DESCRIEREA SOLUȚIILOR
OLIMPIADA JUDEȚEANĂ DE INFORMATICĂ
CLASA A XI/XII-A

Problema 1: Dulciuri

Propusă de: stud. doctorand Tamio-Vesa Nakajima, Facultatea de Informatică, Universitatea Oxford

Subtaskul 1 — 20 puncte. Pentru primul subtask, observăm că soluția pentru o degustare este dată de raportul dintre suma îndulcirilor care au afectat acea degustare, și distanța orizontală pe care o parcurge degustarea. Prima valoare se poate calcula efectiv parcurgând îndulcirile relevante.

Subtaskul 2 — 20 puncte. Pentru al doilea subtask, observăm ca soluția pentru o interogare verticală este dată de suma îndulcirilor verticale care afectează acea interogare, plus rezultatul de la subtaskul 1. Acestea se pot calcula asemănător cu subtaskul 1 — parcurgând efectiv toate îndulcirile de până acum. Totodată o interogare orizontală se rezolvă analog cu o interogare verticală.

Subtaskul 3 — 10 puncte. Vom face acum câteva observații suplimentare.

Observatia 1. Dulceața totală este egală cu dulceața datorată îndulcirilor verticale plus dulceața datorată îndulcirilor orizontale.

Astfel, la fiecare pas ne interesează doar dulceața datorată îndulcirilor orizontale sau verticale *separat* — în alte cuvinte, îndulcirile verticale și orizontale sunt *independente*. Vom descrie cum se calculează dulceață datorată îndulcirilor verticale, cele orizontale tratându-se analog. Așadar, care este această dulceață?

Observatia 2. Considerăm o interogare de la (x, y) la (x', y'). Fie v_i suma tuturor îndulcirilor verticale pentru fâșia $i \leq x < i + 1$. Presupunem fără pierdere de generalitate că $x \leq x'$. Dacă $x = x'$ atunci dulceața datorată îndulcirilor verticale este v_x; altfel este:

$$\frac{\sum_{i=x}^{x'-1} v_i}{x' - x}.$$

Pentru al treilea subtask, valoarea din observația 2 se poate calcula efectiv, iterând prin toate îndulcirile.

Subtaskul 4 — 20 puncte. Pentru al patrulea subtask, valoarea din observația 2 se poate calcula folosind sume parțiale pe șirul v. Această tehnică se mai numește șmenul lui Mars.

Subtaskul 5 — 10 puncte. Pentru acest subtask observăm că șirul valorile din observația 2 se pot calcula parcurgând toate îndulcirile precedente.

Soluție completă. În acest subtask, pentru a calcula valorile din observația 2, menținem o structură de date ce va reprezenta secvența v. Această structură de date trebuie să poată simula incrementarea unui element v_i, și trebuie să poată calcula suma unei subsecvențe din șirul v_i. Mai multe structuri de date pot realiza acest lucru suficient de eficient pentru rezolvarea problemei: arbori indexați binari, arbori de intervale sau împărțirea în bucăți de $\sqrt{n}$.

Problema 2: Investiţie

Propusă de: prof. Mihai Bunget, Colegiul Naţional ,,Tudor Vladimirescu", Târgu Jiu

Rezolvarea problemei presupune cunoştinţe despre sume parţiale pe vector, respectiv matrice, puterile unei permutări, ciclurile unei permutări, ordinul unei permutări.

Ideea principală pentru rezolvarea acestei probleme, este să observăm că liniile matricei s sunt de fapt puterile permutării a.

Într-adevăr, avem $s[1][i] = a[i]$, $s[2][i] = s[1][a[i]] = a[a[i]] = a^2[i]$, $\forall i = \overline{1,N}$.

Inductiv, presupunând că $s[k][i] = a^k[i]$, deducem că $s[k+1][i] = s[k][a[i]] = a^k[a[i]] = a^{k+1}[i]$, $\forall i = \overline{1,N}$.

Cum liniile matricei s sunt puterile permutării a, puterile unei permutări fiind în număr infinit însă numărul permutărilor de ordin N este finit ($N!$), rezultă că deducem că va exista o putere a^{k+1} care coincide cu permutarea identică a^1, urmând ca mai apoi liniile matricei să se repete (să cicleze) cu o perioadă k. În cazul în care k e minim cu această proprietate, el se numeşte ordinul lui a.

O altă observaţie este faptul că orice permutare se poate descompune într-un produs de cicluri disjuncte. Un ciclu de lungime k este o secvenţă $i_1, i_2, ..., i_k$ astfel încât $a[i_1] = i_2, a[i_2] = i_3, ..., a[i_{k-1}] = i_k, a[i_k] = i_1$.

Această descompunere în cicluri se poate face astfel: pentru un indice i care nu a fost procesat aflăm $a[i], a[a[i]], a[a[a[i]]], ...$ până când obţinem valoarea i. Valorile astfel obţinute formează un ciclu, numărul valorilor reprezentând lungimea ciclului. Se poate vedea uşor, prin calculul puterilor sale, că ordinul unui ciclu este egal cu lungimea ciclului. De asemenea, ordinul unei permutări este egal cu cel mai mic multiplu comun al lungimilor ciclurilor disjuncte din descompunerea permutării.

De exemplu, pentru permutarea $a = [3, 4, 5, 2, 1]$, dscompunerea în cicluri o obţinem astfel: pentru $i = 1$ avem $a[i] = 3, a[a[i]] = 5, a[a[a[i]]] = 1$ şi astfel obţinem primul ciclu: $(1, 3, 5)$. Primul indice neprocesat este 2, pentru care avem: $i = 2, a[i] = 4, a[a[i]] = 2$ şi obţinem ciclul: $(2, 4)$.Deoarece lungimile celor două cicluri sunt 3, respectiv 2, deducem că ordinul permutării este 6.

Subtaskul 1 — 10 puncte. Pentru a putea calcula în $O(1)$ cele Q statistici, se precalculează sumele parţiale pentru vectorul a.

Se formează un nou vector b, astfel încât $b[i] = \sum_{j=1}^{i} a[j]$, calculul unei statistici pe intervalul de indici $[c_l, c_r]$ presupunând calculul $b[c_r] - b[c_{l-1}]$.

Complexitate $O(N + Q)$.

Notă. Pentru a rezolva acest subtask, putem să calculăm statistica cerută iterativ, prin parcurgerea secvenţei $[c_l, c_r]$, deoarece $c_r - c_l \leq 100$.

Subtaskul 2 — 20 puncte. Se generează matricea s a sumelor investite în cele M zile, apoi pentru a afla o statistică se calculează suma elementelor submatricei determinată de setul de valori z_i, z_f, c_l,c_r. Aici se aplică metoda ,,Brutus".

Complexitate $O(M \cdot N + Q \cdot M \cdot 100)$.

Subtaskul 3 — 12 puncte. Se generează matricea s a sumelor investite în cele M zile şi se calculează sumele parţiale 2D ale acestei matrice. Fiecare statistică se va calcula în $O(1)$.

Dacă notăm cu sp matricea sumelor partiale, atunci ea se poate calcula folosind recurenţa

$$sp[j][i] = sp[j][i-1] + col[i], \quad col[i] = col[i] + s[j][i], \forall j = \overline{1,M}, \ \forall i = \overline{1,N},$$

unde $sp[j][i] = \sum_{l=1}^{j} \sum_{c=1}^{i} s[l][c]$.

Calculul unei statistici cu parametrii z_i,z_f, c_l, c_r se face cu formula

$$sp[z_f][c_r] - sp[z_f][c_l - 1] - sp[z_i - 1][c_r] + sp[z_i - 1][c_l - 1].$$

Complexitate $O(M \cdot N + Q)$.

Notă. Pentru a rezolva acest subtask, se pot calcula sumele parţiale doar pe coloane, iar pentru a calcula o statistică se află suma pentru fiecare coloană în parte.

Subtaskul 4 — 24 puncte. Deoarece N are valoare mică, iar liniile matricei s reprezintă puterile permutării a, sirul a se va repeta în matricea s după un număr relativ mic de zile. Intuitiv, dacă $N = 50 = 2+3+5+7+11+13+9$, avem $cmmmc(2,3,5,7,11,13,9) = 90090$, valoarea maximă a ordinului unei permutări de lungime 50 fiind 180180.

Ordinul maxim al unei permutări de lungime N este notat $g(N)$ şi se numeşte funcţia lui Landau (A000793, OEIS). Pentru $N = 50$ avem $g(50) = 180180$.

Pentru matricea generată până la repetarea şirului a se vor calcula sumele parţiale 2D. Cum M este mult mai mare, se va folosi periodicitatea acestei matrice, adică se va afla de câte ori se repetă în intervalul $[z_i, z_f]$ matricea generată, la care se adaugă un rest ce nu completează o matrice întreagă.

Complexitate $O(N \cdot \text{ord}(a) + Q)$, unde $\text{ord}(a)$ este ordinul permutării a.

Notă. Pentru a rezolva acest subtask, nu este necesar să știm care este ordinul maxim posibil, ci doar să observăm că liniile matricei ciclează.

Subtaskul 5 — 34 puncte. Pe lângă ideea principală enunţată anterior, mai trebuie observat că pe fiecare coloană a matricei s se repetă periodic aceleaşi elemente, mai exact elementele permutării a care formează un ciclu. Într-adevăr, elementele matricei s situate pe coloana i sunt, în ordine, $a[i], a[a[i]], a[a[a[i]]], \ldots, i$, care apoi se repetă.

Astfel, vom descompune mai întâi permutarea a în cicluri , pentru fiecare element al ciclului reţinând poziţia sa în ciclu. De asemenea, pentru fiecare ciclu vom face sumele parţiale ale elementelor sale.

Pentru a calcula o statistică, vom afla pentru fiecare coloană cuprinsă între c_l şi c_r suma elementelor cuprinse între zilele z_i şi z_f. Cum aceste elemente sunt elementele unui ciclu care se repetă de mai multe ori, vom afla de câte ori se repetă şi vom multiplica acest număr cu suma elementelor ciclului, rămânând şi un rest care se va calcula prin aflarea poziţie în ciclu a elementelor rămase. Se vor însuma rezultatele obţinute pentru fiecare coloană în parte, dintre coloanele cu indicii de ordine de la c_l la c_r.

Complexitate $O(N + Q \cdot 100)$.

Problema 3: Superhedgy

Propusă de: stud. Mihaela Cismaru, NetRom Software, Universitatea din Craiova

Subtaskul 1 — 20 puncte. Pentru 20 de puncte este suficientă calcularea tuturor traseelor posibile și a efortului depus pentru acestea prin metoda backtracking. Se afișează minimul dintre acestea.

Subtaskul 2 — 20 puncte. Pentru alte 20 de puncte este necesară o implementare de complexitate $O(L_{Total})$. Dat fiind că efortul de a folosi liftul va fi mereu 0 putem alege fără ezitare să schimbăm partea orașului în care ne aflăm pentru ca următoarea miscare să aibă valore minimă. Pentru aceast subtask functionează o abordare de tip greedy.

Subtaskul 3 — 40 puncte. Pentru alte 40 de puncte este necesară o implementare tot de complexitate $O(L_{Total})$ dar de această dată costul lifturilor poate fi nenul, astfel folosirea lifturilor nu este mereu optima. Soluția va fi implementarea unei dinamici. Calculm, pentru $1 \leq i \leq N$ și $1 \leq j \leq M$:

$$D_{sus}[i] = \text{efortul minim de a ajunge pe pozitia } i \text{ in partea de sus a orasului,}$$
$$D_{jos}[i] = \text{efortul minim de a ajunge pe pozitia } i \text{ in partea de jos a orasului.}$$

Pentru a calcula aceste valori vom avea, pentru $1 \leq i \leq N$ și $1 \leq j \leq M$, formulele:

$$D_{sus}[i] = \min(D_{sus}[i-1] + 1, D_{jos}[i] + E_i + E'_i),$$
$$D_{jos}[i] = \min(D_{jos}[i-1] + 1, D_{sus}[i] + E'_i + E_i).$$

Subtaskul 4 — 20 puncte. Pentru alte 20 de puncte este necesar calcularea efortului in complexitate de doar $O(N + M)$. Putem realiza acest lucru prin observatia ca putem pastra in memorie doar portiunile relevante din oras, anume portiunile unde se termina si incepe o noua cladire.