Autómatas Linealmente Acotado

En la unidad 1 se presentó la jerarquía de máquinas abstractas donde se puede apreciar que a partir del Autómata Finito incorporando recursos a cada máquina, éstas incrementan su capacidad de cómputo. Hasta este momento hemos estudiado dos máquinas Abstractas a nivel práctico: Autómatas Finitos y Autómatas con Pila, de las cuales el AF aumenta su capacidad de cómputo al incorporase una memoria de tipo LIFO convirtiéndose en un AP.

También, si un Autómata Finito posee la capacidad de poder decidir sobre el movimiento del cabezal (*izquierda (I), neutro (N), derecha (D) y la parada de la máquina (P)*) se convierte en un *Autómata Finito Determinista Bidireccional* (AFDB).

Un *AFDB* se define como:

$$AFDB = (\Sigma_E, \Gamma, Q, q_0, A, f)$$

$$\text{dónde: } \Gamma = \Sigma_E \cup \{\vdash, \dashv\} \text{ y donde } f: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \{I, N, D, P\}$$

La cinta de entrada presenta límites que se definieron en un nuevo alfabeto de cinta Γ, formado por el alfabeto de entrada Σ_E y dos símbolos especiales destinados a demarcar los extremos del medio de lectura ($\vdash$ y $\dashv$). Así, una cadena α a ser procesada es representada en la cinta por $\vdash\alpha\dashv$. Estos símbolos se los conoce como **BOT** (*Begin Of Tape*) y **EOT** (*End Of Tape*).

Los AFBD no son parte del estudio de la asignatura a nivel práctico pero son la base para las nuevas máquinas que se presentan en esta unidad.

Si le permitimos al Autómata Finito Bidireccional la posibilidad de grabar sobre la cinta se obtiene una nueva máquina abstracta llamada ***Autómata Linealmente Acotado* (*ALA*)**. La capacidad de grabar implica la ampliación del alfabeto de cinta Γ con la incorporación de símbolos auxiliares reunidos en un nuevo alfabeto Ω.

El *Autómata Linealmente Acotado* queda definido como:

$$ALA = (\Sigma_E, \Gamma, Q, q_0, A, f)$$

Σ_E **:** Alfabeto de símbolos de entrada

Γ **:** Alfabeto de cinta, $\Gamma = \Sigma_E \cup \{\vdash, \dashv\} \cup \Omega$

Q **:** Conjunto finito, no vacío, de estados posibles

q_0 **:** Estado inicial de operación, $q_0 \in Q$

A **:** Conjunto de estados de aceptación, $A \subseteq Q$

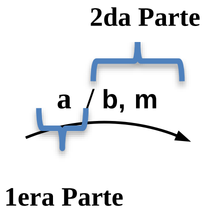
f **:** Función de transición:

$$f: \overbrace{Q \times \Gamma}^{\text{Estado actual y lectura del símbolo de la cadena de entrada}} \rightarrow \underbrace{Q \times \Gamma \times \{I, N, D, P\}}_{\text{Próximo Estado, grabación en la cinta y movimiento del cabezal para la lectura de próximo símbolo de la cadena}}$$

En el diseño de Autómatas Finitos nos centrábamos solo en las transiciones de estados y la lectura de la cadena. Ahora con los ALA no solo tenemos que determinar el próximo estado si no que debemos conocer qué grabar en la cinta y cuál es el próximo símbolo a leer en la cadena de entrada, son nuevos recursos que hay que aprender a gestionar.

Representación de las transiciones

Las transiciones en un ALA en un grafo se definen de la siguiente manera:



Con **a** y **b** $\in$ **Γ*** y **m**$\in${I, N, D, P}

<u>1era Parte:</u> se corresponde con la lectura de un símbolo de la cadena de entrada, pertenece al alfabeto de cinta porque se puede leer $\Gamma = \Sigma_E \cup \{\vdash, \dashv\} \cup \Omega$, es decir, un símbolo que pertenece al alfabeto de entra, o un símbolo de inicio o fin de cadena, o un símbolo auxiliar.

<u>2da Parte:</u> en este momento definimos el símbolo a grabar sobre la cinta que puede ser el mismo símbolo que se leyó u otro distinto (un símbolo que pertenece al alfabeto de entra, o un símbolo de inicio o fin de cadena, o un símbolo auxiliar) y determinamos el movimiento del cabezal, estos pueden ser:

I (izquierda): próximo símbolo a leer es el que se encuentra inmediatamente a la izquierda del símbolo actual donde se encuentra posicionado el cabezal

D (derecha): próximo símbolo a leer es el que se encuentra inmediatamente a la derecha del símbolo actual donde se encuentra posicionado el cabezal

N (neutro): próximo símbolo a leer es el mismo en el que se encuentra actualmente

P (parada): no hay más movimiento de cabezal, se utiliza al finalizar el autómata

Actividades Prácticas

Ejercicios propuestos del Autómata Linealmente Acotado (ALA)

Ejercicio 1

Para cada uno de los siguientes ítems, construir un autómata linealmente acotado que dada una cadena $\alpha \in \{0, 1\}^+$ escrita en su cinta y encerrada entre los símbolos de inicio y fin de cinta, acepte aquellas que:

a) Tengan un número par de ceros.
b) Tengan un número impar de unos.
c) Tengan un número par de caracteres.
d) Tengan a la vez, un número par de ceros y un número par de unos.

Nota: cabe aclarar que se presenta una solución de cada ejercicio pero esto no implica que pueda tener otros diseños de solución el autómata y ser correctos, esto depende de cada diseñador.

Solución Ejercicio 1)a) *Tengan un número par de ceros.*

Como primer paso debemos analizar el lenguaje que debe reconocer el ALA. Para este ejercicio el alfabeto es $\alpha \in \{0, 1\}^+$, es decir que tenemos el lenguaje formado por todas las palabras que se pueden formar con esos símbolos pero de ese universo el autómata solo debe reconocer las que contienen un número par de ceros:

$\Sigma_E^+ = \{0, 1\}^+ = \{0,1\}^1 \cup \{0,1\}^2 \cup \{0,1\}^3 \cup \ldots = \{0,1,00,01,10,11,000,001,010,011,100,101,110,\ldots\}$

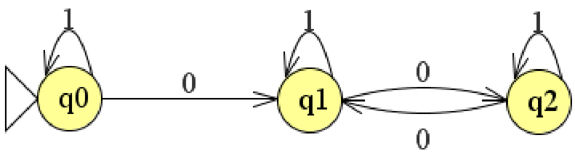
En este caso en el que las cadenas no tienen una longitud fija se aconseja comenzar a definir las cadenas más cortas, en este lenguaje la cadena más corta que debe reconocer el ALA es:

├ 00 ┤

Siguiendo con el análisis del lenguaje, el autómata debe recocer cualquier cadena que comience o termine con 0 (cero) o con 1 (uno), que contenga una cantidad par de ceros y no necesariamente consecutivos.

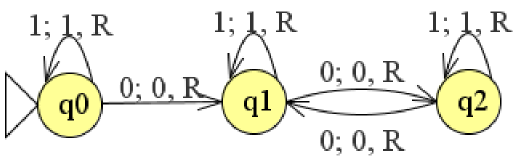
Ejemplo de cadenas a ser reconocidas: **├ 100┤ , ├ 01011 ┤ , ├ 111100 ┤**

Este tipo de lenguaje a reconocer ya ha sido parte de estudio en otras máquinas como AF y la lógica es la misma: solo debo transitar con la lectura de 0 (ceros) para poder determinar la paridad de los mismos:



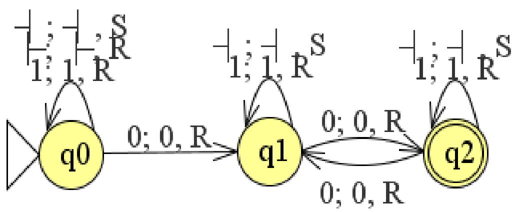
El ALA tiene otros recursos que debemos analizar: símbolo que grabamos en la cinta y el próximo símbolo a leer. Con respecto a la grabación de la cinta en este ejercicio no necesitamos grabar un símbolo distinto, no modificamos la cinta de entrada y además, necesitamos recorrer toda la cadena hacia la derecha, no necesitamos volver a leer algún otro símbolo, por lo tanto el movimiento siempre será hacia la dereha.

Con todo lo analizado hasta ahora, comencemos a diseñar el ALA:



<u>Nota</u>: El simulador JFLAP no contempla epecíficamente la construcción de ALAs pero se podría utilizar la opción de construir una máquina de Turing, pensando en que la cadena está limitada por los símbolos ├ y ┤ además, no está permitido transitar ni escribir sobre la cinta más allá de dichos símbolos. Bajo estas consideraciones, el ALA se presenta a través del simulador JFLAP que en utiliza un punto y coma para separar las partes de la transición y los movimiento están escritos en inglés (Right, Left, Stop).

Pero obviamente no está completo, el ALA tiene símbolos de inicio y fin de cadena que deben incorporarse y también el estado de aceptación:



ALA = ({0,1}, {├ , ┤, 0, 1} {q0,q1,q2}, q0, {q2}, f)

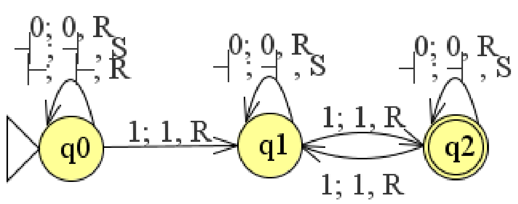
Se comienza la lectura de la cadena por el símbolo de inicio de cadena: ├ y finaliza cuando se lee el símbolo de fin de cadena: ┤.

Como se puede apreciar ALA puede tener la lectura del símbolo ┤ en los tres estados, a continuación se justifican su presencia:

- Estado q0: es porque la cadena solo estuvo formada por símbolos 1 (unos) y nunca transitó a otro estado
- Estado q1: la cantidad de símbolos 0 (ceros) de la cadena leída es impar
- Estado q2: la cantidad de símbolos 0 (ceros) de la cadena leída es par

Ejercicio 1)b) *Tengan un número par de unos*

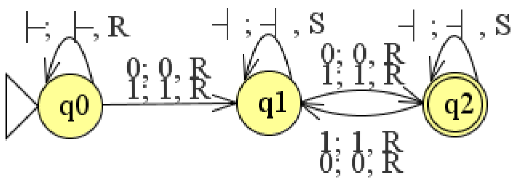
No existe dificultad con este ejercicio, es igual al anterior solo cambiamos los 1 (unos) por 0 (ceros) y viceversa.



ALA = ({0,1}, {├ , ┤, 0, 1} {q0,q1,q2}, q0, {q2}, f)

Ejercicio 1)c) *Tengan un número par de caracteres*

En este ejercicio se debe verificar la *longitud de la cadena* y que la misma sea par (sin tener en cuenta los símbolos de inicio y fin de cadena).

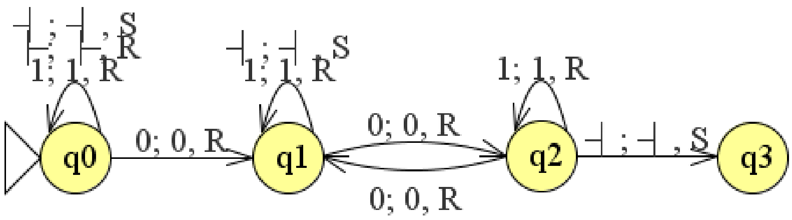


ALA = ({0,1}, {├ , ┤, 0, 1}, {q0,q1,q2}, q0, {q2}, f)

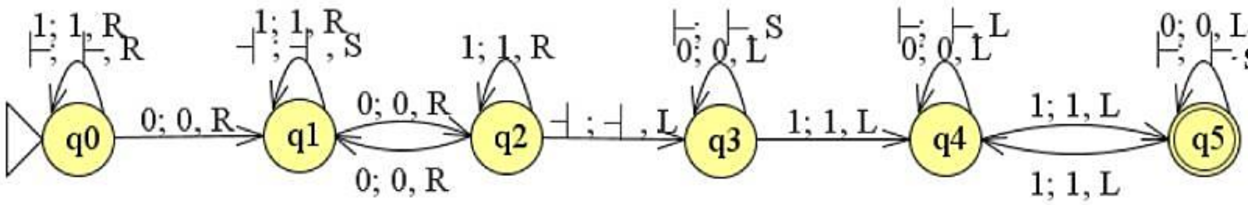
Ejercicio 1)d) *Tengan a la vez, un número par de ceros y un número par de unos*

En ALA debe presentar las funcionalidades del ejercicio a) y b) juntos, es decir, el mismo autómata deber verificar paridad de 0(ceros) y paridad de 1(unos) en una misma cadena. La solución más simple y ya conociendo las funcionalidades de ambos es hacer una paridad por vez, el problema es que si por ejemplo comenzamos por verificar la paridad de 0(ceros) finalizamos le lectura de toda la cadena, entonces *¿cómo verificamos la paridad de 1(unos)?* Debemos incorporar el movimiento del cabezal a la izquierda para volver a recorrer toda la cadena.

Comenzamos por la paridad de 0(ceros):



Como podemos apreciar el estado q2 ya no es el estado final y cuando llegamos a la lectura del símbolo de fin de cadena incorporamos el movimiento del cabezal a la izquierda para poder volver a leer la cadena, en este momento se puede resolver la paridad de dos manera: volviendo todo el cabezal de lectura hacia la izquierda y comenzado desde el primer símbolo de la cadena se verifica la paridad de 1(unos) o a medida que se realiza la lectura de la cadena a la izquierda se va verificando la paridad, a continuación se presenta la solución con ésta última opción:



ALA = ({0,1}, {├ , ┤, 0, 1}, {q0,q1,q2,q3,q4,q5}, q0, {q5}, f)

Para una mejor comprensión se presenta la lectura de la cadena α = 1100:

00	├	1	1	0	0	┤
	q_0					
01	├	1	1	0	0	┤
		q_0				
02	├	1	1	0	0	┤
			q_0			
03	├	1	1	0	0	┤
				q_0		
04	├	1	1	0	0	┤
					q1	
05	├	1	1	0	0	┤
						q_2
06	├	1	1	0	0	┤
					q_3	
07	├	1	1	0	0	┤
				q3		
08	├	1	1	0	0	┤
			q3			
09	├	1	1	0	0	┤
		q4				
10	├	1	1	0	0	┤
	q5					
11	├	0	1	1	0	┤
	q5					

Ejercicio 2

Identificar las posibles condiciones de error cuando el autómata linealmente acotado del ejemplo 6.2 verifica que las cadenas de entrada son palíndromas de largo par o impar. Incorporar el estado de error al correspondiente grafo y completar la tabla de la función de transición.

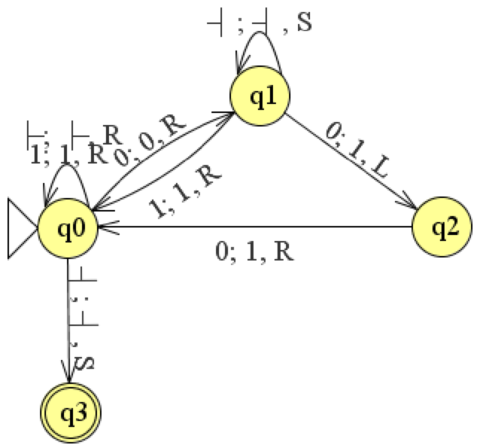
Dejamos este ejercicio para que cada alumno pueda analizar y construir el mismo

Ejercicio 3

Proponer un ALA que reemplace la presencia de subcadenas **00** por **11** en una cadena que no tiene una longitud predeterminada.

Por ejemplo, el ALA transformará la cadena α=**00101100** en la cadena β=**11101111**.

Solución:



ALA = ({0,1}, { ├ , ┤ , 0, 1}, {q0,q1,q2,q3}, q0, {q3}, f)