Ekstremizacija neregularnih grafov z modifikacijo skupne σ-nepravilnosti

Tinč Arifović, Manca Kavčič

28. december 2024

1 Opis problema

Imamo tri probleme, za katere iščemo rešitve.

1. Naj bo $f(n) = \frac{1}{n}$. Ali je največja vrednost $\sigma_t^{f(n)}(G)$ dosežena, ko je G neregularen graf?
2. Naj bo $f(n) = c$, kjer je c realno število z intervala $(0, 1)$. Ali je največja vrednost $\sigma_t^{f(n)}(G)$ dosežena, ko je G neregularen graf?
3. Naj bo $f(n)$ pozitivna funkcija, za katero velja $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$. Identificirajte drevesa, ki dosežejo največjo vrednost $\sigma_t^{f(n)}(G)$.

Popolna $\sigma-$nepravilnost je podana kot

$$\sigma_t(G) = \sum_{u,v\subseteq V(G)} (d_G(u) - d_G(v))^2,$$

kjer $d_G(z)$ označuje stopnjo vozlišča z v grafu G. Natančneje, definiramo indeks $\sigma_t^{f(n)}(G)$ kot

$$\sigma_t^{f(n)}(G) = \sum_{u,v\subseteq V(G)} |d_G(u) - d_G(v)|^{f(n)},$$

kjer je $n = |V(G)|, f(n)$ pa je funkcija, definirana za $n \geq 4$. Najina naloga je odgovoriti na zgoraj podana vprašanja s pomočjo računalniškega testiranja. Za manjše grafe bova uporabila sistematičen pristop iskanja, za večje grafe pa stohastičen pristop iskanja. Poleg tega se bova pri drugem problemu še posebej osredotočila na vrednosti zelo blizu 0 in 1.

2 Potek dela

Najprej bova generirala grafe z največ 9 vozlišči, torej manjše grafe, s stohastično metodo pa bova generirala grafe z večjim številom vozlišč (generirala jih bova slučajno). Ker iz definicije regularnih grafov sledi, da imajo vsa vozlišča enako stopnjo, bo za vse regularne grafe vrednost $\sigma_t^{f(n)}(G) = 0$, ne glede na $f(n)$. Iz tega dejstva se zdi, da bodo imeli pri vseh treh problemih največjo $\sigma-$nepravilnost neregularni grafi. Za vse generirane grafe bova izračunala popolno $\sigma-$nepravilnost, glede na podane probleme in izrisala graf ali grafe, pri katerih so izračunane vrednosti največje, ter ugotavljala njihove lastnosti.

2.1 Prvi problem

Najprej za $f(n) = \frac{1}{n}$. Pri manjših graf, kjer je $f(n) = \frac{1}{n}$, število $\frac{1}{n}$ ni zelo majhno, zato bo $\sigma_t^{f(n)}(G)$ bolj občutljiva na razlike v stopnjah. Zdi se, da bodo grafi z največjo $\sigma_t^{f(n)}(G)$ tisti, ki vsebujejo največ vozlišč različnih stopenj. Neregularni grafi bodo vedno imeli večjo vrednost $\sigma_t^{f(n)}(G)$ kot regularni grafi, saj za regularne grafe velja $\sigma_t^{f(n)}(G) = 0$. Ta primer bi lahko spadal pod tretji problem, saj velja $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

2.2 Drugi problem

Pri $f(n) = c$, $c \in (0, 1)$, je eksponent konstanten, neodvisen od števila vozlišč n. Neregularni grafi bodo še vedno imeli večjo vrednost $\sigma_t^c(G)$ kot regularni. Za večje grafe eksponent $c \in (0, 1)$ zmanjša vpliv velikih razlik med stopnjami, saj eksponent manjši od 1 zmanjšuje učinek večjih vrednosti $|d_G(u) - d_G(v)|$, torej ko bo c blizu 0, bo $|d_G(u) - d_G(v)|^c \approx 1$.

2.3 Tretji problem

Ko je $f(n)$ pozitivna funkcija, za katero velja $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$. To pomeni, da se eksponent v izrazu $\sigma_t^{f(n)}(G)$ zmanjšuje proti 0, ko n postaja zelo velik. Za $f(n)$, ki hitro padajo proti 0, postanejo večje razlike manj pomembne, saj je $|d_G(u) - d_G(v)|^{f(n)} \approx 1$ in posledično $\sigma_t^{f(n)}(G) \approx \sum_{u,v\subseteq V(G)} 1$. Za manjše grafe, kjer je $f(n)$ še vedno relativno velika, bodo razlike v stopnjah bolj vplivale na vrednost $\sigma_t^{f(n)}(G)$. Zdi se, da bi drevesa, ki dosežejo največjo vrednost $\sigma_t^{f(n)}(G)$, lahko bila zvezdna drevesa (to so drevesa, pri katerih ima eno vozlišče stopnjo $n - 1$, ostala pa stopnjo 1). Za večje grafe pa postanje razlike med stopnjami manj pomembne, saj je $|d_G(u) - d_G(v)|^{f(n)} \approx 1$ za vse u, v. Pri tem delu, sva se odločila, da bova za pozitivne funkcije, katere $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$, izbrala 9 različnih funkcij, ki različno hitro konvergirajo proti 0. Funkcije so razvrščene glede na hitrost njihovega približevanja vrednosti 0, od najhitreje padajočih do najpočasneje padajočih:

1. $f(n) = e^{-n^2}$
2. $f(n) = \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}$
3. $f(n) = e^{-n}$
4. $f(n) = \frac{1}{n^2}$
5. $f(n) = e^{-\sqrt{n}}$
6. $f(n) = \frac{|\cos(n)|}{n}$
7. $f(n) = \frac{\sin^2(n)}{n}$
8. $f(n) = \frac{1}{\ln^2(n)}$
9. $f(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$