Chương 2: QUAN HỆ (Relation)

- Các khái niệm
- Quan hệ tương đương
- Quan hệ tứ tự
- Biểu diễn quan hệ hai ngôi hữu hạn

CÁC KHÁI NIỆM

- Quan hệ hai ngôi
- Quan hệ n-ngôi

QUAN HỆ HAI NGÔI

- Quan hệ hai ngôi: Một quan hệ giữa tập A và tập B (từ A đến B) là một tập con $R \subset$ của tập $A \times B$
  - Nếu $(a, b) \in R$, ký hiệu a R b, ta nói a quan hệ R với b
  - Một quan hệ giữa A và A được gọi là quan hệ trên A

QUAN HỆ HAI NGÔI

- **Ví dụ 1**: Cho A = {0, 1, 2}, B = {a, b}

  thì R= {(0, a), (0, b), (1, a)}

  là một quan hệ hai ngôi giữa A và B

- **Ví dụ 2**: Quan hệ bằng nhau "=" là một quan hệ hai ngôi R trên tập A bất kỳ: a R b khi và chỉ khi a = b

QUAN HỆ HAI NGÔI

- **Ví dụ 3**: Cho n > 1, định nghĩa quan hệ:

  a R b $\Leftrightarrow$ a - b chia hết cho n

  thì R là một quan hệ hai ngôi trên Z

Quan hệ này được gọi là quan hệ đồng dư modulo n trên Z

Nếu a R b thì ta viết $a \equiv b \pmod{n}$

Với n = 5, 2 R 7 vì 2 - 7 chia hết cho 5 hay $2 \equiv 7 \pmod{5}$

QUAN HỆ n-NGÔI

- Một quan hệ n-ngôi trên n tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là một tập con R của tích Descartes $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, ký hiệu $R(A_1, A_2, \ldots A_n)$
- **Ví dụ**: Quan hệ R(Z, Z, Z), tập con của $Z \times Z \times Z$, gồm các bộ ba (a, b, c), trong đó a, b, c là các số nguyên với $a < b < c$ là một quan hệ 3-ngôi trên Z

QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

- Một quan hệ hai ngôi R trên tập A có tính chất:
  - Phản xạ: nếu $\forall x \in A \Rightarrow x\ R\ x$
  - Đối xứng: nếu $\forall x, y \in A$, $x\ R\ y \Rightarrow y\ R\ x$
  - Bắc cầu: nếu $\forall x, y, z \in A$, $x\ R\ y$ và $y\ R\ z \Rightarrow x\ R\ z$
- Quan hệ tương đương: Một quan hệ R có các tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu được gọi là quan hệ tương đương.
- Ký hiệu: $\sim$

  nếu xRy thì ta nói x tương đương với y và viết $x \sim y$

QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

Ví dụ 1:

- Quan hệ "=" là các quan hệ tương đương
- Quan hệ tương đương "⇔" trên tập các mệnh đề là quan hệ tương đương
- Cho ánh xạ f: A→ B, định nghĩa quan hệ R trên A như sau:

$$x \, R \, y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

thì R là một quan hệ tương đương (bài tập)

QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

Ví dụ 2:

- Cho quan hệ φ trên tập số thực R được xác định như sau: $\forall x, y \in R$, $x \varphi y \Leftrightarrow x-y \in Z$. Chứng minh φ là một quan hệ tương đương
- **Chứng minh**: φ có tính phản xạ, đối xứng, bắc cầu
  - $\forall x \in R$, $x-x \in Z \Rightarrow x \varphi x$ (phản xạ).
  - $\forall x, y \in R$ và $x \varphi y$ thì $x-y \in Z \Rightarrow y-x \in Z \Rightarrow y \varphi x$ (đối xứng)
  - $\forall x, y, z \in R$ và $x \varphi y$, $y \varphi z$ thì $x-y \in Z$, $y-z \in Z \Rightarrow x-z = (x-y)+(y-z) \in Z \Rightarrow x \varphi z$ (bắc cầu)

LỚP TƯƠNG ĐƯƠNG

- Lớp tương đương: cho R là một quan hệ tương đương trên A và x $\in$A, tập hợp $\{y \in A \mid y \sim x\}$ được gọi là lớp tương đương chứa x, ký hiệu $\overline{x}$, x/~ hay [x]. Tập tất cả các lớp tương đương gọi là tập thương, ký hiệu A/~
- **Ví dụ**: xét quan hệ xRy $\Leftrightarrow$ x - y nguyên, thì
  - $\overline{x} = \{y \in A \mid y - x \text{ nguyên}\}$
  - $\overline{1.5} = \{\ldots, -1.5, -0.5, 0.5, 1.5, \ldots\}$

QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

- **Định lý 1**: Giả sử R là một quan hệ tương đương trên A khi ấy:
  - $\forall x \in A,\ x \in \overline{x}$
  - $\forall x, y \in A,\ xRy \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{y}$
  - Hai lớp tương đương x và y sao cho $\overline{x} \cap \overline{y} \neq \varnothing$ thì $\overline{x} = \overline{y}$

QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

- Chứng minh:
  - Do tính phản xạ $x \sim x \Rightarrow x \in \overline{x}$
  - Giả sử xRy và $z \in \overline{x}$ suy ra $z \sim x$ nên $z \sim y \Rightarrow z \in \overline{y}$. Vậy $\overline{x} \subset \overline{y}$.

    Chứng minh tương tự $\overline{y} \subset \overline{x}$
  - Giả sử $\overline{x} \cap \overline{y} \neq \emptyset$ thì có $z \in \overline{x} \cap \overline{y}$, nghĩa là $z \sim x$ và $z \sim y$ Từ kết quả phần hai ta suy ra $\overline{x} = \overline{z} = \overline{y}$

QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

Ví dụ 3: xét quan hệ ≡ (mod 3) trên Z thì

- Lớp $\overline{0}$ = {…, -6, -3, 0, 3, ...}
- Lớp $\overline{1}$ = {…, -5, -2, 1, 4, ...}
- Lớp $\overline{2}$ = {…, -4, -1, 2, 5, ...}
  - **Lưu ý**: mọi x ∈ Z đều thuộc một trong 3 lớp trên. Tập Z bị phân hoạch thành 3 lớp đôi một rời nhau. Z/~ = $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$
  - Khái quát: quan hệ ≡ (mod n) phân hoạch Z thành n lớp tương đương, ký hiệu $Z_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$

QUAN HỆ THỨ TỰ

- Phản đối xứng (phản xứng): quan hệ hai ngôi R trên tập A có tính chất:

Nếu $\forall x, y \in A$, x R y và y R x $\Rightarrow$ x=y gọi là phản đối xứng

- Quan hệ thứ tự: một quan hệ R có tính chất phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu quan hệ R được gọi là quan hệ thứ tự.

  ký hiệu: $<$

- Tập có thứ tự: nếu $\forall x, y \in A$, xRy là quan hệ thứ tự thì ta nói "x nhỏ hơn y" và viết $x < y$. Khi đó tập A với quan hệ thứ tự R gọi là một tập có thứ tự

QUAN HỆ THỨ TỰ

Ví dụ 1:

- Quan hệ "≤" thông thường trên tập số thực **R** là một quan hệ thứ tự
- Trên tập $\wp(X)$ ta định nghĩa quan hệ

$$A < B \Leftrightarrow A \subset B$$

thì quan hệ "<" là một quan hệ thứ tự trên $\wp(X)$ (bài tập)

QUAN HỆ THỨ TỰ

Ví dụ 2:

- Gọi R là quan hệ hai ngôi trên N xác định: $\forall m, n \in N$, $n\, R\, m \Leftrightarrow n|m$ (n chia hết m), chứng minh R là một quan hệ thứ tự trên N
- **Chứng minh**: R có tính phản xạ, phản đối xứng, bắc cầu
  - $\forall n \in N$, $n|n \Rightarrow n\, R\, n$ (phản xạ)
  - $\forall m, n \in N$ và nRm, $mRn \Rightarrow n|m$, $m|n$ thì $n = m$ (phản đối xứng)
  - $\forall m, n, p \in N$ và nRm, mRp (có nghĩa: $n|m$, $m|p$) $\Rightarrow n|p$ hay nRp (bắc cầu)

QUAN HỆ THỨ TỰ

Lưu ý:

- Một quan hệ thứ tự $<$ trên A gọi là toàn phần, nếu $\forall x, y \in A$ thì $x < y$ hoặc $y < x$; ngược lại gọi là quan hệ thứ tự bộ phận.
- **Ví dụ**: Quan hệ "$\leq$" trên **R** là toàn phần còn quan hệ "$|$" (chia hết) là bộ phận.

QUAN HỆ THỨ TỰ

- Cho tập A và quan hệ thứ tự $<$ trên A, giả sử $B \subset A$
  - Phần tử $m \in B$ gọi là nhỏ nhất của B ký hiệu min(B) nếu $\forall x \in B$ ta có $m < x$
  - Phần tử $n \in B$ gọi là lớn nhất của B ký hiệu max(B) nếu $\forall x \in B$ ta có $x < n$
  - Phần tử $a \in A$ gọi là một chặn trên của B nếu $\forall x \in B$ ta có $x < a$
  - Phần tử $b \in A$ gọi là một chặn dưới của B nếu $\forall x \in B$ ta có $b < x$

QUAN HỆ THỨ TỰ

- **Nhận xét**
  - Phần tử bé nhất (lớn nhất) của B nếu có là duy nhất
  - Thật vậy: gọi m và m' là 2 phần tử bé nhất của B $\Rightarrow$ $\forall x \in B$ ta có m' < x và m < x $\Rightarrow$ m' < m và m < m' suy ra m = m' (tính phản đối xứng)
  - Chứng minh tương tự cho phần tử lớn nhất

QUAN HỆ THỨ TỰ

Ví dụ 3:

- Cho tập X = {a, b, c}, A = $\wp$(X) và quan hệ thứ tự trên A là: $\forall$x, y $\in$ A, x $\leq$ y $\Leftrightarrow$ x $\subset$ y (x và y là các tập con của X)
- Xét B = {{a}, {a, b}, {a, c}}, thì

➢ min(B) = {a}, không có max(B)

➢ Chặn dưới của B là $\varnothing$ và {a}, B có một chặn trên là {a, b, c}

QUAN HỆ THỨ TỰ

- Cho tập A và quan hệ thứ tự < trên A, giả sử $B \subset A$
  - Tập B được gọi là bị chặn trên nếu B có ít nhất một chặn trên
  - Tập B được gọi là bị chặn dưới nếu B có ít nhất một chặn dưới
  - Tập B được gọi là bị chặn nếu B vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới

QUAN HỆ THỨ TỰ

- Cho tập A và quan hệ thứ tự < trên A, giả sử $B \subset A$
  - Giả sử B bị chặn trên, thì phần tử bé nhất nếu có của tập các chặn trên của B gọi là chặn trên nhỏ nhất của B, ký hiệu supB
  - Giả sử B bị chặn dưới, thì phần tử lớn nhất nếu có của tập các chặn dưới của B gọi là chặn dưới lớn nhất của B, ký hiệu infB

QUAN HỆ THỨ TỰ

Ví dụ 4

- Cho tập $X = \{a, b, c\}$, $A = P(X)$ và quan hệ thứ tự trên A là:
  $\forall x, y \in A, x \leq y \Leftrightarrow x \subset y$
- Xét $B = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$, thì
  - Tập các chặn trên của B là $\{\{a, b, c\}\}$, $\sup B = \{a, b, c\}$
  - Tập các chặn dưới của B là $\{\varnothing, \{a\}\}$, $\inf B = \{a\}$

QUAN HỆ THỨ TỰ

- Cho tập A và quan hệ thứ tự $<$ trên A, giả sử $B \subset A$
  - Nếu min(B) tồn tại thì infB = min(B)
  - Nếu max(B) tồn tại thì supB = max(B)
  - Nếu infB tồn tại và infB $\in$ B thì min(B) tồn tại và min(B) = infB
  - Nếu supB tồn tại và supB $\in$ B thì max(B) tồn tại và max(B) = supB

QUAN HỆ THỨ TỰ

- Chứng minh: mệnh đề thứ nhất và thứ ba
  - Gọi L là tập các chặn dưới của B, ta có min(B) $\in$ L. Mặt khác $\forall x \in L$ thì $x < \min B$ (do $\min B \in B$). Theo định nghĩa $\Rightarrow$ minB là chặn dưới lớn nhất hay min(B) =infB.
  - Giả sử infB tồn tại và ta có $\inf B \in B \Rightarrow \forall x \in B$, $\inf B \leq x$. Theo định nghĩa infB = min(B).

QUAN HỆ THỨ TỰ

- Xét một tập có thứ tự $(A, \leq)$, x và y là hai phần tử bất kỳ của A
  - Nếu $x \leq y$ ta nói y là trội của x (y lớn hơn x) hay x được trội bởi y
  - y là trội trực tiếp của x nếu y trội x và không tồn tại một trội z của x sao cho:

$$x \leq z \leq y \text{ và } x \neq z \neq y$$

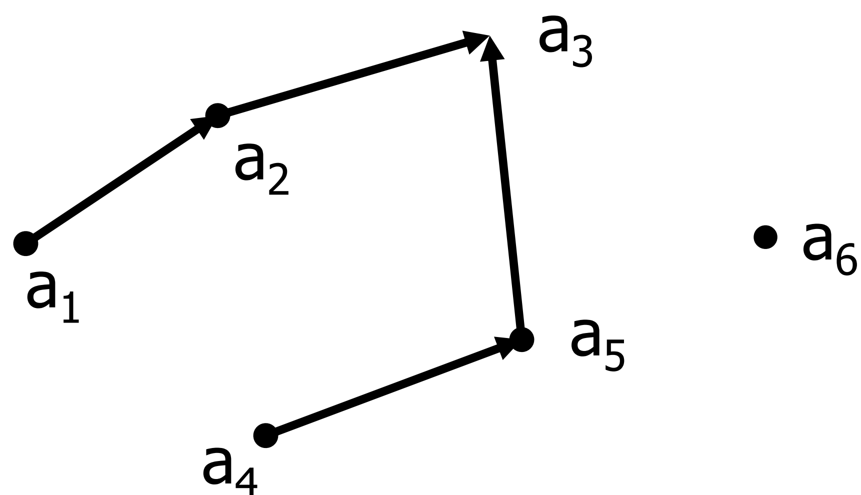
QUAN HỆ THỨ TỰ

- Biểu đồ Hasse của một tập hữu hạn có thứ tự (A, ≤) bao gồm:
  - Một tập các điểm trong mặt phẳng tương ứng 1-1 với tập A, gọi là các đỉnh
  - Một tập các cung có hướng nối một số đỉnh: hai đỉnh x, y được nối bởi một cung có hướng từ x tới y nếu y là trội trực tiếp của x

QUAN HỆ THỨ TỰ

Ví dụ 5:

- Cho tập $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ trong đó $a_1 < a_2 < a_3$ và $a_4 < a_5 < a_3$, thì biểu đồ Hasse như sau:



- Phần tử a_6 không so sánh được với các phần tử khác nên không có cung nào đến và ra khỏi nó

BIỂU DIỄN QUAN HỆ HAI NGÔI

- Biểu diễn quan hệ thứ tự theo ma trận: Một quan hệ hai ngôi giữa các tập hữu hạn có thể được biểu diễn bởi một ma trận 0-1
- Giả sử R là quan hệ giữa tập A = $\{a_1, a_2,\ldots, a_m\}$ và tập B = $\{b_1, b_2,\ldots, b_n\}$. Quan hệ R có thể được biểu diễn bằng ma trận **M**R = $[r_{ij}]$, cấp m× n trong đó:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } (a_i, b_j) \in R \\ 0 & \text{nếu } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

BIỂU DIỄN QUAN HỆ HAI NGÔI

- **Ví dụ 1:** cho A ={0, 1, 2}, B= {a, b}

quan hệ giữa A và B là R={(0, a), (0, b), (1, a)}, thì ma trận biểu diễn R như sau:

$$M_R = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$