Chương 6: ĐẠI SỐ BOOLE (Boole Algebra)

- Các khái niệm
- Hàm boole
- Đơn giản hàm boole

CÁC KHÁI NIỆM

- Định nghĩa đại số boole
- Các ví dụ
- Tính chất

ĐỊNH NGHĨA ĐẠI SỐ BOOLE

- Định nghĩa: Một đại số boole là một tập A cùng 2 phép toán, ký hiệu $\vee$, $\wedge$, thõa mãn các tính chất sau:
  - $\forall$ x, y, z $\in$ A: $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
    $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
  - $\forall$ x, y $\in$ A: $x \vee y = y \vee x$
    $x \wedge y = y \wedge x$
  - $\forall$ x, y $\in$ A: $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
    $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

ĐỊNH NGHĨA ĐẠI SỐ BOOLE

- Tồn tại 2 phần tử trung hòa đối với $\vee$ và $\wedge$, ký hiệu là 0 và 1, sao cho $\forall x \in A$, $x \vee 0 = x$ và $x \wedge 1 = x$
- $\forall x \in A$, tồn tại một phần tử gọi là phần tử bù của x, ký hiệu $\overline{x}$ sao cho $x \vee \overline{x} = 1$ và $x \wedge \overline{x} = 0$

CÁC VÍ DỤ

- Tập M gồm các mệnh đề với các phép toán $\vee$, $\wedge$ là một đại số boole
  - Tính kết hợp, giao hoán, phân bố là hiển nhiên
  - Hai phần tử trung hoà là 0 (false) và 1 (True), trong M ta có

$$\forall x \in M, x \vee 0 = x \text{ và } x \wedge 1 = x$$

  - $\forall x \in M$, phần tử bù của x là $\overline{x} = \neg x$ và ta có

$$x \vee \overline{x} = x \vee \neg x = 1 \text{ và } x \wedge \overline{x} = x \wedge \neg x = 0$$

CÁC VÍ DỤ

- Cho X $\neq \varnothing$, tập $\wp(X)$ cùng 2 phép toán $\vee$, $\wedge$ tương ứng là phép toán hợp và giao là một đại số boole
  - $\forall$ A, B $\in \wp(X)$, A $\vee$ B = A $\cup$ B, A $\wedge$ B **=** A $\cap$ B
  - Phần tử 0 là $\varnothing$, phần tử 1 là X, phần tử bù của A là $\overline{A}$ = X-A
- Chứng minh?

CÁC VÍ DỤ

- Xét tập B = $\{0, 1\}$, trên B xây dựng 2 phép toán $\vee$, $\wedge$ như sau
  - $\forall$ x, y $\in$ B:

    $x \wedge y = x.y$ (phép nhân thông thường)

    $x \vee y = x + y - x.y$ (phép cộng thông thường)
  - Phần tử bù $\overline{x} = 1 - x$
  - Các phần tử trung hoà là 0 và 1
- Tập B là một đại số boole

TÍNH CHẤT

- **Định lý**: Trong một đại số boole A, quan hệ

$$\forall\ x, y \in A,\ x < y \Leftrightarrow x \wedge y = x$$

là một quan hệ thứ tự trên A với 0 và 1 lần lượt là phần tử bé nhất và lớn nhất của A

HÀM BOOLE

- Định nghĩa hàm boole
- Biểu diễn hàm boole
- Các cổng logic
- Đơn giản hàm boole

ĐỊNH NGHĨA HÀM BOOLE

- Hàm boole n biến: là một ánh xạ f: $B^n \to B$, trong đó B là đại số boole trên tập $\{0, 1\}$
- **Lưu ý**:
  - Trong hàm boole, các phép toán $\vee$, $\wedge$ còn gọi là tổng và tích
  - Các biến xuất hiện trong hàm boole được gọi là biến boole
  - Mọi hàm boole liên kết với một bảng chân trị cho biết giá trị của hàm tại $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, bảng này cũng được gọi là bảng chân trị của hàm boole

ĐỊNH NGHĨA HÀM BOOLE

- **Nhận xét**: Gọi F_n là tập các hàm boole n biến, trên F_n quan hệ $f < g \Leftrightarrow \forall\, a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in B^n$, $f(a) \le g(a)$ là một quan hệ thứ tự. F_n là một đại số boole với hai phép toán

  $(f \vee g)(a) = f(a) \vee g(a) = f(a)+g(a) - f(a).g(a)$ và

  $(f \wedge g)(a) = f(a) \wedge g(a) = f(a).g(a)$, $\forall\, a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in B^n$

  Phần bù của f được cho bởi $\bar{f}$

$$\bar{f}(a) = \overline{f(a)} = 1 - f(a),\ \forall a \in B^n$$

ĐỊNH NGHĨA HÀM BOOLE

- Từ đơn: Một biến boole x hoặc phần tử bù $\bar{x}$ của nó được gọi là một từ đơn
- Từ tối tiểu: Tích $b = b_1b_2...b_n$ trong đó b_i là các từ đơn, gọi là từ tối tiểu, nếu có n từ đơn thì có 2^n từ tối tiểu

BIỂU DIỄN HÀM BOOLE

- Tìm hàm boole khi biết giá trị
- Dạng nối rời (tuyển) chính tắc

BIỂU DIỄN HÀM BOOLE

- Xét hàm boole:

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

- Tìm f ?

BIỂU DIỄN HÀM BOOLE

- Hàm f có giá trị 1 khi x = z = 0, y = 1 hoặc x = y = 1, z = 0. Nên f có dạng

$$f = \bar{x}y\bar{z} \vee xy\bar{z}$$

BIỂU DIỄN HÀM BOOLE

- **Định lý** Mọi hàm boole đều có thể viết dưới dạng tổng của các từ tối tiểu (gọi là dạng tuyển chính tắc hay dạng nối rời chính tắc của f)

$$f = m_1 \vee m_2 \vee \ldots \vee m_k$$

- **Ví dụ**: Tìm dạng tuyển chính tắc của

$$f = (x \vee y)\bar{z}$$

BIỂU DIỄN HÀM BOOLE

- Lập bảng chân trị:

$$f = (x \vee y)\bar{z}$$

x	y	z	$x \vee y$	$\bar{z}$	f
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

- Dạng nối rời chính tắc:

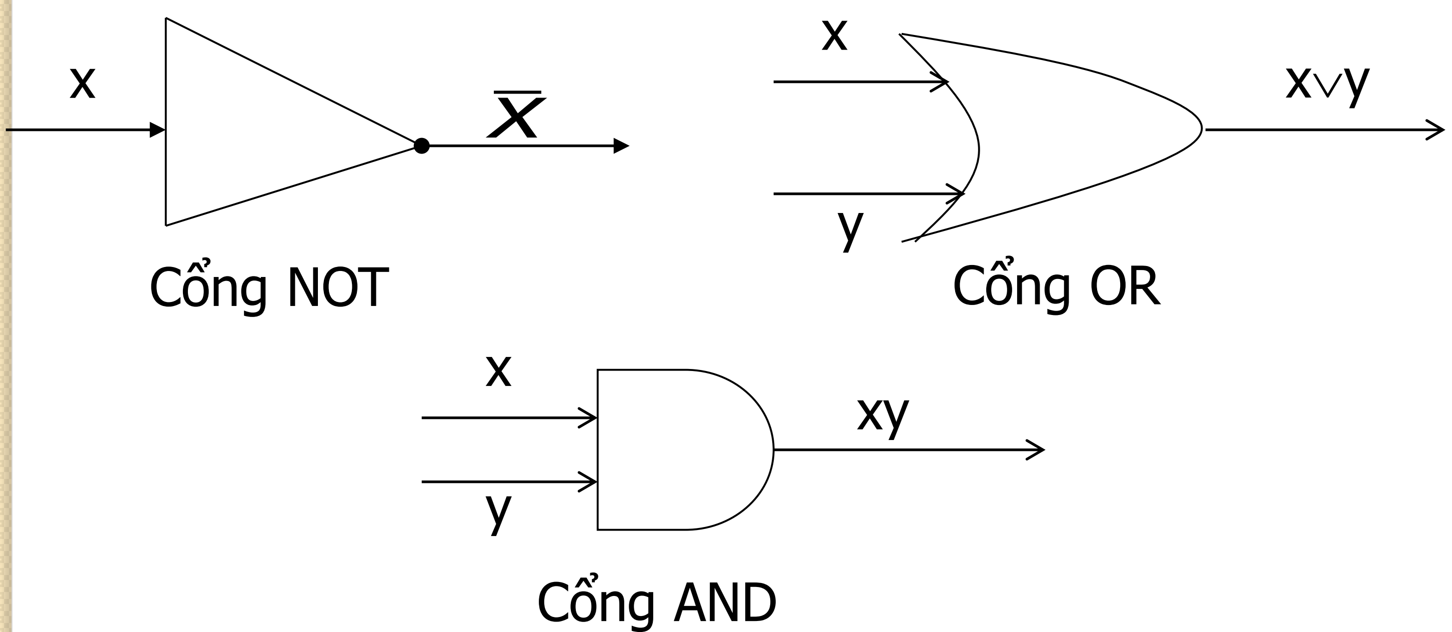
$$f = \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z}$$

CÁC CỔNG LOGIC

- Đại số các hàm boole được dùng để mô hình hoá các sơ đồ mạch trong các thiết bị điện tử (mỗi mạch là một hàm boole)
- Các phần tử cơ bản của một mạch điện tử gọi là các cổng
- Một loại cổng thực hiện một phép toán boole
- Các mạch mà tín hiệu ra (giá trị) chỉ phụ thuộc tín hiệu vào (không phụ thuộc trạng thái hiện thời của mạch) gọi là mạch tổ hợp

CÁC CỔNG LOGIC

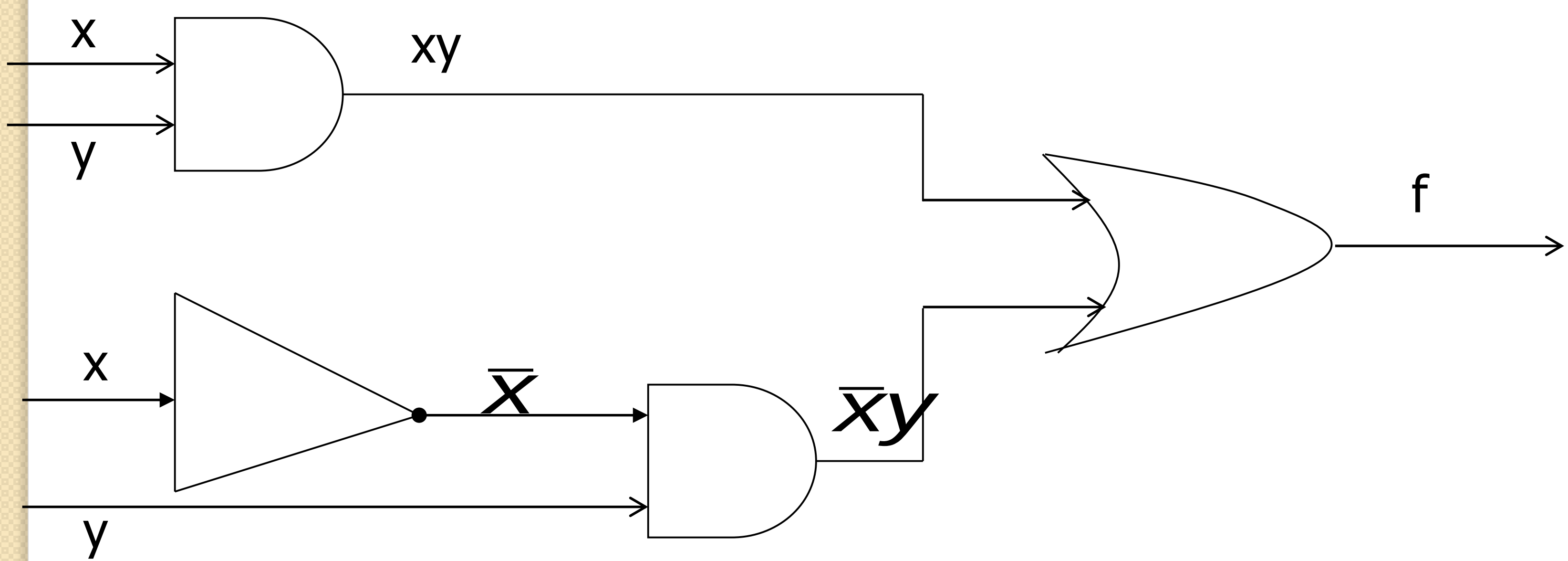
- Các mạch tổ hợp được xây dựng bởi 3 cổng



CÁC CỔNG LOGIC

- **Ví dụ**: Lập mạch tổ hợp

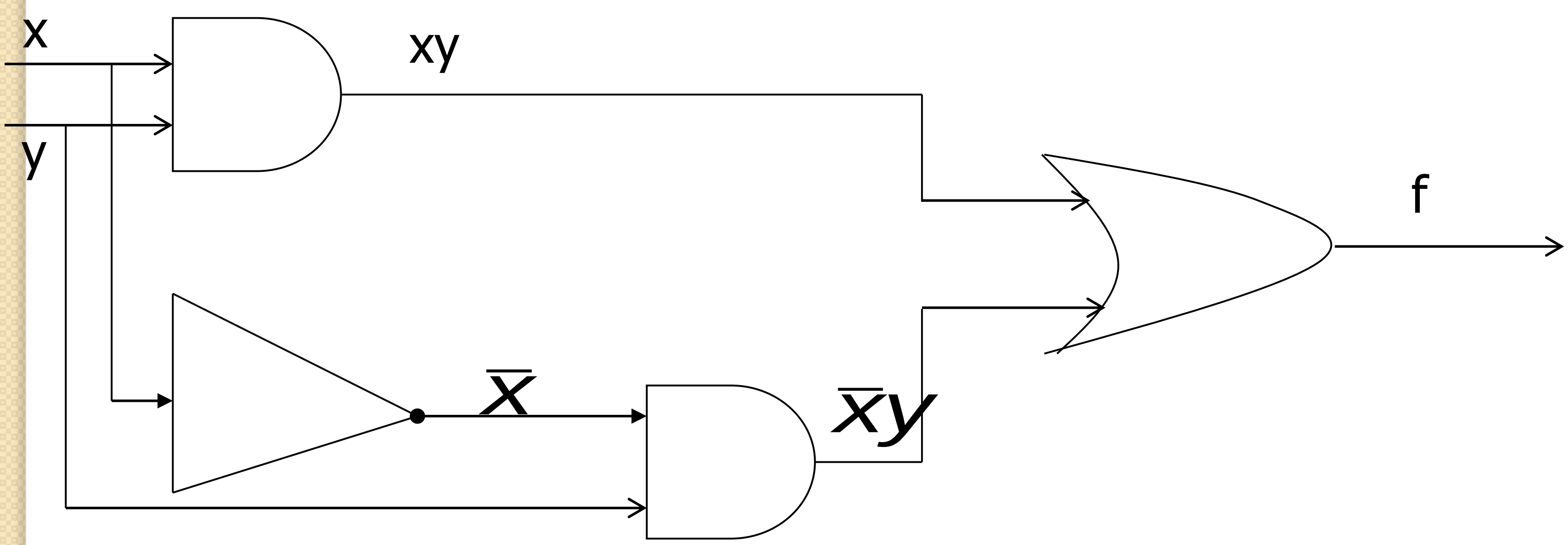
$$f = xy \vee \bar{x}y$$



CÁC CỔNG LOGIC

- Mạch tổ hợp (vẽ đơn giản hơn)

$$f = xy \vee \overline{x}y$$



ĐƠN GIẢN HÀM BOOLE

- Các khái niệm
- Phương pháp biến đổi
- Phương pháp biểu đồ Karnaugh

CÁC KHÁI NIỆM

- Đơn thức là một tích khác 0 của các từ đơn
- Một công thức đa thức của hàm boole f là công thức biểu diễn f dưới dạng tổng boole của các đơn thức
- **Bài toán**: Với một công thức f, hãy tìm cách rút gọn để f đơn giản hơn $\Rightarrow$ mạch logic ít cổng hơn nên thực hiện tính toán nhanh hơn

PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI

- Một công thức đa thức tối tiểu là công thức đơn giản nhất trong mọi biểu diễn có thể có của đa thức đó
- **Ví dụ**: Đơn giản $f = xyz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}$ (1)

Ta có

$$f = xyz \vee x(\bar{y} \vee y)\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}$$

$$= xyz \vee x\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \qquad (2)$$

PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI

- Áp dụng hệ thức $g\bar{h} \vee h = g \vee h$ vào (2) ta có:

$$
\begin{aligned}
f &= x(yz \vee \bar{z}) \vee \bar{x}y\bar{z} \\
&= x(y \vee \bar{z}) \vee \bar{x}y\bar{z} \\
&= xy \vee x\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \\
&= xy \vee \bar{z}(x \vee \bar{x}y) \\
&= xy \vee \bar{z}(x \vee y) = xy \vee x\bar{z} \vee y\bar{z}
\end{aligned}
$$

PHƯƠNG PHÁP BIỂU ĐỒ KARNAUGH

- Tiện lợi cho hàm 2, 3,4, 5, 6 biến
- Áp dụng tìm đa thức tối tiểu 4 biến

PHƯƠNG PHÁP BIỂU ĐỒ KARNAUGH

- Biểu diễn một hàm boole bằng hình vuông 16 ô thay cho bảng chân trị. Mỗi ô ứng với một giá trị b = (x, y, z, t)
- Các ô tương ứng với các điểm b = (x, y, z, t) mà f(b) =1 được tô xám

	x		$\bar{x}$		
z	1010	1110	0110	0010	$\bar{t}$
	1011	1111	0111	0011	t
$\bar{z}$	1001	1101	0101	0001	
	1000	1100	0100	0000	$\bar{t}$
	$\bar{y}$	y		$\bar{y}$	

PHƯƠNG PHÁP BIỂU ĐỒ KARNAUGH

- Ký hiệu x chỉ cột ở đó biến x lấy giá trị 1, $\overline{x}$ chỉ biến x lấy giá tri 0
- Các biến thứ 3 và thứ 4, z và t được gán theo dòng. Ví dụ dòng 1 và 2 biến z lấy giá trị 1

	x		$\overline{x}$		
z	1010	1110	0110	0010	$\overline{t}$
	1011	1111	0111	0011	t
$\overline{z}$	1001	1101	0101	0001	
	1000	1100	0100	0000	$\overline{t}$
	$\overline{y}$	y		$\overline{y}$	

PHƯƠNG PHÁP BIỂU ĐỒ KARNAUGH

- Hai ô được nói là kề nhau theo nghĩa rộng nếu sau khi cuốn hình vuông lớn theo chiều dọc hoặc chiều ngang tạo thành hình trụ thì hai ô đó trở thành kề nhau trên hình trụ

	x		$\overline{x}$		
z	1010	1110	0110	0010	$\overline{t}$
	1011	1111	0111	0011	t
$\overline{z}$	1001	1101	0101	0001	
	1000	1100	0100	0000	$\overline{t}$
	$\overline{y}$	y		$\overline{y}$	

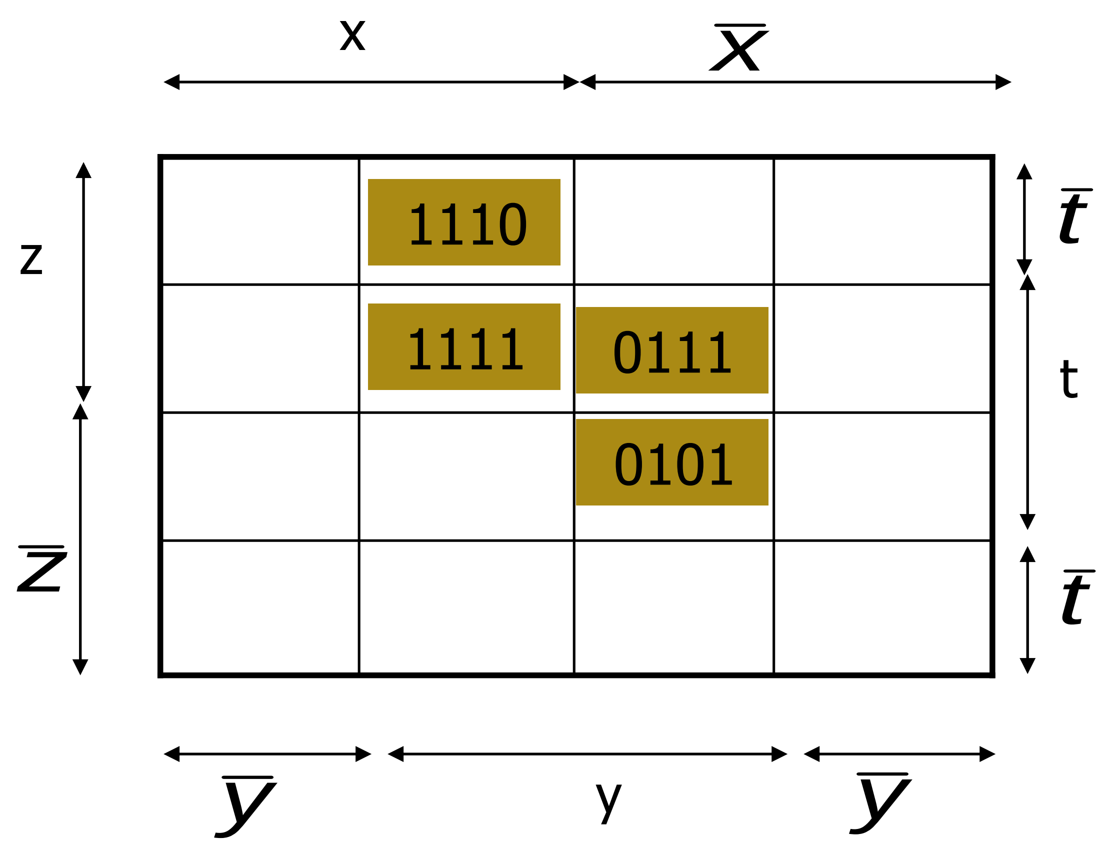
PHƯƠNG PHÁP BIỂU ĐỒ KARNAUGH

- Hai ô kề nhau nếu chúng chỉ khác nhau một thành phần
- Tô xám các ô của hình vuông lớn tương ứng với các điểm của B^4 ở đó f bằng 1. Gọi là biểu đồ Karnaugh của f

	x	x	$\overline{x}$	$\overline{x}$	
z	1010	1110	0110	0010	$\overline{t}$
z	1011	1111	0111	0011	t
$\overline{z}$	1001	1101	0101	0001	t
$\overline{z}$	1000	1100	0100	0000	$\overline{t}$
	$\overline{y}$	y	y	$\overline{y}$	

PHƯƠNG PHÁP BIỂU ĐỒ KARNAUGH

Biểu đồ của $f = xyzt \vee xyz\bar{t} \vee \bar{x}y\bar{z}t \vee \bar{x}yzt$



PHƯƠNG PHÁP BIỂU ĐỒ KARNAUGH

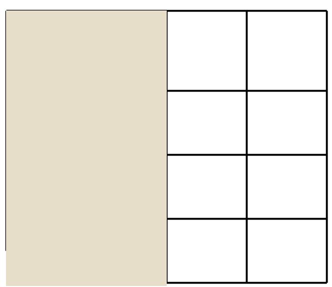
- **Định lý1**: Với mọi hàm boole 4 biến f và g ta có
  - Biểu đồ Karnaugh của f là tập con của biểu đồ Karnaugh của g nếu và chỉ nếu $f < g$
  - Biểu đồ Karnaugh của $f \vee g$ (tương ứng $f \wedge g$) là hợp (tương ứng giao) của các biểu đồ Karnaugh của f và g
  - Biểu đồ Karnaugh của $\bar{f}$ là phần bù của biểu đồ Karnaugh của f

PHƯƠNG PHÁP BIỂU ĐỒ KARNAUGH

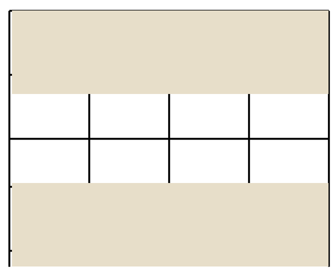
- **Lưu ý**:
  - Sử dụng định lý trên để vẽ biểu đồ Karnaugh của hàm boole khi biết được bảng chân trị hoặc công thức biểu diễn nó
  - Nếu biết được biểu đồ Karnaugh của f ta có thể đọc được dạng nối rời chính tắc của f, trong đó các từ tối tiểu là các ô bị tô xám

PHƯƠNG PHÁP BIỂU ĐỒ KARNAUGH

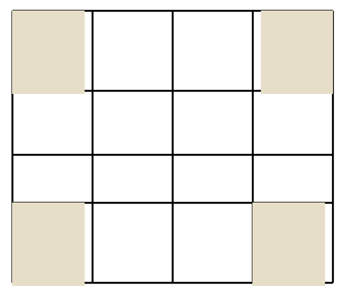
- **Định lý 2**: Biểu đồ Karnaugh của một đơn thức có dạng tích của p ($1 \leq p \leq 4$) từ đơn là một hình chữ nhật (theo nghĩa rộng) gồm $2^{(4-P)}$ ô mà ta gọi là một tế bào



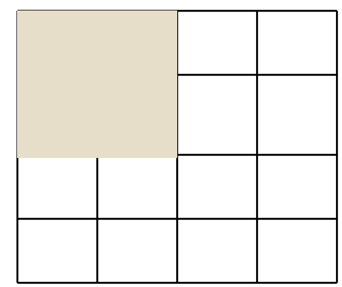
x



$\bar{t}$



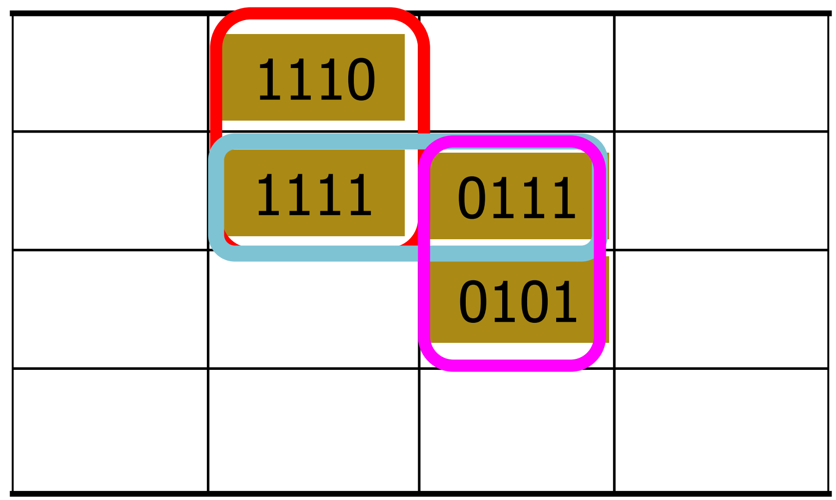
$\bar{y}\bar{t}$



xz

PHƯƠNG PHÁP BIỂU ĐỒ KARNAUGH

- Một tế bào được gọi là tế bào lớn của biểu đồ Karnaugh của f nếu không có tế bào trong biểu đồ Karnaugh của f lớn hơn tế bào này



Trong biểu đồ trên xyz, yzt và $yt\overline{x}$ là các tế bào lớn

PHƯƠNG PHÁP BIỂU ĐỒ KARNAUGH

- Để tìm công thức đa thức tối tiểu cần giải quyết 2 vấn đề:
  - Tìm tất cả các tế bào lớn trong biểu đồ Karnaugh của f
  - Tìm một phép phủ tối tiểu biểu đồ Karnaugh của f bằng các tế bào lớn
- Phép phủ là tối tiểu nếu nó gồm một số ít nhất tế bào lớn mà hợp của chúng bằng f (phủ biểu đồ f)
- Hợp của các tế bào lớn trong phép phủ tối tiểu là công thức đơn giản nhất cần tìm

PHƯƠNG PHÁP BIỂU ĐỒ KARNAUGH

- **Thuật toán:**

1. Chỉ ra tất cả các tế bào lớn của f (sau bước 1 ta sẽ phủ dần biểu đồ Karnaugh của f bằng các tế bào lớn cho đến khi phủ kín)

2. Nếu tồn tại một ô chỉ nằm trong một tế bào lớn duy nhất ta chọn tế bào này để phủ. Trong phần còn lại chưa bị phủ của biểu đồ Karnaugh, nếu có một ô chỉ nằm trong một tế bào lớn duy nhất ta lại chọn tế bào này để phủ. Lặp lại bước 2 cho đến khi không còn ô nào có tính chất trên.

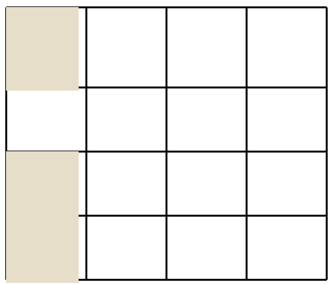
PHƯƠNG PHÁP BIỂU ĐỒ KARNAUGH

3. Nếu các tế bào đã chọn ra trong bước 2 đã phủ kín biểu đồ Karnaugh của f ta chuyển qua bước 4. Nếu không, ta chọn ra một ô còn lại. Trong số các tế bào lớn chứa ô này ta chọn một tế bào tùy ý để thêm vào phép phủ, cứ tiếp tục như thế cho phần còn lại cho đến khi phủ kín biểu đồ Karnaugh của f.

4. Ở bước này, ta đã chọn được một số tế bào lớn phủ kín biểu đồ Karnaugh của f. Do trong bước 3 có sự lựa chọn tuỳ ý tế bào lớn chứa một ô chưa bị phủ, ta thường có nhiều hơn một phép phủ. Trong số các phép phủ nhận được, loại bỏ các phép phủ không tối tiểu để còn lại các công thức đơn giản nhất.

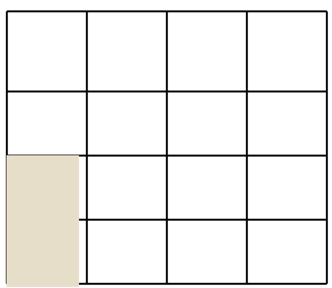
PHƯƠNG PHÁP BIỂU ĐỒ KARNAUGH

- **Ví dụ 1**: Xét hàm f có biểu đồ Karnaugh như sau

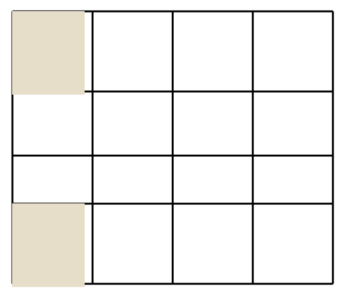


$$f = x\bar{y}z\bar{t} \vee x\bar{y}\bar{z}t \vee x\bar{y}\bar{z}\bar{t}$$

- **Bước 1**: Biểu đồ của f có 2 tế bào lớn



$x\bar{y}\bar{z}$



$x\bar{y}\bar{t}$

PHƯƠNG PHÁP BIỂU ĐỒ KARNAUGH

Bước 2: Ô (3,1) nằm chỉ duy nhất trong $x\bar{y}\bar{z}$

Ô (1,1) nằm chỉ duy nhất trong $x\bar{y}\bar{t}$

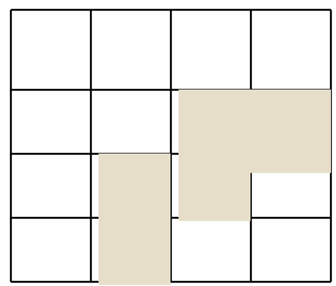
Hai tế bào này đã phủ kín biểu đồ Karnaugh của f nên chuyển sang bước 4

Bước 4: Chỉ có một phép phủ duy nhất với hai tế bào lớn ứng với công thức đa thức tối tiểu duy nhất của f:

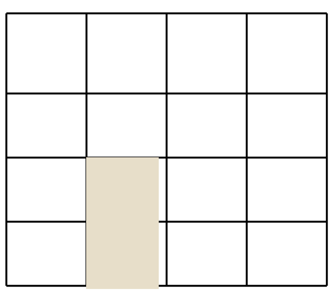
$$f = x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{t}$$

PHƯƠNG PHÁP BIỂU ĐỒ KARNAUGH

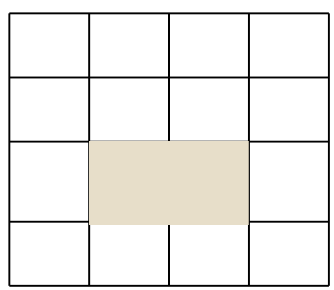
- **Ví dụ 2**: Xét hàm f có biểu đồ Karnaugh như sau



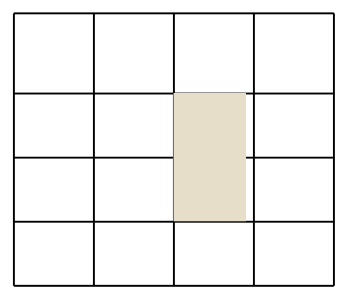
Bước 1: Biểu đồ của f có 4 tế bào lớn



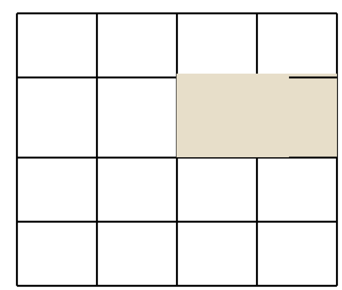
$xy\bar{z}$



$y\bar{z}t$



$\bar{x}yt$



$\bar{x}zt$

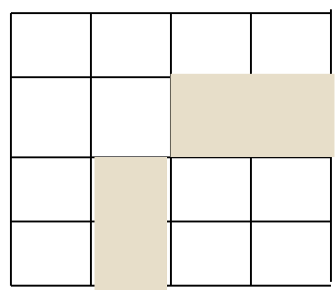
PHƯƠNG PHÁP BIỂU ĐỒ KARNAUGH

Bước 2: Ô (4,2) nằm chỉ duy nhất trong $xy\bar{z}$

Ô (2,4) nằm chỉ duy nhất trong $\bar{x}zt$

Chọn hai tế bào lớn này để phủ (tô xám) ta phủ được một phần biểu đồ Karnaugh của f như sau:

$$xy\bar{z} \vee \bar{x}zt$$



Còn lại ô (3, 3) chưa được phủ nằm trong 2 tế bào lớn nên qua bước 3

PHƯƠNG PHÁP BIỂU ĐỒ KARNAUGH

Bước 3: ô (3,3) chưa được phủ, có 2 tế bào lớn chứa ô này

$y\bar{z}t$ và $\bar{x}yt$

Chọn $y\bar{z}t$ ta có phép phủ $f_1 = xy\bar{z} \vee \bar{x}zt \vee y\bar{z}t$

Chọn $\bar{x}yt$ ta có phép phủ $f_2 = xy\bar{z} \vee \bar{x}zt \vee \bar{x}yt$

Bước 4: Cả hai phép phủ trong bước 3 tương ứng với 2 công thức đa thứ tối tiểu (vì chúng đơn giản nhất)

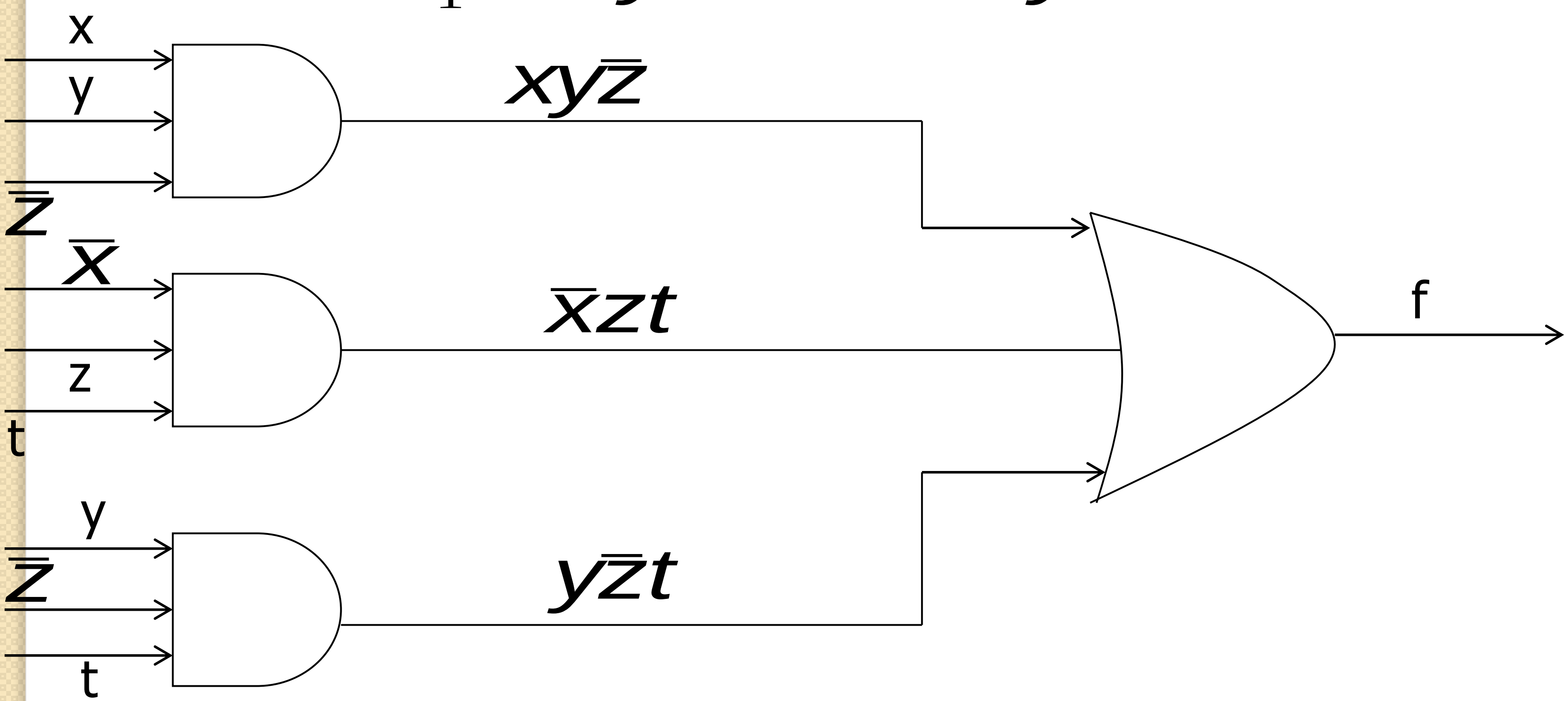
$$f = xy\bar{z} \vee \bar{x}zt \vee y\bar{z}t$$

$$f = xy\bar{z} \vee \bar{x}zt \vee \bar{x}yt$$

PHƯƠNG PHÁP BIỂU ĐỒ KARNAUGH

- Có thể dùng để tổng hợp f:

$$f_1 = xy\bar{z} \vee \bar{x}zt \vee y\bar{z}t$$



PHƯƠNG PHÁP BIỂU ĐỒ KARNAUGH

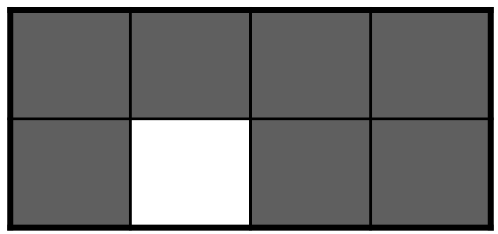
- Tìm công thức đa thức tối tiểu cho hàm 3 biến:

	x		$\overline{x}$	
z	101	111	011	001
$\overline{z}$	100	110	010	000
	$\overline{y}$	y		$\overline{y}$

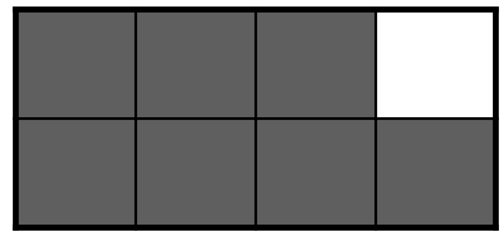
- Ví dụ: xét hàm Boole

$$f = (x \vee \overline{y} \vee z)(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)(x \vee y \vee \overline{z})$$

$(x \vee \overline{y} \vee z)$

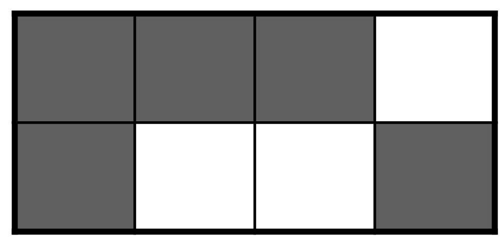


$(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)$

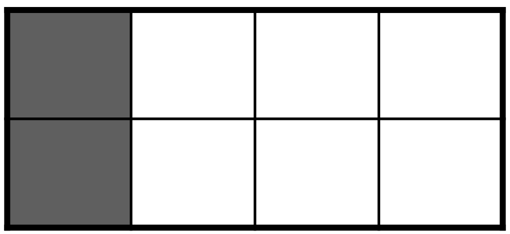


$(x \vee y \vee \overline{z})$

Do đó biểu đồ Karnaugh của f có dạng:



- Bước 1: Xác định các tế bào lớn



$x\bar{y}$

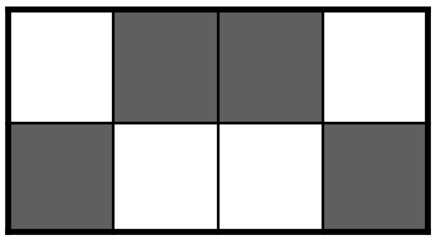
xz

yz

$\bar{y}\,\bar{z}$

- Bước 2: Ô (1,3) nằm trong tế bào lớn duy nhất $y\overline{z}$

  (2,4) nằm trong tế bào lớn duy nhất $\overline{y}\,\overline{z}$



- Bước 3: Ô (1,1) nằm trong 2 tế bào lớn $x\overline{y}$ và xz → có 2 cách chọn để phủ biểu đồ Karnaugh

- Bước 4:

$f = y\,z \vee \overline{y}\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}$; $f = y\,z \vee y\,z \vee xz$