Chương 4: LÝ THUYẾT ĐẾM CƠ BẢN

- Các nguyên lý cơ bản
- Giải tích tổ hợp
- Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng
- Nguyên lý Pigeonhole

CÁC NGUYÊN LÝ CƠ BẢN

- Các qui tắc đơn giản
- Nguyên lý cộng
- Nguyên lý bù trừ
- Nguyên lý nhân

CÁC QUI TẮC ĐƠN GIẢN

- Cho A và B là hai tập hữu hạn
  - Nếu tồn tại song ánh $f: A \rightarrow B$ thì $|A| = |B|$
  - Nếu tồn tại đơn ánh $f: A \rightarrow B$ thì $|A| \leq |B|$
  - Nếu tồn tại toàn ánh $f: A \rightarrow B$ thì $|A| \geq |B|$
  - Nếu $B \subseteq A$ Thì $|A| = |B| + |\overline{B}|$

NGUYÊN LÝ CỘNG

- Nguyên lý cộng: Giả sử có hai công việc. Việc thứ 1 có thể làm bằng m cách và làm không đồng thời với việc thứ 2 có n cách. Khi đó sẽ có m+n cách khác nhau để thực hiện toàn bộ quá trình.
- Phát biểu dựa trên lý thuyết tập hợp
  - Nếu $A \cap B = \varnothing$ thì $|A \cup B| = |A| + |B|$
  - Nếu $i \neq j, A_i \cap A_j = \varnothing$ thì

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_k|$$

NGUYÊN LÝ CỘNG

- **Ví dụ** Trong đợt phổ biến đề tài luận văn tốt nghiệp. BCN khoa CNTT công bố danh sách đề tài bao gồm: 40 đề tài về chủ đề " Xây dựng hệ thống thông tin quản lý", 20 đề tài về "Thiết kế phần mềm dạy học" và 10 đề tài về "Hệ chuyên gia". Hỏi một sinh viên có bao nhiêu khả năng lựa chọn đề tài.
- **Giải** Một sinh viên có thể
  - Lựa chọn theo chủ đề thứ nhất bằng 40 cách
  - Lựa chọn theo chủ đề thứ hai bằng 20 cách
  - Lựa chọn theo chủ đề thứ ba bằng 10 cách
  - Vậy theo nguyên lý cộng, một SV có 40+20+10 = 70 cách lựa chọn đề tài

NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ

- Cho hai tập hữu hạn bất kỳ, khi đó

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ

- **Ví dụ** Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài 10 bit hoặc là bắt đầu bằng 00 hoặc là kết thúc bằng 11
- **Giải** Chia tập B các xâu cần đếm thành hai tập B_1, B_2
  - $B_1=\{00b_3...b_{10}\}, \Rightarrow |B_1| =2^8$
  - $B_2 =\{b_1...b_8 11\}, \Rightarrow |B_2| =2^8$
  - $B_1 \cap B_2 =\{00b_3...b_8 11\}, \Rightarrow |B_1 \cap B_2|=2^6$
  - Ta có $|B|= |B_1|+ |B_2|-|B_1 \cap B_2| =2^8 + 2^8 -2^6 = 448$

NGUYÊN LÝ NHÂN

- Nguyên lý nhân: nếu một quá trình có thể thực hiện theo hai giai đoạn liên tiếp, sao cho có m cách để thực hiện giai đoạn 1, và mỗi lựa chọn trong giai đoạn 1 đều có n cách khác nhau để thực hiện giai đoạn 2. Khi đó có m*n cách khác nhau để thực hiện toàn bộ quá trình.
- **Tổng quát**: Nếu mỗi thành phần a_i của bộ có thứ tự k thành phần $(a_1, a_2, ..., a_k)$ có n_i khả năng chọn (i=1,...,k) thì số bộ sẽ được tạo ra là tích số của các khả năng này $n_1 . n_2 ... n_k$.

NGUYÊN LÝ NHÂN

- Chứng minh (bằng qui nạp)
  - Với k = 2, do a_1 có n_1 lựa chọn khác nhau, mỗi lựa chọn cho a_1 lại có n_2 lựa chọn cho a_2. Theo nguyên lý nhân có $n_1.n_2$ cách lựa chọn bộ (a_1, a_2). Vậy có $n_1.n_2$ bộ (a_1, a_2) được tạo ra.
  - Giả sử kết luận đúng với k > 1, theo giả thiết qui nạp có $n_1. n_2...n_k$ khả năng lựa chọn bộ (a_1, a_2, ..., a_k), mỗi khả năng này có n_{k+1} khả năng chọn a_{k+1}. Do đó theo nguyên lý nhân có $n_1.n_2...n_{k+1}$ khả năng lựa chọn bộ (a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1}). Vậy có $n_1.n_2... n_{k+1}$ bộ (a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1}) được tạo ra.

- Hệ quả: $|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \ldots \times |A_n|$

NGUYÊN LÝ NHÂN

- **Ví dụ 1:** Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài 7 bit.
- **Giải:** Mỗi một trong 7 bit có thể chọn bằng 2 cách là bit bằng 1 hoặc bằng 0. Theo quy tắc nhân có $2^7 = 128$ xâu nhị phân có độ dài là 7.

NGUYÊN LÝ NHÂN

- **Ví dụ 2:** Cho đoạn chương trình sau

  m: = 10, n: = 20, q: = 30;

  p: = 0;

  for i: = 1 **to** m **do**

    for j: = 1 **to** n **do**

      for k: = 1 **to** q **do** p: = p+1;

  Đếm số lệnh gán p: = p+1 và tính giá trị của p

- **Giải** Vì có 3 vòng lặp lồng nhau nên S = mnq=6000, S cũng là số bộ có thứ tự (i, j, k), p = 6000

NGUYÊN LÝ NHÂN

- **Ví dụ 3:** Có bao nhiêu tên biến trong C++ có độ dài 10 chỉ chứa hai chữ cái A, B và bắt đầu bằng AAA hoặc ABA
- **Giải** Chia tập biến V thành 2 lớp V_1 và V_2
  - ➢ $V_1 = \{AAAX_1...X_7 \mid X_i \in \{A, B\}\}$
  - ➢ $V_2 = \{ABAX_1...X_7 \mid X_i \in \{A, B\}\}$
  - ➢ Có 7 chữ cái, ký hiệu là X_i, phải chọn hai khả năng A hoặc B
  - ➢ Vậy $|V| = |V_1| + |V_2| = 2^7 + 2^7 = 256$

NGUYÊN LÝ NHÂN

- **Ví dụ 4** Có bao nhiêu ánh xạ từ tập A có m phần tử đến tập B có n phần tử.
- **Giải** Giả sử $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$
  - Xét tập tất cả các ánh xạ $F = \{f : A \to B\} = \{(f(a_1), f(a_2),...,f(a_m)) \mid f(a_i) \in B\}$
  - Mỗi $f(a_i)$ có thể nhận n giá trị, $f(a_i) \in B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ do đó có n cách.
  - Vậy theo quy tắc nhân ta có $|F| = |B \times B \times ... \times B| = |B^m| = n^m$

NGUYÊN LÝ NHÂN

- **Ví dụ 5:** Có bao nhiêu đơn ánh từ tập A có m phần tử đến tập B có n phần tử ?
- **Giải:** Trước tiên nếu m>n thì mọi ánh xạ, ít nhất 2 phần tử có chung 1 ảnh nên không phải là đơn ánh. Bây giờ giả sử m≤ n, A = $\{a_1, a_2, ..., a_m\}$, Ta có: chọn ảnh cho a_1 có n cách

Cách chọn ảnh cho a_2 có n-1 cách, vì đơn ánh nên ảnh của a_2 khác ảnh của a_1. Tổng quát hóa chọn ảnh a_m có n-m+1 cách.

Như vậy theo quy tác nhân có: n(n-1)…(n-m+1) đơn ánh từ tập A đến tập B.

NGUYÊN LÝ NHÂN

- **Ví dụ 6:** Giả sử A là một tập hữu hạn có m phần tử, hãy cho biết số các tập con của A ?
- Giải: Giả sử $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$, ta có thể liệt kê các tập con của tập A theo thứ tự nào đó. Ta có tập các tập con A với dãy nhị phân m bit có sự tương ứng 1-1.

Cụ thể: với dãy nhị phân với vị trí thứ i có bít 1 thì tương ứng trong tập con của A có chứa phần tử thứ i trong A. Còn bit 0 trong trường hợp ngược lại. Vậy theo quy tắc nhân có 2^m xâu nhị phân độ dài $m =|A|$, Do đó $|P(A)|= 2^{|A|}$

GIẢI TÍCH TỔ HỢP

- Chỉnh hợp
- Hoán vị
- Tổ hợp

CHỈNH HỢP

- Chỉnh hợp chập k của n phần tử: là một bộ có thứ tự gồm k thành phần lấy từ n phần tử đã cho, các thành phần không được lặp lại
- Một số chỉnh hợp chập 2 của 3 phần tử a_1, a_2, a_3 là

  $(a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_2, a_3), (a_3, a_2), \ldots$
- Có thể coi một chỉnh hợp chập k của tập S có n phần tử là một cách sắp xếp có thứ tự k phần tử của n phần tử của S

CHỈNH HỢP

- **Định Lý** Số chỉnh hợp chập k của tập S có n phần tử là

$$A^k_n = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = n!/(n-k)!$$

- **Chứng minh** Giả sử $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, một chỉnh hợp chập k của n phần tử của S có dạng $(r_1, r_2, \dots, r_k)$, $r_i \in S$. Hơn nữa theo định nghĩa thì
  - r_1 có thể chọn n cách (giá trị)
  - r_2 có thể chọn n-1 cách, vì không được lặp lại giá trị của r_1 vv..
  - r_k có thể chọn n- k+1 cách, vì không được lặp lại giá trị của $r_1, r_2, \dots, r_{k-1}$
  - Vậy theo nguyên lý nhân số bộ (số chỉnh hợp) là n(n-1)...(n-k+1)

CHỈNH HỢP

- **Ví dụ** Có 8 VĐV thi chạy, người thắng cuộc được trao huy chương vàng, người về đích thứ hai được trao huy chương bạc, người về thứ ba sẽ được nhận huy chương đồng. Hỏi có bao nhiêu cách trao bộ huy chương này, nếu tất cả các kết cục cuộc thi đều có thể xẩy ra.
- **Giải** Một kết cục để trao huy chương là một bộ ba $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ trong đó λ_1 là người nhận HCV, λ_2 là người nhận HCB và λ_3 là người nhận HCĐ. Rõ ràng $\lambda_i \neq \lambda_j$. Như vậy một kết cục là một chỉnh hợp chập 3 của 8. Số các chỉnh hợp này là số cách trao bộ huy chương. Nghĩa là 8.7.6 = 336.

HOÁN VỊ

- Một hoán vị của n phần tử là một cách sắp xếp có thứ tự của n phần tử đó
- Một số hoán vị của bốn phần tử 1, 2, 3, 4 là

  1234, 1324, 1423,....
- **Lưu ý** Một hoán vị của n phần tử cũng có thể coi là một bộ có thứ tự gồm n thành phần lấy từ n phần tử đã cho

HOÁN VỊ

- **Định lý** Số hoán vị của n phần tử, ký hiệu p_n, là

  $$P_n = n(n-1)(n-2)...2.1 = n!$$

- **Chứng minh** Rõ ràng hoán vị là trường hợp riêng của chỉnh hợp nên

  $P_n = A^n_n = n(n-1)(n-2)....(n-n+1) = n!$

HOÁN VỊ

- **Ví dụ** Giả sử một thương nhân định đi bán hàng tại 8 TP. Chị ta bắt đầu cuộc hành trình của mình tại một TP nào đó, nhưng có thể đến 7 TP kia theo bất kỳ lộ trình nào mà chị muốn và trở về TP xuất phát. Hỏi chị này có thể đi qua tất cả các TP theo bao nhiêu lộ trình khác nhau.
- **Giải** Có thể cố định TP xuất phát, thì một lộ trình là một bộ bảy (t_1, t_2, ..., t_7), $t_i \neq t_j$, ($i \neq j$). Vậy số các lộ trình là số các hoán ví của 7, là $P_7 = 7! = 5040$.

TỔ HỢP

- Tổ hợp chập k của n phần tử: là một bộ không có thứ tự gồm k thành phần khác nhau lấy từ n phần tử đã cho
- Nói cách khác một tổ hợp chập k của n phần tử là một tập con k phần tử của nó
- Một số tổ hợp chập 2 của tập 3 phần tử a_1, a_2, a_3 là

  $\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_2, a_3\}$

TỔ HỢP

- **Định Lý** Số tổ hợp chập k của tập S có n phần tử, ký hiệu C^k_n, là $C^k_n = n!/[k!(n-k)!]$
- **Chứng minh** Đếm A^k_n thông qua C^k_n
  - Chọn tùy ý một tổ hợp chập k của n, số cách chọn này là C^k_n
  - Với mỗi tổ hợp $\{b_1, b_2, ..., b_k\}$ chập k của S, sẽ có k! chỉnh hợp chập k của n tương ứng
  - Theo nguyên lý nhân suy ra $A^k_n = C^k_n.k!$
  - Vậy $C^k_n = A^k_n/k! = [n(n-1)...(n-k+1)]/k! = n!/[k!(n-k)!]$

TỔ HỢP

- **Hệ quả**
  - $C^k_n = C_n^{n-k}$
  - $C^k_n = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$, $n>k>0$
  - $(x + y)^n = \Sigma_{j=0,\ldots,n} C^j_n x^{n-j} y^j$
- **lưu ý** $C^0_n = C^n_n = 1$

TỔ HỢP

- **Ví dụ 1** Có bao nhiêu cách tuyển 6 trong 10 cầu thủ bóng chuyền của một đội bóng ra sân thi đấu
- **Giải** Mỗi một cách chọn là một tổ hợp chập 6 của 10. Vậy số cách chọn là $C^{6}_{10} = 10!/(6!4!) = 10.9.8.7/(4.3.2)=210$ (cách)

TỔ HỢP

- **Ví dụ 2** Giả sử một tổ bộ môn có 10 nam và 15 nữ. Có bao nhiêu cách chọn hội đồng chấm LVTN gồm 6 ủy viên trong đó số ủy viên nam bằng số ủy viên nữ.
- **Giải** Một hội đồng gồm 3 nam và 3 nữ
  - Số cách chọn 3 nam trong 10 người là C^3_{10}
  - Số cách chọn 3 nữ trong 15 người là C^3_{15}
  - Theo nguyên lý nhân, số cách chọn HĐ là $C^3_{10}.C^3_{15}=54600$

CHỈNH HỢP VÀ TỔ HỢP SUY RỘNG

- Chỉnh hợp lặp
- Tổ hợp lặp

CHỈNH HỢP LẶP

- Chỉnh hợp lặp chập k của n: là một bộ có thứ tự gồm k thành phần lấy từ n phần tử đã cho, các thành phần có thể được lặp lại
- Một số chỉnh hợp lặp chập 2 của 3 phần tử a_1, a_2, a_3 là (a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_2, a_3), ...

CHỈNH HỢP LẶP

- **Định lý** Số chỉnh hợp lặp chập k của n, ký hiệu $\overline{A}^k_n$, là

  $\overline{A}^k_n = n^k$

- **Chứng minh** Xét tập S gồm n phần tử. Một chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử của S là một bộ $(a_1, a_2, ..., a_k)$, $a_i \in S$. Nghĩa là một phần tử của tích Descartes $S \times S \times ... \times S = S^k$
- Vậy $\overline{A}^k_n = |S \times S \times ... \times S| = |S^k| = n^k$

CHỈNH HỢP LẶP

- **Ví dụ** Tính xác suất lấy liên tiếp 3 quả bóng đỏ ra khỏi bình kính chứa 5 quả bóng đỏ và 7 quả bóng xanh, nếu mỗi lần lấy một quả bóng ta lại bỏ nó trở lại bình.
- **Giải** Số cách lấy 3 quả bóng đỏ là 5^3. Số cách lấy 3 quả bất kỳ là 12^3.Vậy xác suất cần tính là $5^3/12^3$.

TỔ HỢP LẶP

- Tổ hợp lặp chập k của n: là một bộ không có thứ tự gồm k thành phần lấy từ n phần tử đã cho, các thành phần có thể được lặp lại.
- Một số tổ hợp lặp chập 2 của 3 phần tử a_1, a_2, a_3 là

  $(a_1, a_1), (a_2, a_2), (a_3, a_3), (a_1, a_2), (a_1, a_3), \ldots$

TỔ HỢP LẶP

- **Ví dụ 1** Có bao nhiêu cách chọn 5 tờ giấy bạc từ một két đựng tiền gồm những tờ 10\$, 20\$, 50\$ và 100\$. Giả sử, thứ tự mà các tờ tiền được chọn không quan trọng, các tờ tiền cùng loại là không phân biệt và mỗi loại có ít nhất 5 tờ.
- **Giải ?**

TỔ HỢP LẶP

- **Giải** Giả sử két có 4 ngăn, mỗi ngăn dựng 1 loại tiền

10$	20$	50$	100$

- Một cách chọn 5 tờ tiền có thể là:

$$\underset{p_1}{*}\quad \underset{p_2}{|}\quad \underset{p_3}{*}\quad \underset{p_4}{*}\quad \underset{p_5}{|}\quad \underset{p_6}{*}\quad \underset{p_7}{|}\quad \underset{p_8}{*}$$

ứng với $\{p_1, p_3, p_4, p_6, p_8\}$

- Suy ra một cách chọn là một tổ hợp chập 5 của 8.Vậy số cách chọn 5 tờ giấy bạc là $C^5_8 = 8!/(5!.3!) = 56$

TỔ HỢP LẶP

- **Định lý** Số tổ hợp lặp chập k của n phần tử, ký hiệu $\overline{C}^k_n$, là $\overline{C}^k_n = C^k_{n-1+k}$
- **Chứng minh** Mỗi tổ hợp lặp chập k của n tương ứng với cách chọn k vị trí trong k+ n-1 ví trí. Trong đó n-1 vị trí còn lại biểu diễn cho các vị trí (vách ngăn) phân cách n phần tử (loại phần tử) của tập đã cho. Vậy số tổ hợp lặp chập k của n là

$$\overline{C}^k_n = C^k_{n-1+k}$$

TỔ HỢP LẶP

- **Ví dụ 2** Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình:

  $x_1 + x_2 + x_3 = 11$

- **Giải** Mỗi nghiệm là một bộ (x_1, x_2, x_3) sao cho

  $$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

  ➢ Suy ra, mỗi nghiệm tương ứng với một cách chọn 11 phần tử từ 3 (loại) phần tử, không thứ tự, không phân biệt, lặp lại

  ➢ Vậy số nghiệm nguyên là $\cancel{C^{11}_{3}} = C^{11}_{3-1+11}$

  $$= C^{11}_{13} = 13.12/2 = 78$$

NGUYÊN LÝ PIGEONHOLE

- **Định Lý 1** Nếu có không ít hơn k+1 vật được đặt vào k hộp thì tồn tại một hộp chứa 2 hoặc nhiều hơn 2 đồ vật
- **Định lý 2** (Nguyên lý Dirichlet tổng quát) Nếu có N đồ vật được đặt vào trong k hộp thì tồn tại một hộp chứa nhiều hơn hoặc bằng $\lceil N/k \rceil$ vật
- **Lưu ý** Để áp dụng được nguyên lý trong thực hành cần phải xác định được đại lượng nào là N vật và đại lượng nào k hộp

NGUYÊN LÝ PIGEONHOLE

- **Chứng minh** (Nguyên lý Dirichlet tổng quát) Giả sử mọi hộp đều chứa ít hơn $\lceil N/k \rceil$ vật. Khi đó
  - ➢ Tổng số các vật chứa trong k hộp $\leq k(\lceil N/k \rceil - 1)$ (1)
  - ➢ Ta có $k(\lceil N/k \rceil - 1) < k[(N/k + 1) - 1] = N$ (2)
  - ➢ Từ (1) và (2) suy ra số vật ít hơn N (mâu thuẫn)

NGUYÊN LÝ PIGEONHOLE

- **Ví dụ 1** Cần phải có tối thiểu bao nhiêu sinh viên ghi tên vào lớp Toán Tin Học để chắc chắn có ít nhất 6 người cùng điểm thi (thang điểm 10)
- **Giải** Gọi số SV đăng ký là N. Theo NL Dirichlet ta có
  - $\lceil N/11 \rceil \geq 6$
  - $6 \leq \lceil N/11 \rceil < N/11 + 1 \Rightarrow 5 < N/11 \Rightarrow N > 55$
- Vậy tối thiểu phải có 56 người đăng ký

NGUYÊN LÝ PIGEONHOLE

- **Ví dụ 2** Biển số xe máy gồm 7 ký tự NN-NNN-XX, trong đó hai ký tự đầu là số địa danh, ba ký tự tiếp là số hiệu xe, mỗi ký tự là một số từ 0 đến 9, hai ký tự cuối là mã đăng ký gồm hai chữ cái trong bảng 26 chữ cái la tinh. Hỏi để có 2 triệu biển xe khác nhau thì cần phải có ít nhất bao nhiêu mã địa danh khác nhau.
- **Giải** Với một mã địa danh có $10^3.26^2 = 676.10^3$ biển số xe
  - ➢ Để có 2 triệu biển số xe ta cần có ít nhất $\lceil 2.10^6/(676.10^3) \rceil = 3$ mã địa danh