	填空	选择	解答
极限计算与连续函数性质		15	17，19
连续性、可微性判定			
微分	6		
偏导数计算	2		
方向导数、梯度	1，3	8，13	
复合函数链索法则	7		
Taylor 展开	4		
曲线		8，10	
曲面		9	
无约束极值		14	17
条件极值		13	18
隐函数定理、逆映射定理	5	8，14	19
含参积分		12	
广义含参积分		11，	16

一、填空题（每题 4 分）

1. 函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2}{2}+y^2$ 在点 $(3,2)$ 处的方向导数的最大值为____________

答案： 5

解析： $\operatorname{grad} f(3,2)=(3,4)$.

2. 设函数 $z=z(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x,y)=x$，$z(x,0)=x$，，$z(0,y)=y^2$. 则 $z(2,1)=$____________。

答案： 5

解析： $z(2,1)=z(2,0)+\int_0^1 z_y(2,t)\mathrm{d}t=2+\int_0^1\left(z_y(0,t)+\int_0^2 z_{xy}(u,t)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t=2+\int_0^1\left(2t+\int_0^2 u\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t=5$.

3. 已知可微函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处沿 $\mathbf{u}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ 和 $\mathbf{v}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$ 的方向导数的值都是 $\sqrt{2}$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处沿 $\mathbf{w}=(0,-1)$ 的方向导数的值为____________。

答案： 0

解析： $\mathbf{w}=\dfrac{\mathbf{v}-\mathbf{u}}{\sqrt{2}}$， $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{w}}(0,0)=\mathrm{d}f(0,0)\mathbf{w}=\dfrac{\mathrm{d}f(0,0)\mathbf{v}-\mathrm{d}f(0,0)\mathbf{u}}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,0)-\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0)\right)=0$

4. 已知二元函数 $f(u,v)$ 在点 $(0,0)$ 处的二阶 Taylor 展开式为

$$f(u,v)=1+2u-uv+v^2+o(u^2+v^2),\quad (u,v)\to(0,0),$$

令 $w=f(x+y+z,xyz)$. 则 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}(1,0,-1)=$____________。

答案： 1

解析：

$$
\begin{aligned}
w(x,y,-1) &= f(x+y-1,-xy) \\
&= 1+2(x+y-1)-(x+y-1)(-xy)+(-xy)^2+o((x+y-1)^2+(-xy)^2) \\
&= 1+2(x-1)+2y+(x-1)y+2y^2+o((x-1)^2+y^2)
\end{aligned}
$$

所以 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}(1,0,-1)=1$.

也可以用链索法则，

$w(x,y,-1)=f(x+y-1,-xy)$， $\dfrac{\partial w}{\partial y}(x,0,-1)=f_u(x-1,0)-xf_v(x-1,0)$，

$\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}(1,0,-1)=f_{uu}(0,0)-f_v(0,0)-f_{vu}(0,0)=1$.

5. 方程 $\sin(x+y)+ze^z-ye^x=0$ 在 $(x,y)=(0,0)$ 的一个邻域中确定了唯一的隐函数 $z=z(x,y)$. 则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}(0,0)=$______________。

答案： 0

解析： $F(x,y,z)=\sin(x+y)+ze^z-ye^x$，由 $F(0,0,z)=0$ 解得 $z=0$，又 $\dfrac{\partial F}{\partial z}(0,0,0)=1\neq 0$，所以方程 $\sin(x+y)+ze^z-ye^x=0$ 在 $(x,y)=(0,0)$ 的一个邻域中确定了唯一的 C^∞ 隐函数 $z=z(x,y)$.令 $x=0$，在 $\sin y+ze^z-y=0$ 两边对 y 求导，然后令 $y=z=0$，得到 $z_y(0,0)=0$.

6. 函数 $z=\dfrac{2xy}{x+y}$ 在 $(x,y)=(1,1)$ 处的微分为 $dz=adx+bdy$. 则 $a+b=$______________。

答案： 1

解析： $dz=\dfrac{2y}{x+y}dx+\dfrac{2x}{x+y}dy-\dfrac{2xy}{(x+y)^2}(dx+dy)=\dfrac{1}{2}dx+\dfrac{1}{2}dy$，所以 $a+b=1$.

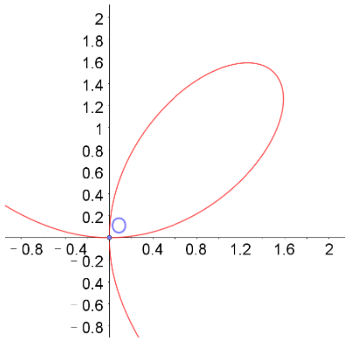
7. 设 $u=\cos(2x-y)$. 则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}+2\dfrac{\partial u}{\partial y}=$______________。

答案： 0

解析： 直接计算可得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}+2\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$.

二、选择题（每题 4 分）

8. 图中红色曲线是一个 C^{∞} 函数 $f(x,y)$ 的一条等高线。



则 f 在原点 O 处的梯度向量是

(A) 零向量

(B) 沿 x 轴的一个非零向量

(C) 沿 y 轴的一个非零向量

(D) 沿直线 $y=x$ 的一个非零向量

答案：A

解析：如果梯度向量不为零，则由隐函数定理知 $f(x,y)$ 的等高线在原点 O 附近应该是一个函数图像。但所给曲线不满足这个必要条件。

9. 曲面 $S: \mathrm{e}^{xyz}+x-y+z=3$ 在点 $(1,0,1)$ 处的法线

(A) 与 y 轴相交；

(B) 平行于 y 轴；

(C) 与 y 轴不在同一平面内，但与 y 轴垂直；

(D) 以上选项都不对.

答案：C

解析：切平面为 $(x-1)+(z-1)=0$，法线为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z-1}{1}$，所以答案为 C.

10. 在点 $(1,1,1)$ 处，曲线 $\begin{cases} x^2+y^3+z^4=3 \\ x^3+y^4+z^5=3 \end{cases}$

(A) 切线方程为 $\begin{cases} 2x+3y+4z=3 \\ 3x+4y+5z=3 \end{cases}$

(B) 切线方程为 $\begin{cases} 2(x-1)+3(y-1)+4(z-1)=0 \\ 3(x-1)+4(y-1)+5(z-1)=0 \end{cases}$

(C) 法平面方程为 $(x-1)+2(y-1)+(z-1)=0$

(D) 法平面方程为 $x+2y+z=0$

答案：B

解析：直接计算可得

11. 记含参广义积分 $f(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}t$，$x>0$. 则

(A) $f(x)$ 关于 $x\in(0,+\infty)$ 一致收敛；

(B) 对所有 $\delta_0>0$， $f(x)$ 关于 $x\in(\delta_0,+\infty)$ 一致收敛；

(C) 对所有 $\delta_0>0$， $f(x)$ 关于 $x\in(0,\delta_0)$ 一致收敛；

(D) 以上选项都不对

答案：B

解析：$0<\mathrm{e}^{-tx}\le\mathrm{e}^{-\delta_0 x}$，由 Weierstrass 判别法知 B 成立。$\int_n^{2n}\mathrm{e}^{-t/n}\mathrm{d}t=n\left(\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-2}\right)\to+\infty$，所以 C 不对，从而 A 也不对。

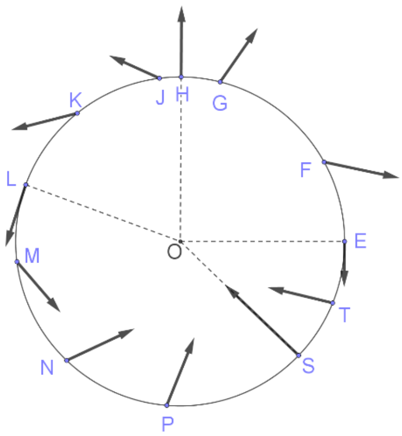
12. 含参积分 $f(x)=\int_0^1\frac{\sin(tx)}{t}\mathrm{d}t$

(A) 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，但在 $x=0$ 处不可微；
(B) 仅在 $x=0$ 处间断；
(C) 是 $\mathbb{R}$ 上的可微函数；
(D) 以上选项都不对

答案：C

解析：$g(t,x)=\begin{cases}\frac{\sin(tx)}{t}, & t\neq 0,\\ x, & t=0.\end{cases}$ $g(t,x)=x\int_0^1\cos(stx)\mathrm{d}s$ 是可微函数，所以 $f(x)$ 可微。

13. 如图，已知 f 是一个二元连续可微函数，它在单位圆周 $x^2+y^2=1$ 上各点处的梯度都是非零向量，并且仅在 E,L 两点处的梯度向量与圆周相切，仅在 H,S 两点处的梯度与圆周正交。



则函数 f 在单位圆周 $x^2+y^2=1$ 上，

(A) 在 H 处取最大值，在 S 处取最小值；
(B) 在 H 处取最小值，在 S 处取最大值；
(C) 在 E 取最大值，在 L 取最小值；
(D) 在 E 取最小值，在 L 取最大值。

答案：B

解析：f 连续，在有界闭集 $x^2+y^2=1$ 上有最大值和最小值。

除 H,S 外，其他点都不是极值点。在 H 点附近 f 的梯度沿圆周切线方向远离 H，说明 H 是极小值点，在 V 点附近 f 的梯度沿圆周切线方向指向 S，说明 S 是极大值点。H 和 S 是仅有的极值点，所以它们分别是最小值点和最大值点。

14. 已知方程 $\mathrm{e}^x+y^2+y-\ln(1+x)\cos y-1=0$ 在 $(x,y)=(0,0)$ 的一个邻域中确定了一个 C^∞

隐函数 $y=y(x)$。则

(A) $x=0$ 是这个隐函数的极小值点；

(B) $x=0$ 是这个隐函数的极大值点；

(C) $x=0$ 是这个隐函数的驻点，但不是极值点；

(D) $x=0$ 不是这个隐函数的驻点。

答案：B

解析：隐函数求导得到 $y'(0)=0$， $y''=-2$

15. 设 $f(x,y)=\dfrac{|x|+y^2}{x^4+y^4+1}$. 则

(A) f 既有最大值，也有最小值；

(B) f 有最小值，没有最大值；

(C) f 有最大值，没有最小值；

(D) f 既没有最大值，也没有最小值。

答案：A

解析： $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y)=0$，但 $f(x,y)=\dfrac{|x|+y^2}{x^4+y^4+1}\geq 0=f(0,0)$. 所以 f 有最小值。

$f(1,1)=\dfrac{2}{3}>0$，所以存在 $\delta>0$ 使得对任意

$(x,y)\in U=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<\delta\right\}\cup\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2>\dfrac{1}{\delta}\right\}$， $f(x,y)<\dfrac{1}{3}$.

f 连续，在有界闭集 $K=\left\{(x,y)\,|\,\delta\leq x^2+y^2\leq\dfrac{1}{\delta}\right\}$ 上有最大值，这个最大值就是 f 在整个 $\mathbb{R}^2$ 上的最大值。

三、解答题（10 分）

16. 计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan bx-\arctan ax}{x}\mathrm{d}x$，其中 $b>a>0$.

解：注意到 $\frac{\arctan bx-\arctan ax}{x}=\int\limits_a^b\frac{dt}{1+t^2x^2}$. 由此得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan bx-\arctan ax}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^b\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2x^2}=\int_a^b\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+t^2x^2}=\int_a^b\frac{\pi\mathrm{d}t}{2t}=\frac{\pi}{2}(\ln b-\ln a).$$

四、解答题（13 分）

17. 证明存在常数 C 使得 $x^2+y^2\le C\mathrm{e}^{x+y-2},\forall x\ge 0,\forall y\ge 0$；并求这样的常数 C 的最小值。

解 1： 令 $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{\mathrm{e}^{x+y}}(x\ge 0,y\ge 0)$. 则 $f_x(x,y)=\frac{2x-(x^2+y^2)}{\mathrm{e}^{x+y}}$， $f_y(x,y)=\frac{2y-(x^2+y^2)}{\mathrm{e}^{x+y}}$.

由 $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ 解得 $x=y=0$ 或 $x=y=1$. $f(0,0)=0$， $f(1,1)=2\mathrm{e}^{-2}$.

沿边界 $x=0$： $f(0,y)=\frac{y^2}{\mathrm{e}^y}$， $f_y(0,y)=\frac{y(2-y)}{\mathrm{e}^y}$， 所以 $f(0,y)=\frac{y^2}{\mathrm{e}^y}$ 在 $y=2$ 处取最大值 $f(0,2)=4\mathrm{e}^{-2}$.

由对称性，沿边界 $y=0$， $f(x,0)=\frac{x^2}{\mathrm{e}^x}$ 在 $x=2$ 处取最大值 $f(2,0)=4\mathrm{e}^{-2}$.

因为 $x\ge 0,y\ge 0$，所以当 $(x,y)\to\infty$ 时， $x+y=\sqrt{(x+y)^2}\ge\sqrt{x^2+y^2}\to+\infty$， 从而

$0\le f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{\mathrm{e}^{x+y}}\le\frac{(x+y)^2}{\mathrm{e}^{x+y}}\to 0$,

因此存在 $R>5$，使得当 $\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\ge R,\\ x,y\ge 0\end{cases}$ 时， $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{\mathrm{e}^{x+y}}<\mathrm{e}^{-2}$.

连续函数 $f(x,y)$ 在有界闭集 $\begin{cases}x\ge 0,y\ge 0\\ \sqrt{x^2+y^2}\le R\end{cases}$ 上有最大值。

如果这最大值在开集 $\begin{cases}x>0,y>0\\ \sqrt{x^2+y^2}<R\end{cases}$ 内取得，则最大值点是临界点，即 $(0,0)$ 或 $(1,1)$。

但 $f(0,0)<f(2,0)$， $f(1,1)<f(2,0)$。所以最大值点在 $\begin{cases}x\ge 0,y\ge 0\\ \sqrt{x^2+y^2}\le R\end{cases}$ 的边界上达到。

所以 $(2,0),(0,2)$ 是 $f(x,y)$ 的最大值点，最大值为 $f(2,0)=f(0,2)=4\mathrm{e}^{-2}$. 因此 $f(x,y)\le 4\mathrm{e}^{-2}$.

解 2： 令 $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{\mathrm{e}^{x+y}}(x\ge 0,y\ge 0)$. 则 $f(x,y)=r^2\mathrm{e}^{-r\sqrt{2}\cos(\theta-\frac{\pi}{4})}=g(r,\theta)$

$g_\theta=r^3\mathrm{e}^{-r\sqrt{2}\cos(\theta-\frac{\pi}{4})}\sqrt{2}\sin(\theta-\dfrac{\pi}{4})$， 所以当 $0\le\theta<\dfrac{\pi}{4}$ 时， $g_\theta<0$；当 $\dfrac{\pi}{4}<\theta\le\dfrac{\pi}{2}$ 时， $g_\theta>0$.

所以对固定的 $r>0$，$g(r,0)=g(r,\dfrac{\pi}{2})=r^2\mathrm{e}^{-r}$， $g(r,\dfrac{\pi}{4})=r^2\mathrm{e}^{-\sqrt{2}r}$ 分别是关于 θ 的最大值和最小值。

$\left(r^2\mathrm{e}^{-Ar}\right)'=\mathrm{e}^{-Ar}r(2-Ar)$， $r^2\mathrm{e}^{-Ar}$ 在 $r=\dfrac{2}{A}$ 时取最大值 $\dfrac{4}{A^2}\mathrm{e}^{-2}$.

所以 $g(r,\theta)\le g(r,0)=r^2\mathrm{e}^{-r}\le g(2,\dfrac{\pi}{2})=4\mathrm{e}^{-2}$.

五、解答题（12 分）

18. 如果用一块矩形铁板折成一个容积不小于1立方米的无盖的长方体容器，问这块矩形铁板的长和宽各为多少可使铁板面积最小？（注意不是该容器表面积）

解 1：设矩形纸板的长和宽分别为 x 米和 y 米，盒子高度为 z 米。记 $u=x-2z,v=y-2z$，则

$$\begin{cases}\min\ (u+2z)(v+2z)\\ \text{s.t.}\quad uvz=1\end{cases}$$

$$L(u,v,z,\lambda)=(u+2z)(v+2z)-\lambda\left[uvz-1\right]$$

$$\begin{cases}L_u(u,v,z,\lambda)=v+2z-\lambda vz=0\\ L_v(u,v,z,\lambda)=u+2z-\lambda uz=0\\ L_z(u,v,z,\lambda)=8z+2(u+v)-\lambda uv=0\\ L_\lambda(u,v,z,\lambda)=-\left[uvz-1\right]=0\end{cases}$$

解得 $u=v=4z$，再由最后一个方程得到 $16z^3=1$，所以 $u=v=\sqrt[3]{4},\ z=\dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}},\ \lambda=3\sqrt[3]{2}$.

此时 $(u+2z)(v+2z)=36z^2=\dfrac{9}{\sqrt[3]{4}}$.

$$(u+2z)(v+2z)=uv+2z(u+v)+4z^2\ge uv+4z\sqrt{uv}+4z^2=\frac{1}{z}+4\sqrt{z}+4z^2=f(\sqrt{z})$$

不等号中等号成立当且仅当 $u=v=\dfrac{1}{\sqrt{z}}$.

$f(t)=\dfrac{1}{t^2}+4t+4t^4$，

$$f'(t)=-\frac{2}{t^3}+4+16t^3=(t-a)(16t^2+16at+16a^2+\frac{16a^3+4}{t}+\frac{16a^4+4a}{t^2}+\frac{16a^5+4a^2}{t^3})，$$

其中 $a=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$. 所以 $f(t)$ 在 $t=a$ 处取最小值。所以 $u=v=\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}},\ z=\dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}}$ 时矩形面积最小。

此时矩形长宽都是 $\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$.

解 2：设矩形纸板的长和宽分别为 x 米和 y 米，盒子高度为 z 米。则

$$xy = x\left(2z + \frac{1}{(x-2z)z}\right) = f(x,z),$$

$$f_x(x,z) = 2z + \frac{1}{(x-2z)z} - x\frac{1}{(x-2z)^2 z} = \frac{2\left[z(x-2z)^2 - 1\right]}{(x-2z)^2}$$

所以当 $0 < x - 2z < \frac{1}{\sqrt{z}}$ 时，$f_x(x,z) < 0$；当 $x - 2z > \frac{1}{\sqrt{z}}$ 时，$f_x(x,z) > 0$.

因此 $f(x,z) \ge f(2z + \frac{1}{\sqrt{z}}, z) = \left(2z + \frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2 = g(z)$.

$$g'(z) = 2\left(2z + \frac{1}{\sqrt{z}}\right)\left(2 - \frac{1}{2z\sqrt{z}}\right)$$

当 $0 < z < \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$ 时，$g'(z) < 0$；当 $z > \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$ 时，$g'(z) > 0$. 所以 $g(z)$ 在 $z = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$ 时取最小值。

$$f(x,z) \ge f(2z + \frac{1}{\sqrt{z}}, z) = \left(2z + \frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2 = g(z) \ge g\left(\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\right).$$

f 在 $z = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$，$x = 2z + \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \sqrt[3]{4} = \frac{3}{\sqrt[3]{2}}$，$y = 2z + \frac{1}{(x-2z)z} = \frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ 时达到最小值时。

六、解答题（5 分）

19. 设 $F:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ 是 C^1 映射，满足

(a) 对任意 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$，$F$ 在点 $\mathbf{x}$ 处的 Jacobi 矩阵都是可逆矩阵；

(b) 当 $\|\mathbf{x}\| \to +\infty$ 时，$\|F(\mathbf{x})\| \to +\infty$.

证明：

(1) $F:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ 是满射，即对任意 $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$，$F^{-1}\{\mathbf{y}\} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, F(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\right\}$ 是非空集合；

(2) 对任意 $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$，$F^{-1}\{\mathbf{y}\} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, F(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\right\}$ 是有限集合。

证明： (1) 令 $g(\mathbf{x}) = \|F(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\|^2$.

因为当 $\|\mathbf{x}\| \to +\infty$ 时，$\|F(\mathbf{x})\| \to +\infty$，

所以存在 $M > 0$ 使得当 $\|\mathbf{x}\| \ge M$ 时，$\|F(\mathbf{x})\| \ge \|F(\mathbf{0})\| + 2\|\mathbf{y}\| + 1$.

从而 $g(\mathbf{x}) \ge \left(\|F(\mathbf{x})\| - \|\mathbf{y}\|\right)^2 \ge \left(\|F(\mathbf{0})\| + \|\mathbf{y}\| + 1\right)^2 \ge \left(\|F(\mathbf{0})\| + \|\mathbf{y}\|\right)^2 + 1 \ge \|F(\mathbf{0}) - \mathbf{y}\|^2 + 1 = g(\mathbf{0}) + 1$.

因为 g 连续，所以 g 在有界闭集 $\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \le M\right\}$ 上有最小值 $g(\mathbf{x}_0)$，于是 $g(\mathbf{x}_0) \le g(\mathbf{0})$.

从而 $g(\mathbf{x}_0)$ 是 g 的极小值，而 g 是可微函数，所以 $\operatorname{grad} g(\mathbf{x}_0) = 0$.

$\operatorname{grad} g(\mathbf{x}_0) = 2JF(\mathbf{x}_0)(F(\mathbf{x}_0) - \mathbf{y}) = 0$，其中 $JF(\mathbf{x}_0)$ 是可逆矩阵，因此 $F(\mathbf{x}_0) - \mathbf{y} = 0$.

(2) 若存在 $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m$ 使得 $F^{-1}\{\mathbf{y}_0\} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \middle| F(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0\right\}$ 是无穷集合，则存在点列 $\left\{\mathbf{x}_n\right\}$ 使得 $F(\mathbf{x}_n) = \mathbf{y}_0$，且 $\mathbf{x}_i \ne \mathbf{x}_j \ \forall i \ne j$. 若 $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0$，则 $F(\mathbf{x}_0) = \lim\limits_{n \to +\infty} F(\mathbf{x}_n) = \mathbf{y}_0$.

由逆映射定理，存在 $\mathbf{x}_0$ 的邻域 U 和 $\mathbf{y}_0$ 的邻域 V，使得 $F: U \to V$ 有逆映射，于是在 U 内，$F(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0$ 有唯一解，这与 $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0$，$\mathbf{x}_i \ne \mathbf{x}_j$，$F(\mathbf{x}_n) = \mathbf{y}_0$ 矛盾。

所以点列 $\left\{\mathbf{x}_n\right\}$ 中不含有界子列（因为有界子列总有收敛子列，这会得到上述矛盾）。于是 $\|\mathbf{x}_n\| \to +\infty$. 由已知条件(1)，$\|F(\mathbf{x}_n)\| \to +\infty$. 但这与 $F(\mathbf{x}_n) = \mathbf{y}_0$ 矛盾。

所以，对任意 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$，$F^{-1}\{\mathbf{y}\} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \middle| F(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\right\}$ 是有限集合。