

Họ và tên: Trần Thanh Hiệp

MSSV: 2151050469

Chứng minh $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Giả sử $x \in A, y \in B, z \in C$

$$f: A \rightarrow B \Rightarrow y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x$$

$$g: B \rightarrow C \Rightarrow z = g(y) = g(f(x)) \Rightarrow \cancel{g^{-1}(z) = y}$$

$$\text{Ta có: } g \circ f: A \rightarrow C$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$$

$$\Rightarrow (g \circ f)^{-1}(z) = x \quad (1)$$

$$\cancel{f^{-1} \circ g^{-1}(y)} \quad f^{-1} \circ g^{-1}(z) = f^{-1}(g^{-1}(z)) = f^{-1}(y) = x \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

$$1) \delta(E_1 \cup E_2) = \delta(E_1) \cup \delta(E_2)$$

$$\text{Ta có: } \forall y \in \delta(E_1 \cup E_2)$$

$$\Rightarrow \forall y \in E_1$$

$$1) \delta(E_1 \cup E_2) = \delta(E_1) \cup \delta(E_2)$$

$$\text{Giả sử } y \in \delta(E_1)$$

$$\Rightarrow \forall y \in \delta(E_1 \cup E_2)$$

$$\Rightarrow \forall y \in \delta(E_1 \cup E_2)$$

$$\Rightarrow \forall y \in \delta(E_1 \cup E_2)$$

$$1) f(E_1 \cup E_2) = f(E_1) \cup f(E_2)$$

$$\text{*Ta có } x \in E_1 \cup E_2 \Leftrightarrow f(x) \in f(E_1 \cup E_2) \quad (1)$$

$$\text{Mà } x \in E_1 \cup E_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in E_1 \\ x \in E_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \in f(E_1) \\ f(x) \in f(E_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in f(E_1) \cup f(E_2) \quad (2)$$

(1) và (2)

$$\Rightarrow f(E_1 \cup E_2) \subset f(E_1) \cup f(E_2) \quad (*)$$

~~$$\text{*Ta có } \begin{cases} y \in f(E_1) \\ y \in f(E_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in E_1 \\ x \in E_2 \end{cases}$$~~

$$\text{*Ta có } y \in f(E_1) \cup f(E_2) \Leftrightarrow \begin{cases} y \in f(E_1) \\ y \in f(E_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in E_1 \\ x \in E_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in E_1 \cup E_2 \quad (**)$$

(*) và (**)

$$\Rightarrow f(E_1 \cup E_2) = f(E_1) \cup f(E_2)$$

$$2) f(E_1 \cap E_2) \subset f(E_1) \cap f(E_2)$$

$$\text{Take: } \begin{cases} E_1 \cap E_2 \subset E_1 \\ E_1 \cap E_2 \subset E_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(E_1 \cap E_2) \subset f(E_1) \\ f(E_1 \cap E_2) \subset f(E_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(E_1 \cap E_2) \subset f(E_1) \cap f(E_2)$$

3) $f^{-1}(F_1 \cup F_2) = f^{-1}(F_1) \cup f^{-1}(F_2)$

* Take $x \in f^{-1}(F_1 \cup F_2) \Rightarrow f(x) \in F_1 \cup F_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \in F_1 \\ f(x) \in F_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in f^{-1}(F_1) \\ x \in f^{-1}(F_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(F_1) \cup f^{-1}(F_2)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(F_1 \cup F_2) \subset f^{-1}(F_1) \cup f^{-1}(F_2) \quad (1)$$

* Now $x \in f^{-1}(F_1) \cup f^{-1}(F_2) \Rightarrow f(x) \in F_1 \cup F_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \in F_1 \\ f(x) \in F_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) \in F_1 \cup F_2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(F_1) \cup f^{-1}(F_2) \subset f^{-1}(F_1 \cup F_2) \quad (2)$$

Thus (1), (2)

$$\Rightarrow f^{-1}(F_1 \cup F_2) = f^{-1}(F_1) \cup f^{-1}(F_2)$$

$$4) f^{-1}(F_1 \cap F_2) = f^{-1}(F_1) \cap f^{-1}(F_2)$$

$$\ast \text{ Take } x \in f^{-1}(F_1 \cap F_2) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \in F_1 \\ f(x) \in F_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in f^{-1}(F_1) \\ x \in f^{-1}(F_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(F_1) \cap f^{-1}(F_2)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(F_1 \cap F_2) \subset f^{-1}(F_1) \cap f^{-1}(F_2) \quad (1)$$

$$\ast \text{ Take } x \in f^{-1}(F_1) \cap f^{-1}(F_2) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \in F_1 \\ f(x) \in F_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) \in F_1 \cap F_2$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(F_1 \cap F_2)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(F_1) \cap f^{-1}(F_2) \subset f^{-1}(F_1 \cap F_2) \quad (2)$$

Tw (1), (2)

$$\Rightarrow f^{-1}(F_1 \cap F_2) = f^{-1}(F_1) \cap f^{-1}(F_2)$$