^2+y_1^2} + \frac{-y_1}{x_1^2+y_1^2}\mathrm{i}$ *وجود دارد به طوری که:* $z_1 z_1{}^{-1} = z_1{}^{-1} z_1 = 1$ *عضو وارون*

ث) $z_1(z_2+z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ *توزیع پذیری ضرب روی جمع*

تعریف ۴.۲.۱. : اگر $z = x + y\mathrm{i}$ یک عدد مختلط باشد $\overline{z} = x - y\mathrm{i}$ را مزدوج z گوییم.

قضیه ۵.۲.۱. *(ویژگی‌های مزدوج عدد مختلط)اگر* $z_1, z_2, ..., z_n$ *به تعداد* n *عدد مختلط باشند و* $\alpha \in \mathbb{R}$ *در این صورت داریم:*

الف) $z = \overline{(\overline{z})}$

ب)

$$\overline{z_1 + z_2 + ... + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + ... + \overline{z_n}$$

به ویژه برای $n = 2$ *داریم:* $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

پ)

$$\overline{z_1 z_2 ... z_n} = \overline{z_1}\ \overline{z_2} ... \overline{z_n}$$

به ویژه برای $n = 2$ *داریم:* $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$ *و اگر* $z_1 = z_2 = ... = z_n = z$ *باشد،آنگاه داریم:* $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$

ت)

$$\overline{\alpha z_1} = \alpha \overline{z_1}$$

مثال ۶.۲.۱. اگر z ریشه‌ی یک چندجمله‌ای درجه n با ضرائب حقیقی باشد،ثابت کنید $\bar{z}$ نیز ریشه‌ی آن است.

حل: فرض کنید $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ که $a_\mathrm{i} \in \mathbb{R}$ و $0 \leq \mathrm{i} \leq n$ ،چندجمله‌ای درجه n با ضرائب حقیقی باشد و z یک ریشه آن باشد؛بنابراین،
$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0$ است و $\overline{f(z)} = \bar{0} = 0$ می‌باشد.

و با استفاده از ویژگی‌های مزدوج یک عدد مختلط داریم:

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} \\ &= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \dots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \\ &= \overline{a_n}\,\overline{z^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{z^{n-1}} + \dots + \overline{a_1}\ \overline{z} + \overline{a_0} \\ &= a_n(\overline{z})^n + a_{n-1}(\overline{z})^{n-1} + \dots + a_1(\overline{z}) + a_0 = f(\overline{z}) \end{aligned}$$

در نتیجه $\overline{z}$ یک ریشه برای چندجمله‌ای درجه n، $f(x)$ است.

۳.۱ نحوه‌ی محاسبه‌ی وارون یک عدد مختلط

اگر $z = x + y\mathrm{i} \neq 0$ یک عدد مختلط باشد،وارون آن را با $\frac{1}{z}$ یا z^{-1} نمایش داده و به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} z^{-1} = \frac{1}{z} &= \frac{1}{x + y\mathrm{i}} \times \frac{x - y\mathrm{i}}{x - y\mathrm{i}} = \frac{x - y\mathrm{i}}{x^2 + xy\mathrm{i} - xy\mathrm{i} - y^2\mathrm{i}^2} \\ &= \frac{x - y\mathrm{i}}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{-y}{x^2 + y^2}\mathrm{i} \end{aligned}$$

۴.۱ تقسیم دو عدد مختلط:

اگر $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}$ و $z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i} \neq 0$ دو عدد مختلط باشند تقسیم z_1 و z_2 به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + y_1\mathrm{i}}{x_2 + y_2\mathrm{i}} \times \frac{x_2 - y_2\mathrm{i}}{x_2 - y_2\mathrm{i}} \\ &= \frac{x_1x_2 - x_1y_2\mathrm{i} + x_2y_1\mathrm{i} - y_1y_2\mathrm{i}^2}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\mathrm{i} \end{aligned}$$

مثال ۱.۴.۱. برای هر $x \in \mathbb{R}$ ثابت کنید:

$$\frac{\sqrt{1+x^2}+\mathrm{i}x}{x-\mathrm{i}\sqrt{1+x^2}}=\mathrm{i}$$

حل:

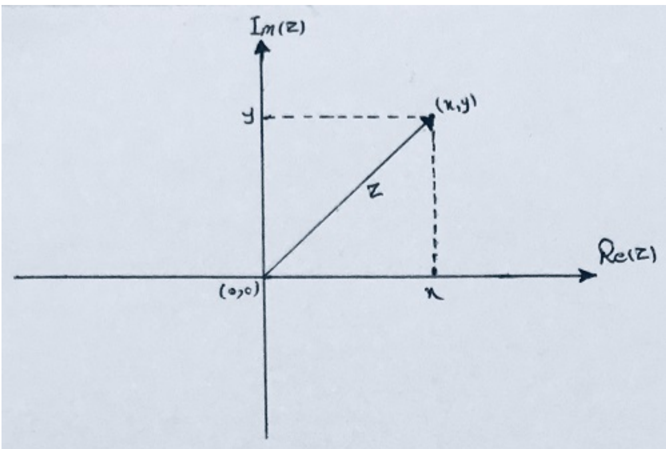
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+x^2}+\mathrm{i}x}{x-\mathrm{i}\sqrt{1+x^2}}\times\frac{x+\mathrm{i}\sqrt{1+x^2}}{x+\mathrm{i}\sqrt{1+x^2}} &= \frac{x\sqrt{1+x^2}+(1+2x^2)\mathrm{i}+x\sqrt{1+x^2}\mathrm{i}^2}{x^2+(1+x^2)}\\ &= \frac{(1+2x^2)\mathrm{i}}{1+2x^2}=\mathrm{i}\end{aligned}$$

قضیه ۲.۴.۱. *اگر z_1 و $z_2 \neq 0$ دو عدد مختلط باشند؛آنگاه داریم:*

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

۵.۱ نمایش هندسی اعداد مختلط:

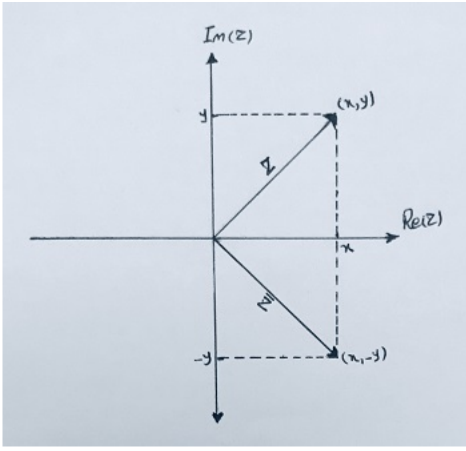
در فضای $\mathbb{R}^2$ می‌توان هر عدد مختلط $z=x+y\mathrm{i}$ را به نقطه‌ی (x,y) نظیر نمود.در واقع با در نظر گرفتن محور x ها به عنوان محور حقیقی و محور y ها به عنوان محور موهومی بردار $\overrightarrow{oz}$ را از $(0,0)$ به نقطه‌ی (x,y) امتداد می‌دهیم و می‌نویسیم: $\overrightarrow{oz}=(x,y)$.



فضای $\mathbb{R}^2$

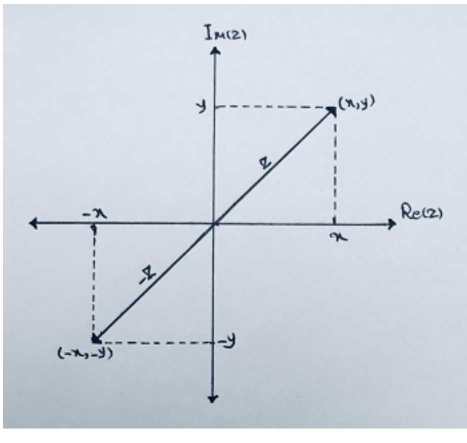
۶.۱ تعبیر هندسی مزدوج،قرینه و جمع اعداد مختلط:

اگر $z = x + y\mathrm{i}$ یک عدد مختلط با نمایش برداری (x, y) باشد؛آنگاه مزدوج آن $\overline{z} = x - y\mathrm{i}$ با نمایش برداری $(x, -y)$ خواهد بود و در واقع $\overline{z}$ قرینه ی z نسبت به محور x ها (محور $Re(z)$) می‌باشد:



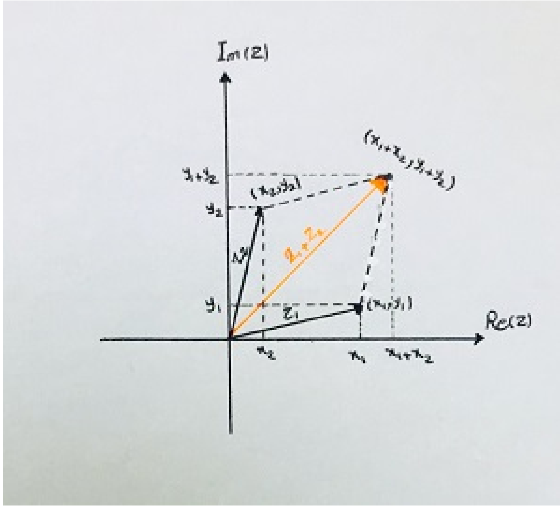
تعبیر هندسی مزدوج

همچنین قرینه‌ی جمعی z به صورت $-z = (-x) + (-y)\mathrm{i}$ بوده؛که نمایش برداری آن $(-x, -y)$ است.در واقع $-z$ قرینه‌ی z نسبت به مبدا مختصات می‌باشد.



تعبیر هندسی قرینه

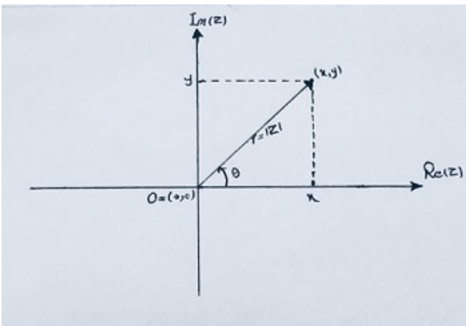
اگر $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}$ و $z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$ با نمایش های برداری به ترتیب (x_1, y_1) و (x_2, y_2) باشند؛آنگاه $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\mathrm{i}$ با نمایش برداری $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ بوده و در واقع قطر متوازی الاضلاعی است که توسط (x_1, y_1) و (x_2, y_2) تولید می شود:



تعبیر هندسی جمع

۷.۱ قدرمطلق یک عدد مختلط

تعریف ۱.۷.۱. اگر $z = x+y\mathrm{i}$ یک عدد مختلط باشد،فاصله‌ی نقطه‌ی (x, y) تا مبدا را قدرمطلق z تعریف کرده و می‌نویسیم؛ $|z| = \sqrt{x^{2}+y^{2}}$ از طرف دیگر چون $z\bar{z} = x^{2}+y^{2}$ است،بنابراین داریم: $z\bar{z} = |z|^{2}$



قدرمطلق عدد مختلط

قضیه ۲.۷.۱. *الف) اگر $z_1, z_2, \ldots, z_n$ اعداد مختلط باشند؛آنگاه داریم:*

$$|z_1 z_2 \ldots z_n| = |z_1||z_2|\ldots|z_n|$$

به ویژه اگر $n = ۲$ *باشد* $|z_۱ z_۲| = |z_۱||z_۲|$ *است و اگر* $z_۱ = z_۲ = \ldots = z_n = z$ *باشد؛آنگاه داریم:*

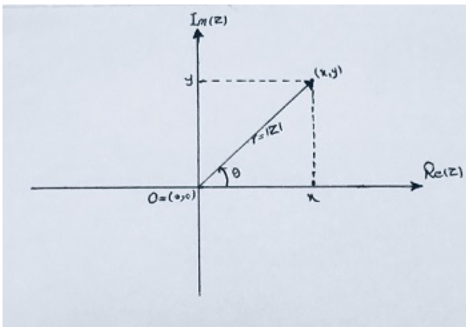
$$|z^n| = |z|^n$$

ب) اگر z *عدد مختلط باشد؛آنگاه داریم:*

$$|z| = |\overline{z}|$$

۸.۱ نمایش مثلثاتی عدد مختلط

فرض کنید $z = x + y\mathrm{i}$ یک عدد مختلط باشد.حال اگر پاره‌خط $\overline{oz}$ با طول $r = |z| = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ با جهت مثبت محور $\mathbb{R}e(z)$ زاویه ی θ بسازد؛آنگاه داریم:



نمایش مثلثاتی عدد مختلط

$$sin\theta = \frac{y}{r}, cos\theta = \frac{x}{r}$$

بنابراین نمایش مثلثاتی عدد مختلط z به صورت زیر است:

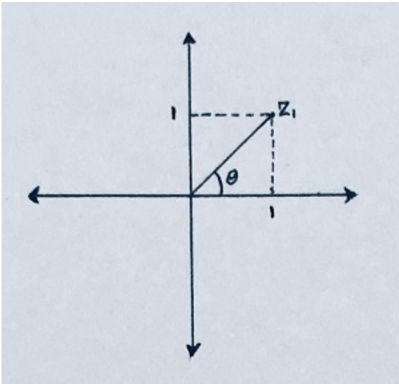
$$z = x + y\mathrm{i} = rcos\theta + \mathrm{i}rsin\theta = r[cos\theta + \mathrm{i}sin\theta]$$

که $\mathrm{r} = |z| = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ قدرمطلق z و $\theta = tan^{-۱}\left(\frac{y}{x}\right)$ را آرگومان z گفته با $Arg(z)$ نشان می دهیم و محدوده‌ی آن $۰ \leq \theta < ۲\pi$ است.

مثال ۱.۸.۱. نمایش مثلثاتی اعداد مختلط زیر را بنویسید.

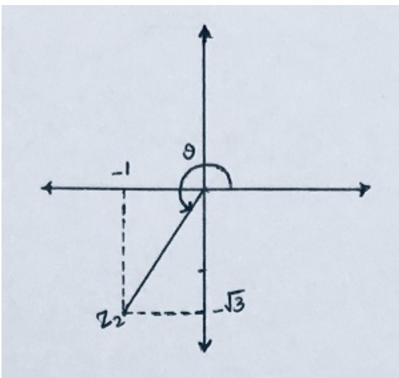
الف)

$$\begin{aligned} z_۱ &= ۱ + \mathrm{i} \\ r_۱ &= |z_۱| = \sqrt{۱+۱} = \sqrt{۲} \\ \theta &= tan^{-۱}(\frac{۱}{۱}) = tan^{-۱}(۱) = \frac{\pi}{۴}, \frac{۵\pi}{۴} \\ z_۱ &= \sqrt{۲}[cos(\frac{\pi}{۴}) + \mathrm{i}sin(\frac{\pi}{۴})] \end{aligned}$$



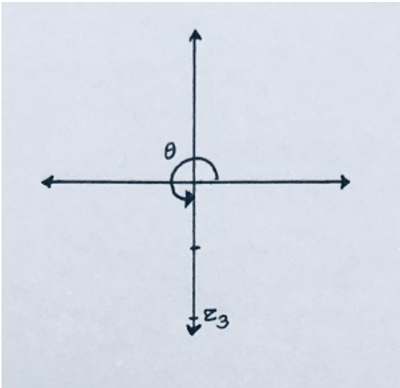
ب)

$$\begin{aligned} z_۲ &= -۱ - \sqrt{۳}\mathrm{i} \\ r_۲ &= |z_۲| = \sqrt{۱+۳} = ۲ \\ \theta &= tan^{-۱}(\frac{-\sqrt{۳}}{-۱}) = tan^{-۱}(\sqrt{۳}) = \frac{\pi}{۳}, \frac{۴\pi}{۳} \\ z_۲ &= ۲[cos(\frac{۴\pi}{۳}) + \mathrm{i}sin(\frac{۴\pi}{۳})] \end{aligned}$$



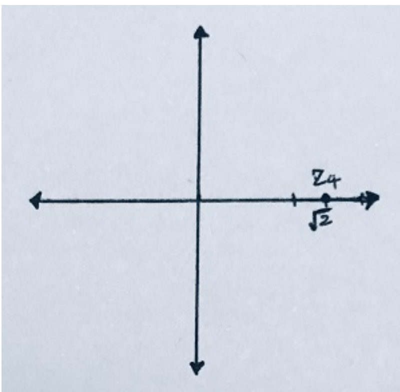
پ)

$$
\begin{aligned}
z_۳ &= -۲i \\
r_۳ &= |z_۳| = \sqrt{۰ + (-۲)^۲} = ۲ \\
\theta &= tan^{-۱}(\frac{-۲}{۰}) = \frac{۳\pi}{۲} \\
z_۳ &= ۲[cos(\frac{۳\pi}{۲}) + i sin(\frac{۳\pi}{۲})]
\end{aligned}
$$



ت)

$$
\begin{aligned}
z_۴ &= \sqrt{۲} \\
r_۴ &= |z_۴| = |\sqrt{۲}| = \sqrt{۲} \\
\theta &= tan^{-۱}(\frac{۰}{\sqrt{۲}}) = tan^{-۱}(۰) = ۰, \pi \\
z_۴ &= \sqrt{۲}[cos(۰) + i sin(۰)]
\end{aligned}
$$



۹.۱ ضرب و تقسیم دو عدد مختلط در نمایش مثلثاتی (قطبی):

فرض کنید $z_1 = r_1[cos(\theta_1) + isin(\theta_1)]$ و $z_2 = r_2[cos(\theta_2) + isin(\theta_2)]$ دو عدد مختلط در نمایش مثلثاتی باشند که $r_1 = |z_1|$ ، $r_2 = |z_2|$ ، $\theta_1 = Arg(z_1)$ و $\theta_2 = Arg(z_2)$ است.در این صورت ضرب z_1z_2 در نمایش مثلثاتی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1 r_2[\cos(\theta_1) + \mathrm{i}\sin(\theta_1)][\cos(\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_2)] \\
&= r_1 r_2 \left[(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + \mathrm{i}(\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cos\theta_2)\right] \\
&= r_1 r_2 \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2)\right]
\end{aligned}
$$

در نتیجه داریم:

$$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2)$$

۱.۹.۱ نمایش مثلثاتی مزدوج عددمختلط:

اگر $z = r[\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta]$ یک عددمختلط با نمایش مثلثاتی باشد آن‌گاه مزدوج z دارای نمایش مثلثاتی زیر است:

$$\bar{z} = r[\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta] = r[\cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta)]$$

بنابراین $\mathrm{Arg}(\bar{z}) = -\theta = -\mathrm{Arg}(z)$ است.

۲.۹.۱ نمایش مثلثاتی تقسیم دوعدد مختلط:

اگر $z_۱$ و $z_۲ \neq ۰$ دوعددمختلط با نمایش مثلثاتی معرفی شده دربالا باشند تقسیم $\frac{z_۱}{z_۲}$ درنمایش مثلثاتی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
\frac{z_۱}{z_۲} &= \frac{r_۱\left[\cos\theta_۱ + \mathrm{i}\sin\theta_۱\right]}{r_۲\left[\cos\theta_۲ + \mathrm{i}\sin\theta_۲\right]} \times \frac{\cos\theta_۲ - \mathrm{i}\sin\theta_۲}{\cos\theta_۲ - \mathrm{i}\sin\theta_۲} \\
&= \frac{r_۱\left[(\cos\theta_۱\cos\theta_۲ + \sin\theta_۱\sin\theta_۲) + \mathrm{i}\,(\cos\theta_۲\sin\theta_۱ - \sin\theta_۲\cos\theta_۱)\right]}{r_۲\left(\cos^۲\theta_۲ + \sin^۲\theta_۲\right)} \\
&= \frac{r_۱}{r_۲}\left[\cos(\theta_۱ - \theta_۲) + \mathrm{i}\sin(\theta_۱ - \theta_۲)\right]
\end{aligned}$$

درنتیجه

$$\mathrm{Arg}(\frac{z_۱}{z_۲}) = \theta_۱ - \theta_۲ = \mathrm{Arg}(z_۱) - \mathrm{Arg}(z_۲)$$

می‌باشد.

مثال ۱.۹.۱. اگر $z_۱ = ۱ - \sqrt{۳}\mathrm{i}$ و $z_۲ = \sqrt{۳} + \mathrm{i}$ دوعدد مختلط باشند ابتدا نمایش مثلثاتی آن‌ها رابیابید وسپس $z_۱ z_۲$ ، $\frac{z_۱}{z_۲}$ و $\frac{z_۲}{z_۱}$ رامحاسبه نمائید.

حل:

$$\begin{aligned}
&r_۱ = |z_۱| = \sqrt{۱ + ۳} = ۲ \quad , \quad \theta_۱ = \tan^{-۱}(-\frac{\sqrt{۳}}{۱}) = \frac{۵\pi}{۳} \\
&\Rightarrow \quad z_۱ = ۲\left[\cos(\frac{۵\pi}{۳}) + \mathrm{i}\sin(\frac{۵\pi}{۳})\right] \\
&r_۲ = |z_۲| = \sqrt{۳ + ۱} = ۲ \quad , \quad \theta_۲ = \tan^{-۱}(\frac{۱}{\sqrt{۳}}) = \frac{\pi}{۶} \\
&\Rightarrow \quad z_۲ = ۲\left[\cos(\frac{\pi}{۶}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{۶})\right]
\end{aligned}$$

حال با استفاده از فرمول های بدست آمده برای ضرب و تقسیم اعداد مختلط بانمایش مثلثاتی داریم:

$$z_1z_2 = 4\left[\cos(\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{6}) + \mathrm{i}\sin(\frac{5\pi}{3}+\frac{\pi}{6})\right] = 4\left[\cos(\frac{11\pi}{6}) + \mathrm{i}\sin(\frac{11\pi}{6})\right]$$
$$= 4\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\right] = 2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{2}\left[\cos(\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{6}) + \mathrm{i}\sin(\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{6})\right] = \cos(\frac{3\pi}{2}) + \mathrm{i}\sin(\frac{3\pi}{2})$$
$$= -\mathrm{i}$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2}{2}\left[\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{5\pi}{3}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{5\pi}{3})\right] = \cos(\frac{-3\pi}{2}) + \mathrm{i}\sin(\frac{-3\pi}{2})$$
$$= \mathrm{i}$$

۳.۹.۱ توان nام یک عدد مختلط

اگر $z_1 = r_1[\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1], z_2 = r_2[\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2], \ldots, z_n = r_n[\cos\theta_n + \mathrm{i}\sin\theta_n]$ اعداد مختلط بانمایش مثلثاتی باشند به‌طوریکه برای هر j که $1 \leq j \leq n$ داشته باشیم $r_j = |z_j|$ و $\theta_j = \mathrm{Arg}(z_j)$ دراین صورت با استقراء روی n می‌توان ضرب n عدد مختلط را تعمیم داد:

$$z_1z_2\ldots z_n = r_1r_2\ldots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n) + i\sin(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n)]$$

حال اگرقراردهیم $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z = r[\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta]$ آنگاه خواهیم داشت:

$$z^n = r^n[\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)] \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

که به آن دستور دموآور گوییم . بنابراین $\mathrm{Arg}(z^n) = n\theta = n.\mathrm{Arg}(z)$ است.

مثال ۲.۹.۱. حاصل هر کدام ازعبارات زیر را به صورت $x + y\mathrm{i}$ بیابید.

الف) $\left(\sqrt{۳} - \mathrm{i}\right)^{۱۰}$

ب) $\left(\frac{۱ + \mathrm{i}}{۱ - \mathrm{i}}\right)^{۱۲}$

حل:

الف) قرارمی‌دهیم $z = \sqrt{۳} - \mathrm{i}$ وداریم:

$$r = |z| = \sqrt{۳ + ۱} = ۲ \quad , \quad \theta = \tan^{-۱}(\frac{-۱}{\sqrt{۳}}) = \frac{۱۱\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۶}$$

$$\Rightarrow z = \sqrt{۳} - \mathrm{i} = ۲\left[\cos(\frac{۱۱\pi}{۶}) + \mathrm{i}\sin(\frac{۱۱\pi}{۶})\right]$$

طبق دستور دموآر داریم:

$$\begin{aligned} z^{۱۰} = (\sqrt{۳} - \mathrm{i})^{۱۰} &= ۲^{۱۰}\left[\cos(\frac{۱۱۰\pi}{۶}) + \mathrm{i}\sin(\frac{۱۱۰\pi}{۶})\right] \\ &= ۲^{۱۰}\left[\cos(۲\pi + \frac{\pi}{۳}) + \mathrm{i}\sin(۲\pi + \frac{\pi}{۳})\right] \\ &= ۲^{۱۰}\left[\frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}\mathrm{i}\right] = ۲^{۹}(۱ + \sqrt{۳}\mathrm{i}) \end{aligned}$$

ب) قرار می‌دهیم $z = \frac{۱ + \mathrm{i}}{۱ - \mathrm{i}}$ و با استفاده از نمایش مثلثاتی داریم:

$$\begin{aligned} z = \frac{۱ + \mathrm{i}}{۱ - \mathrm{i}} = \frac{\sqrt{۲}\left[\cos(\frac{\pi}{۴}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{۴})\right]}{\sqrt{۲}\left[\cos(\frac{۷\pi}{۴}) + \mathrm{i}\sin(\frac{۷\pi}{۴})\right]} &= \cos(\frac{\pi}{۴} - \frac{۷\pi}{۴}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{۴} - \frac{۷\pi}{۴}) \\ &= \cos(-\frac{۳\pi}{۲}) + \mathrm{i}\sin(-\frac{۳\pi}{۲}) \end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از دستور دموآر داریم:

$$z^{۱۲} = \left(\frac{۱+\mathrm{i}}{۱-\mathrm{i}}\right)^{۱۲} = \cos(-۱۸\pi) + \mathrm{i}\sin(-۱۸\pi) = ۱$$

۴.۹.۱ ریشه‌ی nام یک عدد مختلط

قضیه ۳.۹.۱. *هر چند جمله ای درجه n ام باضرایب حقیقی $a_n x^x + a_{n-۱}x^{n-۱} + \ldots + a_۱ x + a_۰ = ۰$ روی میدان اعداد مختلط دارای n ریشه است.*

تعریف ۴.۹.۱. فرض کنید z یک عدد مختلط باشد. w را ریشه‌ی n ام عدد z گوییم هرگاه $w^n = z$ باشد ومی‌نویسیم $w = z^{\frac{۱}{n}}$.

قضیه ۵.۹.۱. *اگر $n \in \mathbb{N}$ و $z = r\left[\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\right]$ عددی مختلط با نمایش مثلثاتی باشد آن‌گاه ریشه‌ی nام z عبارتست از :*

$$w_k = z^{\frac{۱}{n}} = \sqrt[n]{r}\left[\cos(\frac{۲k\pi+\theta}{n}) + \mathrm{i}\sin(\frac{۲k\pi+\theta}{n})\right]$$

که $k = ۰, ۱, ۲, \ldots, (n-۱)$ *است* .

اثبات:

فرض کنیم w ریشه‌ی n ام z باشد و $w = \rho\left[\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha\right]$ که $\rho = |w|$ و $\alpha = \operatorname{Arg}(w)$ است.
دراین‌صورت با توجه به رابطه‌ی $w^n = z$ واستفاده از دستور دموآر داریم.

$$\rho^n\left[\cos(n\alpha) + \mathrm{i}\sin(n\alpha)\right] = r\left[\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\right]$$

بنابراین داریم.

$$\begin{cases} \rho^n = r \Longrightarrow \rho = \sqrt[n]{r} \\ n\alpha = \theta \pm ۲k\pi \end{cases}$$

باتوجه به این‌که $۰ \leq \theta \leq ۲\pi$ و $۰ \leq \alpha \leq ۲\pi$ قرار دارند بنابراین $n\alpha = \theta + ۲k\pi$ قابل قبول است و در نتیجه $\alpha = \dfrac{۲k\pi+\theta}{n}$ را نتیجه می‌دهد و با توجه به این‌که $w^n = z$ دارای n ریشه است بنابراین

$k = \circ, ۱, ۲, \ldots, (n-۱)$ *می‌باشد*.■

مثال ۶.۹.۱. ۱. ریشه های چهارم عدد $z = -۱$ رابیابید.

حل:

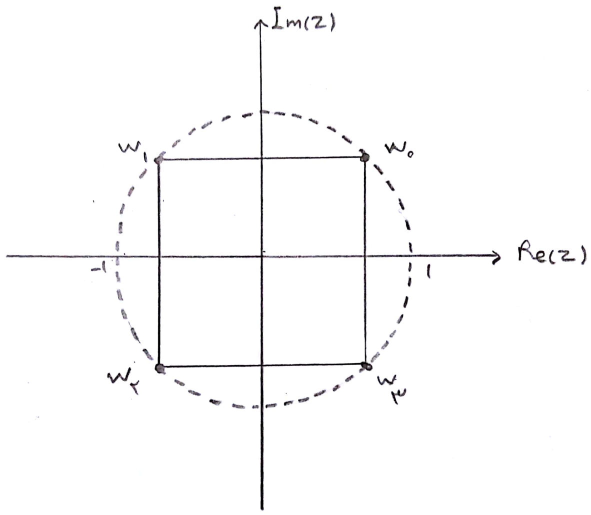
ریشه های چهارم عدد $z = -۱$، همان جواب‌های معادله‌ی $w^۴ = -۱$ است و چون

$$w_k = (-۱)^{\frac{۱}{۴}} = \sqrt[۴]{۱}\left[\cos(\frac{۲k\pi + \pi}{۴}) + \mathrm{i}\sin(\frac{۲k\pi + \pi}{۴})\right]$$

که $k = \circ, ۱, ۲, ۳$ است:

$$\begin{aligned}
k = \circ \quad &; \quad w_\circ = \cos(\frac{\pi}{۴}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{۴}) = \frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\mathrm{i} \\
k = ۱ \quad &; \quad w_۱ = \cos(\frac{۳\pi}{۴}) + \mathrm{i}\sin(\frac{۳\pi}{۴}) = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\mathrm{i} \\
k = ۲ \quad &; \quad w_۲ = \cos(\frac{۵\pi}{۴}) + \mathrm{i}\sin(\frac{۵\pi}{۴}) = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\mathrm{i} \\
k = ۳ \quad &; \quad w_۳ = \cos(\frac{۷\pi}{۴}) + \mathrm{i}\sin(\frac{۷\pi}{۴}) = \frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\mathrm{i}
\end{aligned}$$

با نمایش ریشه‌ها درصفحه‌ی مختلط :



اگر نقاط $w_۰, w_۱, w_۲, w_۳$ رابه یک‌دیگر وصل کنیم یک چهارضلعی منتظم (مربع) خواهد بود که رئوس مربع (ریشه‌ها) روی دایره‌ی واحد قرار دارند.

۲. ریشه‌های سوم عدد $z = ۸$ را بیابید.

حل:

نمایش مثلثاتی $z = ۸ = ۸[\cos(۰) + \mathrm{i}\sin(۰)]$ را در نظر می‌گیریم . بنابراین

$$w_k = (۸)^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۸}\left[\cos(\frac{۲k\pi + ۰}{۳}) + \mathrm{i}\sin(\frac{۲k\pi + ۰}{۳})\right]$$

که $k = ۰, ۱, ۲$ است

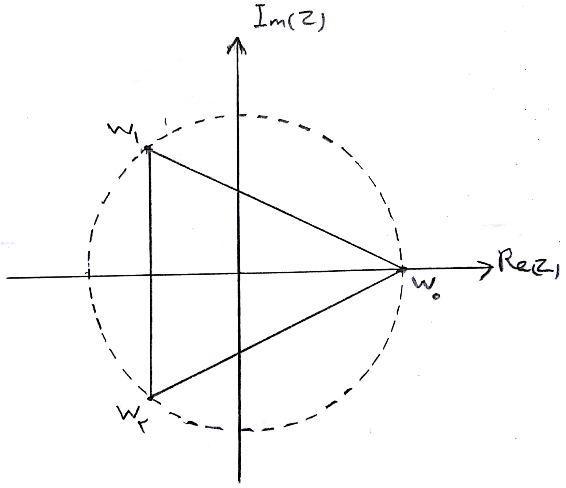
:

$$k = ۰; \quad w_۰ = ۲\,[\cos(۰) + \mathrm{i}\sin(۰)] = ۲$$

$$k = ۱; \quad w_۱ = ۲\left[\cos(\frac{۲\pi}{۳}) + \mathrm{i}\sin(\frac{۲\pi}{۳})\right] = ۲[-\frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}\mathrm{i}] = -۱ + \sqrt{۳}\mathrm{i}$$

$$k = ۲; \quad w_۲ = ۲\left[\cos(\frac{۴\pi}{۳}) + \mathrm{i}\sin(\frac{۴\pi}{۳})\right] = ۲[-\frac{۱}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}\mathrm{i}] = -۱ - \sqrt{۳}\mathrm{i}$$

با نمایش ریشه‌ها در صفحه مختلط:



و اتصال ریشه ها ، نمایش یک سه ضلعی منتظم (مثلث متساوی‌الاضلاع) خواهد بود که رئوس مثلث روی دایره به شعاع ۲ است.

۳. ریشه‌های سوم عدد $z = -\mathrm{i}$ را بیابید.

حل:

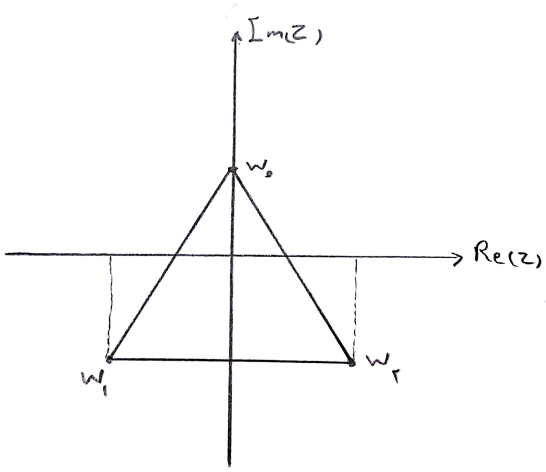
نمایش مثلثاتی $z = -\mathrm{i} = ۱\left[\cos(\frac{۳\pi}{۲}) + \mathrm{i}\sin(\frac{۳\pi}{۲})\right]$ را درنظرمیگیریم . بنابراین

$$w_k = (-\mathrm{i})^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۱}\left[\cos(\frac{۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲}}{۳}) + \mathrm{i}\sin(\frac{۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲}}{۳})\right]$$

است که $k = ۰, ۱, ۲$.

$$k = ۰ \quad ; \quad w_۰ = \cos(\frac{\pi}{۲}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{۲}) = \mathrm{i}$$
$$k = ۱ \quad ; \quad w_۱ = \cos(\frac{۷\pi}{۶}) + \mathrm{i}\sin(\frac{۷\pi}{۶}) = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{\mathrm{i}}{۲}$$
$$k = ۲ \quad ; \quad w_۲ = \cos(\frac{۱۱\pi}{۶}) + \mathrm{i}\sin(\frac{۱۱\pi}{۶}) = \frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{\mathrm{i}}{۲}$$

که دارای نمایش هندسی زیر است:



۱۰.۱ مکان هندسی

مثال ۱.۱۰.۱. مکان هندسی نقاط (x,y) از صفحه را بیابید که به ازای $z = x + \mathrm{i}y$ درهرکدام از شرایط زیر صدق می‌کنند:

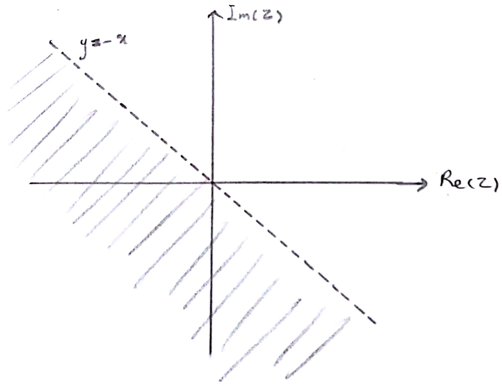
الف) $\left|\frac{z+\mathrm{i}}{z-۱}\right| < ۱$

حل:

قرار می‌دهیم $z = x + \mathrm{i}y$:

$$\left|\frac{z+\mathrm{i}}{z-۱}\right| = \left|\frac{x+y\mathrm{i}+\mathrm{i}}{x+y\mathrm{i}-۱}\right| = \left|\frac{x+(y+۱)\mathrm{i}}{(x-۱)+y\mathrm{i}}\right| < ۱$$
$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x^۲+(y+۱)^۲}}{\sqrt{(x-۱)^۲+y^۲}} < ۱$$
$$\Rightarrow \sqrt{x^۲+(y+۱)^۲} < \sqrt{(x-۱)^۲+y^۲}$$
$$\Rightarrow x^۲+y^۲+۲y+۱ < x^۲-۲x+۱+y^۲ \Rightarrow y < -x$$

بنابراین مجموعه نقاط $\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ : y<-x\}$ درنامعادله‌ی بالا صدق می‌کنند:



ب) $\mathrm{Im}(\frac{۱}{\bar{z}+۱}) \geq ۱$

حل:

باقرار دادن $z=x+y\mathrm{i}$ داریم:

$$\frac{۱}{\bar{z}+۱} = \frac{۱}{x-y\mathrm{i}+۱} = \frac{۱}{(x+۱)-y\mathrm{i}} \times \frac{(x+۱)+y\mathrm{i}}{(x+۱)+y\mathrm{i}} = \frac{(x+۱)+y\mathrm{i}}{(x+۱)^۲+y^۲}$$
$$= \frac{x+۱}{(x+۱)^۲+y^۲} + \frac{y}{(x+۱)^۲+y^۲}\mathrm{i}$$

بنابراین:

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{\bar{z}+1}\right)=\frac{y}{(x+1)^2+y^2}\geq 1\Rightarrow y\geq (x+1)^2+y^2$$
$$\Rightarrow (x+1)^2+(y-\frac{1}{2})^2\leq \frac{1}{4}$$

مکان هندسی نقاطی که در نا معادله بالا صدق می‌کنند ، نقاط روی ودرون دایره به مرکز $(-1,\frac{1}{2})$ و شعاع $\frac{1}{2}$ است .